

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Максименко Сергій Іванович

УДК 515.146.27 + 515.162.2

**ДЕФОРМАЦІЇ
УЗДОВЖ ОРБІТ ПОТОКІВ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

Спеціальність: 01.01.04 – геометрія та топологія

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант - доктор
фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Шарко Володимир Васильович

Київ – 2011

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	6
ВСТУП	7
1 ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ	28
1.1 Топології на просторах відображень	28
1.2 Потоки і векторні поля	35
1.3 Гладкі функції на поверхнях	43
1.4 Дія групи дифеоморфізмів	49
1.5 Групи дифеоморфізмів поверхонь	54
1.6 Висновки	59
2 ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ	60
2.1 Відображення зсуву для потоків	60
2.2 Ядро відображення зсуву	62
2.3 Образ та ядро відображення зсуву при зміні швидкості потоку . .	69
2.4 Зсуви, що є дифеоморфізмами	72
2.5 Відображення зсуву для паростків векторних полів	78
2.6 Висновки	80
3 ПРИКЛАДИ	81
3.1 Векторні поля на числовій прямій	82

3.2	Векторні поля на площині	86
3.3	Висновки	94
4	ЯДРО ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ	95
4.1	Теореми про структуру ядра відображення зсуву	95
4.2	Наслідки з теорем 4.1.1 та 4.1.2	97
4.3	Властивості P -функцій	110
4.4	Доведення теореми 4.1.1	113
4.5	План доведення теореми 4.1.2	120
4.6	P -функції на множині регулярних точок	123
4.7	Періоди точок для $\mathcal{C}^1$ -потоків	127
4.8	Необмеженість періодів	130
4.9	Висновки	135
5	ОБРАЗ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ	136
5.1	Функції зсуву на множині регулярних точок	136
5.2	Продовження функцій зсуву деформацій	142
5.3	«Зменшення» множини V	152
5.4	Образ відображення зсуву регулярних розширень	154
5.5	Висновки	161
6	ВІДКРИТІСТЬ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ	162
6.1	Відкритість відображення зсуву в околі тотожного відображення	163
6.2	Приклад, коли відображення зсуву не є відкритим	167
6.3	Теорема фрагментації	171
6.4	Заміна M відкритою множиною	173
6.5	Відкритість $Sh(F, W, V)$ в $Sh(F)$. Регулярний випадок	175
6.6	Відкритість $Sh(F, W, V)$ в $Sh(F)$. Сингулярний випадок	182
6.7	Відкритість відображення зсуву для регулярних розширень	186

6.8	Підсумки	189
6.9	Лінійні векторні поля	191
6.10	Гамільтонові векторні поля однорідних многочленів на площині .	196
6.11	Висновки	200
7	СТАБІЛІЗАТОРИ ТА ОРБІТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА МНО- ГОВИДАХ	201
7.1	Стабілізатори	205
7.2	Орбіти	207
7.3	Висновки	208
8	ГОМОТОПІЧНИЙ ТИП СТАБІЛІЗАТОРІВ ТА ОРБІТ ГЛАД- КИХ ФУНКЦІЙ НА ПОВЕРХНЯХ	209
8.1	Спеціальні критичні точки	210
8.2	Основні результати	222
8.3	Доведення теореми 8.2.1	228
8.4	Група $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$	231
8.5	Кінці поверхні біля підграфу	242
8.6	Оснащення	243
8.7	Доведення теореми 8.2.2	250
8.8	Висновки	257
9	КОМПОНЕНТИ ЗВ'ЯЗНОСТІ ПРОСТОРІВ ФУНКЦІЙ МОР- СА НА КОМПАКТНИХ ПОВЕРХНЯХ	258
9.1	Вступ	258
9.2	Допоміжні твердження	262
9.3	Канонічні відображення Морса	264
9.4	Допустимі дифеоморфізми та криві	266
9.5	Симплектична група	278

9.6	Доведення теореми 9.1.3	280
9.7	Висновки	282
10	ВИСНОВКИ	283
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	284

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\overline{\mathbb{N}}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$
$\mathbb{R}^n$	n -вимірний евклідовий простір
S^n	n -вимірна сфера
T^n	n -вимірний тор
$M\ddot{o}$	стрічка Мьобіуса
$\mathbb{R}P^2$	проективна площина
I	відрізок $[0, 1]$
W^r	слабка $\mathcal{C}^r$ -топологія, $0 \leq r \leq \infty$
S^r	сильна $\mathcal{C}^r$ -топологія, $0 \leq r \leq \infty$
$\text{dom}(F)$	область визначення локального потоку $\mathbf{F}$
φ_F	відображення зсуву векторного поля F
$\text{func}(F)$	область визначення відображення зсуву φ_F
$Sh(F)$	образ відображення зсуву φ_F

ВСТУП

Актуальність теми. Групи автоморфізмів «геометричних» структур на многовидах відіграють значну роль не лише в математичних, а й в фізичних дослідженнях. Наприклад, групи Лі природно виникають як групи рухів простору та симетрії твердих тіл (ізометрії ріманових многовидів), напр. [159]. Зокрема, добре відомо, що група рухів евклідового простору $\mathbb{R}^3$ є базовою для класичної ньютонівської механіки, група Лоренца (ізометрії простору Мінковського) — для теорії відносності, напр. [171], групи дифеоморфізмів, що зберігають об'єм ріманового многовиду виникають в гамільтоновій механіці, напр. [148], а групи контактних дифеоморфізмів пов'язані з розв'язками рівняння Ейлера ідеальної нестисної рідини з рівняннями Бернуллі нестисної рідини, [34], і т.д.

З точки зору ерлангенської програми Ф. Клейна під «геометричною» структурою на многовиді M природно розуміти довільну дію γ якої-небудь групи G на M . Така дія дає розбиття Δ_γ многовиду M на орбіти. Більш того, γ індукує дії γ_E на різноманітних просторах E , природно пов'язаних з M , причому розбиття E на орбіти дії γ_E часто дає більш суттєву інформацію про γ ніж саме розбиття Δ_γ . Зокрема, може статись, що дія γ є транзитивною, тобто Δ_γ має лише одну орбіту, в той час як γ_E матиме багато орбіт.

Розглянемо кілька прикладів.

1. Нехай $\mathcal{F}_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M, x_i \neq x_j\}$ — n -й конфігураційний простір M , що складається з попарно різних впорядкованих n -к точок з M . Тоді γ індукує на $\mathcal{F}_n(M)$ дію γ_n групи G за формулою $\gamma_n(x_1, \dots, x_n) =$

$(\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n))$. Розбиття простору $\mathcal{F}_n(M)$ на орбіти дії γ_n описує впорядковані n -ки попарно різних точок з M , які переводяться одна в одну деяким елементом з G .

2. Нехай M — гладкий многовид, ρ — ріманова метрика на M і $\text{Iso}(M, \rho)$ — група ізометрій M відносно метрики ρ . Тоді $\text{Iso}(M, \rho)$ також діє на дотичному просторі TM за формулою $g(x, v) = (g(x), T_x g(v))$, де $x \in M$, $v \in T_x M$ і $g \in \text{Iso}(M, \rho)$. Розбиття TM на орбіти цієї дії показує які дотичні вектори переводяться один в одного ізометріями M .

3. Нехай G — група Лі і Ψ — дія G на собі внутрішніми автоморфізмами, тобто $\Psi(g, h) = ghg^{-1}$. Тоді одиниця групи e є нерухомою точкою Ψ , а тому ця дія індукує дію групи G на дотичному просторі $T_e G$ (алгебрі Лі групи G). Ця індукована дія називається *приєднаною* і позначається через Ad . Вона грає основну роль для розумінні структури групи Лі.

Знову припустимо, що γ — це дія групи G на многовиді M . Тоді очевидно, що $g(\omega) = \omega$ для кожного $g \in G$ та довільної орбіти $\omega \in \Delta_\gamma$. Позначимо через $\text{Aut}(\Delta_\gamma)$ — групу всіх гомеоморфізмів (або дифеоморфізмів) M , які лишають інваріантним розбиття Δ_γ , тобто $h(\omega)$ також є орбітою γ для кожного $h \in \text{Aut}(\Delta_\gamma)$ та кожної орбіти $\omega \in \Delta_\gamma$, хоча, взагалі кажучи, $h(\omega) \neq \omega$.

Нехай також $\text{Aut}_0(\Delta_\gamma)$ — підгрупа в $\text{Aut}(\Delta_\gamma)$, що складається з автоморфізмів, що лишають інваріантною кожен орбіту дії γ . Тоді γ індукує відображення $i_\gamma : G \rightarrow \text{Aut}_0(\Delta_\gamma)$, яке є вкладенням, якщо γ є ефективною дією. Зрозуміло також, що природна дія $\text{Aut}_0(\Delta_\gamma)$ на M має ті ж самі орбіти, що і γ .

Для вивчення дії γ в багатьох задачах зручно розглядати замість G групу $\text{Aut}_0(\Delta_\gamma)$, або навіть $\text{Aut}(\Delta_\gamma)$. Крім того, так як $\text{Aut}_0(\Delta_\gamma)$ майже завжди є нескінченно вимірною, то природно вивчати її гомотопічний тип, тобто деформації многовиду, які лишають інваріантною кожен орбіту. Гомотопічні групи $\text{Aut}_0(\Delta_\gamma)$ можуть давати корисну інформацію як про дію γ так і про групу G .

Відмітимо, що існують ситуації, коли вкладення i_γ є гомотопічною еквівалентністю.

Таким чином маємо наступну задачу: *описати гомотопічний тип групи автоморфізмів многовиду, що лишають інваріантною кожну орбіту заданої дії групи*. В загальному випадку ця проблема дуже складна і її розв'язки відомі лише в невеликій кількості випадків.

Приклад. Нехай $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — одинична сфера. Очевидно, що її група ізометрій, $\text{Iso}(S^n)$, є ортогональною групою $O(n+1)$ і діє транзитивно на S^n . Тоді при $n = 1, 2, 3$ вкладення $O(n+1)$ в $\mathcal{D}(S^n)$ є гомотопічною еквівалентністю. Для $n = 1$ це твердження тривіальне, для $n = 2$ воно доведене S. Smale [134], а для $n = 3$ — в роботі A. Hatcher [45].

D. Gabai [37] також довів, що для довільного замкнутого гіперболічного 3-многовиду M вкладення $\text{Iso}(M) \subset \mathcal{D}(M)$ є гомотопічною еквівалентністю.

Більш того, для великого класу ріманових 3-многовидів M встановлено, що вкладення $\text{Iso}(M) \subset \mathcal{D}(M)$ індукує бієкції між компонентами зв'язності цих груп, тобто що кожен дифеоморфізм M ізотопний ізометрії, причому різні ізометрії попарно не ізотопні, див. [6, 13–15, 19, 121, 122]. Для многовидів додатної кривини, останній факт доведений D. McCullough [102].

В даній дисертаційній роботі сформульована вище задача розв'язується для широкого класу дій групи $\mathbb{R}$, тобто для потоків. Отримані результати застосовуються до вивчення гомотопічних типів стабілізаторів та орбіт гладких функцій на многовидах (зокрема на поверхнях) відносно правих та право-лівих дій груп дифеоморфізмів.

Групи дифеоморфізмів, що зберігають шари шарувань, зокрема орбіти векторного поля, вивчаються дуже інтенсивно. В книзі G. Reeb в книзі [119] (1952 р.) поставив наступне питання: *нехай M — n -вимірний многовид і F — поле дотичних площин до M розмірності $n - q$. За яких умов F гомотопне інтегров-*

ному полю, тобто полю, що є дотичним до деякого шарування?

Часткові результати в цьому напрямку були отримані Х. Цишангом, С. П. Новіковим [167], J. Wood [146], A. Phillips [112, 113], R. Bott [16]. В цих роботах було побудовано певні гомотопічні інваріанти, що були перешкодами до гомотопності поля площин інтегровному полю.

Нехай Γ_p^r — псевдогрупа локальних $\mathcal{C}^r$ -дифеоморфізмів $\mathbb{R}^p$. В роботі А. Haefliger [41, 42] побудовано класифікуючі простори $F\Gamma_p^r$ для оснащених шарувань корозмірності p класу $\mathcal{C}^r$ для «відкритого» (некомпактного, або компактного з межею) многовиду M . W. Thurston [141] аналогічно до цих робіт отримав гомотопічну класифікацію шарувань корозмірності > 1 з точністю до конкордантності вже для замкнених многовидів.

Позначимо через $\mathcal{D}_K^r(\mathbb{R}^p)$ — групу $\mathcal{C}^r$ -дифеоморфізмів $\mathbb{R}^p$ з компактними носіями. Нехай $\overline{\mathcal{D}}_K^r(\mathbb{R}^p)$ — група шляхів в $\mathcal{D}_K^r(\mathbb{R}^p)$, що закінчуються в $\text{id}_{\mathbb{R}^p}$, а $B\overline{\mathcal{D}}_K^r(\mathbb{R}^p)$ — її класифікуючий простір. Далі в роботі [140] W. Thurston довів, що 1) $F\Gamma_p^\infty \in (p+1)$ -зв'язним, 2) $F\Gamma_p^0$ є стягуваним, 3) існує відображення $B\overline{\mathcal{D}}_K^r(\mathbb{R}^p) \rightarrow \Omega^p(F\Gamma_p^r)$, яке індукує ізоморфізм груп цілочисельних гомологій. Він також довів, що 4) для замкнутого p -многовиду M тотожна компонента зв'язності $\mathcal{D}_{\text{id}}^\infty(M)$ його групи $\mathcal{C}^\infty$ -дифеоморфізмів є простою групою, див. також. J. Mather [98, 99]

Результати 1), 2) та 4) незалежно отримав J. Mather [94]. Далі в його роботах [95–97] було показано, що тотожна компонента $\mathcal{D}_{\text{id}}^r(M)$ групи $\mathcal{C}^r$ -дифеоморфізмів p -многовиду M з порожньою межею є досконалою (співпадає зі своїм комутантом) для $p+2 \leq r \leq \infty$. Разом з результатами статті D. B. A. Epstein [30] звідси випливало, що група $\mathcal{D}_{\text{id}}^r(M)$ є простою (не має нетривіальних нормальних дільників). Звідси також випливало, що класифікуючий простір $F\Gamma_p^r$ для шарувань з оснащеним нормальним розшаруванням є $(p+1)$ -зв'язним. Крім того в роботі [101] J. Mather навів приклад групи $\mathcal{D}_{\text{id}}^{p+1}(M^p)$ яка не є досконалою.

Зрозуміло, що група дифеоморфізмів $\mathcal{D}(\mathcal{F})$, що зберігає шари якого-небудь шарування $\mathcal{F}$ на многовиді M взагалі кажучи не є простою — наприклад будь-

яка її підгрупа, що є нерухомою на деякому шарі ω шарування $\mathcal{F}$ є її нормальним дільником. З іншого боку результати J. Mather та D. B. A. Epstein вдалось узагальнити на шарування, напр. W. Ling [67], A. Banyaga [7], T. Rybicki [123–125], K. Fukui та H. Imanishi [36], K. Abe та K. Fukui [3], J. Lech та T. Rybicki [64], J. Lech [63]. В цих роботах показано досконалість деяких груп дифеоморфізмів та гомеоморфізмів, що зберігають шари шарувань.

В роботі J. A. Álvarez López та Ю. Курдюкова [5] вивчалися деформації дифеоморфізмів, що лишають інваріантним шарування на многовиді.

Для шарувань з особливостями ситуація значно складніша. Тому найчастіше розглядаються шарування многовидів орбітами дій компактних груп Лі, або шарування множинами рівня деякого відображення, а також групи еквіваріантних (тобто комутуючих з заданою дією) дифеоморфізмів.

Наприклад, нехай G — компактна група Лі, що діє ортогональними перетвореннями на $\mathbb{R}^n$, і $P(\mathbb{R}^n)^G$ — алгебра многочленів, що приймають постійні значення уздовж орбіт цієї дій. Тоді класична теорема Гільберта стверджує, що алгебра $P(\mathbb{R}^n)^G$ скінченно породжена, див. [151]. В роботі G. W. Schwarz [128] доведено, що якщо $\rho_1, \dots, \rho_k$ — сім'я твірних $P(\mathbb{R}^n)^G$, то будь-яка G -інваріантна C^∞ -функція на $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є гладкою функцією від $\rho_1, \dots, \rho_k$, тобто може бути представлена у вигляді $\alpha(x) = \beta(\rho_1(x), \dots, \rho_k(x))$, де $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка C^∞ -функція, див. також J. Mather [100]. Цей результат узагальює теореми Н. Whitney [145] для випадку $G = \mathbb{Z}_2$ та G. Glaeser [39] для випадку, коли G є симетричною групою перестановок з n -елементів.

Дифеоморфізми, що лишають інваріантними орбіти лінійних векторних полів вивчалися в С. Camacho та А. L. Neto [17].

В статтях С. Lazarov та Н. Shulman [61, 62] досліджувались перешкоди до існування дій груп Лі і, зокрема, потоків, що є трансверсальними до заданого шарування на многовиді та лишають його інваріантним.

В роботі K. Abe [1] описано гомотопічний тип тотожної компоненти $\mathcal{D}_G^\infty(M)_0$

групи $\mathcal{D}_G^\infty(M)$ дифеоморфізмів зв'язного замкнутого многовиду M , що комутують з заданою гладкою дією групи Лі G за умови, що фактор простір M/G гомеоморфний до відрізка $[0, 1]$. Цей результат був сформульований в термінах просторів шляхів деякої трійки просторів, що визначається заданою дією, і його важко застосовувати до реальних обчислень. К. Abe та К. Fukui [2] обчислили першу групу гомологій $H_1\mathcal{D}_G^\infty(M)_0$.

Т. Rybicki [126] довів досконалість тотожної компоненти $\mathcal{H}_G^\infty(M)_0$ групи еквіваріантних гомеоморфізмів за умови, коли $\dim(M/G) \geq 1$ і G діє вільно.

Н. Bernstein та D. W. Morris [8] розглядали трійки $\Gamma_i \subset X_i \subset G_i$, $i = 0, 1$, де G_i — однозв'язна розв'язна група Лі, X_i — зв'язна підгрупа і Γ_i — замкнута дискретна підгрупа в G_i . Відмітимо, що тоді на просторі G_i/Γ_i , $i = 0, 1$, виникає шарування $\mathcal{F}_i$ подвійними суміжними класами виду $\Gamma_i g X_i$. В згаданій статті автори описали структуру неперервних відображень $f : G/\Gamma_0 \rightarrow G/\Gamma_1$, що переводять шари шарування $\mathcal{F}_0$ в шари шарування $\mathcal{F}_1$.

Структура дисертаційної роботи та опис результатів. В даній дисертаційній роботі розглядаються питання деформації відображень, що зберігають орбіти потоків на многовидах. Отримані результати застосовуються до вивчення гомотопічних типів стабілізаторів та орбіт гладких функцій на компактних поверхнях та многовидах більших розмірностей відносно дій груп дифеоморфізмів. Запропонований підхід до їх вивчення є специфічним для одновимірного випадку.

В **розділі 1** наводяться деякі відомі означення та теореми, що будуть використовуватись на протязі всієї роботи. Зокрема, **підрозділ 1.1** містить означення слабких та сильних $\mathcal{C}^r$ -топологій на просторах гладких відображень, а також розглядаються різні типи деформацій; **підрозділ 1.2** — деякі результати про векторні поля, потоки, та їх регулярні розширення; в **підрозділі 1.3** розглядається структура гладких функцій на поверхнях з ізольованими критичними точками, шарування множинами рівня та графи Кронрода-Ріба; в **підрозділі 1.4**

вивчається права дія групи дифеоморфізмів поверхні M на просторі гладких функцій на ній та встановлюються зв'язки між стабілізаторами функцій та дифеоморфізмами, що лишають інваріантами шарування таких функцій та граф Кронрода-Ріба; **підрозділ 1.5** містить інформацію про твірні груп гомеотопій та груп Тореллі компактних поверхонь, а також про гомотопічний тип тотожних компонент їх груп дифеоморфізмів.

В **розділі 2** вводиться поняття відображення зсуву та вивчаються прості властивості його ядра та образу. Нехай M — многовид, F — векторне поле на ньому і $(\mathbf{F}_t)$ — відповідний потік поля F . Тоді на M виникає сингулярне шарування орбітами поля F , які є зв'язними і мають розмірності 1 (регулярні орбіти) та 0 (особливі точки, тобто точки в яких $F = 0$).

Припустимо, що відображення $h : M \rightarrow M$ лишає інваріантною кожен орбіту потоку $(\mathbf{F}_t)$. Таким чином, для кожної точки $x \in M$ її образ $h(x)$ належить орбіті o_x точки x . Тому можна спробувати поставити у відповідність точці x час $\alpha_h(x)$ між точками x та $h(x)$ уздовж орбіти o_x . Таким чином

$$h(x) = \mathbf{F}_{\alpha_h(x)}(x) = \mathbf{F}(x, \alpha_h(x)). \quad (0.1)$$

Функцію α назовемо *функцією зсуву* для відображення h , яке, в свою чергу, називатимемо *зсувом* уздовж орбіт потоку $\mathbf{F}$ за допомогою функції α_h . Подібні ідеї були використані в [20, 48, 56, 111, 142, 155] для перепараметризації мірозбеігаючих потоків та вивчення їх зміщуючих властивостей. В цих роботах вимагалось, щоб функція α_h була вимірною. Зокрема, вона може бути розривною, а її значення на множинах міри нуль взагалі ігноруються. В [109] досліджувалась неперервність функцій зсуву.

Ми працюватимемо в основному в категорії $\mathcal{C}^\infty$, а тому вимагатимемо, щоб α_h була гладкою для гладких h . Одна з основних технічних проблем полягає в доведенні неперервності та гладкості функцій зсуву в околах нерухомих точок.

Зробимо кілька зауважень з приводу побудови функції α_h .

1) Взагалі кажучи, α_h однозначно задається лише в неперіодичних точках. Якщо $x \in M$ — періодична періоду θ , то $\alpha_h(x)$ визначена лише з точністю до постійного доданку виду $n\theta$, $n \in \mathbb{Z}$, в той час як для нерухомої точки x значення $\alpha_h(x)$ можна взяти довільним дійсним числом.

У застосуваннях до ергодичної теорії ця проблема не виникає: об'єднання періодичних та нерухомих точок є інваріантною множиною, а отже для ергодичних потоків має міру нуль (або в нетиповому випадку міру 1). Тому значеннями α_h на цій множині можна знехтувати. В деяких роботах також припускалось, що множина нерухомих точок взагалі є порожньою, напр. [155, с. 357].

2) Якщо x є регулярною (навіть періодичною) точкою, то $\alpha_h(x)$ все ж можна коректно означити лише на деякому околі точки x .

3) З представлення (0.1) випливає, що коли α_h є гладкою, то відображення h є ізотопним до тотожного відображення за допомогою гладкої гомотопії, яка лишає інваріантними обіти потоку $\mathbf{F}$. Наприклад, можна використати таку гомотопію: $h_t(x) = F(x, t \cdot \alpha_h(x))$.

Це приводить до розгляду відображення $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, M)$,

$$\varphi_F(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)),$$

яке ми називатимемо *відображенням зсуву уздовж орбіт потоку $\mathbf{F}$* . Таким чином, для $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ відображення $\varphi_F(\alpha) : M \rightarrow M$ зсовує кожну точку $x \in M$ уздовж її орбіти на час $\alpha(x)$, причому цей час гладко залежить від x . Якщо $\alpha = C$ — постійна функція, то $\varphi_F(\alpha) = \mathbf{F}_C$ — є одним з дифеоморфізмів, що визначають потік, але в загальному випадку $\varphi_F(\alpha)$ не є навіть бієкцією. Відображення $\varphi_F(\alpha) : M \rightarrow M$ називатиметься *зсувом уздовж орбіт потоку $\mathbf{F}$* , а функція α — його *функцією зсуву*. В **підрозділі 2.1** відображення зсуву визначається для неперервних потоків, а також для локальних $\mathcal{C}^r$ -потоків.

Позначимо через $Sh(F)$ — образ відображення φ_F в $\mathcal{C}^\infty(M, M)$. Тоді проблема побудови гладкої функції зсуву для даного відображення h зводиться до

перевірки того, чи належить h до $Sh(F)$.

Більш загально, нехай $V \subset M$ — підмноговид розмірності $\dim M$ (можливо з межею). Такі підмноговиди зручно називати D -підмноговидами, див. розділ 1. Тоді можна визначити *локальне* відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, M)$ за аналогічною формулою:

$$\varphi_{F,V}(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)).$$

В багатьох випадках зручніше розглядати саме локальні відображення зсуву. Образ $\varphi_{F,V}$ позначатимемо через $Sh(F, V)$.

Скажемо, що гладка функція $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ є *функцією періодів* для потоку $\mathbf{F}$ на множині V , або просто *P -функцією* якщо $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$ для всіх $x \in V$. Множину всіх P -функцій потоку $\mathbf{F}$ на V позначимо через $P(\mathbf{F}, V)$. Тоді неважко бачити, що $\varphi_{F,V}(\theta) = \text{id}_V$ тоді і лише тоді, коли $\theta \in P$ -функцією і, що $\varphi_{F,V}(\alpha) = \varphi_{F,V}(\beta)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha - \beta \in P$ -функцією, див. лему 2.2.3. Звідси, зокрема, випливає, що $P(\mathbf{F}, V)$ є адитивною підгрупою в $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$, а відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ індукує бієкцію між фактор-групою $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})/P(\mathbf{F}, M)$ та образом $Sh(F, V)$. Тому $P(\mathbf{F}, V)$ називатиметься *ядром* відображення $\varphi_{F,V}$. В **підрозділі 2.2** досліджуються прості властивості ядра відображення зсуву, встановлюється зв'язок між P -функціями та дією кола, а також дається невеликий огляд робіт, в яких досліджувались P -функції.

В **підрозділі 2.3** досліджується зміна ядра та образу відображення зсуву при спряженні потоку та при його перепараметризації.

Підрозділ 2.4 містить характеристизацію зсувів, що є дифеоморфізмами. Зокрема для $h = \varphi_F(\alpha)$ та $z \in M$ дотичне відображення $T_z h : T_z M \rightarrow T_{h(z)} M$ буде ізоморфізмом тоді і лише тоді, коли похідна Лі $F(\alpha)$ функції α уздовж векторного поля F , що породжує потік, задовольняє нерівність: $F(\alpha) \neq -1$, див. лему 2.4.1.

Позначимо через $\mathcal{E}(F)$ — підмножину в $\mathcal{C}^\infty(M, M)$, що складається з відобра-

жень h , які задовольняють наступні дві умови:

- (i) h лишає інваріантною кожен орбіту поля F , зокрема, $h(z) = z$ для кожної особливої точки $z \in M$ поля F .
- (ii) якщо $z \in M$ — особлива точка поля F , то відповідне дотичне відображення $T_z h : T_z M \rightarrow T_z M$ є ізоморфізмом.

Нехай також $\mathcal{D}(F)$ — підмножина в $\mathcal{E}(F)$, що складається з дифеоморфізмів. Таким чином $\mathcal{D}(F)$ — це група дифеоморфізмів M , що лишають інваріантним кожен орбіту поля F .

Для кожного $r \geq 0$ нехай $\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$ позначає компоненту лінійної зв'язності простору $\mathcal{E}(F)$ відносно слабкої топології W^r . Відмітимо, що $\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$ складається з усіх відображень h які є гомотопними в $\mathcal{E}(F)$ до тотожного відображення id_M за допомогою такої гомотопії $H : M \times I \rightarrow M$, що частинні похідні H по $x \in M$ до порядку r включно неперервно залежать від t , див §1.1. Тоді

$$\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^\infty \subset \dots \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^{r+1} \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r \subset \dots \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0.$$

Тоді з зауваження 3) та леми 2.4.1, очевидно, випливає, що образ $Sh(F)$ відображення φ_F міститься в $\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^\infty$.

В **розділі 3** наводяться приклади обчислень ядра та образу відображення зсуву для лінійних векторних полів на $\mathbb{R}^1$ та $\mathbb{R}^2$. Зокрема доведено, що для таких полів $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$. Крім того наведено приклади вироджених (нелінійних) векторних полів, для яких $Sh(F) \neq \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^\infty$. В подальших розділах буде розвинена техніка, що дозволить довести тотожність $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$ для всіх лінійних векторних полів, див. теорему 6.9.1.

Розділ 4 присвячено вивченню структури ядра відображення зсуву для неперервних потоків на топологічних многовидах. Основні результати — теореми 4.1.1 та 4.1.2. Теорема 4.1.1, зокрема, стверджує, що якщо множина $\text{Fix}(\mathbf{F})$ нерухомих точок потоку $\mathbf{F}$ є ніде не щільною в V , то множина $P(\mathbf{F}, V)$ всіх P -функцій цього потоку складається, або лише з нульової функції, або з цілочи-

сельних кратних деякої невід’ємної функції $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$, яка є строго додатною на множині регулярних точок потоку, хоча в нерухомих точках вона може бути нульовою. Теорема 4.1.2 показує, що коли потік є спряженим до $\mathcal{C}^1$ -потіку, то така функція θ є строго додатною на всьому V .

В **підрозділі 4.2** формулюються наслідки з цих теорем. Зокрема, відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ буде локально ін’єктивним відносно відкрито компактної топології (а значить і відносно довільної $\mathcal{C}^r$ -топології) на $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли множина його нерухомих точок є ніде не щільною в V , див. наслідок 4.2.8. Крім того, якщо $\varphi_{F,V}$ є локальним гомеоморфізмом на свій образ, то відображення $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F, V)$ є або гомеоморфізмом, або $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням. Зокрема, якщо V є компактным, то $Sh(F, V)$ є або стягуваним, або гомотопічно еквівалентним до кола, див. наслідок 4.2.9.

Решта розділу присвячена доведенню теорем 4.1.1 та 4.1.2. В **підрозділі 4.3** встановлюються прості властивості P -функцій; в **підрозділі 4.4** дається доведення теореми 4.1.1; в **підрозділі 4.5** — план доведення теореми 4.1.2; в **підрозділі 4.6** встановлюються певні співвідношення між діаметрами та періодами періодичних орбіт потоку (лема 4.6.3); в **підрозділі 4.7** ці співвідношення уточнюються для потоків, породжених векторними полями класу $\mathcal{C}^1$ (теорема 4.7.1) і далі, в **підрозділі 4.8**, даються достатні умови необмеженості періодів послідовності періодичних точок, що збігається до нерухомої точки (теорема 4.8.1).

Розділ 5 містить достатні умови для того, щоб $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$ для деякого r . В **підрозділі 5.1** доведено наступний результат: нехай $h : M \rightarrow M$ — гладке відображення, що лишає інваріантною кожну орбіту потоку і є гомотопним до тотожного відображення за допомогою гомотопії, яка лишає інваріантними орбіти потоку $\mathbf{F}$. Тоді, α_h можна визначити на множині всіх регулярних точок потоку $\mathbf{F}$, хоча α_h може і не продовжуватись до неперервної функції на всьому M , (теорема 5.1.1). Крім того, α_h також залежить від конкретної гомотопії

між h та id_M . Далі, в **підрозділі 5.2**, наведено достатні умови, за яких гладка функція зсуву для відображення $h \in \mathcal{E}(F)$ на множині регулярних точок продовжується до гладкої функції на всьому M , див. теорему 5.2.2. Ці умови вимагають певної гладкості від гомотопії, що з'єднує h та id_M .

В **підрозділі 5.3** показано, що співвідношення $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ зберігається, якщо множину V зменшити «правильним» чином (лема 5.3.1). Зокрема, якщо z — ізольована особлива точка і $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ для деякого її околу V , то ця ж тотожність виконується для будь-якого меншого її околу $W \subset V$, наслідок 5.3.2.

В **підрозділі 5.4** даються достатні умови, для того, щоб тотожність $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ наслідувалась регулярними розширеннями поля F .

Припустимо, що множина нерухомих точок потоку є ніде не щільною. Як відмічалося вище, тоді відображення зсуву буде локально ін'єктивним. В **розділі 6** досліджуються умови за яких відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є локальним гомеоморфізмом на свій образ відносно сильних $\mathcal{C}^\infty$ -топологій. Еквівалентно, достатньо перевірити відкритість відображення зсуву на свій образ відносно цих топологій $(S^{\infty, \infty})$.

Якщо V є компактним, то, згідно наслідку 4.2.9, звідси випливає, що образ $Sh(F, V)$ є або стягуваним, або гомотопічно еквівалентним до кола. Більш того, якщо додатково $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ для деякого r , то, згідно наслідку 4.2.9, такий само гомотопічний тип має $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$. Ця ідея є ключовим застосуванням відображення зсуву до обчислення гомотопічного типу групи дифеоморфізмів, що лишають інваріантними орбіти потоку.

В **підрозділі 6.1** показано, що відкритість відображення зсуву на свій образ еквівалентна наявності неперервного оберненого відображення, визначеного в як завгодно малому околі тотожного вкладення $i_V : V \subset M$ в $Sh(F, V)$. **Підрозділ 6.2** містить контрприклад. Там, зокрема, доведено, що для ірраціонального потоку на торі та подібних потоків відображення зсуву φ_F не є відкри-

тим на свій образ. Основна причина полягає в тому, що тотожне відображення можна апроксимувати зсувами на як завгодно великі функції, (лема 6.2.1). В **підрозділі 6.3** встановлено, що для $S^{\infty, \infty}$ -відкритості «глобального» відображення зсуву φ_F достатньо вимагати $S^{r, d(r)}$ -відкритість кожного з локальних відображень зсуву $\varphi_{F_{V_i}}$, де $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$ — деяке локально скінченне покриття M D -підмноговидами, $d : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ — довільна функція (теорема 6.3.1).

В **підрозділі 6.4** доведена наступна теорема 6.4.1: *нехай W — довільний відкритий окіл V , $F|_W$ — обмеження F на W , $\varphi_{F, W, V}$ — відображення зсуву на V локального потоку поля $F|_W$ і $Sh(F, W, V)$ — образ цього відображення в $C^\infty(V, W) \subset C^\infty(V, M)$. Відмітимо, що $Sh(F, W, V) \subset Sh(F, V)$. Тоді відображення зсуву $\varphi_{F, V}$ буде $S^{r, s}$ -відкритим у тому і лише у тому випадку, коли відображення $\varphi_{F, W, V}$ є $S^{r, s}$ -відкритим, а його образ $Sh(F, W, V)$ є S^s -відкритим в $\varphi_{F, V}$.*

Так як W може бути довільним відкритим околом V , то можна вважати, що V та W є малими околами деякої точки z і містяться в одній локальній карті. Це вже дозволяє звести перевірку відкритості $\varphi_{F, W, V}$ до випадку векторних полів в $\mathbb{R}^n$, а отже проводити конкретні обчислення.

Достатні умови для S^s -відкритості $Sh(F, W, V)$ в $Sh(F, V)$ отримані в наступних двох підрозділах. В **підрозділі 6.5** розглядається випадок, коли V та W є малими околами регулярної точки. Основний результат теорема 6.5.1 стверджує, що $Sh(F, W, V)$ є $W^{r, r}$ -відкритим в $Sh(F, V)$ для кожного $r \geq 1$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов: (а) z є неперіодичною і нерекурентною; (б) z є періодичною і паросток в точці z відображення першого повернення Пуанкаре $R : (B, z) \rightarrow (B, z)$ є періодичним; (с) z є періодичною і дотичне відображення $T_z R : T_z B \rightarrow T_z B$ має хоча б одне власне значення λ таке, що $|\lambda| \neq 1$.

В **підрозділі 6.6** аналогічна задача розв'язується для околів нерухомої точки потоку. Для пари $V \subset W$, де V — D -підмноговид і W — його відкритий

окіл, вводиться властивість *регулярного перетину межі* відносно потоку $\mathbf{F}$, див. означення 6.6.1. Основна лема 6.6.2 стверджує, що ця умова гарантує S^s -відкритість $Sh(F, W, V)$ в $Sh(F, V)$. В цьому підрозділі також описані типи пар $V \subset W$, що задовольняють умову регулярного перетину межі, див. леми 6.6.3, 6.6.7, 6.6.4 та 6.6.8. **Підрозділ 6.7** дає умови відкритості відображення зсуву для регулярних розширень векторних полів. **Підрозділ 6.8** містить підсумок результатів, отриманих в розділі 6, (наслідок 6.8.1).

В **підрозділі 6.9**, на основі обчислень розділу 3, досліджується відображення зсуву для всіх лінійних векторних полів. Основний результат показує, що для таких полів $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$. Більш того, φ_F не буде гомеоморфізмом на свій образ лише для полів, що задаються лише матрицями з суто уявним спектром, який не є пропорційним цілочисельному, див. теорему 6.9.1.

В **підрозділі 6.10** описується відображення зсуву редукованих гамільтонових векторних полів однорідних многочленів на площині $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Зокрема, показано, що для такого поля має місце тотожність $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^1$, причому $\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^1 \neq \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$ тоді і лише тоді, коли f є добутком хоча б двох різних незвідних над $\mathbb{R}$ квадратичних форм, див. теорему 6.10.3.

В **розділі 7** наведено результати про гомотопічні еквівалентності між правими та ліво-правими стабілізаторами, а також між відповідними правими та ліво-правими орбітами широкого класу гладких функцій на компактних многовидах, див. теореми 7.1.1 та 7.2.3.

Розділ 8 містить обчислення гомотопічних типів стабілізаторів та орбіт широкого класу гладких функцій на поверхнях.

Нехай M — компактна поверхня і P — числова пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1 . Нагадаємо, що група $\mathcal{D}(M)$ дифеоморфізмів M природно діє справа на $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ за наступною формулою: якщо $h \in \mathcal{D}(M)$ і $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$, то

$$h \cdot f = f \circ h^{-1}.$$

Для $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ нехай $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\}$ — *стабілізатор* і $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}$ — *орбіта* функції f відносно цієї дії. Позначимо також через $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$ (відповідно $\mathcal{O}_f(f)^r$), $r \geq 0$, компоненту зв'язності id_M (відповідно f) в $\mathcal{S}(f)$ (відповідно в $\mathcal{O}(f)$) відносно топології W^∞ .

Вивченню правої дії груп гомеоморфізмів та дифеоморфізмів компактних поверхонь M на просторах функцій, диференціальних форм та векторних полів останнім часом присвячено багато робіт. Ці питання стимульовані застосуваннями до симплектичної топології та гамільтонових систем. Питання класифікації орбіт функцій Морса та більш загальних класів функцій з ізольованими особливостями розглядаються в роботах А. В. Болсінова та А. Т. Фоменко див. книгу [150] та бібліографію в ній, роботах А. А. Ошемкова [169], В. В. Шарко [131, 175], Є. В. Кулініча [59], О. О. Пришляка [118, 172], С. І. Максименка [160, 162], О. А. Кадубовського [154], І. А. Юрчук [176], Є. О. Полуляха [115], І. А. Юрчук та Є. О. Полуляха [116]. Підхід до класифікації, використаний в цих роботах полягав у тому, що функціям ставилися у відповідність певні графи з додатковою інформацією і ці графи повністю описували орбіти відповідного класу функцій.

Відповідність між потоками та функціями Морса на поверхнях досліджена в роботах Д. П. Личака [158] та Д. П. Личака та О. О. Пришляка [68]. К. Ikegami та О. Saeki [52], а також В. Kalmar [54] обчислили групи кобордизмів функцій Морса на компактних поверхнях, див. також К. Ikegami [51].

Природно постають питання про вищі гомотопічні групи простору функцій Морса на поверхнях. В статті О.О.Кудрявцевої та Д. А. Пермякова [157] доведено, що цей простір гомотопічно еквівалентний деякому «більш простому» простору «оснащених» функцій.

Опишемо структуру розділу 8. В **підрозділі 8.1** вводяться спеціальні типи критичних точок S , P і N гладких функцій на поверхнях та досліджуються їх властивості. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня ≥ 2 . Припусти-

мо також, що він не має кратних множників. У цьому випадку $0 \in \mathbb{R}^2$ є його єдиною критичною точкою. При цьому 0 є **S**-точкою, якщо f має лінійні множники, **P**-точкою, якщо f є незвідною над $\mathbb{R}$ квадратичною формою і **N**-точкою, якщо f є добутком більше ніж двох квадратичних форм. В першому випадку 0 є сідлом, в другому — невиродженим екстремумом і в третьому — виродженим локальним екстремумом, див. лему 8.1.9.

Підрозділ 8.2 містить формулювання основних результатів розділу, див. теореми 8.2.1-8.2.4. Ми доводитимемо лише перші дві. Ці теореми дають інформацію про гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ та $\mathcal{O}_f(f)$ за умови, що функція $f : M \rightarrow P$ задовольняє певні три аксіоми (A1)-(A3). Зокрема, за виключенням кількох простих випадків, $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним, $\pi_n \mathcal{O}_f(f) = \pi_n M$ для $n \geq 3$, $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$, а фундаментальна група $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ має скінчено породжену абелеву підгрупу (майже завжди вільну) скінченного індексу.

Аксіома (A1) вимагає, щоб f приймала постійні значення на кожній компоненті межі ∂M , аксіома (A2) — щоб кожна критична точка f належала одному з типів **S**, **P**, або **N**, а аксіома (A3) — щоб природне відображення $p : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{O}(f)$, $p(h) = f \circ h$ було розшаруванням Серра.

Ідея доведення цих теорем полягає в наступному спостереженні. Припустимо, що M є орієнтовною. Тоді ця поверхня має симплектичну структуру, а отже для функції f можна побудувати гамільтонове векторне поле F . При цьому f є постійною уздовж орбіт поля F , причому особливі точки F співпадають з критичними точками f . Це дозволяє ототожнити $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ з $\mathcal{D}_{\text{id}}(F)$. З іншого боку, завдяки аксіомі (A2) можна показати, що F задовольняє умови наслідку 6.8.1, а значить $\mathcal{D}_{\text{id}}(F) = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є або стягуваним, або гомотопічно еквівалентним до кола. Ці міркування узагальнюються і для неорієнтованих поверхонь переходом до орієнтовного дволистного накриття. Крім того, з аксіоми (A3) випливає існування точної послідовності гомотопічних груп розшарування $p : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{O}(f)$,

шар якого є $\mathcal{S}(f)$. Так як гомотопічний тип групи $\mathcal{D}(M)$ добре відомий, див. підрозділ 1.5, то це дозволяє обчислити гомотопічні групи $\pi_n \mathcal{O}(f)$ для $n \geq 2$. Для обчислення фундаментальної групи потрібно досліджувати дію $\mathcal{S}(f)$ на графі Кронрода-Ріба функції f .

Доведення теореми 8.2.1 про гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ дається в **підрозділі 8.3**, а теореми 8.2.2 про гомотопічний тип $\mathcal{O}_f(f)$ — в **підрозділі 8.7**.

В останньому **розділі 9** дається нове доведення теореми класифікації компонент зв'язності простору функцій Морса на поверхнях отримане автором в [72, 86]. С. В. Матвеев (див. роботу О. О. Кудрявцевої [156]) та В. В. Шарко [174] отримали класифікацію компонент зв'язності простору функцій Морса на компактних поверхнях які приймають значення в числовій прямій і є постійними на кожній компоненті зв'язності поверхні. В своїй кандидатській дисертації автор дав класифікацію компонент зв'язності простору морсівських відображень з орієнтовних компактних поверхонь в коло [161]. В роботі [72] автор також отримав незалежне доведення обох класифікацій, використовуючи твірні груп гомеотопій поверхонь, а в [86] узагальнив цей результат на відображення Морса орієнтовних поверхонь в коло, обмеження яких на кожну компоненту межі є або постійним, або накриваючим відображенням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи пов'язана з тематикою наукових досліджень відділу топології Інституту математики НАН України. Частина результатів дисертаційної роботи виконана в рамках програми НАН України “Сучасні методи досліджень математичних моделей в проблемах природничих наук” № 0107U002333, НДР “Топологія многовидів та їх застосування” № 00106U000658, а також підтримана грантом Президента України для докторантів, № Ф-26/418-2008 та грантом Міністерства освіти та Науки України № М/150-2009.

Метою дисертації є:

- опис структури множини функцій періоду неперервних потоків на тополо-

гічних многовидах;

- обчислення гомотопічного типу компонент зв'язності груп дифеоморфізмів, що лишають інваріантними орбіти векторного поля на многовиді;
- доведення гомотопічної еквівалентності між правими та право-лівими стабілізаторами, а також між відповідними орбітами широкого класу гладких функцій на компактних многовидах;
- обчислення гомотопічного типу стабілізаторів та орбіт широкого класу гладких функцій на компактних поверхнях відносно дій груп дифеоморфізмів цих поверхонь;
- нове доведення класифікації компонент зв'язності простору функцій Морса на компактних поверхнях.

Об'єкт дослідження — різні класи гладких відображень многовидів та їх гомотопічні (деформаційні) властивості.

Предметом дослідження є:

- гладкі функції на поверхнях;
- векторні поля на многовидах та гладкі відображення многовидів в себе, що лишають інваріантними орбіти цих полів;
- відображення зсуву уздовж орбіт векторного поля.

Методи дослідження. Для вивчення відображень, що лишають інваріантними орбіти векторного поля використовується *відображення зсуву уздовж орбіт поля*. Воно також застосовується для обчислення гомотопічного типу стабілізаторів та орбіт деяких класів гладких функцій на поверхнях.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі отримані в дисертації результати є новими і основні з них є такі:

- вперше визначено та детально досліджено відображення зсуву векторного поля — його ядро, образ, властивість бути локальним гомеоморфізмом, а також питання, коли зсув є дифеоморфізмом;
- для векторних полів на компактних многовидах, які є лінійними в околі

кожної своєї особливої точки, та задовольняють деякі глобальні топологічні умови, вперше доведено, тотожна компонента зв'язності групи дифеоморфізмів, які лишають інваріантними орбіти цього поля є або стягнутою, або гомотопічно еквівалентна до кола;

- аналогічна задача вперше розв'язана для «редукованих» гамільтонових векторних полів однорідних многочленів двох змінних в околі кожної своєї особливої точки;
- для широкого класу гладких функцій з квазіоднорідними особливостями на компактних многовидах доведено гомотопічну еквівалентність між правими та ліво-правими стабілізаторами, а також між відповідними правими та ліво-правими орбітами;
- для гладких функцій з однорідними особливостями з компактної поверхні в пряму та коло вперше обчислено гомотопічний тип стабілізаторів та орбіт цих функцій відносно правої дії групи дифеоморфізмів поверхні;
- отримано нове доведення теореми класифікації компонент зв'язності простору функцій Морса локально постійні на межі з компактної поверхні в пряму та коло. Цей результат також вперше поширено на функції з орієнтовних поверхонь в коло, обмеження яких на кожному компоненту межі є або постійним, або накриваючим.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Отримані в дисертації наукові результати можуть бути використані як в математичних дослідженнях, так і в фізиці, біології тощо, де виникають динамічні системи та теорія особливостей.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, наведені в дисертаційній роботі, отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на

- семінарах відділу топології Інституту математики НАН України; керівник семінару — член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, про-

- фесор, зав. відділом топології В. В. Шарко;
- семінарі кафедри геометрії Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна; керівник семінару — член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедрою геометрії О. А. Борисенко;
 - Українських математичних конгресах, (Київ, 2001 та 2009 роки);
 - Міжнародній конференції з геометрії і топології, (Черкаси, 2001);
 - Міжнародній конференції *Fundamental Mathematics Today*, присвяченій 10-річчю Московського Незалежного Університету, (Москва, 2001);
 - Міжнародній конференції *"Геометрія в Одесі"*, (Одеса, 2005 та 2008);
 - Міжнародній конференції *Foliation-2005*, (м. Лодзь, Польща, 2005);
 - Міжнародній конференції *Groups, Homotopy and Configuration Spaces: Conference in honor of Fred Cohen*, (м. Токіо, Японія, 2005);
 - Міжнародній конференції *Manifolds at Melbourne*, (м. Мельбурн, Австралія, 2006);
 - Міжнародній конференції *Topology, Dynamics and Computations*, (м. Бендлево, Польща, 2006);
 - *8-th Conference on Geometry and Topology of Manifolds*, (м. Перемишль, Польща, та м. Львів, 2007);
 - *Algebraic topology: Old and New M.M.Postnikov Memorial conference*, (м. Бендлево, Польща, 2007);
 - *Topological theory of fixed points*, (м. Бендлево, Польща, 2007);
 - Міжнародній конференції *Боголюбівські читання*, (м. Київ, Україна, 2007);
 - Міжнародній конференції *Analysis and Topology*, (м. Львів, Україна, 2008);
 - *9-th Conference on Geometry and Topology of Manifolds*, (м. Краків, Польща, 2008);
 - Міжнародній конференції *Infinite-Dimensional Analysis and Topology*, (с. Яремче, Україна, 2009);
 - Міжнародній конференції *Geometry "in large", topology and applications*, при-

- свяченій 90-річчю з дня народження О. В. Погорєлова, (м. Харків, 2009);
- *Conference on Algebraic Topology - CAT'09*, (м. Варшава, Польща, 2009);
 - *Knots, Contact geometry and Floer homology*, (м. Токіо, Японія, 2010);
 - *Automorphism groups of Topological structures*, (м. Ейлат, Ізраїль, 2010);

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 20 роботах у фахових виданнях з переліку, що затверджений ВАК України, [70, 72–75, 78, 80, 84–92, 152, 163, 165, 166] та 9 тезах конференцій [69, 71, 76, 77, 79, 81–83, 164]. З них 1 монографія [152] у співавторстві з І. Ю. Власенко та Є. О. Полуляхом, у якій автору належать розділи 4 та 5, 14 статей у наукових журналах, 5 статей у збірниках наукових праць.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, переліку умовних скорочень, 9 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 176 найменування (на 20 сторінках). Повний обсяг роботи становить 303 сторінок.

Подяки. Користуючись нагодою, висловлюю щирі подяку моєму науковому консультантові Шарко Володимирі Васильовичу за підтримку, увагу і допомогу в роботі. Також щиро вдячний О. О. Пришляку, Д. В. Болотову, І. Ю. Власенку, В. В. Круглову, М. О. Панкову, Є. О. Полуляху, І. А. Юрчук та іншим науковцям, які брали участь у роботі семінару відділу топології, та зробили низку важливих зауважень і порад під час моїх доповідей та при написанні дисертації.

Розділ 1 ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Топології на просторах відображень

***D*-підмноговиди.** Нехай M — гладкий многовид розмірності m . Приклеїмо до ∂M комір $\partial M \times [0, 1)$ за тотожним відображенням $\partial M \times 0 \rightarrow \partial M$. Позначимо отриманий многовид через M' і назовемо його *∂ -розширенням M* , див. Рис. 1.1.1. Якщо $\partial M = \emptyset$, то вважатимемо, що $M' = M$. Очевидно, M є замкнутою підмножиною M' , $\partial M' = \emptyset$ і M' має гладку структуру, відносно якої він дифеоморфний внутрішності $\text{Int}M$.

Означення 1.1.1. *Замкнута підмножина $V \subset M$ називатиметься D -підмноговидом, якщо знайдеться такий m -вимірний підмноговид $V' \subset M'$ (можливо з непорожньою межею), що $V = M \cap V'$, а перетин $\partial M \cap \partial V'$ є трансверсальним, див. Рис. 1.1.1.*

Нехай $V \subset M$ — D -підмноговид. Позначимо через $\text{Int}V$ внутрішність V в M . Тоді $\text{Int}V = V \setminus \partial V'$. Будемо також говорити, що V є *D -околом* для кожної точки $z \in \text{Int}V$.

Очевидно, що якщо $V \cap \partial M = \emptyset$, то V є многовидом з межею. В протилежному випадку V є *многовидом з кутами* у якого $\partial M \cap \partial V'$ є множиною “кутів”, [93]. Також зрозуміло, що M є D -підмноговидом самого себе і що кожна точка $z \in \text{Int}M$ ($z \in \partial M$) має як завгодно малі D -околи дифеоморфні замкнутому m -диску (m -півдиску).

Нехай N — інший гладкий многовид і $f : V \rightarrow N$ — відображення. Скажемо, що f належить класу $\mathcal{C}^r$, $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$, (є вкладенням, зануренням, тощо) якщо воно продовжується до $\mathcal{C}^r$ відображення (вкладення, занурення, тощо) $U \rightarrow N'$ деякого околу $U \subset M'$ множини V в M' у відповідне ∂ -розширення N' многовиду N .

Добре відомо, що f належить класу $\mathcal{C}^r$ тоді і лише тоді, коли обмеження $f|_{\text{Int}V \setminus \partial M}$ належить тому ж класу $\mathcal{C}^r$, а всі його частинні похідні (до порядку r включно) неперервно продовжуються на все V , див. напр. [35, 104, 129, 144] для многовидів з межею, та [18, 24, 93] для многовидів з кутами.

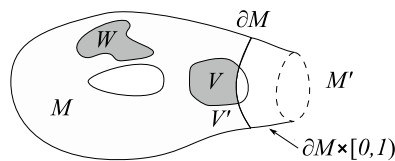


Рис. 1.1.1: D -підмноговиди V та W

Позначимо через $\mathcal{C}^r(V, N)$, $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$, множину усіх $\mathcal{C}^r$ відображень $V \rightarrow N$. Тоді аналогічно до попереднього в $\mathcal{C}^r(V, N)$ можна ввести *слабку* W^r та *сильну* S^r топології.

Якщо V є компактним, то W^r та S^r співпадають для всіх $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Для підмножини $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}^r(V, N)$ і $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$ позначимо через $(\mathcal{X})_W^r$ (відповідно $(\mathcal{X})_S^r$) топологічний простір $\mathcal{X}$ з індукованою W^r (відповідно S^r) топологією.

Топології на просторах неперервних відображень. Нехай M та N — топологічні простори. Найбільш уживаними топологіями на просторі неперервних відображень $\mathcal{C}(M, N)$ є так звані *слабка* W^0 та *сильна* S^0 , див. [173]. Нагадаємо їх означення.

Для неперервного відображення $f : M \rightarrow N$ позначимо через

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times N$$

його *графік*. Тоді *слабка* топологія W^0 на $\mathcal{C}(M, N)$ породжується наступними

підмножинами:

$$\mathcal{N}(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(M, N) : f(K) \subset U\},$$

де K — пробігає сукупність усіх компактних підмножин в M , а U — сукупність усіх відкритих підмножин в N . Цю топологію також називають *компактно відкритою*.

Сильна топологія $\mathbf{S}^0$ на $\mathcal{C}(M, N)$ породжується множинами виду:

$$\mathcal{N}(V) = \{f \in \mathcal{C}(M, N) : \Gamma_f \subset V\},$$

де V — пробігає сукупність усіх відкритих підмножин в добутку $M \times N$.

Зауваження 1.1.2. Припустимо, що M є компактным простором. Тоді слабка та сильна топології на $\mathcal{C}(M, N)$ співпадають. Якщо додатково N є метричним простором, то ці топології також співпадають з *рівномірною топологією* на $\mathcal{C}(M, N)$.

Топології на просторах гладких відображень. Нехай тепер M та N — многовиди (можливо з кутами, [93]) класу $\mathcal{C}^r$. Тоді для кожного $k = 0, \dots, r$ простір $\mathcal{C}^k(M, N)$ можна наділити *слабкою* та *сильною* топологіями класу $\mathcal{C}^k$, які ми позначатимемо через $\mathbf{W}^k$ та $\mathbf{S}^k$ відповідно, [173].

Топології $\mathbf{W}^0$ та $\mathbf{S}^0$ означені вище, а топології $\mathbf{W}^k$ та $\mathbf{S}^k$ для $k \geq 1$ визначаються наступним чином. Позначимо через $J^k(M, N)$ — многовид k -струменів $\mathcal{C}^k$ відображень $h : M \rightarrow N$. Поставимо у відповідність кожному такому h його k -струменеве продовження $j^k h : M \rightarrow J^k(M, N)$. Тоді відповідність $h \mapsto j^k h$ є вкладенням $\mathcal{C}^k(M, N) \subset \mathcal{C}(M, J^k(M, N))$. Наділимо $\mathcal{C}(M, J^k(M, N))$ топологією $\mathbf{W}^0$ (відповідно $\mathbf{S}^0$). Тоді індукована на $\mathcal{C}^k(M, N)$ топологія називається $\mathbf{W}^k$ (відповідно $\mathbf{S}^k$). Для $r = \infty$, топологія $\mathbf{W}^\infty$ породжується топологіями $\mathbf{W}^k$ (відповідно $\mathbf{S}^k$) для $k < \infty$.

Нагадаємо також менш формальне означення топологій W^r . Для простоти можна вважати, що $M \subset \mathbb{R}^m$ і $N \subset \mathbb{R}^n$ для достатньо великих m, n . Нехай

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^m \supset M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$$

— C^r відображення. Для кожної компактної підмножини $K \subset M$ і цілого невід'ємного числа $r \geq 0$ визначимо r -норму f на K за допомогою наступної формули

$$\|f\|_K^r = \sum_{j=1}^m \sum_{|i| \leq r} \sup_{x \in K} |D^i f_j(x)|, \quad (1.1)$$

де $i = (i_1, \dots, i_n)$, $|i| = i_1 + \dots + i_n$, а $D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$. Тоді для фіксованого r норми $\|f\|_K^r$ визначають слабку W^r -топологію на $C^\infty(M, N)$.

Підмножину $\mathcal{X} \subset C^r(M, N)$ називатимемо W^k -відкритою (відповідно W^k -замкнутою), якщо вона відкрита (відповідно замкнута) в топології W^k на $C^r(M, N)$.

Нехай далі U, V інші C^r многовиди і $\mathcal{Y} \subset C^r(U, V)$ інша підмножина. Відображення $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ назвемо $W^{k,l}$ -неперервним (відповідно $W^{k,l}$ -відкритим, $W^{k,l}$ -гомеоморфізмом тощо), якщо G є неперервним (відповідно відкритим, гомеоморфізмом тощо) якщо наділити $\mathcal{X}$ топологією W^k , а $\mathcal{Y}$ топологією W^l .

Аналогічні означення можна сформулювати для сильних топологій S^k . Наступна лема описує стандартний приклад $W^{k,l}$ -неперервних відображень.

Лема 1.1.3. Нехай $V \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$, $\partial x^k = \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}$ і

$$D : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{R}), \quad D(\alpha) = \frac{\partial^{|k|} \alpha}{\partial x^k},$$

— відповідне відображення диференціювання. Тоді $D \in W^{r+|k|,r}$ -неперервним для всіх $r \geq 0$.

Експоненційний закон. Слабка топологія добре узгоджена з деформаціями відображень.

Нехай K — ще один топологічний простір і $F : M \times K \rightarrow N$ — неперервне відображення. Тоді для кожного $k \in K$ індуковане відображення $F_k = F(\cdot, k) : M \rightarrow N$ також неперервне. Іншими словами, F індукує відображення

$$f : K \rightarrow \mathcal{C}(M, N), \quad f(k) = F_k.$$

Таким чином відповідність $F \mapsto f$ є відображенням

$$\text{exp} : \mathcal{C}(M \times K, N) \rightarrow \mathcal{C}(K, \mathcal{C}(M, N)). \quad (1.2)$$

Навпаки, кожне відображення $f : K \rightarrow \mathcal{C}(M, N)$ індукує відображення $F : M \times K \rightarrow N$ за формулою $F(x, k) = f(k)(x)$, але при цьому F не обов'язково є неперервним.

Теорема 1.1.4 (Експоненційний закон). (напр. [60]). *Наділимо простори відображень в (1.2) відповідними компактно відкритими топологіями. Припустимо також, що K є хаусдорфовим локально компактним простором. Тоді відображення exp є гомеоморфізмом “на”.*

Зауваження 1.1.5. Якщо позначати простір $\mathcal{C}(M, N)$ через N^M , то теорема 1.1.4 означатиме, що має місце гомеоморфізм $N^{M \times K} \approx (N^M)^K$, за умови, що відповідні простори відображень наділені компактно відкритими топологіями. Це пояснює назву *експоненційний закон*.

k -гомотопії. Відмітимо дуже важливий частинний випадок теореми 1.1.4. Нехай $K = I$ — відрізок. Тоді неперервне відображення $F : M \times I \rightarrow N$ — це *гомотопія* і згідно теореми 1.1.4 вона еквівалентна неперервному відображенню $f : I \rightarrow \mathcal{C}(M, N)$, тобто *шляху* у просторі $\mathcal{C}(M, N)$.

Припустимо тепер, що M та N — $\mathcal{C}^r$ -многовиди, $0 \leq r \leq \infty$, і нехай $F : M \times I \rightarrow N$ — така гомотопія, що для кожного $t \in I$, відображення $F_t = F(\cdot, t) : M \rightarrow N$ належить класу $\mathcal{C}^r$. Тоді ми отримуємо відображення

$$f : I \rightarrow \mathcal{C}^r(M, N) \subset \mathcal{C}(M, N), \quad f(t) = F_t.$$

З неперервності F та експоненційного закону слідує, що f є неперервним відображенням в $\mathcal{C}^r(M, N)$ з індукованою топологією $\mathbf{W}^0$, але воно не зобов'язане бути неперервним навіть у топологію $\mathbf{W}^1$ на $\mathcal{C}^r(M, N)$.

Назвемо F k -гомотопією, якщо відображення f є неперервним у топологію $\mathbf{W}^k$ на $\mathcal{C}^r(M, N)$, що індукована з $\mathcal{C}(M, J^k(M, N))$. Очевидно, що неперервність f у цю топологію означає, що k -струміль $j^k F_t$ відображення F_t неперервно залежить від t .

Опишемо k -гомотопії в термінах самого відображення F . Припустимо, що в локальних координатах F є відображенням

$$F = (F^1, \dots, F^n) : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Тоді F є k -гомотопією у тому і лише у тому випадку, коли для кожного цілочисельного мультиіндексу $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq r$, та кожної координатної функції F^j її відповідна частинна похідна

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F^j}{\partial x^\alpha}(x_1, \dots, x_n, t)$$

є неперервною функцією на $\mathbb{R}^m \times I$.

Відмітимо прості властивості k -гомотопій.

- (1) 0-гомотопія — це те ж саме, що гомотопія.
- (2) Кожна l -гомотопія є також k -гомотопією для $k \leq l$.
- (3) Кожне $\mathcal{C}^k$ відображення $F : M \times I \rightarrow N$ є k -гомотопією.

Деформації. Крім однопараметричних сімей відображень (k -гомотопій) ми також будемо розглядати такі багато-параметричні сім'ї в яких гладкість по різних параметрах може бути різною. Це приводить до поняття $(S; T, k)$ -деформацій, які ми зараз означимо.

Нехай T — топологічний простір і M, S, N — гладкі многовиди. Для підмножини $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^k(M, N)$ позначимо через $\mathcal{C}^k(S, \mathcal{H})$ простір усіх таких $\mathcal{C}^k$ відображень

$F : M \times S \rightarrow N$, що відображення $F_\sigma = F(\cdot, \sigma) : M \rightarrow N$ належить до $\mathcal{H}$ для кожного $\sigma \in S$. Зокрема $\mathcal{C}^k(S, \mathcal{H}) \subset \mathcal{C}^k(M \times S, N)$.

Означення 1.1.6. Нехай $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}^\infty(M, N)$ — підмножина. Неперервне відображення

$$F : M \times S \times T \rightarrow N \quad (1.3)$$

називатиметься $(S; T, k)$ -**деформацією в $\mathcal{H}$** якщо

- (1) для кожного $(\sigma, \tau) \in S \times T$ відображення $F_{(\sigma, \tau)} = F(\cdot, \sigma, \tau) : M \rightarrow N$ належить до $\mathcal{H}$;
- (2) для кожного $\tau \in T$ відображення $F_\tau = F(\cdot, \cdot, \tau) : M \times S \rightarrow N$ є гладким ($\mathcal{C}^\infty$), а індуковане відображення

$$(M \times S) \times T \rightarrow J^k(M \times S, N), \quad (x, \sigma, \tau) \mapsto j^k F_\tau(x, \sigma)$$

є неперервним.

Грубо кажучи, S є простором $\mathcal{C}^\infty$ -параметрів, а T — є простором “майже” $\mathcal{C}^k$ -параметрів для деформації F . Часто “простір параметрів” $S \times T$ позначатимемо через P .

Очевидно, що F можна розглядати як відображення

$$f : T \rightarrow \mathcal{C}^\infty(S, \mathcal{H}) \subset \mathcal{C}^\infty(M \times S, N), \quad f(\tau)(\sigma)(x) = F(x, \sigma, \tau).$$

Нехай $S = *$ — точка, тоді $F : M \times T \rightarrow N$ і $f : T \rightarrow \mathcal{H}$. Припустимо також, що простір T є локально компактним. Тоді за експоненційним законом (див. теорему 1.1.4) неперервність F еквівалентна неперервності f в топології $\mathcal{W}^0$ на $\mathcal{H}$. Тому з наведеного вище опису топології $\mathcal{W}^k$ випливає, що $(*; T, k)$ -деформація це та саме, що неперервне відображення $T \rightarrow \mathcal{H}$ в топологію $\mathcal{W}^k$ простору $\mathcal{H}$. $(*; T, k)$ -деформацію також називатимемо (T, k) -**деформацією**. Якщо $T = I$ — відрізок, то (I, k) -деформація $F : M \times I \rightarrow N$ є k -гомотопією.

Навпаки, нехай $T = *$ — це точка. Тоді $F : M \times S \rightarrow N$ є $\mathcal{C}^\infty$ відображенням,

яке за означенням належить до $\mathcal{C}^\infty(S, \mathcal{H})$. У цьому випадку число k не грає ролі, а тому називатимемо F просто $(S, \mathcal{C}^\infty)$ -деформацією.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.1.7. *Нехай F — $(S'; T', k)$ -деформація визначена за формулою (1.3). Нехай також S' та N' — гладкі многовиди, T' — інший топологічний простір, $\mu : S' \rightarrow S$ та $u : N \rightarrow N'$ — гладкі відображення і $\rho : T' \rightarrow T$ — неперервне відображення. Тоді відображення*

$$F : M \times S' \times T' \rightarrow N', \quad F(x, \sigma, \tau) = u \circ F(x, \mu(\sigma), \rho(\tau))$$

є $(S'; T', k)$ -деформацією. □

Збереження гладкості. Нехай A, B, C, D — гладкі многовиди, $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}^\infty(A, B)$ та $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}^\infty(C, D)$ — деякі підмножини і $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — відображення. Скажемо, що F зберігає гладкість, якщо для довільної $(S, \mathcal{C}^\infty)$ -деформації $\Omega : A \times S \rightarrow B$ відображення

$$\Lambda : C \times S \rightarrow D, \quad \Lambda(c, \sigma) = F(\Omega_\sigma)(c),$$

також є гладким.

Відмітимо, що відображення, яке зберігає гладкість не обов'язково зберігає клас диференційовності.

1.2 Потоки і векторні поля

Нехай M — хаусдорфовий топологічний простір. *Потоком* на M називається дія адитивної групи $(\mathbb{R}, +)$, тобто таке неперервне відображення $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, що

$$\mathbf{F}_0 = \text{id}_M, \quad \mathbf{F}_s \circ \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{s+t} \tag{1.4}$$

для всіх $x \in M$ та $s, t \in \mathbb{R}$.

Означення 1.2.1. Нехай $\mathcal{U} \subset M \times \mathbb{R}$ — відкрита підмножина, що містить $M \times 0$. **Локальним потоком** на $\mathcal{U}$ називається неперервне відображення $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow M$, що задовольняє наступні умови:

- (i) якщо $(x, 0) \in \mathcal{U}$, то $\mathbf{F}(x, 0) = x$;
- (ii) якщо (x, s) і $(\mathbf{F}(x, s), t) \in \mathcal{U}$, то $(x, s + t) \in \mathcal{U}$ і виконується рівність

$$\mathbf{F}(x, s + t) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, s), t);$$

- (iii) для кожної точки $x \in M$ перетин $(x \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{U}$ є відкритим зв'язним інтервалом.

Для точки $x \in M$ її орбіта відносно (локального) потоку $\mathbf{F}$ позначатиметься через $o_x := \mathbf{F}(x \times \mathbb{R})$, а множина всіх нерухомих точок потоку — через $\text{Fix}(\mathbf{F})$.

Локальний потік векторного поля. Нехай $r \geq 1$, M — зв'язний $\mathcal{C}^r$ многовид розмірності m і F — векторне поле класу $\mathcal{C}^r$ на M дотичне до ∂M . Таким чином в кожній точці $x \in M$ ми маємо дотичний вектор $F(x) \in T_x M$, який гладко залежить від точки x .

Добре відомо, що для кожної точки $x \in M$ знайдеться максимальний відкритий окіл $(a_x, b_x) \subset \mathbb{R}$ точки $0 \in \mathbb{R}$ і таке $\mathcal{C}^r$ -відображення $o_x : (a_x, b_x) \rightarrow M$, що

$$\frac{d}{dt} o_x(t) = F(o_x(t)), \quad t \in (a, b), \quad o_x(0) = x. \quad (1.5)$$

При цьому множина $\text{dom}(F) = \bigcup_{x \in M} x \times (a_x, b_x)$ є відкритим зв'язним околom $M \times 0$ в $M \times \mathbb{R}$ і має місце наступне твердження:

Лема 1.2.2. Відображення $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \text{dom}(F) \rightarrow M$ визначене за формулою $\mathbf{F}(x, t) = o_x(t)$ є локальним потоком.

Множину $\text{dom}(F)$ називатимемо *областю визначення* локального потоку $\mathbf{F}$. Говоритимемо також, що F породжує локальний потік $\mathbf{F}$. Якщо $\text{dom}(F) = M \times \mathbb{R}$, то $\mathbf{F}$ називається *повним потоком*.

Приклад 1.2.3. Нехай $F(x) = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ — векторне поле на $\mathbb{R}$. Тоді область визначення його локального потоку $\mathbf{F}$ має вигляд $\text{dom}(F) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid xt \neq 1\}$, див. Рис. 1.2.1, а сам потік визначається за формулою:

$$\mathbf{F} : \text{dom}(F) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{F}(x, t) = \frac{x}{1 - xt}.$$

Цей потік є неповним.

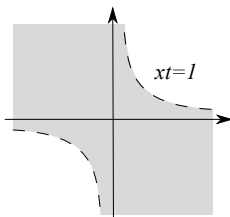


Рис. 1.2.1: Область визначення локального потоку поля $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$

Приклад 1.2.4. Векторне поле $F(x) = \frac{\partial}{\partial x}$ породжує повний потік $\mathbf{F}(x, t) = x + t$.

Приклад 1.2.5. Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, A — $(m \times m)$ -матриця з коефіцієнтами з $\mathbb{F}$. Тоді лінійне векторне поле $F(x) = Ax$ породжує повний потік $\mathbf{F}(x, t) = e^{At}x$, де e^B — експонента матриці B .

Нагадаємо, що *носієм* $\text{supp } F$ векторного поля F називається замикання його множини регулярних точок, тобто $\text{supp } F = \overline{\{x \mid F(x) \neq 0\}}$.

Теорема 1.2.6. напр. [170]. *Кожне векторне поле F з компактним носієм (зокрема векторне поле на компактному многовиді) завжди породжує повний потік.* □

Теорема про випрямлення орбіт векторного поля. Назвемо точку $z \in M$ *регулярною* для поля F якщо $F(z) \neq 0$. В протилежному випадку, при $F(z) = 0$, точка z називатиметься *сингулярною* або *особливою*. Множину всіх особливих точок поля F позначатимемо через $\text{Fix}(\mathbf{F})$.

Регулярна точка z поля F називається *періодичною* якщо існує таке $\tau > 0$, що $\mathbf{F}(z, \tau) = z$. Найменше серед усіх таких τ називається *періодом* точки z відносно потоку $\mathbf{F}$ і позначатиметься через $\text{Per}(z)$. В протилежному випадку z називається *неперіодичною*.

Відмітимо, що якщо $z \in M$ є або періодичною, або нерухомою точкою F , то $z \times \mathbb{R} \subset \text{dom}(F)$. Крім того $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ тоді і тільки тоді, коли z є нерухомою для $\mathbf{F}$, тобто $\mathbf{F}(z, t) = z$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Наступне твердження описує структуру векторного поля в околі регулярної точки.

Теорема 1.2.7. [147,170]. *Нехай $z \in M$ — регулярна точка векторного поля F класу C^r , ($r \geq 1$). Тоді існує окіл U точки z і таке C^r -вкладення $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, що $h(z) = 0$, а індуковане векторне поле $G = h^*F$ на образі $h(U)$ та його локальний потік $\mathbf{G}$ задаються формулами:*

$$G(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mathbf{G}(x, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_m),$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Регулярні розширення векторних полів. Нехай M, N — гладкі зв'язні многовиди розмірностей m та n відповідно. Тоді будь-яке векторне поле F на $M \times N$ можна представити як суму векторних полів $G + H$, де G *направлене уздовж* M , а H — *уздовж* N . Іншими словами,

$$F(x, y) = (G(x, y), H(x, y)),$$

де $(x, y) \in M \times N$, $G(x, y) \in T_x M$ і $H(x, y) \in T_y N$.

Пояснимо це більш детально. Нехай

$$p_M : M \times N \rightarrow M, \quad p_N : M \times N \rightarrow N$$

стандартні проекції. Тоді дотичне розшарування $T(M \times N)$ ізоморфне сумі Уїтні

$$T(M \times N) \approx p_M^*(TM) \oplus p_N^*(TN),$$

а тому векторне поле F , тобто переріз дотичного розшарування $T(M \times N)$, можна представити як пряму суму перерізів G та H індукованих розшарувань $p_M^*(TM)$ та $p_N^*(TN)$ відповідно.

Залишається відмітити, що переріз, наприклад, індукованого розшарування $p_M^*(TM)$, потрібно мислити як *векторне поле уздовж проекції* p_M , тобто як відображення $G : M \times N \rightarrow TM$, що ставить у відповідність точці (x, y) деякий дотичний вектор в $G(x, y)$ в точці x , і аналогічно для $p_N^*(TN)$:

$$\begin{array}{ccc} p_M^*(TM) & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow \\ M \times N & \xrightarrow{p_M} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p_N^*(TN) & \longrightarrow & TN \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow \\ M \times N & \xrightarrow{p_N} & N \end{array}$$

Означення 1.2.8. Нехай G — векторне поле на M і F — векторне поле на $M \times N$. Скажемо, що F є **регулярним** розширенням поля G , якщо

$$F(x, y) = (G(x), H(x, y)), \quad (1.6)$$

тобто його «компонента G уздовж $M \times y$ не залежить від $y \in N$ ».

Якщо друга компонента H не залежить від $x \in M$, тобто

$$F(x, y) = (G(x), H(y)),$$

деякого векторного поля H на N , то F називатиметься **добутком** полів G і H .

Якщо у регулярного розширення (1.6) $H \equiv 0$, тобто

$$F(x, y) = (G(x), 0),$$

то F називатиметься **тривіальним** розширенням поля G .

Розмірність $n = \dim N$ називатиметься **розмірністю** регулярного розширення F .

Очевидно, що регулярне розширення регулярного розширення є також регулярним розширенням.

Приклад 1.2.9. Нехай $G(x) = x \frac{\partial}{\partial x}$ — векторне поле на $\mathbb{R}$ і $\alpha, \beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — довільні гладкі функції. Тоді векторне поле

$$F(x, y, z) = x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \beta(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

визначене на $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, є регулярним розширенням G .

Приклад 1.2.10. З теореми про дійсну форму Жордана матриці випливає, що кожне ненульове лінійне векторне поле на $\mathbb{R}^n$ є регулярним розширенням лінійного векторного поля, породженого однією з наступних матриць:

$$(\lambda), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda, a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Нехай G — векторне поле на M , F — регулярне, а $\bar{G}$ — тривіальне розширення поля G на $M \times N$, тобто

$$F(x, y) = (G(x), H(x, y)), \quad \bar{G}(x, y) = (G(x), 0),$$

для деякого гладкого перерізу $H : M \times N \rightarrow p_N^*(TN)$. Позначимо через $\mathbf{F}$, $\bar{\mathbf{G}}$ та $\mathbf{G}$ — локальні потоки, а через φ_F , $\bar{\psi}_{\bar{G}}$ та ψ_G — відображення зсуву полів F , $\bar{G}$ та G відповідно. Нехай також $\text{Fix}(\mathbf{F})$, $\text{Fix}(\bar{\mathbf{G}})$, $\text{Fix}(\mathbf{G})$ — множини особливих точок F , $\bar{G}$ та G відповідно. Тоді має місце наступна проста лема, доведення якої залишається читачеві.

Лема 1.2.11. *Мають місце наступні співвідношення:*

$$\text{Fix}(\mathbf{F}) \subset \text{Fix}(\bar{\mathbf{G}}) = \text{Fix}(\mathbf{G}) \times N, \quad (1.8)$$

$$\text{dom}(F) \subset \text{dom}(\bar{G}) = \text{dom}(G) \times N, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{F}(x, y, t) = (\mathbf{G}(x, t), \mathbf{H}(x, y, t)), \quad (1.10)$$

$$\bar{\mathbf{G}}(x, y, t) = (\mathbf{G}(x, t), y), \quad (1.11)$$

для деякого гладкого відображення $\mathbf{H} : \text{dom}(\bar{G}) \rightarrow N$.

Лема 1.2.12. Нехай $V^m \subset M$ і $V^n \subset N$ — відкриті зв'язні підмножини, $V^{m+n} = V^m \times V^n$, S — зв'язний гладкий многовид розмірності $\dim S = d$, T — лінійно зв'язний топологічний простір,

$$\Omega : V^{m+n} \times S \times T \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \quad (1.12)$$

— $(S; T, k)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, V^{m+n})$ і

$$\Psi = p_M \circ \Omega : V^m \times V^n \times S \times T \rightarrow M$$

— проекція. Тоді виконуються наступні твердження.

1) $\Psi \in (V^n \times S; T, k)$ -деформацією в $\mathcal{E}(G, V^m)$.

2) Припустимо, що Ω має неперервну функцію зсуву

$$\Lambda : V^{m+n} \times S \times T \supset A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

визначену на деякій підмножині A в $V^{m+n} \times S \times T$. Тоді Λ є функцією зсуву для Ψ відносно G .

Доведення. 1) Твердження про те, що $\Psi \in (V^n \times S; T, k)$ -деформацією в $\mathcal{C}^\infty(V^m, M)$ випливає з леми 1.1.7.

Покладемо $P = S \times T$ і $\rho = (\sigma, \tau)$. Потрібно показати, що $\Psi_{(y,\rho)} \in \mathcal{E}(G, V^m)$ для кожного $(y, \rho) \in V^n \times P$, тобто

- (i) $\Psi_{(y,\rho)}$ зберігає інваріантними орбіти поля G , тобто для кожного $x \in V^m$, існує таке $t \in \mathbb{R}$, що $\Psi_{(y,\rho)}(x) = \mathbf{G}(x, t)$;
 - (ii) $\Psi_{(y,\rho)}$ є локальним дифеоморфізмом в кожній точці $x \in \text{Fix}(\mathbf{G}) \cap V^m$.
- (i) Так як Ω_ρ зберігає орбіти поля F , то існує $t_{x,y} \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\Omega(x, y, \rho) = \mathbf{F}(x, y, t_{x,y}) = (\mathbf{G}(x, t_{x,y}), \mathbf{H}(x, y, t_{x,y})).$$

Тому $\Psi_{(y,\rho)}(x) = p_m \circ \Omega(x, y, \rho) = \mathbf{G}(x, t_{x,y})$.

(ii) Нехай $x \in \text{Fix}(\mathbf{G}) \cap V^m$, тобто $G(x) = 0$ Тоді

$$F(x, y) = (G(x), H(x, y)) = (0, H(x, y))$$

для кожного $y \in N$. Звідси випливає, що орбіта $o_{(x,y)}$ поля F , що проходить через (x, y) дотикається до $x \times N$ у всіх точках, а тому $o_{(x,y)} \subset x \times N$. Так як Ω_ρ зберігає орбіти поля F , то

$$\Omega_\rho(x \times V^n) \subset x \times N. \quad (1.14)$$

Розглянемо два випадки.

(а) Припустимо, що (x, y) є особливою точкою поля F , тобто $G(x) = 0$ і $H(x, y) = 0$. Так як $\Omega_\rho \in \mathcal{E}(F, V^{m+n})$, то, за означенням, $\Omega_\rho(x, y) = (x, y)$ і Ω_ρ є локальним дифеоморфізмом в точці (x, y) . Тоді з (1.14) випливає, що дотичний простір $T_y V^n = T_{(x,y)}(x \times V^n)$ є інваріантним відносно дотичного відображення $T_{(x,y)}\Omega_\rho$, а тому образ $T_{(x,y)}\Omega_\rho(T_x V^m)$ трансверсального простору $T_x V^m = T_{(x,y)}(V^m \times y)$ є трансверсальним до $T_y V^n$, див. рис. 1.2.1. Це якраз і

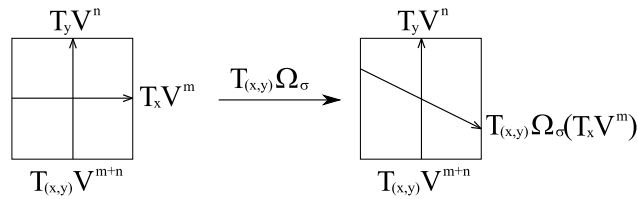


Рис. 1.2.1

означає, що дотичне відображення $T_x \Psi_{(y,\rho)} = T_x(p_M \circ \Omega_\rho)$ є ізоморфізмом, тобто $\Psi_{(y,\rho)}$ є локальним дифеоморфізмом в точці x .

(б) Припустимо, що $H(x, y) \neq 0$, тобто (x, y) є регулярною точкою для F . Тоді за наслідком 5.1.7 існують околі $W^m \subset V^m$ точки x , околі $W^n \subset V^n$ точки y і C^∞ функція зсуву $\beta : W^m \times W^n \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω_ρ , що

$$\Omega_\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}, \beta(\bar{x}, \bar{y})) = (\mathbf{G}(\bar{x}, \beta(\bar{x}, \bar{y})), H(\bar{x}, \bar{y}, \beta(\bar{x}, \bar{y}))),$$

для всіх $(\bar{x}, \bar{y}) \in W^m \times W^n$. Зокрема, $\Psi_{(y,\rho)}(\bar{x}) = \mathbf{G}(\bar{x}, \beta(\bar{x}, y))$ для кожного $\bar{x} \in W^m$. Таким чином, обмеження $\Psi_{(y,\rho)}|_{W^m}$ належить до образу відображення зсуву $Sh(\mathbf{G}, W^m) \subset \mathcal{E}(G, W^m)$, а тому $\Psi_{(y,\rho)}$ є локальним дифеоморфізмом в точці x .

2) Припустимо, що Ω має функцію зсуву (1.13). Тоді з тотожності

$$\Omega(x, y, \rho) = \mathbf{F}(x, y, \Lambda(x, y, \rho)), \quad (x, y, \rho) \in A,$$

випливає, що $\Psi(x, y, \rho) = p_m \circ \Omega(x, y, \rho) = \mathbf{G}(x, \Lambda(x, y, \rho))$. □

1.3 Гладкі функції на поверхнях

Функції Морса. Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — така $\mathcal{C}^2$ -функція, що початок координат $0 \in \mathbb{R}^n$ є критичною точкою f . Для простоти вважатимемо, що $f(0) = 0$. Тоді ряд Тейлора функції f в точці 0 починається з членів другого порядку, тобто:

$$f(x) = \frac{1}{2} Q(x) + o(|x|^2),$$

де $Q(x)$ — квадратична форма, матриця, $H(f, 0)$, якої складається з других частинних похідних f в точці 0 і називається *гессіаном* f в точці 0, тобто $H(f, 0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$. Ця точка називається *невиродженою* критичною точкою для f , якщо Q є невідродженою квадратичною формою, (або, що те ж саме, гессіан $H(f, 0)$ є невідродженою матрицею).

Відома лема М. Морса стверджує, що в околі невідродженої критичної точки існують локальні координати $y = (y_i)$, в яких $f(y) = Q(y)$, тобто f співпадає зі своїм многочленом Тейлора порядку 2. Зрозуміло, що означення невідродженості не залежить від локальних координат і, що невідроджена критична точка є ізолюваною.

Відмітимо, що лінійною заміною координат функцію f , як квадратичну форму, можна звести до суми квадратів, тобто вважати що

$$f(y_1, \dots, y_\lambda, y_{\lambda+1}, \dots, y_n) = -y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Число мінусів, λ , у такому представленні не залежить від вибору системи координат і називається *індексом* невідродженої критичної точки 0. Відмітимо, що

невироджена критична точка індексу λ функції f має індекс $n - \lambda$ для функції $g = -f$. Це показує, що індекс залежить від вибору орієнтації $\mathbb{R}$.

Нехай тепер M — гладкий многовид, P — або числова пряма $\mathbb{R}$, або коло S^1 і $f : M \rightarrow P$ — $\mathcal{C}^2$ -відображення, яке задовольняє умови (i) та (ii). Воно називається *відображенням Морса*, якщо всі його критичні точки є невинродженими. Тобто для кожної критичної точки $z \in \Sigma_f$ і деякого (а тому і довільного) локального представлення

$$f : (M, z) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\bar{f}} (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\beta} (P, f(z)), \quad (1.15)$$

точка $0 \in \mathbb{R}^n$ є невинродженою критичною точкою для $\bar{f}$, де α та β — локальні карти в точках z та $f(z)$ відповідно. Відмітимо, що в такій ситуації індекс невинродженої критичної точки може приймати два значення: λ або $n - \lambda$, в залежності від того зберігає чи змінює β орієнтацію. Якщо ж зафіксувати орієнтацію P і розглядати лише представлення (1.15), в яких β зберігає орієнтацію, то індекс невинродженої критичної точки визначений однозначно.

Нехай далі $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ — підмножина в $\mathcal{C}^\infty(M, P)$, що складається з f , які приймають постійні значення на кожній компоненті межі ∂M (але, взагалі кажучи, різні на різних компонентах).

Позначимо через $\mathcal{M}_\partial(M, P)$ підмножину в $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$, що складається з усіх відображень Морса. М. Морс довів, що $\mathcal{M}_\partial(M, P)$ є відкритою і всюди щільною в $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ відносно топології S^∞ .

Скажемо, що відображення Морса $f : M \rightarrow P$ є відображенням *загального* положення, якщо кожна критична множина рівня f містить рівно одну критичну точку. Більш того, f називатиметься *простим*, якщо кожна критична компонента деякої множини рівня f містить рівно одну критичну точку. Очевидно, кожне відображення Морса загального положення є простим.

Функції з ізольованими критичними точками. Нехай тепер $f : M \rightarrow P$ — $\mathcal{C}^\infty$ -відображення, що задовольняє наступні умови:

- (i) f приймає постійне значення на кожній компоненті межі ∂M ,
- (ii) всі критичні точки f є ізольованими і містяться в $\text{Int}M$.

Як і вище, через $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ ми позначатимемо простір всіх C^∞ -відображень $f : M \rightarrow P$, що задовольняють лише умову (i).

Множиною рівня функції $f : M \rightarrow P$ називатимемо множину виду $f^{-1}(c)$ для деякого $c \in P$. Нехай ω — або множина рівня, або її компонента зв'язності. Скажемо, ω є *критичною*, якщо вона містить критичну точку f . В протилежному випадку ω називатиметься *регулярною*.

Нехай $z \in \text{Int}M$. Тоді в деяких локальних координатах біля z в M та біля $f(z)$ в P відображення f можна розглядати як функцію

$$(M, z) \supset (\mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{\bar{f}} (\mathbb{R}, 0) \subset (P, f(z)) \quad (1.16)$$

таку, що $z = 0 \in \mathbb{R}^m$ і $\bar{f}(0) = 0 \in \mathbb{R}$.

Скажемо, що z є *локальним екстремумом* для f , якщо вона є локальним екстремумом для $\bar{f}$. Зафіксуємо раз і назавжди орієнтацію P і обмежимося лише такими представленнями (1.16), для яких вкладення $\mathbb{R} \subset P$ зберігає орієнтацію. Тоді z називатиметься *локальним максимумом (мінімумом)* f , якщо ним є $0 \in \mathbb{R}^m$ для $\bar{f}$.

Структура функції в околі ізольованої критичної точки на поверхні.. Нехай тепер M — поверхня (2-вимірний многовид) і $f : M \rightarrow P$ — гладке відображення, що задовольняє умови (i) та (ii). Припустимо, що $z \in \text{Int}M$ є ізольованою критичною точкою f . Тоді існує такий паросток *гомеоморфізму* $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, що $\bar{f} \circ h(z) = \pm|z|^2$, якщо 0 є локальним екстремумом, [22], або $\bar{f} \circ h(z) = \text{Re}(z^n)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, в протилежному випадку, [118]. Якщо 0 не є локальним екстремумом для f , то число n не залежить від часткового вибору h , і в цьому випадку z називатиметься (*узагальненим*) n -сідлом.

Кожній ізольованій критичній точці $z \in \Sigma_f$ припишемо число $\text{ind}_f(z)$ наступним чином. Якщо z є локальним екстремумом, то покладемо $\text{ind}_f(z) = 1$. Якщо

ж $z \in n$ -сідлом, то покладемо $\text{ind}_f(z) = 1 - n$. Тоді має місце такий результат, що є наслідком теореми Пуанкаре-Хопфа.

Теорема 1.3.1. *Якщо f задовольняє умови (i) та (ii), то*

$$\chi(M) = \sum_{z \in \Sigma_f} \text{ind}_f(z).$$

Функції Морса на поверхнях. Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення Морса. Тоді f може мати лише три типи критичних точок: локальні мінімуми, 2-сідла та локальні максимуми, відповідно індексів 0, 1 та 2. Ці індекси не слід плутати з індексами ind_f визначеними вище. Позначимо через $c_i = c_i(f)$, $i = 0, 1, 2$, число критичних точок f індексу i . Тоді теорема 1.3.1 перетворюється на так звану рівність Морса:

$$\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2. \quad (1.17)$$

Шарування Δ_f функції f . Далі ми знову вважатимемо, що M — компактна поверхня і $f : M \rightarrow P$ — відображення, яке задовольняє умови (i) та (ii).

Тоді f визначає на M одновимірне шарування Δ_f з особливостями: *підмножина $\omega \subset M$ буде шаром шарування Δ_f тоді і лише тоді, коли ω є або критичною точкою f , або зв'язною компонентою множини $f^{-1}(c) \setminus \Sigma_f$ для деякого $c \in P$. Таким чином, шари Δ_f — одновимірні підмноговиди в M та особливі точки f .*

Приклад шарування Δ_f біля локальних екстремумів, 1-, та 3-сідел, зображений на Рис. 1.3.1. Відповідні критичні компоненти ліній рівня f зображені жирними лініями.

Позначимо через Δ_f^{reg} об'єднання всіх шарів Δ_f , гомеоморфних до кола, а через Δ_f^{cr} — об'єднання всіх інших шарів. Тоді з властивості (i) випливає, що $\partial M \subset \Delta_f^{\text{reg}}$.

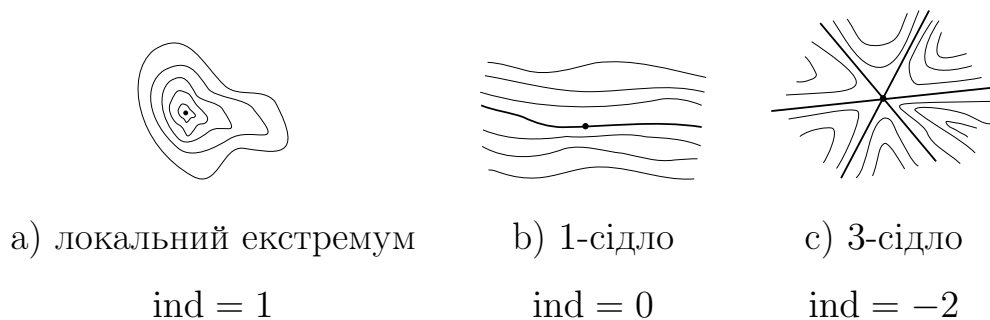


Рис. 1.3.1: Ізольовані критичні точки

Шари в Δ_f^{reg} (відповідно в Δ_f^{cr}) називатимуться *регулярними* (відповідно *критичними*). Аналогічно, зв'язні компоненти Δ_f^{reg} (відп. Δ_f^{cr}) називатимемо *регулярними* (*критичними*) компонентами Δ_f .

Очевидно, що кожен критичний шар Δ_f^{cr} або гомеоморфний відкритому інтервалу, або є критичною точкою f . Якщо f має хоча б одну критичну точку або $\partial M = \emptyset$, то кожна регулярна компонента Δ_f дифеоморфна до $S^1 \times (0, 1)$.

Через $\mathcal{D}(\Delta_f)$ позначатимемо групу дифеоморфізмів h поверхні M таких, що $h(\omega) = \omega$ для кожного шару ω шарування Δ_f , а через $\mathcal{D}^+(\Delta_f)$ — підгрупу в $\mathcal{D}(\Delta_f)$, що складається з дифеоморфізмів, які зберігають орієнтацію кожного одновимірного шару Δ_f .

КР-граф. Нехай $f : M \rightarrow P$ — гладка функція, що задовольняє умови (i) та (ii) сформульовані на початку §1.3.

Розглянемо розбиття M на зв'язні компоненти ліній рівня f . Тоді відповідний простір, який ми надалі позначатимемо через Γ_f , має структуру одновимірного CW-комплексу і називається *графом Кронрода-Ріба*, або просто КР-графом f , див. Рис. 1.3.2. Цей граф виявляється дуже корисним для вивчення функцій, див. [57–59, 72, 132, 133, 150].

Таким чином, f розкладається у композицію відображень

$$f = f^* \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{f^*} P,$$

де $p_f : M \rightarrow \Gamma_f$ — фактор-відображення, а f^* — індуковане відображення.

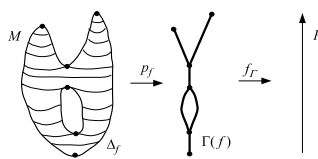


Рис. 1.3.2: Шарування Δ_f та КР-граф Γ_f функції f

Відмітимо, що вершини Γ_f мають наступні три типи: (а) зв'язні компоненти межі ∂M ; (б) локальні екстремуми f , тобто критичні точки індексів 0 та 2; (с) критичні компоненти ліній рівня f .

Очевидно, що ребра (відп. вершини) графа Γ_f є образами регулярних (відп. критичних) компонент Δ_f . Вершини, що відповідають компонентам межі ∂M називатимемо $\circ$ -вершинами і позначатимемо на КР-графі колами $\circ$.

Назвемо відображення Морса f *відображенням загального положення*, якщо кожна лінія рівня f містить не більше однієї критичної точки. Скажемо, що f є *простим*, якщо кожна компонента кожної лінії рівня f містить не більше однієї критичної точки. Таким чином кожне відображення Морса загального положення є простим.

Якщо M є орієнтовною, то КР-граф простого відображення Морса f містить лише вершини степеня 1 та 3. Якщо ж M — неорієнтовна, то Γ_f також може мати вершини степеня 2. Ми називатимемо їх $*$ -вершинами і позначатимемо на КР-графі зірочкою $*$.

Нехай $f, g : M \rightarrow P$ — відображення Морса. Під *ізоморфізмом* між їх КР-графами розумітимемо гомеоморфізм $\Gamma_g \rightarrow \Gamma_f$, що зберігає орієнтацію ребер та множини $\circ$ - та $*$ -вершин.

Скажемо, що відповідні КР-відображення f^* та g^* *еквівалентні*, якщо існує зберігаючий орієнтацію дифеоморфізм $\phi : P \rightarrow P$ та ізоморфізм $\alpha : \Gamma_g \rightarrow \Gamma_f$

такі, що в наступній діаграмі правий квадрат є комутативним:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{p_g} & \Gamma_g & \xrightarrow{g^*} & P \\
 h \downarrow & & \alpha \downarrow & & \phi \downarrow \\
 M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f & \xrightarrow{f^*} & P
 \end{array} \tag{1.18}$$

Говоритимемо, що f та g *еквівалентні*, якщо існує такий дифеоморфізм h поверхні M , що $f \circ h = \phi \circ g$. В цьому випадку існує єдина еквівалентність α між КР-відображеннями f та g така, що вся діаграма (1.18) є комутативною.

Наступна лема добре відома.

Лема 1.3.2. [59, 150, 156, 175]. *Два прості відображення Морса f та g , які мають еквівалентні КР-відображення, є еквівалентними.* $\square$

1.4 Дія групи дифеоморфізмів

Відмітимо, що група $\mathcal{D}(M)$ дифеоморфізмів M природно діє справа на просторі $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ за формулою: якщо $h \in \mathcal{D}(M)$ і $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$, то

$$f \cdot h = f \circ h.$$

Для $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ нехай $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\}$ — *стабілізатор* і $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}$ — *орбіта* функції f відносно цієї дії.

Для $r \geq 0$ позначимо через $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$ — компоненту лінійної зв'язності тотожного відображення id_M в $\mathcal{S}(f)$ відносно топології W^r . Таким чином $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$ складається з усіх дифеоморфізмів h , що є r -ізотопними до id_M в $\mathcal{S}(f)$. Аналогічно можна визначити тотожні компоненти $\mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r$ та $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r$.

Лема 1.4.1. *Якщо f задовольняє умови (i) та (ii), то*

$$\mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r, \quad 0 \leq r \leq \infty.$$

Доведення. Так як $\mathcal{D}(\Delta_f) \subset \mathcal{D}^+(\Delta_f) \subset \mathcal{S}(f)$, то

$$\mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r \subset \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r.$$

Таким чином досить довести, що $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r \subset \mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r$.

Нехай $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$. Тоді існує така r -ізотопія $F : M \times I \rightarrow M$, що $F_0 = \text{id}_M$, $F_1 = h$ і $F_t \in \mathcal{S}(f)$ тобто $f \circ F_t = f$, $t \in I$.

Тому $F_t(\Sigma_f) = \Sigma_f$ і $F_t(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$ для всіх $c \in P$. Більш того, так як множина Σ_f є дискретною і $F_0 = \text{id}_M$, то $F_t(z) = z$ для кожної точки $z \in \Sigma_f$ і F_t також лишає інваріантними зв'язні компоненти $f^{-1}(c) \setminus \Sigma_f$ та зберігає їх орієнтації. Тому $F_t \in \mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r$. Зокрема, $h = F_1 \in \mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r$. $\square$

Лема 1.4.2. (1) Якщо $\mathcal{D}^+(\Delta_f) \neq \mathcal{D}(\Delta_f)$, то $\mathcal{D}(\Delta_f)/\mathcal{D}^+(\Delta_f) \approx \mathbb{Z}_2$. Іншими словами, кожен $h \in \mathcal{D}(\Delta_f)$ одночасно зберігає або змінює орієнтації всіх одновимірних шарів Δ_f .

(2) Нехай M — орієнтовна поверхня і $h \in \mathcal{S}(f)$ — такий дифеоморфізм, що $h(\omega) = \omega$ для деякого одновимірного шару ω шарування Δ_f . Тоді h зберігає орієнтацію M у тому і лише у тому випадку, коли h зберігає орієнтацію ω . Зокрема,

$$\mathcal{D}^+(\Delta_f) = \mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}^+(M). \quad (1.19)$$

Доведення. (1) Нехай $h \in \mathcal{D}(\Delta_f)$. Позначимо через A_+ (відп. A_-) об'єднання всіх одновимірних шарів у яких h зберігає (відп. змінює) орієнтацію. Тоді $A_+ \cap A_- = \emptyset$, а $A_+ \cup A_- = M \setminus \Sigma_f$ є зв'язною множиною, так як множина Σ_f критичних точок f є дискретною. Неважко бачити, що A_+ та A_- є відкритими, а тому одна з цих множин порожня, а інша співпадає з $M \setminus \Sigma_f$. Таким чином $h \in \mathcal{D}(\Delta_f)$ одночасно зберігає або змінює орієнтації всіх шарів шарування Δ_f .

(2) Не втрачаючи загальності, можна вважати, що h має нерухому точку $z \in \omega$. Тоді h зберігає орієнтацію M у тому і лише у тому випадку, коли зберігає орієнтацію відповідне дотичне відображення $T_z h : T_z M \rightarrow T_z M$

Нехай v — довільний ненульовий дотичний вектор до ω в точці z і $\text{grad} f(z)$ — вектор градієнт f в точці z відносно якої-небудь ріманової метрики на M . Тоді пара $(\text{grad} f(z), v)$ утворює базис $T_z M$. Так як $f \circ h = f$, то $Th(\text{grad} f(z)) =$

$\text{grad}f(z)$. Більш того, з умови $h(\omega) = \omega$ випливає, що $Th(v) = \alpha v$ для деякого $\alpha \neq 0$. Тому h зберігатиме орієнтацію $T_z M$ тоді і лише тоді, коли $\alpha > 0$, тобто коли h зберігає орієнтацію ω . $\square$

Дія $\mathcal{S}(f)$ на Γ_f . Відмітимо, що кожен дифеоморфізм $h \in \mathcal{S}(f)$ переставляє шари Δ_f і навіть індукує гомеоморфізм Γ_f , а отже ми маємо природний гомоморфізм $\lambda : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$.

Очевидно, що $h \in \ker(\lambda)$ тоді і лише тоді, коли h зберігає кожен регулярний шар Δ_f^{reg} . Тому $\mathcal{D}^+(\Delta_f) \subset \mathcal{D}(\Delta_f) \subset \ker(\lambda)$. Більш того, твердження (1.19) леми 1.4.2 показує, що для орієнтовних поверхонь $\mathcal{D}^+(\Delta_f) = \ker(\lambda)$.

З іншого боку, легко побудувати приклад функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на неорієнтовній поверхні і дифеоморфізму $h \in \ker(\lambda)$, який переставляє критичні шари Δ_f .

Лема 1.4.3. *Мають місце наступні рівності:*

$$\mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M),$$

$$\mathcal{D}^+(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f) = \mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f) = \ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f).$$

Доведення. Нехай $h \in \ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$. Тоді, h зберігає всі регулярні шари Δ_f та їх орієнтацію і є ізотопним до id_M . Тому за теоремою 8.5.1 h також зберігає всі критичні шари та їх орієнтацію, тобто $h \in \mathcal{D}^+(\Delta_f)$. $\square$

Лема 1.4.4. 1) *Припустимо, що виконується одна з наступних умов:*

- (i) M є орієнтовною;
- (ii) f має хоча б одну критичну точку, що є не 1-сідлом, див. Рис. 1.3.1 b).

Тоді

$$\ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f).$$

2) *Якщо жодна з вказаних умов не виконується, то $M = K$ — це пляшка Клейна, а $f : K \rightarrow S^1$ — відображення, кожна критична точка z якого є 1-сідлом. Таким чином, з топологічної точки зору, f є розшаруванням, кожен*

шар якого, є незв'язним об'єднанням кіл. Тоді можна побудувати приклад функції f , що належить до $(\mathcal{S}(f) \setminus \ker(\lambda)) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f)$.

Доведення. 1) Покажемо, що

$$\ker(\lambda) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f) \supset \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f).$$

Нехай $h \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f)$ і $\lambda(h)$ — автоморфізм графа Γ_f , індукований h . Потрібно довести, що $\lambda(h) = \text{id}_{\Gamma_f}$ і що h зберігає орієнтацію всіх регулярних шарів Δ_f .

Спочатку доведемо, що $\lambda(h) = \text{id}_{\Gamma_f}$. Відмітимо, що h індукує тотожний автоморфізм першої групи гомологій $H_1(\Gamma_f)$. Дійсно, очевидно, що існує таке відображення $s_f : \Gamma_f \rightarrow M$, що $s_f \circ p_f = \text{id}_{\Gamma_f}$, див. напр. [156]. Тобто наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_{\Gamma_f} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \Gamma_f & \xrightarrow{s_f} & M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f \\ \lambda(h) \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow \lambda(h) \\ \Gamma_f & \xrightarrow{s_f} & M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma_f \\ & & \text{id}_{\Gamma_f} & & \end{array}$$

Тоді на рівні перших гомологій отримуємо комутативну діаграму, в якій рядки є точними:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(\Gamma_f) & \xrightarrow{s_f} & H_1(M, \Sigma_f) & \xrightarrow{p_f} & H_1(\Gamma_f) \longrightarrow 0 \\ & & \lambda(h)_1 \downarrow & & \downarrow h_1 = \text{id} & & \downarrow \lambda(h)_1 \\ 0 & \longrightarrow & H_1(\Gamma_f) & \xrightarrow{s_f} & H_1(M, \Sigma_f) & \xrightarrow{p_f} & H_1(\Gamma_f) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Так як дифеоморфізм h ізотопний до id_M відносно Σ_f , то $h_1 = \text{id}_{H_1(M, \Sigma_f)}$, а тому $\lambda(h)_1 = \text{id}_{H_1(\Gamma_f)}$, причому h зберігає вершини КР-графа Γ_f функції f . Звідси випливає, що $\lambda(h) = \text{id}_{\Gamma_f}$.

Покажемо, що кожна з умов (i) та (ii) гарантує, що h зберігає орієнтацію регулярних шарів Δ_f . Згідно твердження (1) леми 1.4.2 достатньо показати, що h зберігає орієнтацію хоча б одного шару.

(i). Нехай M є орієнтовною. Так як h ізотопний до тотожного відображення, то h зберігає орієнтацію M , а тому з твердження (2) леми 1.4.2 випливає, що h зберігає орієнтацію всіх шарів Δ_f .

(ii) Припустимо, що f має хоча б одну критичну точку, що є не 1-сідлом.

Якщо f має локальний екстремум z , то h зберігає орієнтацію в точці z , а отже і орієнтацію всіх шарів Δ_f в декому околі z .

Отже нехай f має лише сідла, причому існує n -сідло y з $n \geq 2$. Згідно (i) можна вважати, що M є неорієнтовною. Нехай γ — довільний регулярний шар Δ_f , тобто проста замкнута крива, на якій f приймає постійне значення і $h(\gamma) = \gamma$. Припустимо також, що h змінює орієнтацію γ . Це означає, що γ ізотопна собі із зміненою орієнтацією. Тоді лише два наступні випадки.

а) γ обмежує 2-диск D . Так як $f|_D : D \rightarrow S^1$ гомотопне нулю і f приймає постійне значення на межі $\gamma = \partial D$, то всередині D повинен бути деякий локальний екстремум z функції f , що суперечить припущенню.

б) γ не обмежує 2-диску. Відмітимо, що негомотопні нулю прості замкнуті криві, які є ізотопні собі із зміненою орієнтацією, існують лише на пляшці Клейна. Таким чином, $M = K$. Так як $\chi(M) = 0$, індекси всіх сідел ≤ 0 , причому індекс $\text{ind}_f(y) = -1 < 0$, то згідно теореми 1.3.1 повинна існувати критична точка з додатним індексом, тобто локальний екстремум. Але це протирічить припущенню.

2) Якщо не виконана жодна з умов (i) та (ii), то M є неорієнтовною, а всі критичні точки f є 1-сідлами, тобто мають індекси 0. Тому з теореми 1.3.1 випливає, що $\chi M = 0$, а тому M є або стрічкою Мьобіуса $M\ddot{o}$, або пляшкою Клейна K . Якби $M = M\ddot{o}$, то з того, що f приймає постійне значення на ∂M випливало б, що f має локальний екстремум, що суперечить припущенню. Тому $M = K$ і $P = S^1$, інакше f мало б локальні екстремуми.

Нехай $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — одиничне коло в комплексній площині і

$\phi : S^1 \times I \rightarrow S^1$ — ізотопія, визначена за формулою: $\phi(z, t) = e^{2\pi i t} z$. Нехай далі $f : K \rightarrow S^1$ — стандартне розшарування на кола. Тоді ізотопія ϕ накривається такою ізотопією $h : K \times I \rightarrow K$, що $h_0 \in \text{id}_K$ і $f \circ h_t = \phi_t \circ f$. Так як $\phi_1 = \text{id}_{S^1}$, то $f \circ h_1 = f$, тобто $h \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, \Sigma_f)$. З іншого боку, легко бачити, що h_1 змінює орієнтації всіх компонент зв'язності всіх шарів $f^{-1}(c)$, $c \in S^1$, шарування Δ_f . Іншими словами, $h \notin \ker(\lambda)$. $\square$

1.5 Групи дифеоморфізмів поверхонь

Група гомеотопій поверхні з межею. Нехай $\hat{M}$ — зв'язна замкнута орієнтовна поверхня і $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — скінченна множина попарно різних точок з $\hat{M}$. Тоді *розширеною групою гомеотопій* $\mathcal{M}_n(M)$ поверхні M називають групу класів ізотопії дифеоморфізмів $\hat{M}$, що лишають X інваріантним. *Фарбованою групою гомеотопій* $\mathcal{PM}_n(M)$ поверхні M називається група класів ізотопії дифеоморфізмів $\hat{M}$, що є нерухомими на X . Групи $\mathcal{M}_0(\hat{M})$ та $\mathcal{PM}_0(\hat{M})$ позначатимемо через $\mathcal{M}(\hat{M})$ та $\mathcal{PM}(\hat{M})$ відповідно.

Нехай M — зв'язна поверхня з межею ∂M , що складається з n компонент зв'язності $V_1, \dots, V_n$. Розглядаючи ці компоненти як «точки» ми можемо отождествити групи $\mathcal{M}(M)$ та $\mathcal{PM}(M)$ з $\mathcal{M}_n(\hat{M})$ та $\mathcal{PM}_n(\hat{M})$ відповідно.

Нагадаємо множини твірних для $\mathcal{M}(M)$ та $\mathcal{PM}(M)$ описані в [9, 38] для орієнтовних поверхонь та в [55] для неорієнтовних.

Орієнтовні поверхні. Припустимо, що M орієнтовна поверхня. Розглянемо наступні три типи дифеоморфізмів M :

- (1) Нехай $\mathcal{D}(M)$ — дифеоморфізм, що змінює орієнтацію M .
- (2) Нехай $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \epsilon_i$ — прості замкнуті криві, зображені на Рис. 1.5.1а), де жирні крапки позначають зв'язні компоненти межі ∂M розділені на дві частини — додатні та від'ємні. Будемо говорити, що ці криві утворюють *конфігурацію* $\mathcal{C}$. Позначимо через $t_{\alpha_i}, t_{\beta_i}, t_{\gamma_i}, t_{\delta_i}, t_{\epsilon_i}$ відповідні скручування Дена.

(3) Для кожної пари $i < j = 1, \dots, n$ нехай σ_{ij} — проста замкнута крива, що розбиває M на дві компоненти так, що одна з них є сферою з трьома дірками, одна з яких — це σ_{ij} , а дві інші — компоненти V_i та V_j межі ∂M , див. Рис. 1.5.1b). Нехай b_{ij} — дифеоморфізм M з носієм в S , що переставляє V_i та V_j . Очевидно, що b_{ij}^2 є скручуванням Дена $t_{\sigma_{ij}}$ уздовж σ_{ij} .

Теорема 1.5.1. [9,38]. Група $\mathcal{M}(M)$ породжується класами ізотопій наступних дифеоморфізмів:

- (i) $\{\mathcal{D}(M), b_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ if $g = 0$;
- (ii) $\{t_l, \mathcal{D}(M), b_{ij} : l \in \mathcal{C}, i, j = 1, \dots, n\}$ if $g \geq 1$.

Група $\mathcal{PM}(M)$ породжується класами ізотопій наступних дифеоморфізмів:

- (i) $\{\mathcal{D}(M), b_{ij}^2 = t_{\sigma_{ij}} : i, j = 1, \dots, n\}$ if $g = 0$;
- (ii) $\{t_l, \mathcal{D}(M) : l \in \mathcal{C}, i, j = 1, \dots, n\}$ if $g \geq 1$.

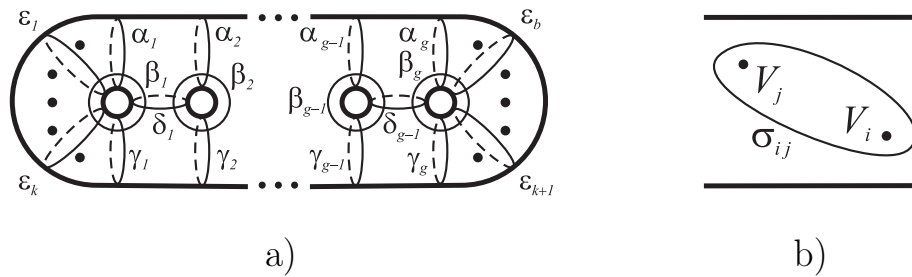


Рис. 1.5.1: Конфігурація $\mathcal{C}$. Орієнтований випадок

Неорієнтовні поверхні. Припустимо, що M є неорієнтовною роду g , див. Рис. 1.5.1, де затемнені диски позначають вклеєні стрічки Мьобіуса.

Розглянемо наступні чотири типи дифеоморфізмів M :

(1) Нехай y — Y -дифеоморфізм M . Якщо $g \geq 3$, ми додатково будемо припускати, що y^2 є скручуванням Дена уздовж двосторонньої розділяючої кривої обидві компоненти доповнення до якої є неорієнтованими поверхнями.

(2) та (3) Аналогічно до орієнтовного випадку, ми визначимо конфігурацію $\mathcal{C}$ простих замкнутих кривих $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \epsilon_i$, див. Рис. 1.5.1, кривих σ_{ij} , та відповідні скручування Дена та дифеоморфізми b_{ij} .

(4) Нехай ν_i — граничний зсув компоненти межі V_i уздовж петлі μ якщо g є непарним і уздовж петлі μ_1 , якщо g є парним числом, див. Рис. 1.5.2. Також якщо g є парним, то позначимо через ω_i граничний зсув компоненти V_i уздовж петлі μ_2 .

Теорема 1.5.2. [55]. Група $\mathcal{M}(M)$ породжується наступними дифеоморфізмами

- (i) $\{\nu_k, b_{ij} : i, j, k = 1, \dots, n, i < j\}$, якщо $g = 1$;
- (ii) $\{t_{\beta_0}, y, \nu_k, b_{ij} : i, j, k = 1, \dots, n, i < j\}$, якщо $g = 2$;
- (iii) $\{t_l, y, \nu_k, b_{ij} : l \in \mathcal{C}, i, j, k = 1, \dots, n, i < j\}$, якщо $g \geq 3$ і є непарним;
- (iv) $\{t_l, y, \nu_k, \omega_k, b_{ij} : l \in \mathcal{C}, i, j, k = 1, \dots, n, i < j\}$, якщо $g \geq 4$ і є парним.

Замінюючи кожен дифеоморфізм b_{ij} на $b_{ij}^2 = t_{\sigma_{ij}}$ ми отримаємо систему твірних для $\mathcal{PM}(M)$.

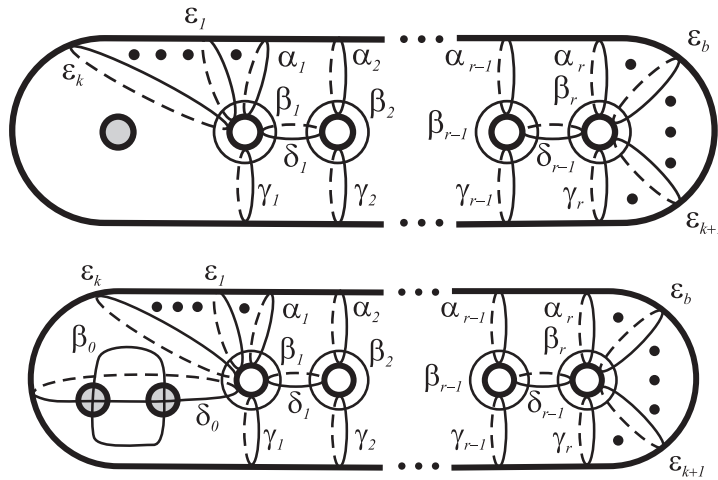


Рис. 1.5.1: Конфігурація $\mathcal{C}$ для $g = 2r + 1$ та $g = 2r + 2$. Неорієнтовний випадок

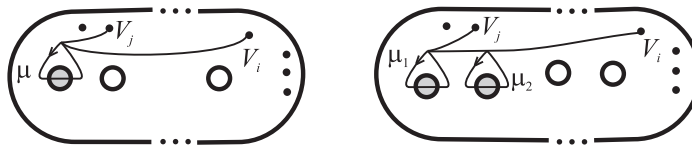


Рис. 1.5.2: Граничні зсуви для $g = 2r + 1$ та $g = 2r + 2$

Група Тореллі $\mathcal{T}(M)$. Нехай M — замкнута орієнтовна поверхня. Тоді гру-

пою *Тореллі* поверхні M називають підгрупу $\mathcal{T}(M)$ в $\mathcal{PM}(M) = \mathcal{M}(M)$, що складається з дифеоморфізмів, які тривіально діють на групі гомологій $H_1(M)$. Очевидно, що $\mathcal{T}(M)$ є нормальною підгрупою $\mathcal{PM}(M)$.

Нехай тепер $\partial M \neq \emptyset$. Заклеїмо кожну компоненту межі ∂M 2-диском і позначимо отриману поверхню через $\hat{M}$. Тоді ми отримаємо епіморфізм $j : \mathcal{PM}(M) \rightarrow \mathcal{PM}(\hat{M})$, індукований вкладенням $M \subset \hat{M}$, див. [9]. Визначимо групу Тореллі $\mathcal{T}(M) \subset \mathcal{PM}(M)$ поверхні M як прообраз $j^{-1}(\mathcal{T}(\hat{M}))$.

Наступна теорема описує твірні групи $\ker j$.

Теорема 1.5.3. [9,10]. *Нехай α_i та β_i — криві конфігурації $\mathcal{C}$ на M . Для кожної компоненти V_j межі ∂M нехай α_{ik} (β_{ik}) — проста замкнута крива, яка разом з α_i (β_i) обмежує в M циліндр з діркою V_i . Тоді ядро j породжується наступними дифеоморфізмами: $s_{ik} = \alpha_i \circ \alpha_{ik}^1$ та $r_{ik} = \beta_i \circ \beta_{ik}^1$.*

Теорема 1.5.4. [11,53,103,117]. *Група Тореллі $\mathcal{T}(M)$ поверхні M породжена наступними типами дифеоморфізмів:*

- (а) *скручування Денас уздовж простих замкнутих кривих, що розбивають M (якщо $g = 2$ то такі скручування породжують всю групу $\mathcal{T}(M)$, [103]);*
- (б) *добутки скручувань Дена виду $t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2}^{-1}$, де прості замкнуті криві γ_1 та γ_2 є орієнтовнимим, диз'юнктними та гомологічними.*

Доведення. Ця теорема була доведена для замкнутих поверхонь [117] та поверхонь, межа яких є непорожньою і зв'язною [53]. В дійсності вона має місце для довільних орієнтовних поверхонь завдяки наступним аргументам.

Нехай $t \in \mathcal{T}(M)$. Так як $\hat{M}$ є замкнутою, то $j(t)$ породжується дифеоморфізмами типів (а) та (б). Відмітимо, що відповідні криві, можна вибрати так, щоб вони лежали в M , а тому $j(t)$ індукує такий дифеоморфізм t_1 поверхні M , що $t_1^{-1} \circ t \in \ker j$. За теоремою 1.5.3 цей дифеоморфізм породжений дифеоморфізмами s_{ik} та r_{ik} , які, очевидно, належать типу (б). □

Гомотопічний тип групи $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ для компактних поверхонь. Нехай M — компактна поверхня і $x_1, \dots, x_n \subset \text{Int}M$ — n попарно різних точок. Позначимо через $\mathcal{D}(M, n)$ — групу дифеоморфізмів M , що лишають інваріантною множину цих точок. Наділимо $\mathcal{D}(M, n)$ топологією W^∞ . Таким чином, якщо n — число критичних точок функції f , то $\mathcal{D}(M, n) = \mathcal{D}(M, \Sigma_f)$ і $\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M, 0)$.

Гомотопічний тип груп $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ для випадку коли M є орієнтовною і замкнутою описаний в статті С. J. Earle та J. Eells [26]. Для довільних компактних поверхонь M гомотопічний тип $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ обчислений в роботах С. J. Earle, A. Schatz [27] та A. Gramain [40]. Ці результати легко узагальнюються на випадок груп $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$, при цьому точки x_i замінюються на компоненти межі.

Теорема 1.5.5. *Нехай M — зв'язна компактна поверхня і M_b — поверхня, отримана стягуванням b зв'язних компонент ∂M в точки. Тоді має місце гомотопічна еквівалентність $\mathcal{D}_{\text{id}}(M_b, n + b) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$, тобто кожену точку можна замінити на дірку. Наприклад,*

$$\mathcal{D}_{\text{id}}(S^2, 2) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(D^2, 1) \sim \mathcal{D}_{\text{id}}(S^1 \times I).$$

Таким чином достатньо обчислити гомотопічні типи $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$. Ця інформація зібрана в наступній таблиці 1.1, де $M\ddot{o}$ позначає стрічку М'юбіуса, а K — пляшку Клейна.

M	$S^2, \mathbb{R}P^2$	$D^2, S^1 \times I, M\ddot{o}, K$	T^2	інші випадки
Гомотопічний тип $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$	$SO(3)$	S^1	T^2	точка

Табл. 1.1: Гомотопічний тип $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$

Зокрема, мають місце такі твердження:

- (а) простір $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ стягуваний тоді і тільки тоді, коли $\chi(M) < 0$;
- (б) $\pi_2 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = 0$ і $\pi_k \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \pi_k M$ для всіх $k \geq 3$. Таким чином, $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ є асферичним для асферичних поверхонь (тобто всіх поверхонь крім $S^2, \mathbb{R}P^2$).

(с) якщо група $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ стягувана, то для кожного $n \geq 1$ група $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ також стягувана.

Лема 1.5.6. Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення, що задовольняє умови (і) та (іі) і n — загальне число критичних точок f . Якщо f має хоча б одну сідлову точку, то група $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ є стягуваною.

Доведення. За умовою, $n \geq 1$. Тому, якщо $\chi(M) \leq 0$, то стягуваність групи $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ випливає з теореми 1.5.5. Отже досить розглянути випадок, коли $\chi(M) \geq 1$, тобто коли $M = S^2$, D^2 , або $\mathbb{R}P^2$.

Тоді відображення f гомотопне нулю, а тому воно має точки максимуму і мінімуму. Тому для S^2 та $\mathbb{R}P^2$ число критичних точок повинно бути не меншим за 3, а для D^2 — не меншим 2. У всіх цих випадках, група $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, n)$ є стягуваною згідно теореми 1.5.5. □

1.6 Висновки

В даному розділі дисертаційної роботи були сформульовані деякі означення та теореми, що є важливими для розуміння наступних розділів, і які використовуватимуться для доведення результатів дисертації.

Розділ 2 ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ

В цьому розділі вводиться поняття відображення зсуву для (локальних) потоків, векторних полів та паростків векторних полів, яке вперше було розглянуто в [70]. Ми вивчаємо прості властивості ядра та образа відображення зсуву, а також даємо необхідну і достатню умову того, що зсув буде дифеоморфізмом.

2.1 Відображення зсуву для потоків

Неперервні потоки. Нехай M — топологічний простір і $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ — неперервний потік на M . Тоді для кожної підмножини $V \subset M$ можна визначити відображення $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(V, M)$ за формулою:

$$\varphi_{F,V}(\gamma)(x) = \mathbf{F}(x, \gamma(x)), \quad (2.1)$$

для $\gamma \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R})$ і $x \in V$. Назвемо його *відображенням зсуву уздовж орбіт* потоку $\mathbf{F}$ на множині V .

Таким чином, відображення $\varphi_{F,V}(\gamma)$ «зсовує» кожну точку x уздовж її орбіти o_x на час $\gamma(x)$, який неперервно залежить від x . Якщо $\gamma \equiv t$ — постійна функція, то $\varphi_{F,V}(\gamma)$ співпадає з обмеженням відображення потоку $\mathbf{F}_t$ на V .

Локальні $\mathcal{C}^r$ -потоки. Більш загально, нехай $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \mathcal{U} \rightarrow M$ — локальний потік класу $\mathcal{C}^r$. Для кожного $\mathcal{C}^r$ -підмноговиду $V \subset M$ позначимо через $\text{func}(F, V)^r$ підмножину в $\mathcal{C}^r(V, \mathbb{R})$, що складається з функцій $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$, графіки яких містяться в $\mathcal{U}$, тобто

$$\text{func}(F, V)^r = \{\alpha \in \mathcal{C}^r(V, \mathbb{R}) \mid (x, \alpha(x)) \in \mathcal{U}, x \in V\}.$$

Тоді можна визначити відображення зсуву для локального потоку $\mathbf{F}$ за аналогічною формулою:

$$\varphi_{F,V}^r : \mathcal{C}^r(V, \mathbb{R}) \supset \text{func}(F, V)^r \longrightarrow \mathcal{C}(V, M), \quad \varphi_{F,V}^r(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)).$$

Зокрема відображення зсуву можна визначити для векторного поля.

Образ відображення зсуву. Образ $\varphi_{F,V}^r$ в $\mathcal{C}^r(V, M)$ позначатимемо через $Sh(F, V)^r$:

$$Sh(F, V)^r := \varphi_{F,V}^r(\text{func}(F, V)^r) \subset \mathcal{C}^r(V, M).$$

Лема 2.1.1. 1) $Sh(F)$ є піднапівгрупою в $\mathcal{C}(M, M)$, а перетин $Sh(F) \cap \mathcal{H}(M)$ є підгрупою в $\mathcal{H}(M)$.

2) Більш загально, нехай $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(M, M)$ — піднапівгрупа і $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ — адитивна підгрупа, що задовольняють умови:

- (а) $\mathcal{A}$ є інваріантною відносно правої дії $\mathcal{G}$, тобто $\alpha \circ g \in \mathcal{A}$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ і $g \in \mathcal{G}$;
- (б) $\varphi_F(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$;
- (с) $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}(M)$ є підгрупою в $\mathcal{H}(M)$.

Тоді $\varphi_F(\mathcal{A})$ — піднапівгрупа в $\mathcal{C}(M, M)$, а $\varphi_F(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}(M)$ — підгрупа.

Доведення. 1) Нехай $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$, $f = \varphi_F(\alpha)$, $g = \varphi_F(\beta)$ і $h = \varphi_F(\gamma)$, причому $h \in \mathcal{H}(M)$. Потрібно показати, що $f \circ g$ і $h^{-1} \in Sh(F)$. Розглянемо функції

$$\sigma_{f \circ g} = \alpha \circ g + \beta, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{h^{-1}} = -\gamma \circ h^{-1}. \tag{2.3}$$

Тоді легко перевірити, що $\varphi_F(\sigma_{f \circ g}) = f \circ g$ і $\varphi_F(\sigma_{h^{-1}}) = h^{-1}$.

2) Припустимо, що $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$. Тоді з умови (б) випливає, що $f, g \in \mathcal{G}$ і $h \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}(M)$. Для доведення твердження 2) досить показати, що $\sigma_{f \circ g}, \sigma_{h^{-1}} \in \mathcal{A}$.

З (а) випливає, що $\alpha \circ g \in \mathcal{A}$, а отже $\sigma_{f \circ g} \in \mathcal{A}$. Крім того, з (с) отримуємо, що $h^{-1} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}(M)$, а тому з (а) отримуємо, що $\sigma_{h^{-1}} \in \mathcal{A}$. □

Наслідок 2.1.2. Якщо M є C^r -многовидом, а потік $\mathbf{F}$ належить класу C^r , то $Sh(F)^r$ є напівгрупою, а $Sh(F)^r \cap \mathcal{D}^r(M)$ — групою.

2.2 Ядро відображення зсуву

Нехай $i_V : V \subset M$ відображення включення. Множина

$$P(\mathbf{F}, V)^r := (\varphi_{F,V}^r)^{-1}(i_V)$$

назватиметься *ядром* відображення зсуву $\varphi_{F,V}^r$. Таким чином, $\theta \in C^r(V, \mathbb{R})$ належить до $P(V)^r$ тоді і лише тоді, коли

$$\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x, \quad \forall x \in V.$$

Тому такі функції називатимемо *функціями періодів* або просто *P-функціями* відносно потоку $\mathbf{F}$ на V .

Зауваження 2.2.1. Якщо зрозуміло, про який потік $\mathbf{F}$ йде мова, то ми позначатимемо $P(\mathbf{F}, V)^r$ через $P(V)^r$. Більш того, в цьому розділі для $r = 0$ множини $P(V)^0$ та $Sh(F, V)^0$ позначатимуться через $P(V)$ та $Sh(F, V)$ відповідно, а відображення $\varphi_{F,V}^0$ — через $\varphi_{F,V}$.

В наступних розділах ми розглядатимемо лише C^∞ -відображення і там $P(V)$ та $Sh(F, V)$ позначатимуть $P(V)^\infty$ та $Sh(F, V)^\infty$ відповідно.

Приклад 2.2.2. Нехай $\mathbf{F} : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — потік на комплексній площині, визначений за формулою $\mathbf{F}(z, t) = e^{2\pi i t} z$. Орбіти цього потоку — це концентричні кола з центром в початку координат 0 , який є єдиною нерухомою точкою. Тоді

$$P(\mathbb{C}) = \{n\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (2.4)$$

Дійсно, $\mathbf{F}(z, n) = e^{2\pi i n} z = z$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Тому ядро відображення зсуву $P(\mathbb{C})$ містить всі постійні функції, що приймають цілі значення, тобто $\mathbb{Z} \subset P(\mathbb{C})$. Навпаки, якщо $\theta \in P(\mathbb{C})$, тобто $e^{2\pi i \theta(z)} z = z$, то ця функція повинна приймати лише цілочисельні значення, а тому вона є константою на всій площині $\mathbb{C}$, що доводить (2.4).

Елементарні властивості P -функцій.

Лема 2.2.3. Для $\alpha, \beta \in \text{func}(F, V)$ наступні умови є еквівалентними:

$$(i) \quad \varphi_{F,V}(\alpha) = \varphi_{F,V}(\beta), \quad (ii) \quad \alpha - \beta \in P(V).$$

Іншими словами $\mathbf{F}(x, \alpha(x)) = \mathbf{F}(x, \beta(x))$ тоді і лише тоді, коли $\mathbf{F}(x, \alpha(x) - \beta(x)) = x$ для всіх $x \in V$. $\square$

Наслідок 2.2.4. $P(V)$ є підгрупою адитивної групи $\mathcal{C}(V, \mathbb{R})$, а $\varphi_{F,V}$ індукує бієкцію між фактор-групою $\mathcal{C}(M, \mathbb{R})/P(V)$ та образом $Sh(F, V)$.

Зауваження 2.2.5. Нехай $r \geq 0$. Якщо $r \geq 1$ то вважатимемо, що M є многовидом, V — підмноговидом, а $\mathbf{F}$ — потоком класу $\mathcal{C}^r$. Тоді $\varphi_{F,V}^r$ є композицією відображень

$$\varphi_{F,V}^r = j \circ p : \mathcal{C}^r(V, \mathbb{R}) \xrightarrow{p} \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})/P(V)^r \xrightarrow{j} Sh(F, V)^r,$$

де p — це фактор-відображення, а j — є бієкцією.

Наділимо простори $\mathcal{C}^r(V, \mathbb{R})$ та $Sh(F, V)^r$ топологіями Уїтні $\mathbf{W}^r$ або $\mathbf{S}^r$, а фактор-простір $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})/P(V)$ індукованою фактор-топологією. Тоді p стає неперервним відображенням, а j — неперервною бієкцією, яка, взагалі кажучи, не є гомеоморфізмом.

Один з основних результатів дисертації описує широкі класи $\mathcal{C}^\infty$ -потоків для яких $j : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})/P(V) \rightarrow Sh(F, V)^\infty$ є гомеоморфізмом відносно $\mathbf{S}^\infty$ -топологій.

Лема 2.2.6. Нехай $x \in V$, o_x — орбіта точки x і $\theta \in P(V)$. Тоді θ є локально постійною на перетині $o_x \cap V$.

Зокрема, якщо x — неперіодична точка, то $\theta|_{o_x \cap V} = 0$.

Припустимо, що x — періодична точка і нехай ω — довільна зв'язна компонента $o_x \cap V$. Тоді $\theta(y) = n \cdot \text{Per}(x)$, ($y \in \omega$), для деякого $n \in \mathbb{Z}$, що залежить від ω .

Доведення. Нехай $x \in V$ — точка, яка не є нерухомою. Розглянемо відображення $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{F}(x, t) \in o_x$. Якщо x — неперіодична точка, то це відображення є бієкцією, а тому тотожність $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$ рівносильна тому, що $\theta(x) = 0$.

Якщо ж x — періодична періоду θ , то $\theta(x) = n_x \cdot \theta$ для деякого $n_x \in \mathbb{Z}$. Аналогічно, $\theta(y) = n_y \cdot \theta$ для будь-якої іншої точки $y \in o_x \cap V$ і деякого $n_y \in \mathbb{Z}$. Таким чином обмеження $\theta|_{o_x \cap V}$ є неперервною функцією, що може приймати лише дискретну множину значень $\{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, а тому θ є постійною на компонентах зв'язності $o_x \cap V$. $\square$

Регулярні і нерегулярні P -функції. Нехай $x \in V$, o_x — орбіта цієї точки і $\theta \in P(V)$. Згідно леми 2.2.6 θ постійна на компонентах зв'язності $o_x \cap V$, але, взагалі кажучи, вона не обов'язково постійна на всьому перетині $o_x \cap V$, див. нижче приклад 2.2.9. Тому має сенс наступне означення.

Означення 2.2.7. P -функція $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ називатиметься **регулярною**, якщо θ є постійною на всьому перетині $o_x \cap V$ для кожної точки $x \in V$.

Позначимо через $RP(V)$ множину всіх регулярних P -функцій на V . Тоді, очевидно, $RP(V)$ є підгрупою в $P(V)$.

Зауваження 2.2.8. Якщо для кожної періодичної орбіти o перетин $o \cap V$ є зв'язним (наприклад, коли V є $\mathbf{F}$ -інваріантною), то кожна P -функція на V є регулярною.

Наведемо приклади нерегулярних P -функцій.

Приклад 2.2.9. Нехай $\mathbf{F} : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — неперервний потік на комплексній площині $\mathbb{C}$, визначений за формулою:

$$\mathbf{F}(z, t) = \begin{cases} e^{2\pi i t / |z|^2} z, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що орбіти $\mathbf{F}$ — це початок координат $0 \in \mathbb{C}$ та концентричні кола з центром в 0 . Крім того, $\theta = |z|^2 \in P$ -функцією на $\mathbb{C}$ і

$$RP(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Нехай V_i , ($i = 1, 2, 3$) підмножина в $\mathbb{C}$ зображена на рис. 2.2.1. Таким чином, V_1 є відкритим інтервалом, скажімо $(-1, 1)$, на дійсній осі, V_2 — це об'єднання двох замкнутих трикутників зі спільною вершиною 0 , V_3 — є об'єднанням трикутника і інтервалу $(-1, 0]$ дійсної осі, що мають спільну точку 0 , а V_4 — незв'язним об'єднанням двох трикутників.

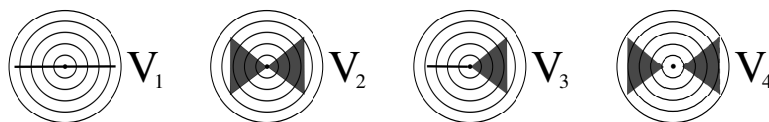


Рис. 2.2.1: Підмножини на яких є нерегулярні P -функції

Зокрема, $\text{Int}V_1 = \emptyset$, $\text{Int}V_2$ є незв'язною, а $\text{Int}V_3$ є ніде не щільною в V . Для кожної пари $m, n \in \mathbb{Z}$ визначимо функцію $\theta_{m,n} : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ за формулою

$$\theta_{m,n}(z) = \begin{cases} -m|z|, & \Re(z) \leq 0, \\ n|z|, & \Re(z) > 0. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$P(V_i) = \{\theta_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

але

$$RP(V_i) = \{\theta_{m,m}\}_{m \in \mathbb{Z}} \approx \mathbb{Z}.$$

Таким чином не кожна P -функція на V_i є регулярною.

Нижче ми покажемо, що якщо V є відкритою зв'язною підмножиною, то кожна P -функція на V є регулярною і $P(V)$ ізоморфна групі $\mathbb{Z}$.

Зауваження 2.2.10. Відмітимо, що потік $\mathbf{F}$ в прикладі 2.2.9 не належить навіть класу $\mathcal{C}^1$ в точці 0 і що $\theta(0) = 0$. Далі ми покажемо, що це явище суттєво

відрізняє $\mathcal{C}^1$ потоки від неперервних потоків, що навіть топологічно не еківалентні до $\mathcal{C}^1$: якби $\mathbf{F}$ був спряженим до $\mathcal{C}^1$ -потoku, то, за теоремою 4.1.2 (див. нижче) ми б мали, що кожна P -функція на зв'язній відкритій підмножині V , що не є тотожним нулем, повинна бути строго відмінною від нуля V .

Лема 2.2.11. [89]. Відповідності $V \mapsto P(V)^r$ та $V \mapsto RP(V)^r$ є контраваріантними функторами з категорії підмножин в M в категорію абелевих груп. Зокрема, їх обмеження на підкатегорію відкритих підмножин в M є передпучками. $\square$

P -функції та дія кола. Наступне просте твердження показує застосування P -функцій до перепараметризації потоку у дію кола:

Лема 2.2.12. Якщо $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$ — P -функція, то наступне відображення

$$\mathbf{G} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \mathbf{G}(x, t) = \mathbf{F}(x, t \theta(x)) \quad (2.5)$$

є потоком на M таким, що $\mathbf{G}_1 = \text{id}_M$. Тому $\mathbf{G}$ індукує дію кола $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Доведення. Дійсно, $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$. $\square$

Припустимо, що існує дія кола, орбіти якої співпадають з орбітами потоку $\mathbf{F}$. Тоді кожна орбіта $\mathbf{F}$ є або періодичною, або нерухомою. Більш того, наступна теорема М. Ньюмана показує, що для многовиду M множина $\text{Fix}(\mathbf{F})$ повинна бути ніде не щільною:

Теорема 2.2.13 ([108], також [25, 106, 135]). Якщо компактна група L ефективно діє на зв'язному многовиді M , то множина $\text{Fix}(\mathbf{F})$ нерухомих точок цієї дії ніде не щільна в M і не розбиває M .

Припустимо, що $\text{Fix}(\mathbf{F}) = \emptyset$, тобто всі точки є періодичними $\mathbf{F}$. Назвемо такий потік P -потокom. Тоді визначена функція

$$\lambda : M \rightarrow (0, +\infty), \quad \lambda(x) = \text{Per}(x).$$

Вона вивчалась багатьма авторами. Можна показати, що λ є напівнеперервною знизу і що множина B точок її неперервності є відкритою в M , див. [105] та [31, §5]. Таким чином, λ є P -функцією на B .

Опишемо типові ситуації, коли λ є розривною.

Скажемо, що λ є *необмеженою в точці* $x \in M$, якщо знайдеться послідовність точок $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що збігається до x , причому $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = \infty$. Якщо ж знайдеться $C > 0$ таке, що $\text{Per}(z) < C$ для всіх точок z з деякого околу точки x , то λ називатиметься *обмеженою в точці* x .

Якщо λ є обмеженою в кожній точці $x \in M$, то називатимемо λ *локально обмеженою* функцією, і говоритимемо, що потік має властивість PB . В протилежному випадку говоритимемо, що λ є локально необмеженою, а потік $\mathbf{F}$ має властивість PU .

Якщо потік $\mathbf{F}$ належить класу $\mathcal{C}^1$, то замість періодів можна розглядати довжини орбіт відносно деякої ріманової метрики на M .

Перші приклади PU -потоків були отримані [120]. Він побудував PU -потік класу $\mathcal{C}^\infty$ на некомпактному многовиді. Далі [31] побудував *дійсний аналітичний* PU -потік на некомпактному 3-многовиді, [136, 137] — $\mathcal{C}^\infty$ PU -потік на *компактному* 5-многовиді $S^3 \times S^1 \times S^1$, а та [33] — PU -потік на компактному 4-многовиді, що визначався системою алгебраїчних рівнянь, а векторне поле, яке породжувало цій потік такою було поліноміальним, див. також [143].

Наступний приклад розшарування Зейферта показує, що якщо λ є розривною, то іноді її можна так перевизначити множині точок розриву, що вона стане неперервною P -функцією.

Приклад 2.2.14. Нехай $D^2 \subset \mathbb{C}$ — замкнутий одиничний 2-диск центром в початку координат, $S^1 = \partial D^2$ — одиничне коло і $T = D^2 \times S^1$ — заповнений тор. Зафіксуємо $n \geq 2$ і визначимо потік на T за формулою:

$$\mathbf{F} : T \times \mathbb{R} \rightarrow T, \quad \mathbf{F}(z, \tau, t) = (ze^{2\pi it/k}, \tau e^{2\pi it}),$$

для $(z, \tau, t) \in D^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$.

Легко бачити, що кожна точка $(z, \tau) \in T$ є періодичною. Більш того, $\text{Per}(z, \tau) = k$ якщо $z \neq 0 \in D^2$ і $\text{Per}(0, \tau) = 1$. Таким чином, функція $\text{Per} : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є розривною на центральній орбіті $0 \times S^1$, але вона стає навіть гладкою якщо її перевизначити на $0 \times S^1$ поклавши рівною k . Отримана нова функція $\theta \equiv k$ є, очевидно, регулярною P -функцією і $P(T)^0 = \{nk\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Відмітимо, що в цьому прикладі $\mathbf{F}$ є *надбудовою* періодичного гомеоморфізму $h : D^2 \rightarrow D^2$ повороту на $2\pi/k$.

Більш загально, нехай $h : M \rightarrow M$ — гомеоморфізм зв'язного многовиду M такий, що відповідна надбудова $\mathbf{F}$ для h на $M \times S^1$ є P -поток. Це означає, що кожна точка $x \in M$ є періодичною для h . [105] показав, що тоді h сам повинен бути періодичним. Нехай k — період h . Тоді періоди орбіт потоку $\mathbf{F}$ обмежені зверху числом k , а отже $\mathbf{F}$ є PB -поток. Більш того, аналогічно до прикладу 2.2.14, можна показати, що $P(M) = \{nk\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

[31] також довів, що якщо M — компактний орієнтовний 3-многовид, то будь-який P -потік класу $\mathcal{C}^r$, $(1 \leq r \leq \omega)$, має властивість BP і навіть існує $\mathcal{C}^r$ -дія кола на M з тими ж самими орбітами. В дійсності, Epstein показав, що структура одновимірних $\mathcal{C}^r$ -шарувань, $(1 \leq r \leq \infty)$, на компактних орієнтовних 3-многовидах подібна до структури розшарувань Зейферта, описаної в прикладі 2.2.14.

Проблема обмеженості періодів може бути узагальнена на шарування вищих вимірів. Нехай на рімановому многовиді M задано шарування $\mathcal{F}$, у якого всі шари є компактними. Питання полягає в *локальній обмеженості функції об'ємів*, що ставить у відповідність точці $x \in M$ об'єм шару $\mathcal{F}_x$, що містить точку x , відносно даної ріманової метрики, див. напр. [28, 32, 107].

2.3 Образ та ядро відображення зсуву при зміні швидкості потоку

Спряження потоку. Нехай $h : M \rightarrow M$ — гомеоморфізм і $\mathbf{G} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ — спряжений потік, тобто

$$\mathbf{G}_t(x) = h \circ \mathbf{F}_t \circ h^{-1}(x) = h \circ \mathbf{F}(h^{-1}(x), t).$$

Для підмножини $V \subset M$ позначимо через $P(\mathbf{F}, V)$ та $P(\mathbf{G}, V)$ множини P -функцій на V відносно потоків $\mathbf{F}$ та $\mathbf{G}$ відповідно.

Лема 2.3.1. [84] *Нехай $V \subset M$ — підмножина, і $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ — P -функція відносно $\mathbf{F}$. Тоді функція $\theta \circ h^{-1} : h(V) \rightarrow \mathbb{R}$ є P -функцією відносно $\mathbf{G}$. Зокрема, відображення*

$$h^* : P(\mathbf{F}, V) \rightarrow P(\mathbf{G}, h(V)), \quad h^*(\theta) = \theta \circ h^{-1}$$

є ізоморфізмом груп.

Доведення. Нехай $x \in V$ і $y = h(x) \in h(V)$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(y, h^*(\theta)(y)) &= \mathbf{G}(y, \theta \circ h^{-1}(y)) = h \circ \mathbf{F}(h^{-1}(y), \theta \circ h^{-1}(y)) \\ &= h \circ h^{-1}(y) = y. \end{aligned}$$

Тобто $h^*(\theta) \in P(h(V))^r$. Решта тверджень леми очевидна. □

Таким чином, структура груп P -функцій потоку $\mathbf{F}$ залежить фактично лише від класу спряженості $\mathbf{F}$.

Перепараметризація потоку.

Означення 2.3.2. *Нехай $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \mathcal{U} \rightarrow M$ — локальний потік (див. означення 1.2.1), і $\mathcal{V} \subset M \times \mathbb{R}$ — відкритий окіл множини $M \times 0$ такий, що для кожної точки $x \in M$ перетин $(x \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$ є зв'язним. Неперервна функція $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ називається **коциклом** для $\mathbf{F}$, якщо виконуються наступні умови:*

- $(x, \alpha(x, t)) \in \mathcal{U}$ для всіх $(x, t) \in \mathcal{V}$;
- якщо $(x, 0) \in \mathcal{U}$, то $\alpha(x, 0) = 0$;
- якщо $(x, s), (x, s + t)$ і $(\mathbf{F}(x, \alpha(x, s))) \in \mathcal{V}$, то

$$\alpha(x, s + t) = \alpha(x, s) + \alpha(\mathbf{F}(x, \alpha(x, s)), t).$$

Добре відомо, що якщо α — коцикл локального потоку $\mathbf{F}$, то відображення $\mathbf{G} : \mathcal{V} \rightarrow M$, визначене за формулою $\mathbf{G}(x, t) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, t))$ також є локальним потоком.

Наступна лема описує поведінку образу відображення зсуву при зміні швидкості потоку за допомогою коциклу.

Лема 2.3.3. *Нехай $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \mathcal{U} \rightarrow M$ — локальний потік, $\mathcal{V} \subset M \times \mathbb{R}$ — відкрита підмножина і $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ — коцикл для $\mathbf{F}$ такі, що $(x, \alpha(x, t)) \in \mathcal{U}$ для всіх $(x, t) \in \mathcal{U}$, а відображення*

$$\mathbf{G} : \mathcal{V} \rightarrow M, \quad \mathbf{G}(x, t) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, t)),$$

також є локальним потоком. Нехай $V \subset M$ — підмножина і

$$\varphi_{F,V} : Sh(F, V) \rightarrow \mathcal{C}(V, M), \quad \psi_{G,V} : \text{func}(G, V) \rightarrow \mathcal{C}(V, M),$$

— відображення зсуву на V локальних потоків $\mathbf{F}$ та $\mathbf{G}$ відповідно. Визначимо відображення

$$\xi : \text{func}(G, V) \rightarrow Sh(F, V), \quad \xi(\gamma)(x) = \alpha(x, \gamma(x)),$$

для $\gamma \in \text{func}(G, V)$. Тоді

$$\psi_{G,V} = \varphi_{F,V} \circ \xi. \tag{2.6}$$

Зокрема,

$$\xi(P(\mathbf{G}, V)) \subset P(\mathbf{F}, V), \tag{2.7}$$

$$Sh(G, V) \subset Sh(F, V), \tag{2.8}$$

а отже має місце наступна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc} P(\mathbf{G}, V) & \hookrightarrow & \text{func}(G, V) & \xrightarrow{\psi_{G,V}} & Sh(G, V) \\ \xi \downarrow & & \xi \downarrow & & \downarrow \\ P(\mathbf{F}, V) & \hookrightarrow & Sh(F, V) & \xrightarrow{\varphi_{F,V}} & Sh(F, V). \end{array}$$

Доведення. (2.6). Нехай $\gamma \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R})$. Тоді

$$\varphi_{F,V} \circ \xi(\gamma)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, \gamma(x))) = \mathbf{G}(x, \gamma(x)) = \psi_{G,V}(\gamma)(x).$$

Включення (2.8) та (2.7) випливають з (2.6). □

Наслідок 2.3.4. Нехай M — $\mathcal{C}^r$ -многовид, F — $\mathcal{C}^r$ -векторне поле на M , $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ — $\mathcal{C}^r$ -функція, $G = \mu F$ — векторне поле, отримане множенням F на μ , $\mathbf{F}$ та $\mathbf{G}$ — локальні потоки F та G відповідно і $\alpha : \text{dom}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ — коцикл, визначений за формулою

$$\alpha(x, t) = \int_0^t \mu(\mathbf{G}(x, s)) ds,$$

такий, що $\mathbf{G}(x, t) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, t))$.

Нехай далі $V \subset M$ — підмноговид і

$$\varphi_{F,V}^r, \varphi_{G,V}^r : \mathcal{C}^r(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^r(V, M)$$

— відображення зсуву на V локальних потоків $\mathbf{F}$ та $\mathbf{G}$ відповідно. Визначимо відображення

$$\xi : \text{func}(G, V)^r \rightarrow Sh(F, V)^r, \quad \xi(\gamma)(x) = \alpha(x, \gamma(x)).$$

Тоді $\varphi_{G,V}^r = \varphi_{F,V}^r \circ \xi$ і, зокрема, мають місце включення

$$\xi(P(\mathbf{G}, V)^r) \subset P(\mathbf{F}, V)^r, \quad Sh(G, V)^r \subset Sh(F, V)^r. \quad (2.9)$$

Якщо $\mu \neq 0$ на всьому M , то $Sh(G, V)^r = Sh(F, V)^r$.

Доведення. Потрібно лише довести, що коли $\mu \neq 0$ на M , то

$$Sh(G, V)^r \supset Sh(F, V)^r.$$

Це випливає з (2.9) так як $F = \frac{1}{\mu}G$ і $\frac{1}{\mu}$ належить класу $\mathcal{C}^r$. □

2.4 Зсуви, що є дифеоморфізмами

Нехай F — C^r -векторне поле, $r \geq 1$, на M і $\mathbf{F}$ — його локальний потік.

Лема 2.4.1. [70, 73]. Нехай $z \in M$ і $\alpha : (M, z) \rightarrow \mathbb{R}$ — паросток C^1 -функції такої, що $(x, \alpha(x)) \in \text{dom}(F)$, і $f : (M, z) \rightarrow M$ паросток визначений за формулою: $f(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$.

(1) Якщо $\alpha(z) = 0$, то $f(z) = z$ і якобіан f в точці z задається наступною формулою:

$$|J_z(f)| = 1 + F(\alpha)(z),$$

де $F(\alpha)$ — похідна Лі α уздовж F .

(2) f є локальним дифеоморфізмом в точці z тоді і лише тоді, коли $1 + F(\alpha)(z) \neq 0$.

(3) Якщо $F(z) = 0$, то f завжди є локальним дифеоморфізмом в точці z .

Доведення. (1) Очевидно, що $f(z) = \mathbf{F}(z, \alpha(z)) = \mathbf{F}(z, 0) = z$. Так як точка z є нерухомою для f то якобіан f в цій точці не залежить від вибору локальних координат. Розглянемо два випадки.

а) Нехай $F(z) \neq 0$. Тоді за теоремою 1.2.7 про трубку траєкторій можна вибрати локальні координати в околі точки z , в яких $F(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ і $\mathbf{F}(x, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_m)$. Тому

$$g(x) = (x_1 + \beta(x), x_2, \dots, x_m).$$

Простий підрахунок показує, що

$$|J_z(f)| = 1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(z) = 1 + F(\alpha)(z).$$

Останній вираз не залежить від вибору локальних координат.

б) Нехай тепер $F(z) = 0$. Тоді $F(\alpha)(z) = 0$. Отже, нам потрібно довести, що $|J_z(f)| = 1 + F(\alpha)(z) = 1$. Покажемо, що $J_z(f)$ є одиничною матрицею, або, що

теж саме, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - x|}{|x|} = 0.$$

Зафіксуємо довільні локальні координати $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в яких $z = 0$. Тоді паросток $\mathbf{F}$ в точці $(0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ має наступний вигляд:

$$\mathbf{F}(x, t) = x + F(x)t + \gamma(x, t)t$$

для паростка неперервної функції $\gamma : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $\gamma(x, 0) = 0$. Тоді

$$f(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)) = x + F(x) \cdot \alpha(x) + \gamma(x, \alpha(x)) \cdot \alpha(x).$$

Так як F і α належать класу $\mathcal{C}^1$, $F(0) = 0$ і $\alpha(0) = 0$, то існує таке $C > 0$, що $|F(x)| \leq C|x|$ і $|\alpha(x)| \leq C|x|$ для всіх достатньо малих $x \in \mathbb{R}^n$. Тому

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - x|}{|x|} &\leq \frac{|F(x)| |\alpha(x)|}{|x|} + \frac{|\gamma(x, \alpha(x)) \cdot \alpha(x)|}{|x|} \\ &\leq C|F(x)| + C|\gamma(x, \alpha(x))|. \end{aligned}$$

Залишається відмітити, що обидва доданки прямують до нуля при $x \rightarrow 0$.

(2) Позначимо $a = \alpha(z)$. Якщо $a = 0$, то твердження випливає з (1).

Нехай $a \neq 0$. Розглянемо функцію $\beta(x) = \alpha(x) - a$. Тоді $\beta(z) = 0$ і $F(\beta)(z) = F(\alpha)(z)$. Визначимо паросток відображення $g : (M, z) \rightarrow M$ за формулою $g(x) = \mathbf{F}(x, \beta(x))$. Тоді $f = \mathbf{F}_a \circ g$. На рівні дотичних відображень отримуємо, що

$$T_z f = T_z \mathbf{F}_a \circ T_z g : T_z M \xrightarrow{T_z g} T_z M \xrightarrow{T_z \mathbf{F}_a} T_{f(z)} M.$$

Так як $T_z \mathbf{F}_a$ є невиворудженим, то невиворудженість $T_z f$ еквівалентна невиворудженості $T_z g$. Останнє, згідно (1), означає, що $|J_z(g)| = 1 + F(\beta)(z) = 1 + F(\alpha)(z) \neq 0$.

(3) Досить відмітити, що з $F(z) = 0$ випливає, що $F(\alpha)(z) = 0 \neq -1$. $\square$

Наслідок 2.4.2. Нехай V — відкрита підмножина в M , $\alpha \in Sh(F, V)^r$ і $f = \varphi_{F,V}^r(\alpha) : V \rightarrow M$. Припустимо, що

$$F(\alpha)(z) \neq -1, \quad \text{для всіх } z \in V. \quad (2.10)$$

Тоді f є іммерсією, тобто дотичне відображення $T_z f$ не вироджене для всіх $z \in V$.

Припустимо також, що множина V є $\mathbf{F}$ -інваріантною. Тоді f є вкладенням V в себе. Крім того, якщо f є власним¹ відображенням, то f — дифеоморфізм V на себе.

Доведення. Невиродженість $T_z f$ для всіх $z \in V$ слідує з (2.10) та твердження (2) леми 2.4.1.

Припустимо, що V є $\mathbf{F}$ -інваріантною множиною. Покажемо, що f ін'єктивне відображення. Досить встановити, що для кожної регулярної орбіти o обмеження $f|_o : o \rightarrow o$ є ін'єктивним. З умови (2.10) випливає, що $f|_o : o \rightarrow o$ не має критичних точок і гомотопне тотожному відображенню. Тому якщо o — незамкнута орбіта, то $f|_o : o \rightarrow o$ — монотонне, а отже, ін'єктивне відображення. Якщо ж орбіта o — замкнута, то $f|_o : o \rightarrow o$ є накриваючим відображенням степеня 1, тобто дифеоморфізмом.

Нарешті, якщо f — власне відображення, то попередні аргументи показують, що $f(o) = o$ для кожної орбіти, тому f є бієкцією, а отже і дифеоморфізмом. $\square$

Для кожної відкритої підмножини $V \subset M$ покладемо

$$\Gamma^+ = \{\alpha \in \text{func}(F, V)^r : F(\alpha)(x) > -1 \ \forall x \in V\}.$$

$$\Gamma^- = \{\alpha \in \text{func}(F, V)^r : F(\alpha)(x) < -1 \ \forall x \in V\}.$$

$$\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-.$$

Очевидно, що $\text{func}(F, V)$ — S^0 -відкрита і *випукла* підмножина в $C^\infty(V, \mathbb{R})$, а відображення

$$\mathcal{L}_F : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{R}), \quad \mathcal{L}_F(\alpha) = F(\alpha)$$

є лінійним і $S^{1,0}$ -неперервним. Тому Γ^- та Γ^+ є *випуклими* і S^1 -відкритими множинами в $C^\infty(V, \mathbb{R})$.

¹ Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *власним*, якщо прообраз $f^{-1}(K)$ кожної компактної підмножини $K \subset Y$ є компактим.

Іншими словами, якщо $\alpha_0, \alpha_1 \in \Gamma^+$, то для кожного $t \in [0, 1]$ функція $\alpha_t = (1 - t)\alpha_0 + t\alpha_1 \in \Gamma^+$. Дійсно,

$$\begin{aligned} F(\alpha_t) &= F((1 - t)\alpha_0 + t\alpha_1) \\ &= (1 - t)F(\alpha_0) + tF(\alpha_1) > -(1 - t) - t = -1. \end{aligned}$$

Аналогічне твердження має місце для Γ^- .

Теорема 2.4.3. [84] *Нехай $z \in M$, $\alpha : (M, z) \rightarrow \mathbb{R}$ — паросток гладкої функції в точці z і $h : M \rightarrow M$ — паросток гладкого відображення визначеного за формулою: $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$. Припустимо, що h є паростком дифеоморфізму в точці z . Тоді*

$$h_*F = (1 + F(\alpha)) \cdot F, \quad (2.11)$$

де $h_*F = Th \circ F \circ h^{-1}$ — векторне поле індуковане h . Таким чином h_*F є перепараметризацією поля F .

Якщо функція $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ визначена на всьому M і $h = \varphi_F(\alpha)$ є дифеоморфізмом M , то

$$\text{func}(h_*F)^r = \text{func}(F)^r.$$

Доведення. Покажемо, що достатньо довести теорему для випадку, коли $\alpha(z) = 0$. Припустимо, що $a = \alpha(z) \neq 0$. Розглянемо функцію $\beta(x) = \alpha(x) - a$ і паросток дифеоморфізму $g = \mathbf{F}_{-a} \circ h$ в точці z . Таким чином,

$$g(x) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \alpha(x)), -a) = \mathbf{F}(x, \alpha(x) - a) = \mathbf{F}(x, \beta(x)).$$

Тоді $g(z) = z$ і $\beta(z) = 0$.

Так як $\mathbf{F}$ зберігає поле F , тобто $(\mathbf{F}_t)_*F = F$ для всіх $t \in \mathbb{R}$,

$$h_*F = h_*(\mathbf{F}_{-a})_*F = (h \circ \mathbf{F}_{-a})_*F = g_*F.$$

Більш того, $F(\alpha) = F(\beta)$. Тому досить довести теорему для g .

Якщо z — особлива точка поля F , тобто $F = 0$, то обидві частини (2.11) рівні нулю. Тому вважатимемо, що z є регулярною точкою F , а значить в деяких

локальних координатах $(x_1, \dots, x_n)$ в точці $z = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ маємо, що $F(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ і

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n),$$

а тому $g(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \beta(x), x_2, \dots, x_n)$. Звідси випливає, що

$$Tg \circ F \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \beta'_{x_1} & \beta'_{x_2} & \cdots & \beta'_{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = (1 + \beta'_{x_1})F = (1 + F(\beta))F.$$

Припустимо, нарешті, що функція α визначена на всьому M і що h є дифеоморфізмом M . Тоді $\mu = 1 + F(\alpha) \neq 0$ на всьому M , а тому за наслідком 2.3.4 $\text{func}(\mu F)^r = \text{func}(F)^r$. $\square$

Відображення, що зберігають орбіти потоку. Нехай V — D -підмноговид і F — векторне поле на M класу $\mathcal{C}^\infty$. Для простоти у цьому параграфі опускатимемо верхній індекс $r = \infty$ і позначатимемо $P(V)^\infty$, $\text{func}(F, V)^\infty$, $\varphi_{F,V}^\infty$ та $Sh(F, V)^\infty$ через $P(V)$, $\text{func}(F, V)$, $\varphi_{F,V}$ та $Sh(F, V)$ відповідно.

Позначимо через $\mathcal{E}(F, V)$ підмножину в $\mathcal{C}^\infty(V, M)$, що складається з відображень $f : V \rightarrow M$, які задовольняють наступним двом умовам:

- (i) $f(o \cap V) \subset o$ для кожної орбіти o поля F ,
- (ii) для кожної особливої точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ дотичне відображення $T_x f : T_x V \rightarrow T_x M$ є ізоморфізмом, тобто f індукує локальний дифеоморфізм деякого околу точки z на себе.

Нехай також $\mathcal{D}(F, V) \subset \mathcal{E}(F, V)$ — підмножина, що складається з *іммерсій*².

Для кожного $r \geq 1$ позначимо через $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ (відповідно $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$) компоненту зв'язності відображення включення $i_V : V \subset M$ в просторі $\mathcal{E}(F, V)$ (відповідно $\mathcal{D}(F, V)$) наділеному топологією W^r . Таким чином $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ (відпо-

² $\mathcal{C}^1$ -відображення $h : V \rightarrow M$ називається *іммерсією*, якщо для кожної точки $x \in V$ відповідне дотичне відображення $T_x h : T_x V \rightarrow T_{h(x)} M$ є мономорфізмом.

відно $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$ складається з усіх $h \in \mathcal{E}(F, V)$, які є r -гомотопними в $\mathcal{E}(F, V)$ (відповідно r -ізотопними в $\mathcal{D}(F, V)$) до i_V .

Нехай Γ та Γ^+ такі як вище. Тоді з наслідку 2.4.2 отримуємо наступні твердження:

Наслідок 2.4.4. $\varphi_{F,V}(\Gamma) \subset \mathcal{D}(F, V)$ і $\Gamma = \varphi_{F,V}^{-1}(\mathcal{D}(F, V))$.

Наслідок 2.4.5. *Мають місце наступні включення*

$$Sh(F, V) \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^\infty \subset \dots \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^1 \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0, \quad (2.12)$$

$$\varphi_{F,V}(\Gamma^+) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^\infty \subset \dots \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^1 \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^0. \quad (2.13)$$

Доведення. Достатньо перевірити, що

$$Sh(F, V) \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^\infty, \quad \varphi_{F,V}(\Gamma^+) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^\infty.$$

Нехай $h = \varphi_F(\alpha) \in Sh(F, V)$. Тоді h , очевидно, зберігає інваріантними орбіти поля F і, згідно леми 2.4.1, є дифеоморфізмом в околі кожної особливої точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$. Це означає, що $Sh(F, V) \subset \mathcal{E}(F, V)$.

Відмітимо також, що h є ∞ -гомотопним до тотожного включення $i_V : V \subset M$ за допомогою $\mathcal{C}^\infty$ -гомотопії $H : V \times I \rightarrow M$, визначеної за формулою:

$$H(x, t) = \mathbf{F}(x, t\alpha(x)) = \varphi_F(t\alpha)(x). \quad (2.14)$$

Тому $Sh(F, V) \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^\infty$.

Припустимо тепер, що $\alpha \in \Gamma^+$, тобто $F(\alpha) > -1$ на всьому M . Тоді для кожного $t \in [0, 1]$ маємо, що

$$F(t\alpha) = tF(\alpha) > -t \geq -1,$$

тобто $t\alpha \in \Gamma^+$, тому формула (2.14) визначає деформацію в $\mathcal{D}(F, V)$. Це означає, що $\varphi_{F,V}(\Gamma^+) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^\infty$. $\square$

2.5 Відображення зсуву для паростків векторних полів

Нехай M — гладкий многовид, $S \subset M$ — довільна підмножина і F — векторне поле в околі S . Наша мета означити аналог відображення зсуву для паростків відображень аналогічно до (2.1) причому нас цікавитиме лише випадок, коли S складається з особливих точок поля F .

Позначимо через $\widehat{\mathcal{F}}(M, S)$ алгебру паростків $\mathcal{C}^\infty$ -функцій $M \rightarrow \mathbb{R}$ біля S , через $\widehat{\mathcal{E}}(M, S)$ — множину паростків $\mathcal{C}^\infty$ -відображень $M \rightarrow M$ біля S нерухомих на S , а через $\widehat{\mathcal{D}}(M, S)$ — підгрупу в $\widehat{\mathcal{E}}(M, S)$, що складається з дифеоморфізмів.

Якщо потік $\mathbf{F}$ не є повним, то так само, як і в означенні відображення зсуву φ_F , див. (2.1), відображення $\widehat{\varphi}_{F,S}$ визначене лише на деякій підмножині в $\widehat{\mathcal{F}}(M, S)$. Але, як показує наступна лема, за умови, що S складається з особливих точок поля F , відображення $\widehat{\varphi}_{F,S}$ коректно визначене на всій алгебрі $\widehat{\mathcal{F}}(M, S)$, а його образ міститься в групі $\widehat{\mathcal{D}}(M, S)$.

Лема 2.5.1. *Нехай $h \in \widehat{\mathcal{E}}(M, S)$ та $\alpha, \beta \in \widehat{\mathcal{F}}(M, S)$. Припустимо, що $F = 0$ на S .*

(а) *Тоді паростки на S наступних відображень:*

$$\mathbf{F}_\alpha(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)), \quad \mathbf{F}_{h,\beta}(x) = \mathbf{F}(h(x), \beta(x)).$$

коректно визначені. Зокрема коректно визначене відображення

$$\widehat{\varphi}_{F,S} : \widehat{\mathcal{F}}(M, S) \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}(M, S), \quad \widehat{\varphi}_{F,S}(\alpha) = \mathbf{F}_\alpha. \quad (2.15)$$

Позначимо образ $\widehat{\varphi}_{F,S}$ в $\widehat{\mathcal{E}}(M, S)$ через $\widehat{Sh}(F, S)$.

(b) *$\widehat{Sh}(F, S) \subset \widehat{\mathcal{D}}(M, S)$. Причому якщо $\mathbf{F}_\alpha, \mathbf{F}_\beta \in \widehat{Sh}(F, S)$, то*

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \mathbf{F}_{-\alpha \circ \mathbf{F}_\alpha^{-1}}, \quad \mathbf{F}_\alpha \circ \mathbf{F}_\beta = \mathbf{F}_{\alpha \circ \mathbf{F}_\beta + \beta}. \quad (2.16)$$

(c) *Якщо $h \in \widehat{\mathcal{D}}(M, S)$, то $\mathbf{F}_{h,\beta} \in \widehat{\mathcal{D}}(M, S)$ і*

$$\mathbf{F}_{h,\beta} = \mathbf{F}_{\beta \circ h^{-1} \circ h}. \quad (2.17)$$

(d) Наступні умови є еквівалентними:

$$h = \mathbf{F}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}_{h, -\alpha} = \text{id}. \quad (2.18)$$

Доведення. (а) Нехай α визначена на деякому околі V множини S . Розглянемо графік $\Gamma_\alpha = \{(x, \alpha(x)) \mid x \in V\}$ цієї функції. Так як $F = 0$ на S , то $S \times \mathbb{R} \subset \text{dom}(F)$, а тому графік обмеження $\Gamma_{\alpha|_S} \subset S \times \mathbb{R}$ міститься в області визначення $\text{dom}(F)$ локального потоку $\mathbf{F}$. Так як $\text{dom}(F)$ є відкритою множиною, то знайдеться окіл W множини S в V такий, що $\Gamma_{\alpha|_W} \subset \text{dom}(F)$.

Доведення для $\mathbf{F}_{h, \beta}$ аналогічне.

Твердження (b) випливає з формул (2.2) та (2.3).

(c) Формула (2.17) просто означає, що

$$\mathbf{F}_{h, \beta}(x) = \mathbf{F}(h(x), \beta \circ h^{-1} \circ h(x)).$$

(d) Співвідношення (2.18) означає, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{F}(h(x), -\alpha(x)) = x$. Останнє є очевидне. $\square$

Відображення (2.15) називатимемо *відображенням зсуву біля множини S* .

Нехай також $\widehat{\mathcal{E}}(F, S)$ — підмножина в $\widehat{\mathcal{D}}(M, S)$, що складається паростків, які зберігають орбіти поля F , тобто $h \in \widehat{\mathcal{D}}(M, S)$ належить $\widehat{\mathcal{E}}(F, S)$ тоді і лише тоді, коли знайдеться такий окіл V множини S , що $h(o \cap V) \subset o$ для кожної орбіти o поля F .

Для $r = 0, 1, \dots, \infty$ нехай $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F, S)^r$ позначає *тотожну компоненту групи $\widehat{\mathcal{E}}(F, S)$ відносно топології W^r* . Це означає, що $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F, S)^r$ складається з $h \in \widehat{\mathcal{E}}(F, S)$ для кожного з яких існує окіл $V \subset M$ множини S і така r -ізотопія $H : V \times I \rightarrow M$, що $H_0 = i_V : V \subset M$, $H_t \in \widehat{\mathcal{E}}(F, S)$ для всіх $t \in I$ і $H_1 = h$.

Аналогічно до (2.12) мають місце наступні включення:

$$\widehat{Sh}(F, S) \subset \widehat{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F, S)^\infty \subset \dots \subset \widehat{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F, S)^1 \subset \widehat{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F, S)^0.$$

Початкові ненульові струмені гладких зсувів неплоских векторних

полів. Нехай F — векторне поле, визначене в околі початку координат в $\mathbb{R}^n$. Для кожного $k \geq 0$ позначимо через $j^k(F)$ паросток F в точці 0 .

Припустимо, що існує таке $d \geq 1$, що $j^{d-1}(F) = 0$ але

$$P = j^d(F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

є ненульовим однорідним відображенням степеня d . Для $d = 1$ маємо, що

$$P(x) = L \cdot x,$$

де L — ненульова $n \times n$ -матриця.

Лема 2.5.2. [85]. Нехай $\alpha : \mathbb{R}^n \times S \rightarrow \mathbb{R}$ — l -малий паросток $\mathcal{C}^l$ -функції уздовж $0 \times S$, тобто $j_S^l(\alpha) = \omega(x, \sigma)$ — це однорідний многочлен степеня l від $x = (x_1, \dots, x_n)$ з коефіцієнтами, які є гладкими функціями на S . Для $l = 0$, $\omega(\sigma)$ є гладкою функцією S і не залежить від x . Покладемо

$$\mathbf{F}_\alpha(x, \sigma) = \mathbf{F}(x, \alpha(x, \sigma)).$$

Тоді

$$j_S^{d+l}(\mathbf{F}_\alpha)(x, \sigma) = \begin{cases} e^{L\omega(\sigma)} \cdot x, & d = 1 \text{ і } l = 0, \\ x + P(x) \cdot \omega(x, \sigma), & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Таким чином, $(d+l)$ -струмінь $\mathbf{F}_\alpha$ уздовж $0 \times S$ залежить тільки від l -струменя α уздовж $0 \times S$. Більш того,

$$j_S^{d+l}(\mathbf{F}_\alpha^{-1}) = j_S^{d+l}(\mathbf{F}_{-\alpha}). \quad (2.20)$$

2.6 Висновки

В другому розділі введено поняття відображення зсуву для повних та локальних потоків, векторних полів та паростків векторних полів в околі особливої точки. Досліджено основні властивості образу та ядра відображення зсуву, а також отримано необхідну та достатню умову на функцію, щоб відповідний зсув був дифеоморфізмом.

Розділ 3 ПРИКЛАДИ

В цьому розділі ми розглянемо конкретні приклади векторних полів F на числовій прямій та площині, для яких досить просто вдається описати образ, $Sh(F, V)^\infty$ та отримати точні формули для локальних обернених до $\varphi_{F, V}$. Для спрощення опускатимемо індекс ∞ і позначатимемо $\varphi_{F, V}^\infty$ та $Sh(F, V)^\infty$ через $\varphi_{F, V}$ та $Sh(F, V)$ відповідно.

Для подальших застосувань також зручно ввести « l -вимірний параметр». Нехай $S^l = \mathbb{R}^l$ або півпростір $\mathbb{R}_+^l = \{x_l \geq 0\}$, тоді через F ми позначатимемо тривіальне розширення G (у сенсі означення 1.2.8), визначене на $\mathbb{R} \times S^l$ за формулою:

$$F(x, \sigma) = (G(x), 0).$$

Тоді локальні потоки полів цих полів пов'язані співвідношенням:

$$\mathbf{F}(x, \sigma; t) = (\mathbf{G}(x, t), \sigma).$$

Нехай також $p : \mathbb{R}^n \times S^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p(x, \sigma) = x$, — стандартна проекція.

Лема Адамара. Нам також буде потрібна наступна лема Адамара, що є аналогом теореми Безу для многочленів. Вона стверджує про те, що для $\mathcal{C}^\infty$ -функція $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $\alpha(0) = 0$ гладко ділиться на x , тобто $\alpha(x) = x\bar{\alpha}(x)$ для деякої $\mathcal{C}^\infty$ функції $\bar{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $\bar{\alpha}(0) = \alpha'(0)$. Це твердження буде одним з головних інструментів на протязі всієї книги. Ми також часто використовуватимемо наступний параметричний варіант цієї леми.

Лема 3.0.1 (Hadamard J.). Нехай $r \geq 1$, M — гладкий многовид, і $\alpha : \mathbb{R} \times S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ — така $(S; T, k)$ -деформація в $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що $\alpha(0, \sigma, \tau) = 0$ для всіх $(\sigma, \tau) \in S \times T$. Тоді існує така $(S; T, k-1)$ -деформація $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \times S \times T \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$\alpha(x, \sigma, \tau) = x \tilde{\alpha}(x, \sigma, \tau), \quad \tilde{\alpha}(0, \sigma, \tau) = \alpha'_x(0, \sigma, \tau)$$

для всіх $(x, \sigma, \tau) \in \mathbb{R} \times S \times T$.

Доведення. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо, що

$$\alpha(x, \sigma, \tau) = \alpha(0, \sigma, \tau) + \int_0^x \alpha'_\xi(\xi, \sigma, \tau) d\xi.$$

Врахувавши, що $\alpha(0, \sigma, \tau) = 0$ і зробивши заміну змінних $\xi = x\eta$ в інтегралі, отримаємо:

$$\alpha(x, \sigma, \tau) = x \underbrace{\int_0^1 \alpha'_\eta(x\eta, \sigma, \tau) d\eta}_{\tilde{\alpha}(x, \sigma, \tau)} = x \tilde{\alpha}(x, \sigma, \tau).$$

Лему доведено. □

3.1 Векторні поля на числовій прямій

Векторне поле G класу $\mathcal{C}^\infty$ на $\mathbb{R}$ задається у вигляді $G(x) = \gamma(x) \frac{\partial}{\partial x}$, де γ — деяка гладка функція. Тоді $F(x, \sigma) = \gamma(x) \frac{\partial}{\partial x}$.

Нехай $V \subset \mathbb{R} \times S^l$ — D -підмноговид і $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R} \times S^l)$ — відображення зсуву. Тоді, за означенням, кожне відображення $f \in \mathcal{E}(F, V)$ зберігає орбіти F і є дифеоморфізмом в околі кожної особливої точки поля F . Звідси, зокрема, випливає, що

$$f(x, \sigma) = (\beta(x, \sigma), \sigma), \tag{3.1}$$

для деякої $\mathcal{C}^\infty$ функції $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}$. Очевидно, що якобіан f в точці (σ, x) визначається за формулою:

$$|J_{(x, \sigma)}(f)| = \beta'_x(x, \sigma). \tag{3.2}$$

Тому відображення (3.1) належить до $\mathcal{E}(F, V)$ тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова: якщо $\gamma(x) = 0$ для деякого $x \in \mathbb{R}$, то $\beta(x, \sigma) = x$ і $\beta'_x(x, \sigma) > 0$ для всіх σ .

Векторні поля без особливих точок. Нехай $\gamma \equiv 1$, тобто $F(x, \sigma) = \frac{\partial}{\partial x}$. Це поле породжує потік $\mathbf{F}(x, \sigma; t) = (x + t, \sigma)$, орбіти якого — це прямі, паралельні осі Ox .

Зокрема, F взагалі не має особливих точок, а тому для довільного D -підмноговиду $V \subset \mathbb{R} \times S^l$ простір $\mathcal{E}(F, V)$ складається з відображень виду

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \times S^l, \quad f(x, \sigma) = (\beta(x, \sigma), \sigma), \quad (3.3)$$

де $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}$ — довільна $\mathcal{C}^\infty$ функція.

Лема 3.1.1. Нехай $V \subset \mathbb{R} \times S^l$ — D -підмноговид і $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Тоді $Sh(F, V) = \mathcal{E}(F, V)$ і відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}(F, V)$ є гомеоморфізмом відносно топологій $\mathbf{S}^r$.

Доведення. Відмітимо, що $\varphi_{F,V}$ визначається за формулою

$$\varphi_{F,V}(\alpha)(x, \sigma) = (x + \alpha(x, \sigma), \sigma).$$

Тому $\varphi_{F,V}$ є бієкцією на $\mathcal{E}(F, V)$, а $\varphi_{F,V}^{-1} : \mathcal{E}(F, V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ визначається за наступним правилом: якщо f має вигляд (3.3), то

$$\varphi_{F,V}^{-1}(f)(x, \sigma) = p \circ f(x, \sigma) - x = \beta(x, \sigma) - x.$$

Очевидно, що $\varphi_{F,V}^{-1} \in \mathbf{S}^{r,r}$ -неперервним для кожного $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$. □

Лінійне векторне поле. Нехай $\gamma(x) = \lambda x$ для деякого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тобто

$$G(x) = \lambda x \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Тоді F породжує повний потік $\mathbf{F}(x, \sigma; t) = (e^t x, \sigma)$.

Множина, $\text{Fix}(\mathbf{F})$, особливих точок F — це площина $x = 0$, а відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R} \times S^l)$ визначається за формулою:

$$\varphi_{F,V}(\alpha)(x, \sigma) = (e^{\alpha(x, \sigma)} x, \sigma). \quad (3.4)$$

Твердження 3.1.2. *Нехай $V \subset \mathbb{R} \times S^l$ — D -підмноговид. Тоді відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}(F, V)$ є бієкцією $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ на $\mathcal{E}(F, V)$. Для кожного $r \in \bar{\mathbb{N}}_0$ ця бієкція є $S^{r,r}$ -неперервною, а обернена до неї — $S^{r,r+1}$ -неперервною. Зокрема, $\varphi_{F,V}$ є гомеоморфізмом $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ на $\mathcal{E}(F, V)$ відносно топологій S^∞ .*

Доведення. Як описано вище, $\mathcal{E}(F, V)$ складається з відображень виду (3.1), що задовольняють наступні умови:

$$\beta(0, \sigma) = 0, \quad \beta'_x(0, \sigma) > 0, \quad \beta(x, \sigma)/x > 0 \text{ для } x \neq 0. \quad (3.5)$$

Остання умова означає, що f лишає інваріантними додатню та від'ємну півосі. Покажемо, що $Sh(F, V) = \mathcal{E}(F, V)$, тобто що f можна представити у вигляді (3.4) для деякої $\mathcal{C}^\infty$ функції α .

З (3.5) та леми Адамара 3.0.1 випливає, що β гладко ділиться на x :

$$\beta(x, \sigma) = x \cdot \underbrace{\int_0^1 \beta'_x(sx, \sigma) ds}_{\bar{\beta}(x, \sigma)} = \bar{\beta}(x, \sigma),$$

причому $\bar{\beta}(0, \sigma) = \beta'_x(0, \sigma)$ і $\bar{\beta}(x, \sigma) > 0$ для всіх x . Покладемо,

$$\alpha(x, \sigma) = \frac{1}{\lambda} \ln \bar{\beta}(x, \sigma) = \frac{1}{\lambda} \ln \int_0^1 \beta(sx, \sigma) ds. \quad (3.6)$$

Тоді $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$, $\beta = e^{\lambda \alpha}$, а тому $f = \varphi_{F,V}(\alpha) \in Sh(F, V)$. Таким чином, відображення $\varphi_{F,V}^{-1}$ визначається за формулою

$$\varphi_{F,V}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\lambda} \ln \int_0^1 (p \circ f)'_x(sx, \sigma) ds. \quad (3.7)$$

Ця формула показує, що « r -ті похідні функції α неперервно виражаються через $(r+1)$ -ші похідні від f », тому обернене відображення $\varphi_{F,V}^{-1} \in S^{r+1,r}$ -неперервним. $\square$

Векторне поле $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$. Припустимо, що $G(x) = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$. Тоді потік поля G визначений на множині $\text{dom}(G) = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xt < 1\}$ і задається формулою $\mathbf{G}(x, t) = \frac{x}{1-tx}$, див. приклад 1.2.3. Очевидно, що орбіти поля G співпадають з орбітами лінійного векторного поля $x \frac{\partial}{\partial x}$, описаного в попередньому параграфі §3.1.

Тому для довільного відрізка $V \subset \mathbb{R} \times S^l$ маємо, що

$$\text{func}(F, V) = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) : x\alpha(x) < 1\},$$

а відповідне відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ визначається за формулою

$$\varphi_{F,V}(\alpha)(x, \sigma) = \left(\frac{x}{1 - \alpha(x)x}, \sigma \right), \quad (3.8)$$

а $\mathcal{E}(F, V)$ складається з таких відображень $f = (f_1, f_2) : V \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$f_1(x, \sigma) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad f_2(x, \sigma) = \sigma, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, \sigma) > 0.$$

З іншого боку, з формули (3.8) легко випливає, що кожне відображення $f = (f_1, f_2) = \varphi_{F,V}(\alpha)$ задовольняє умову $f'_1(0, \sigma) = 1$. Тому $Sh(F, V)$ міститься в множині $A = \{f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(F, V) : \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, \sigma) = 1\}$. Зокрема, $Sh(F, V) \subset A \subsetneq \mathcal{E}(F, V)$.

Лема 3.1.3. $Sh(F, V) = A$, причому для кожного $r \geq 0$ відображення $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow A$ є $W^{r,r}$ -неперервною бієкцією, обернена до якої є $W^{r+2,r}$ -неперервною. Зокрема $\varphi_{F,V}$ індукує гомеоморфізм $\text{func}(F, V)$ на A відносно W^∞ -топологій.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{E}(F, V)$ задовольняє умову $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0) = 1$. Нам потрібно знайти таку $\mathcal{C}^\infty$ -функцію $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$x\alpha(x, \sigma) < 1, \quad f_1(x) = \frac{x}{1 - \alpha(x, \sigma)x}. \quad (3.9)$$

Так як $f_1(0) = 0$, то, згідно леми Адамара, $f_1(x, \sigma) = x\mu(x, \sigma)$ для деякої $\mathcal{C}^\infty$ -функції $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $\mu(0, \sigma) = f'_1(0, \sigma) = 1$. З того, що f зберігає орбіти поля F , тобто фактично знак x , випливає, що $\mu > 0$ на всьому V .

Застосовуючи лему Адамара вже до функції $\mu - 1$ отримаємо, що $\mu = 1 + x\nu$, де $\nu \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, а тому $f_1(x, \sigma) = x + x^2\nu(x, \sigma)$.

Тоді з (3.9) повинні отримати, що

$$x\alpha = 1 - \frac{x}{f} = \frac{f - x}{f} = \frac{x^2\nu}{x\mu} = \frac{x\nu}{\mu}.$$

Так як $\mu > 0$, то покладемо $\alpha = \frac{\nu}{\mu}$. Тоді α є гладкою функцією,

$$x\alpha = 1 - \frac{x}{f} = 1 - \frac{1}{\mu} < 1,$$

тобто $\alpha \in \text{func}(F, V)$, а значить $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$. Залишається відмітити, що відповідність $f \mapsto \alpha \in W^{r+2,r}$ -неперервною. $\square$

Наступна лема узагальнює лему 3.1.3. Ми наводимо її без доведення.

Лема 3.1.4. *Нехай $G(x) = x^n \frac{\partial}{\partial x}$. Тоді для кожного D -околу V точки $0 \in \mathbb{R}$ відображення зсуву є ін'єктивним, а його образ $\psi_{G,V}$ співпадає з множиною відображень $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задаються формулою виду $f(x) = x + x^n\beta(x)$, де $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ така функція, що $1 + x^{n-1}\beta(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Обернене відображення $\psi_{G,V}^{-1} : Sh(G, V) \rightarrow \text{func}(G, V)$ є $W^{r+n,r}$ -неперервним. Зокрема, $\psi_{G,V}$ є гомеоморфізмом на свій образ між відповідними топологіями W^∞ . $\square$*

3.2 Векторні поля на площині

В цьому параграфі ми розглянемо відображення зсуву лінійних векторних полів, визначених матрицями виду $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \neq 0$.

Нільпотентне векторне поле. Нехай $G(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$. Тоді його потік визначається за формулою

$$\mathbf{G}(x, y, t) = (x + ty, y).$$

Очевидно, що регулярні орбіти цього поля — це паралельні прямі $y = \text{const} \neq 0$, а вісь Ox повністю складається з особливих точок.

Тому для кожного D -підмноговиду $V \subset \mathbb{R}^2 \times S^l$ простір $\mathcal{E}(F, V)$ складається з відображень $f = (f_1, f_2, f_3) : V \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^l$ таких, що

$$f_1(x, 0) = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = \sigma, \quad (3.10)$$

і f є дифеоморфізмом в кожній точці виду $(x, 0, \sigma)$. Звідси випливає, що матриця Якобі f в точці $(x, 0, \sigma)$ має вигляд

$$J_{(x,0)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \end{pmatrix},$$

де E_l — одинична $(l \times l)$ -матриця, а тому будь-яке відображення f , що задовольняє умови (3.10) автоматично є дифеоморфізмом в кожній точці виду $(x, 0, \sigma)$.

Зрозуміло також, що відображення зсуву поля F на V задається формулою:

$$\varphi_{F,V}(\alpha)(x, y, \sigma) = (x + \alpha(x, y) y, y, \sigma).$$

Твердження 3.2.1. $Sh(F) = \mathcal{E}(F, V)$ і для кожного $r \geq 0$ відображення зсуву $\varphi_{F,V} : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}(F, V)$ є $W^{r,r}$ -неперервною бієкцією, обернена до якої є $W^{r+1,r}$ -неперервною. Зокрема $\varphi_{F,V}$ індукує гомеоморфізм $C^\infty(V, \mathbb{R})$ на $\mathcal{E}(F, V)$ відносно W^∞ -топологій.

Доведення. Нехай $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{E}(F, V)$. Розглянемо функцію

$$\beta(x, y, \sigma) = f_1(x, y, \sigma) - x.$$

Тоді перша з умов (3.10) означає, що $\beta(x, 0, \sigma) = 0$. Тому за лемою Адамара $\beta(x, y, \sigma) = y\alpha(x, y, \sigma)$ для деякої C^∞ -функції $\alpha \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, а отже

$$f_1(x, y, \sigma) = x + y\alpha(x, y), \quad f_2(x, y, \sigma) = y, \quad f_3(x, y, \sigma) = \sigma.$$

Це показує, що $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$, а відповідність $f \mapsto \alpha \in W^{r+1,r}$ -неперервною. $\square$

Особливість типу «фокус». Нехай $a, b \in \mathbb{R}$ і

$$G(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (-bx + ay) \frac{\partial}{\partial y}$$

— векторне поле на $\mathbb{R}^2$. Якщо ототожнити $\mathbb{R}^2$ з комплексною площиною $\mathbb{C}$, і покласти $\omega = a + bi$, то потік поля G визначається за формулою:

$$\mathbf{G}(z, t) = e^{\omega t} z.$$

Очевидно, що початок координат 0 є єдиною особливою точкою поля G . Якщо $a \neq 0$, то всі інші орбіти є так званими «спіралями Архімеда». Зокрема, вони незамкнуті, «починаються» в точці 0 і спірально «змотуються» з неї. У цьому випадку особлива точка 0 називається *фокусом*.

Якщо ж $a = 0$, то всі регулярні орбіти поля G — це концентричні кола з центром в початку координат. Тоді точка 0 називається *центром*.

Наступне твердження описує відображення зсуву для фокусів.

Твердження 3.2.2. *Припустимо, що $a \neq 0$ і нехай $V \subset \mathbb{C} \times S^l$ — D -відмноговид такий, що $(0, \sigma_0) \in \text{Int}V$ для деякого $\sigma \in S^l$. Тоді $\text{Sh}(F, V) = \mathcal{E}(F, V)$ і для кожного $r \geq 0$ відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}(F, V)$ є $W^{r,r}$ -неперервною бієкцією, обернена до якої є $W^{r+2,r}$ -неперервною. Зокрема $\varphi_{F,V}$ індукує гомеоморфізм $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ на $\mathcal{E}(F, V)$ відносно W^∞ -топологій.*

Доведення. Нехай $f = (g, r) : V \rightarrow \mathbb{C} \times S^l$ — відображення, що належить до $\mathcal{E}(F, V)$, де $g(z, \sigma) = p(z, \sigma) + iq(z, \sigma)$. Тоді $r(z, \sigma) = \sigma$. Нам потрібно знайти таку $\mathcal{C}^\infty$ -функцію $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$g(z) = e^{\omega \alpha(z, \sigma)} z = e^{a \alpha(z, \sigma)} \cdot e^{ib \alpha(z, \sigma)} \cdot z.$$

Визначимо функцію $\gamma : V \setminus (0 \times S^l) \rightarrow \mathbb{C}$ за формулою

$$\gamma(z) = g(z, \sigma)/z = e^{\omega \alpha(z, \sigma)}$$

і нехай u та v — відповідно дійсна та уявна частини γ , тобто $\gamma(z, \sigma) = u(z, \sigma) + iv(z, \sigma)$. Так як f зберігає інваріантними орбіти поля F , то $g(z, \sigma) \neq 0$ для $z \neq 0$, а значить і $\gamma \neq 0$ на $V \setminus (0 \times S^l)$. Тому

$$\alpha(z, \sigma) = \frac{1}{2a} \ln |\gamma(z, \sigma)|^2 = \frac{1}{2a} \ln \frac{|g(z, \sigma)|^2}{|z|^2}, \quad z \neq 0.$$

Таким чином α однозначно визначена на $V \setminus (0 \times S)$ і належить тому ж класу гладкості, що і g . Залишається довести, що α можна визначити і в точці 0 так, щоб ця функція стала гладкою на всій площині. Остання формула показує, що досить встановити, що $|\gamma(z, \sigma)|^2$ продовжується до C^∞ -функції на всьому V .

Лема 3.2.3. *Покладемо $d\gamma = du + idv$. Тоді*

$$\operatorname{Im}(\omega \gamma d\gamma) = 0, \quad (3.11)$$

тобто 1-форма $\omega \gamma d\gamma$ є дійсно-значною.

Доведення. З того, що $\gamma = e^{\omega \alpha}$ випливає, що $d\gamma = \omega \gamma d\alpha$. Домножаючи обидві частини цієї рівності на $d\bar{\gamma} = du - idv$ отримаємо, що $d\gamma d\bar{\gamma} = \omega \gamma d\bar{\gamma} d\alpha$. Так як $d\gamma d\bar{\gamma}$ та $d\alpha$ є дійсними, то $\omega \gamma d\gamma$ є також дійсною. $\square$

Розпишемо тотожність (3.11) в координатах $(z, \bar{z}, \sigma)$. Спочатку відмітимо, що

$$\omega \gamma d\gamma = \omega \frac{g}{z} d\left(\frac{\bar{g}}{\bar{z}}\right) = \omega \frac{g}{z} \cdot \frac{\bar{z} d\bar{g} - \bar{g} d\bar{z}}{\bar{z}^2} = \frac{(z\bar{z})\omega g d\bar{g} - (g\bar{g})\omega z d\bar{z}}{(z\bar{z})^2}.$$

Так як $z\bar{z}$ та $g\bar{g}$ є дійсними, то (3.11) означає, що

$$(gz\bar{g}) \cdot \operatorname{Im}(\omega z d\bar{z}) = (z\bar{z}) \cdot \operatorname{Im}(\omega g d\bar{g}),$$

або, поділивши обидві частини цієї рівності на $z\bar{z}$, що

$$|\gamma|^2 \cdot \operatorname{Im}(\omega z d\bar{z}) = \operatorname{Im}(\omega g d\bar{g}). \quad (3.12)$$

Обчислимо значення обох частин (3.12) в точці z на дотичному векторі $\omega = a + ib = (a, b)$. Зокрема, в ліву частину підставляємо $d\bar{z} = \bar{\omega} = a - ib$. Тоді

$$\operatorname{Im}(\omega z d\bar{z}) = \operatorname{Im}(\omega z \bar{\omega}) = \operatorname{Im}(|\omega|^2 z) = |\omega|^2 y,$$

а значить (3.12) матиме вигляд

$$|\gamma|^2 |\omega|^2 y = \operatorname{Im}(\omega g d\bar{g}(\omega)). \quad (3.13)$$

Ліва частина цієї рівності належить класу C^∞ на $V \setminus 0$ і дорівнює нулю для всіх точок виду $(x, 0) \in V$. З іншого боку права частина (3.13) належить класу

$\mathcal{C}^\infty$ на всьому V , а тому за лемою Адамара вона гладко ділиться на y . Звідси випливає, що $|\gamma|^2$, а тому і α , гладко проводжується на V . Зокрема, α можна визначити за наступною формулою:

$$\alpha(z) = \frac{1}{2a} \ln \frac{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(\omega g d\bar{g}(\omega))(x, sy) ds}{|\omega|^2} \quad (3.14)$$

Тоді $g = \varphi_{F,V}(\alpha)$, тобто $Sh(F, V) = \mathcal{E}(F, V)$. Крім того, з формули для α випливає, що відповідність $g \mapsto \alpha \in W^{r+2,r}$ -неперервною. $\square$

Особливість типу «центр». Нехай $G(x, y) = -by \frac{\partial}{\partial x} + bx \frac{\partial}{\partial y}$, $b \neq 0$. Очевидно, що орбіти цього поля — це початок координат 0 та концентричні кола з центром в 0 . В комплексній координаті $z = x + iy$ потік $\mathbf{G} : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ поля G визначається за формулою:

$$\mathbf{G}(z, t) = ze^{ibt}.$$

Нехай $V \subset \mathbb{C} \times S^l$ — довільний D -підмноговид. На відміну від попередніх прикладів, $\varphi_{F,V}$ вже не буде ін'єктивним відображенням, тобто має ненульове ядро $P(V)$.

Дійсно, нехай $\alpha_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ — постійна функція, що приймає значення $2\pi n/b \in \mathbb{Z}$. Тоді очевидно, що $\varphi_{F,V}(\alpha_n) = \operatorname{id}_V$, тобто

$$\varphi_{F,V}(\alpha_n)(z, \sigma) = ze^{ib2\pi n/b} = z$$

для всіх $z \in \mathbb{C}$. Легко показати, що ядро $P(V)$ відображення зсуву співпадає з множиною усіх таких функцій, тобто $P(V) = \{2\pi n/b \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Твердження 3.2.4. $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\operatorname{id}}(F, V)^0$, а відповідне відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^2 \times S^l) \rightarrow \mathcal{E}_{\operatorname{id}}(F, V)^0$ є $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням відносно W^∞ -топологій. Зокрема, якщо V є компактним, то простір $\mathcal{E}_{\operatorname{id}}(F, V)^0$ гомотопічно еквівалентний до кола.

Доведення базується на наступних лемах. Перша з них елементарна і ми сформулюємо її без доведення.

Лема 3.2.5. Нехай $k \geq 2$ і $\varepsilon : (\mathbb{C} \times S^l, \sigma, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — C^∞ -відображення, що є k -малим в точці $(0, \sigma)$ для кожного $\sigma \in S^l$. Визначимо відображення $\tau : (\mathbb{C} \times S^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ за формулою $\tau(z, \sigma) = \varepsilon(z, \sigma)/z = \bar{z}\varepsilon(z, \sigma)/|z|^2$ для $z \neq 0$ і $\tau(0, \sigma) = 0$. Тоді τ належить класу C^{k-2} . $\square$

Наступна лема, є частковим результатом роботи [49] про ділення узагальнених функцій на многочлени.

Лема 3.2.6. Нехай $Z : C^\infty(V, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{C})$ відображення «множення на z », тобто $Z(\alpha)(z, \sigma) = \alpha(z, \sigma) \cdot z$. Тоді Z є ін'єктивним, а обернене відображення $Z^{-1} : \text{im}(Z) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{C})$ є $W^{\infty, \infty}$ -неперервним.

Доведення. Нехай β належить образу Z , тобто $\beta(z) = \alpha(z) \cdot z$. Тоді функція α однозначно визначається за β , а значить Z є ін'єктивним. Залишилось довести $W^{\infty, \infty}$ -неперервність відповідності $Z^{-1} : \beta \mapsto \alpha$.

Відмітимо, що Z^{-1} можна представити як композицію наступних відповідей:

$$\beta \mapsto \beta \cdot \bar{z} \mapsto (\beta \cdot \bar{z})/(x^2 + y^2) = \alpha.$$

Перша відповідність є, очевидно, $W^{\infty, \infty}$ -неперервною, а $W^{\infty, \infty}$ -неперервність другої випливає з роботи [49]. $\square$

Нам також буде потрібне наступне твердження.

Лема 3.2.7. Нехай $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ — паросток C^1 -дифеоморфізму в точці 0, і $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна однорідна функція степеня k , тобто $g(tx) = t^k g(x)$ для $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}^n$. Якщо $g = g \circ f$, то $g = g \circ f'(0)$.

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ і $t > 0$. Тоді

$$g(x) = \frac{g(tx)}{t^k} = \frac{g(f(tx))}{t^k} = g\left(\frac{f(tx)}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} g \circ f'(0)(x).$$

Лемі доведено. $\square$

Лема 3.2.8. Нехай $f = (g, r) \in \mathcal{E}(F, V)$ — відображення, яке має C^∞ -функцію зсуву α на $V \setminus (0 \times S^l)$, тобто $g(z, \sigma) = e^{ib\alpha(z, \sigma)}z$ для $z \neq 0$. Тоді α продовжується до C^∞ -функції на всьому V , тобто $f \in Sh(F, V)$.

Доведення. Умова $f \in \mathcal{E}(F, V)$ означає, що

$$|g(z, \sigma)| = |z|, \quad z \in V. \quad (3.15)$$

Знову розглянемо функцію $\gamma(z, \sigma) = g(z, \sigma)/z$, визначену на $V \setminus (0 \times S^l)$. Покажемо, що вона продовжується до C^∞ -функції на V , причому $\gamma(0, \sigma) \neq 0$. Тоді $\gamma \neq 0$ на V і для кожного $n \in \mathbb{Z}$ функція

$$\alpha_n(z, \sigma) = \frac{1}{b}(\arg(\gamma(z, \sigma)) + 2\pi n) \quad (3.16)$$

є C^∞ -функцією зсуву для f на V . Тепер легко перевірити, що $\alpha = \alpha_n$ на $V \setminus 0$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$.

Позначимо $g_\sigma = g(\cdot, \sigma)$ і покажемо, що

$$\frac{\partial^n g_\sigma}{\partial \bar{z}^n}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Доведення (3.17). Запишемо $g_\sigma(z) = p(z, \sigma) + iq(z, \sigma)$, де $p, q \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. Використаємо індукцію по n . Нехай $n = 1$. Тоді (3.15) означає, що g_σ зберігає однорідний многочлен $\beta(x, y) = x^2 + y^2$, а тому за лемою 3.2.7 дотичне лінійне відображення $g'_\sigma(0, \sigma)$ також зберігає β для кожного $\sigma \in S^l$. Звідси слідує, що $g'_\sigma(0)$ є ортогональною матрицею, а отже $\frac{\partial g_\sigma}{\partial \bar{z}}(0) = 0$.

Припустимо, що лема вже доведена для $n - 1$. Тобто

$$g_\sigma(z) = e^{ia}z + A(z)z + K\bar{z}^n + \varepsilon_{n+1},$$

де $A(z)$ — многочлен від змінних z та $\bar{z}$, $1 \leq \deg A \leq n - 1$ і $K = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_\sigma}{\partial \bar{z}^n}(0)$.

Потрібно довести, що $K = 0$.

Підставляючи g_σ в формулу (3.15) отримаємо, що

$$z\bar{z} = g_\sigma \bar{g}_\sigma = z\bar{z} + A(z)z\bar{z} + K\bar{z}^{n+1} + \bar{A}(z)z\bar{z} + \bar{K}z^{n+1} + \theta_{n+2},$$

де $\theta_{n+2} = o(|z|^{n+2})$. Тому $\bar{K}z^{n+1} + (A(z) + \bar{A}(z))z\bar{z} + K\bar{z}^{n+1} = -\theta_{n+2}$.

Права частина цієї рівності є функцією порядку $|z|^{n+2}$, в той час як ліва — є многочленом степеня $\leq n+1$ відносно змінних z та $\bar{z}$. Тому всі коефіцієнти цього многочлена рівні нулю. Так як перші два доданки містять множник z , то коефіцієнт при $\bar{z}^n$ дорівнює K , а значить $K = 0$. $\square$

Залишається встановити гладкість γ . Для $n = 1$ формула (3.17) означає, що $\frac{\partial g_\sigma}{\partial z}(0, \sigma) \in \text{множенням на } e^{ia_\sigma}$ для деякого $a_\sigma \in \mathbb{R}$, тобто $g_\sigma(z) = e^{ia_\sigma}z + \varepsilon_2$, де $\varepsilon_2 = o(|z|^2)$. Відмітимо, що число a_σ визначене з точністю до доданку виду $2\pi n/b$. Але так як g є гладким відображенням, а S^l — однозв'язним многовидом, то можна знайти таку гладку функцію $a : S^l \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$g(z, \sigma) = e^{ia(\sigma)}z + \varepsilon_2.$$

Покладемо $\gamma(0, \sigma) = e^{ia(\sigma)}$. Тоді $\gamma(0, \sigma) \neq 0$ і за лемою 3.2.5 γ стає неперервною в точці 0.

З формули (3.17) випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ функцію g можна подати у вигляді $g(z, \sigma) = \nu_{n-1}(z, \sigma)z + \varepsilon_{n+1}(z, \sigma)$, де ν_{n-1} — многочлен Тейлора степеня $n-1$ від змінних z та $\bar{z}$ з гладкими коефіцієнтами, що залежать тільки від $\sigma \in S^l$, а $\varepsilon_{n+1} = o(|z|^{n+1})$. Тому $\gamma = g/z = \nu_{n-1} + \varepsilon_{n+1}/z$, причому за лемою 3.2.5 залишок $\varepsilon_{n+1}/z \in \text{функцією класу } C^{n-1}$. Таким чином γ належить класу C^{n-1} для кожного $n \in \mathbb{N}$, а отже є нескінченно диференційовною. $\square$

Доведення твердження 3.2.4. Нехай $f = (g, r) \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, тобто існує гомотопія $f_t : V \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^l$ в $\mathcal{E}(F, V)$ між $f_0 = f$ та тотожним вкладенням $f_1 = i_V : V \subset \mathbb{R}^2 \times S^l$. Тоді за наслідком 5.1.8, який ми доведемо пізніше, існує C^∞ -функція зсуву α_f для f на $V \setminus (0 \times S)$. Але тоді за лемою 3.2.8 α гладко продовжується на весь окіл V .

Для доведення другої частини твердження, досить встановити, згідно наслідку 4.2.9, що $\varphi_{F,V}$ є локальним гомеоморфізмом на свій образ відносно W^∞ -

топологій.

Покажемо, що знайдеться такий окіл $\mathcal{U}$ відображення f в $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, що відповідність $f \mapsto \alpha_f \in W^{\infty, \infty}$ -неперервним.

Згідно леми (3.2.8) відображення g гладко ділиться на z , тому згідно леми 3.2.6 відповідність $f \mapsto \gamma = g/z \in W^{\infty, \infty}$ -неперервною. Тепер існування околу $\mathcal{U}$ випливає з формули (3.16). $\square$

3.3 Висновки

В третьому розділі наведено точні формули для відображення зсуву деяких простих векторних полів на числовій прямій та площині. Встановлено, що у всіх випадках відображення зсуву є гомеоморфізмом на свій образ відносно топологій W^∞ .

Розділ 4 ЯДРО ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ

В цьому розділі ми детально вивчаємо структуру ядра відображення зсуву (тобто множини всіх P -функцій) і отримуємо два основних результати. Перший (теорема 4.1.1) описує ядро для довільної відкритої зв'язної підмножини, а другий — (теорема 4.1.2) показує, принципову відмінність між P -функціями загальних неперервних потоків та P -функціями потоків, що є спряженими до $\mathcal{C}^1$ -потоків.

4.1 Теореми про структуру ядра відображення зсуву

Нехай $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ — неперервний потік на топологічному скінченновимірному многовиді M . і $V \subset M$ — підмножина. Нагадаємо, що неперервна функція $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ називається P -функцією, якщо $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$ для всіх $x \in V$. Множину всіх функцій на V ми позначаємо через $P(V)$ і також називаємо *ядром* відображення зсуву $\varphi_{F,V}$, (див. §2.2).

Теорема 4.1.1. *Нехай M — зв'язний скінченно вимірний топологічний многовид, можливо не компактний, з краєм або без краю, $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ — неперервний потік на M і $V \subset M$ — **відкрита зв'язна множина**.*

(А) *Якщо $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V \neq \emptyset$, то*

$$P(V) = \{\theta \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R}) : \theta|_{V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})} = 0\}.$$

(В) *Припустимо, що $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V = \emptyset$. Тоді реалізується одна з наступних*

можливостей: або

$$P(V) = \{0\}$$

або

$$P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

для деякої неперервної P -функції $\theta : V \rightarrow [0, +\infty)$, що має наступні властивості:

- (1) $\theta > 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, а отже ця множина складається лише з періодичних точок.
- (2) Існує така відкрита всюди щільна підмножина $Q \subset V$, що $\theta(x) = \text{Per}(x)$ для всіх $x \in Q$.
- (3) θ є регулярною P -функцією, тобто для кожної точки $x \in V$ функція θ є постійною на перетині $o_x \cap V$.
- (4) Покладемо $U = \mathbf{F}(V \times \mathbb{R})$. Тоді θ продовжується до P -функції на U і існує дія кола $\mathbf{G} : U \times S^1 \rightarrow U$, визначена за формулою: $\mathbf{G}(x, t) = \mathbf{F}(x, t\theta(x))$, $x \in U$, $t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Орбіти цієї дії співпадають з орбітами потоку $\mathbf{F}$.

Зокрема, у всіх випадках $RP(V) = P(V)$.

Доведення цієї теореми буде дано в §§4.3 та 4.4.

Теорема 4.1.2. Нехай F — векторне поле класу $\mathcal{C}^1$ на многовиді M і $V \subset M$ — така відкрита зв'язна підмножина, що відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є періодичним, тобто $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої невід'ємної P -функції $\theta : V \rightarrow [0, +\infty)$, див. твердження (1) теореми 4.1.1. Тоді, $\theta > 0$ на всій множині V , а не лише на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$.

Більш того, для кожної особливої точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ існують локальні координати, в яких лінійна частина $j^1 F(z)$ поля F в точці z визначається наступною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & & & \\ -\beta_1 & 0 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & 0 & \beta_k & \\ & & & -\beta_k & 0 & \\ & & & & & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

для деякого $k \geq 1$ і $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus 0$. Зокрема, $j^1 F(z) \neq 0$.

Цю теорему буде доведено в §4.5.

Зауваження 4.1.3. За умов теореми 4.1.2 припустимо, що θ належить класу $\mathcal{C}^1$ і $\theta(z) \neq 0$ для деякої точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$. В цьому випадку легко довести існування представлення (4.1) в точці z .

Дійсно, визначимо потік $\mathbf{G} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ за формулою $\mathbf{G}(x, t) = \mathbf{F}(x, t \theta(x))$. Тоді $\mathbf{G}$ породжується $\mathcal{C}^1$ векторним полем $G = \theta F$. Більш того, $\mathbf{G}_1 = \text{id}_M$, а тому $\mathbf{G}$ індукує дію кола $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ на M .

Нехай $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді $\mathbf{G}_t(z) = z$, а отже $\mathbf{G}$ індукує лінійну дію $T_z \mathbf{G}_t$ кола S^1 на дотичному просторі $T_z M$. Із стандартних результатів про лінійні представлення S^1 випливає, що лінійна частина G в точці z в деяких локальних координатах задається матрицею виду (4.1). Залишається відмітити, що $j^1 F(z) = j^1 G(z)/\theta(z)$.

Зауважимо, що наведені аргументи *не доводять, що матриця (4.1) є ненульовою*.

4.2 Наслідки з теорем 4.1.1 та 4.1.2

P-функції для D-підмноговидів.

Наслідок 4.2.1. *Нехай $V \subset M$ — така зв'язна підмножина, що її внутрішність $\text{Int} V$ — непорожня, зв'язна і всюди щільна в V . Наприклад, ця умова виконується, якщо V є зв'язним D-підмноговидом. Тоді відображення обмеження*

$$r : P(V) \rightarrow P(\text{Int} V), \quad r(\theta) = \theta|_{\text{Int} V}$$

є мономорфізмом. Таким чином, $P(V)$ складається з усіх P-функцій на $\text{Int} V$, які неперервно продовжуються на V .

Зокрема, якщо $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V \neq \emptyset$, то

$$P(V) = \{\theta \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R}) : \theta|_{V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})} = 0\}.$$

В протилежному випадку, коли $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V = \emptyset$, реалізується одна з наступних можливостей: або

$$P(V) = \{0\}$$

або

$$P(V) = \{n\nu\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

для деякої неперервної P -функції $\nu : V \rightarrow [0, +\infty)$, такої, що $\nu > 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$.

Доведення. Як відмічалось в лемі 2.2.11, $P(\cdot)$ є контраваріантним функтором з категорії підмножин в M в категорію абелевих груп. Зокрема влучення $\text{Int}V \subset V$ індукує відображення обмеження

$$r : P(V) \rightarrow P(\text{Int}V), \quad r(\theta) = \theta|_{\text{Int}V}.$$

Так як $\text{Int}V$ є всюди щільною в V , то з $\theta|_{\text{Int}V} = 0$ випливає, що $\theta = 0$ на всьому V . Це показує, що r є мономорфізмом.

Відмітимо також, що якщо $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, обмеження якої на $\text{Int}V$ є P -функцією, тобто $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$ для всіх $x \in \text{Int}V$, то ця тотожність тоді виконується для всіх $x \in V$, тобто θ є P -функцією на V . Це і означає, що $P(V)$ складається з усіх P -функцій на $\text{Int}V$, які неперервно продовжуються на V .

Припустимо, що $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V \neq \emptyset$. Тоді $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap \text{Int}V \neq \emptyset$, а тому за теоремою 4.1.1

$$P(\text{Int}V) = \{\nu \in \mathcal{C}(\text{Int}V, \mathbb{R}) : \nu|_{\text{Int}V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})} = 0\}.$$

Тоді $P(V)$ складається з усіх неперервних функцій $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ для яких $\theta|_{\text{Int}V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})} = 0$, а тому також $\theta|_{V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})} = 0$.

Нехай тепер $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V = \emptyset$. Тоді $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap \text{Int}V = \emptyset$, а тому за теоремою 4.1.1 або $P(\text{Int}V) = \{0\}$ або $\{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої функції $\theta : \text{Int}V \rightarrow [0, +\infty)$. Так як $P(V)$ є підгрупою в $P(\text{Int}V)$, то $P(V) = \{0\}$ або $P(V) = \{nk\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякого $k \geq 1$. Отже можна покласти $\nu = k\theta$.

Покажемо, що $\nu > 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. За теоремою 4.1.1 $\nu > 0$ на $\text{Int}V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тому залишається довести, що $\theta(x) > 0$ для всіх $x \in V \setminus (\text{Int}V \cup \text{Fix}(\mathbf{F}))$.

Так як $\text{Int}V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ є всюди щільною в V , то існує послідовність точок $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{Int}V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що збігається до x . Тоді $\theta(x_i) > 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що $\theta(x) = 0$. Тоді

$$0 = \theta(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(x_i) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) \geq 0.$$

Тепер з леми 4.3.1 випливає, що x є нерухомою точкою, а це протирічить припущенню. $\square$

Зауваження 4.2.2. В умовах наслідку 4.2.1 припустимо, що $P(\text{Int}V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Мені невідомо, чи існують приклади, коли $P(V) = \{nk\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякого $k \geq 2$, тобто функція θ є твірною в $P(\text{Int}V)$, але твірною в $P(V)$ є лише її цілочисельне кратне $k\theta$. Я також не знаю, чи завжди функція θ буде регулярною на V .

Означення 4.2.3. Нехай $V \subset M$ зв'язна відкрита підмножина, або зв'язний D -підмноговид. Припустимо також, що $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V = \emptyset$. Якщо $P(V) = \{0\}$, то відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ називатимемо **неперіодичним**. В протилежному випадку, коли $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, відображення $\varphi_{F,V}$ буде називатись **періодичним**, а функція θ — твірною $P(V)$.

В умовах наслідку 4.2.1 підгрупа $P(V)$ не зобов'язана співпадати з $P(\text{Int}V)$. Наступний простий приклад показує, що може статись, що $P(V) = \{0\}$, в той час як $P(\text{Int}V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Це відбувається, наприклад, коли

$$\lim_{\text{Int}V \ni x \rightarrow z} \theta(x) = \infty$$

для деякої точки $z \in \partial V$.

Приклад 4.2.4. Нехай $S^1 = \{e^{i\tau} \mid \tau \in [0, 2\pi]\}$ — одиничне коло в комплексній площині і $\mu : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ — така C^∞ -функція, що $\mu(0, 0) = 0$ і $\mu(\tau, t) > 0$ для всіх інших точок $(\tau, t) \neq (0, 0)$. Визначимо векторне поле на $S^1 \times \mathbb{R}$ за формулою:

$$F(\tau, t) = \mu(\tau, t) \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Структура його орбіт зображена на рис. 4.2.1. Це поле має єдину особливу точку $(0, 0)$ та одну незамкнуту орбіту $S^1 \times \{0\} \setminus (0, 0)$. Всі інші орбіти є замкнутими і співпадають з колами $S^1 \times \{t\}$ для $t \neq 0$. Відмітимо, що при $t \neq 0$

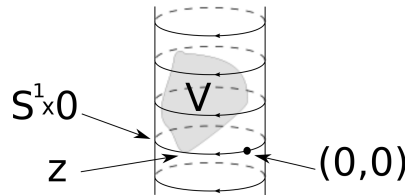


Рис. 4.2.1

період точки (τ, t) становить

$$\theta(\tau, t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\mu(\sigma, t)}.$$

Тоді $\theta \in P$ -функцією на $S^1 \times (\mathbb{R} \setminus 0)$. Але так як $\mu(0, 0) = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(\tau, t) = \infty. \quad (4.2)$$

Нехай $V \subset S^1 \times [0, +\infty)$ — такий замкнутий 2-диск, що $\text{Int} V \subset S^1 \times (0, +\infty)$, але $\partial V \cap S^1 \times 0$ містить деяку неперіодичну точку z . Тоді $P(\text{Int} V) = \{n\theta|_{\text{Int} V}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, але так як ∂V містить неперіодичну точку z , то $\theta(z) = 0$ для кожної функції $\theta \in P(V)$. Так як $P(V)$ є підгрупою в $P(\text{Int} V)$, то з (4.2) випливає, що $P(V) = \{0\}$.

З іншого боку, має місце наступне твердження:

Наслідок 4.2.5. Нехай $W \subset M$ — така відкрита зв’язна підмножина, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною в W і нехай $V \subset W$ — така підмножина, що $\text{Int}V$ є зв’язною множиною і

$$V \subset \overline{\text{Int}V} \subset W.$$

Наприклад, ці умови виконуються, якщо V є зв’язним D -підмноговидом. Припустимо, що $P(W) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої функції $\theta : W \rightarrow [0, +\infty)$, тобто відображення зсуву $\varphi_{F,W}$ є періодичним. Тоді $P(V) = \{n\theta|_V\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Доведення. Очевидно, що $\{n\theta|_V\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset P(V)$. Для доведення оберненого включення достатньо встановити, що

$$P(\text{Int}V) = \{n\theta|_{\text{Int}V}\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (4.3)$$

Дійсно, якщо $\theta \in P(V)$, то $\theta|_{\text{Int}V} \in P(\text{Int}V)$, тобто

$$\theta|_{\text{Int}V} = m\theta|_{\text{Int}V}$$

для деякого $m \in \mathbb{Z}$. Але тоді $\theta = m\theta|_V$.

Доведемо (4.3). Так як $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в W , то вона не щільна і в $\text{Int}V$, а тому $P(\text{Int}V)$ описується випадком (В) теореми 4.1.1. Більш того, $\theta|_{\text{Int}V} \in P(\text{Int}V) \neq \{0\}$, а отже $P(\text{Int}V) = \{n\nu\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої функції $\nu : \text{Int}V \rightarrow [0, \infty)$, яка так само як і θ задовольняє умови (1)-(4) теореми 4.1.1.

Зокрема, $\theta|_{\text{Int}V} = m\nu$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Залишається показати, що $m = 1$. Дійсно, за умовою (2) теореми 4.1.1 існують такі відкриті всюди щільні підмножини $Q_\theta \subset W$ та $Q_\nu \subset \text{Int}V$, що $\theta(x) = \text{Per}(x)$ для $x \in Q_\theta$ і $\nu(x) = \text{Per}(x)$ для $x \in Q_\nu$. Але $Q_\theta \cap Q_\nu \neq \emptyset$, а тому $\nu = \theta$ на цьому перетині. $\square$

Наслідок 4.2.6. Нехай $V \subset M$ — зв’язна підмножина, що є або відкритою, або D -підмноговидом і $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною в V . Тоді кожна з наступних умов гарантує, що $P(V) = \{0\}$:

(а) існує неперіодична точка $x \in \text{Int}V$;

(b) $\mathbf{F}$ породжується векторним полем класу $\mathcal{C}^1$ і існує така точка $x \in \text{Int}V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$, що $j^1 F(x) = 0$.

Доведення. Припустимо, що $P(V) \neq \{0\}$. Тоді $\varphi_{F,V}$ є періодичним, тобто $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, причому $\theta > 0$ на $\text{Int}V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$.

Але тоді у випадку (а) так як x — неперіодична точка, то, за лемою 2.2.6, $\theta(x) = 0$, що протирічить умові $\theta > 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$.

У випадку (b) теорема 4.1.2 ствержує, що якщо $\varphi_{F,V}$ є періодичним, то $j^1 F(x) \neq 0$. Це знову протирічить припущенню. $\square$

Наслідок 4.2.7 (Періодичність відображення зсуву для $\mathcal{C}^1$ -потоків). *Нехай $\mathbf{F}$ — потік і $V \subset M$ — така відкрита зв'язна підмножина, що відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є періодичним, тобто $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої неперервної функції $\theta : V \rightarrow [0, +\infty)$. Припустимо, що $\mathbf{F}$ є спряженим до деякого $\mathcal{C}^1$ -потіку $\mathbf{G}$. Тоді $\theta > 0$ на всій V .*

Доведення. В роботі D. Hart [43] показано, що для $r \geq 1$ кожен $\mathcal{C}^r$ -потік $\mathbf{G}$ є $\mathcal{C}^r$ -спряженим до $\mathcal{C}^r$ потоку $\mathbf{H}$, який породжений векторним полем H класу $\mathcal{C}^r$. Тому $\mathbf{F}$ є спряженим до $\mathbf{H}$, тобто існує такий гомеоморфізм $h : M \rightarrow M$, що $\mathbf{H}_t = h \circ \mathbf{F}_t \circ h^{-1}$. Згідно леми 2.3.1 відображення

$$h^* : P(\mathbf{F}, V) \rightarrow P(\mathbf{H}, h(V)), \quad h^*(\theta) = \theta \circ h^{-1}$$

є ізоморфізмом груп. Тому $P(\mathbf{H}, h(V)) = \{n \cdot \theta \circ h^{-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Так як $\mathbf{H}$ породжується $\mathcal{C}^1$ -векторним полем, то за теоремою 4.1.2 $\theta \circ h^{-1} > 0$ на $h(V)$, а тому $\theta > 0$ на V . $\square$

Наслідок 4.2.8 (Локальна ін'єктивність $\varphi_{F,V}$). *Нехай $r \geq 0$, $\mathbf{F}$ — локальний $\mathcal{C}^r$ -потік і $V \subset M$ зв'язна відкрита підмножина, або зв'язний D -підмноговид. Припустимо, що відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є періодичним, тобто $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, причому $\theta > 0$ на V (згідно теореми 4.1.2 остання умова виконується якщо V — відкрита підмножина і $r \geq 1$). Тоді відображення $\mathcal{C}^r$ -зсуву*

$\varphi_{F,V}^r$ є локально ін'єктивним відносно кожної з топологій S^k на $C^r(V, \mathbb{R})$ для $0 \leq k \leq r$.

Доведення. Досить перевірити локальну ін'єктивність $\varphi_{F,V}$ відносно найслабшої топології S^0 . Нехай $\alpha \in C(V, \mathbb{R})$. Розглянемо наступний S^0 -окіл функції α в $C(V, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{N} = \{\beta \in C(V, \mathbb{R}) \mid |\alpha - \beta| < \theta/2\}$$

і покажемо, що обмеження $\varphi_{F,V}$ на $\mathcal{N}$ є ін'єктивним.

Припустимо, що $\varphi_{F,V}(\beta) = \varphi_{F,V}(\gamma)$ для деяких $\beta, \gamma \in \mathcal{N}$, тобто $\mathbf{F}(x, \beta(x)) = \mathbf{F}(x, \gamma(x))$ для всіх $x \in V$. Потрібно показати, що $\beta = \gamma$.

Нехай Q — множина періодичних точок $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ для яких $\theta(x) = \text{Per}(x)$. За теоремою 4.1.1 Q є відкритою і всюди щільною в V , тому для доведення ін'єктивності обмеження $\varphi_{F,V}|_{\mathcal{N}}$ досить встановити, що $\beta = \gamma$ на Q .

Нехай $x \in Q$. Тоді $\beta(x) - \gamma(x) = n_x \text{Per}(x) = n_x \theta(x)$ для деякого $n_x \in \mathbb{Z}$. З іншого боку

$$|n_x \theta(x)| = |\beta(x) - \gamma(x)| \leq |\alpha(x) - \beta(x)| + |\alpha(x) - \gamma(x)| < \theta(x),$$

а тому $n_x = 0$. Таким чином, $\beta = \gamma$ на Q . □

Гомотопічний тип $Sh(F, V)$. Припустимо, що V — такий зв'язний D -підмноговид, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в V .

Зафіксуємо на $\text{func}(F, V)$ та $Sh(F, V)$ топології S^∞ . Якщо $P(V) = \{0\}$, то відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ є неперервною біекцією. В протилежному випадку $\varphi_{F,V}$ є періодичним, тобто $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої C^∞ -функції $\theta : V \rightarrow [0, +\infty)$. Припустимо, що $\theta > 0$ на всьому V . Тоді за наслідком 4.2.8, $\varphi_{F,V}$ є локально ін'єктивним.

Таким чином, якщо $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в V , то виникає природне питання: чи буде відображення C^∞ -зсуву $\varphi_{F,V}$ локальним гомеоморфізмом відносно топологій S^∞ ?

Нагадаємо, що у всіх прикладах з розділу 3, у яких потік мав нерухомі точки, відображення $\varphi_{F,V}$ було $S^{r,r}$ -неперервною бієкцією, а обернена до неї — лише $S^{r+k,r}$ -неперервною, для деякого $k \geq 1$. Таким чином навряд чи можна чекати, що $\varphi_{F,V}$ буде локальним гомеоморфізмом відносно деяких топологій S^s та S^r для $s, r < \infty$.

Наступна теорема описує гомотопічний тип $Sh(F, V)$ за умови, що $\varphi_{F,V}$ є локальним $S^{\infty, \infty}$ -гомеоморфізмом.

Наслідок 4.2.9. *Нехай $\mathbf{F}$ — локальний C^∞ -потік і $V \subset M$ — D -підмноговид такі, що відображення C^∞ -зсуву $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ є локальним гомеоморфізмом на свій образ відносно топологій S^∞ . Нехай далі*

$$\Gamma^+ = \{\alpha \in C^\infty(V, \mathbb{R}) \mid F(\alpha) > -1\}.$$

Тоді $\varphi_{F,V}(\Gamma^+)$ складається з усіх іммерсій $V \rightarrow M$, що належать до $Sh(F, V)$, див. наслідок 2.4.2. Зокрема маємо два сюр'єктивних відображення

$$\begin{aligned} \varphi_{F,V}|_{\Gamma^+} : \Gamma^+ &\rightarrow \varphi_{F,V}(\Gamma^+), \\ \varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) &\rightarrow Sh(F, V). \end{aligned} \tag{4.4}$$

1) Якщо $\varphi_{F,V}$ неперіодичне, то відображення (4.4) є гомеоморфізмами відносно топологій S^∞ .

2) Припустимо, що $\varphi_{F,V}$ періодичне, а твірна θ ядра $P(V)$ є строго додатною на всьому V . Тоді $\text{func}(F, V) = C^\infty(V, \mathbb{R})$, відображення (4.4) є нескінченними циклічнимим накриттями ($\mathbb{Z}$ -накриттями) відносно топологій S^∞ , а дія групи $\mathbb{Z}$ на них визначається за формулою

$$n \cdot \alpha = \alpha + n\theta.$$

3) Припустимо, що V є компактним. Тоді у випадку 1) простори $\varphi_{F,V}(\Gamma^+)$ та $Sh(F, V)$ є стягнутими, а у випадку 2) — гомотопічно еквівалентними до кола.

Доведення. Твердження 1) випливає з того, що $\varphi_{F,V}$ є бієктивним локальним гомеоморфізмом.

2) Так як $\theta > 0$ на V , то, згідно леми 2.2.6, всі точки з V є або періодичними, або нерухомими, а тому $x \times \mathbb{R} \subset \text{dom}(F)$ для кожної точки $x \in V$, тобто $V \times \mathbb{R} \subset \text{dom}(F)$. Звідси випливає, що $\text{func}(F, V) = \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$.

Згідно наслідку 2.2.4 $\varphi_{F,V}$ розкладається у композицію відображень:

$$\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \xrightarrow{p} \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})/P(V) \xrightarrow{j} Sh(F, V),$$

де p — це відображення у фактор-групу, а j — бієкція. Очевидно, що $p \in \mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням, а так як $\varphi_{F,V}$ є локальним гомеоморфізмом, то j — гомеоморфізм. Тому $\varphi_{F,V}$ — також $\mathbb{Z}$ -накриваюче відображення.

Відмітимо, що множина Γ^+ є інваріантною відносно дії групи $\mathbb{Z}$, а отже $\varphi_{F,V}|_{\Gamma^+}$ також є $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням. Дійсно, так як θ приймає постійні значення уздовж орбіт, то $F(\theta) \equiv 0$. Тому для довільної функції $\alpha \in \Gamma^+$ маємо, що

$$F(\alpha + n\theta) = F(\alpha) + F(n\theta) = F(\alpha) > -1,$$

тобто $\alpha + n\theta \in \Gamma^+$.

3) Якщо V є компактним, то множення на дійсні числа в $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ є неперервним відносно S^∞ -топології, а тому $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ та його відкрита випукла підмножина Γ^+ є стягуваними просторами. Наприклад, наступна гомотопія

$$H : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \times I \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}), \quad H(\alpha, t) = (1 - t)\alpha,$$

стягує $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ в нульову функцію. При цій гомотопії Γ^+ , очевидно, залишається інваріантним, а отже також стягується по собі в нульову функцію.

Зокрема, у випадку 1) обидва простори $\varphi_{F,V}(\Gamma^+)$ та $Sh(F, V)$ є стягуваними.

У випадку 2) розглянемо гомотопію

$$H : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \times I \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}),$$

$$H(\alpha, t) = (1 - t)\alpha + t\theta \cdot \frac{\int \alpha}{\int \theta},$$

де інтеграл береться по V відносно міри Лебега. Легко бачити, що для всіх $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ і $t \in I$ мають місце рівності:

$$H_0(\alpha) = \alpha, \quad \int H_t(\alpha) = \int \alpha, \quad H_1(\alpha) = \theta \cdot \int \alpha.$$

Очевидно, що Γ^+ лишається інваріантним відносно H . Дійсно, нехай $\alpha \in \Gamma^+$. Так як $F(\theta) \equiv 0$, то $F(\theta \cdot \frac{\int \alpha}{\int \theta}) \equiv 0$, а тому з випуклості Γ^+ випливає, що $H_t(\alpha) \in \Gamma^+$ для всіх $t \in I$.

Таким чином H стягує $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ та Γ^+ на пряму $\theta\mathbb{R} \subset \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ причому зберігає значення інтеграла по V .

Відмітимо також, що H є еківаріантною відносно дії групи $\mathbb{Z}$, тобто

$$H_t(\alpha + n\theta) = (1 - t)(\alpha + n\theta) + t\theta \cdot \frac{\int(\alpha + n\theta)}{\int \theta} = H_t(\alpha) + n\theta,$$

а тому H індукує стягування $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})/P(V)$ та $\Gamma^+/P(V)$ на коло $\theta\mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}$. Це доводить, що $Sh(F, V)$ та $\varphi_{F,V}(\Gamma^+)$ є гомотопічно еквівалентними до кола. $\square$

Косо-симетричні потоки. Нехай M — гладкий неорієнтовний многовид, $p : \tilde{M} \rightarrow M$ орієнтоване дволистне накриття M і $\xi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ — гладка інволюція без нерухомих точок, яка породжує групу $\mathbb{Z}_2$ накриваючих перетворень $\tilde{M}$. Таким чином $\xi^2 = \text{id}_{\tilde{M}}$ і $p \circ \xi = p$.

Неперервне відображення $\tilde{h} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ — називатиметься *симетричним* (відносно ξ), якщо $\tilde{h} \circ \xi = \xi \circ \tilde{h}$, і *кососиметричним* (відносно ξ), якщо $\tilde{h} \circ \xi = \xi \circ \tilde{h}^{-1}$.

Нехай $T\xi : T\tilde{M} \rightarrow T\tilde{M}$ — відповідне відображення ξ . Скажемо, що векторне поле F на $\tilde{M}$ є *кососиметричним*, якщо $F \circ \xi = -T\xi \circ F$. Це еквівалентно умові, що потік $\mathbf{F}$ поля F є *кососиметричним*, тобто $\mathbf{F}_t \circ \xi = \xi \circ \mathbf{F}_{-t}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Нехай $\mathbf{F}$ — кососиметричний потік на $\tilde{M}$. Тоді ξ зберігає шарування $\mathbf{F}$, але переставляє його траєкторії. Тому $\mathbf{F}$ індукує на M деяке одновимірне шарування Δ з особливостями. Нехай $\mathcal{E}(\Delta)$ — підмножина в $\mathcal{C}^\infty(M, M)$, що складається з таких відображень $h : M \rightarrow M$, що

- (i) $h(\omega) \subset \omega$ для кожного шару ω шарування Δ і
- (ii) для кожної нерухомої особливої точки z шарування $\mathbf{F}$ відповідне дотичне відображення $T_z h : T_z M \rightarrow T_z M$ є ізоморфізмом.

Покладемо $\mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{E}(\Delta) \cap \mathcal{D}(M)$.

Нехай також $\mathcal{E}_{\text{id}}(\Delta) \subset \mathcal{E}(\Delta)$ і $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta) \subset \mathcal{D}(\Delta)$ — підмножини, що складаються з відображень, які є гомотопним до тотожного відображення id_M в $\mathcal{E}(\Delta)$, відповідно в $\mathcal{D}(\Delta)$.

Лема 4.2.10. *Нехай $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F) \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F)$ і $\tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(F) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(F)$ — підмножини, що складаються з симетричних відображень. Тоді існує відображення $\rho : \mathcal{E}_{\text{id}}(\Delta) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$ яке є гомеоморфізмом відносно кожної з топологій W^r , $0 \leq r \leq \infty$, причому $\rho(\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta)) = \tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(F)$.*

Доведення. Кожне симетричне відображення $\tilde{h} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ індукує єдине відображення $h : M \rightarrow M$, а тому ми маємо природну проекцію $\rho : \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F) \rightarrow \mathcal{E}_{\text{id}}(\Delta)$, визначену за формулою $\rho(\tilde{h}) = h$.

Нехай $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(\Delta)$, та $h_t \in \mathcal{E}_{\text{id}}(\Delta)$ — гомотопія між $h_0 = \text{id}_M$ та $h_1 = h$. За властивістю накриваючої гомотопії існує єдина симетрична гомотопія $\tilde{h}_t \in \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$ що, $\tilde{h}_0 = \text{id}_{\tilde{M}}$. Тоді $\rho(\tilde{h}_1) = h$, а тому ρ є сюр'єктивним. Зауважимо, що інше підняття h — відображення $\xi \circ \tilde{h}_1$ — не має інваріантних траєкторій $\mathbf{F}$, а значить $\xi \circ \tilde{h}_1 \notin \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$. Тому для кожного $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(\Delta)$ існує єдине підняття $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$. Таким чином ρ є бієкцією. Так як проекція $p : \tilde{M} \rightarrow M$ є гладким локальним дифеоморфізмом, то ρ є гомеоморфізмом відносно C^∞ -топологій. Залишається відмітити, що $\rho(\tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(F)) = \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta)$. $\square$

Нехай $\varphi_F : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \tilde{M})$ — відображення зсуву уздовж траєкторій $\mathbf{F}$, $\ker \varphi_F = \varphi_F^{-1}(\text{id}_{\tilde{M}})$ — його ядро і

$$\Gamma^+ = \varphi_F^{-1}(\mathcal{D}^+(F)) = \{\alpha \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \mid \alpha(F) > -1\}.$$

Покладемо

$$E = \{\alpha \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \mid \alpha \circ \xi + \alpha \in \ker \varphi_F\},$$

і для кожного $\mu \in \ker \varphi_F$ нехай

$$E_\mu = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \mid \alpha \circ \xi + \alpha = \mu\}$$

та $\Gamma_\mu = E_\mu \cap \Gamma^+$. Очевидно, що множини E_μ і Γ_μ є випуклими.

Припустимо тепер, що множина $\text{Fix}(\mathbf{F})$ нерухомих точок потоку $\mathbf{F}$ ніде не щільна в $\tilde{M}$. Тоді $\ker \varphi_F = \{0\}$, а отже $E = E_0$, або $\ker \varphi_F = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, для деякої строго додатної функції θ . В останньому випадку множини $E_{n\theta}$ та $\Gamma_{n\theta}$ позначатимемо через E_n та Γ_n відповідно. Тоді кожна множина E_n є зв'язною компонентою E .

Лема 4.2.11. (1) $E_0 \cap \ker \varphi_F = \{0\}$, а тому обмеження φ_F на E_0 є ін'єктивним.

(2) Припустимо, φ_F є періодичним, тобто $\ker \varphi_F = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої строго додатної функції $\theta : \tilde{M} \rightarrow (0, +\infty)$. Тоді $\theta = \theta \circ \xi$. Більш того, $E_n = E_0 + \frac{n\theta}{2}$, а значить $\varphi_F(E_a) = \varphi_F(E_b)$ тоді і лише тоді, коли $a \equiv b \pmod{2}$. Таким чином $\varphi_F(E)$ складається рівно з двох зв'язних компонент $\varphi_F(E_0)$ та $\varphi_F(E_1)$.

(3) $E = \varphi_F^{-1}(\tilde{\mathcal{E}}(F))$ і $E \cap \Gamma^+ = \varphi_F^{-1}(\tilde{\mathcal{D}}(F))$.

(4) Припустимо, що $\varphi_F(\mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)$, причому, якщо відображення зсуву φ_F періодичне, то воно відкрите відносно топологій W^∞ . Тоді

$$\varphi_F(E_0) = \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F), \quad \varphi_F(\Gamma_0) = \tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(F).$$

Доведення. (1) Якщо $\ker \varphi_F = \{0\}$, то умова $E_0 \cap \ker \varphi_F = \{0\}$ виконується тривіально. Припустимо, що $\ker \varphi_F = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ і $m\theta \in E_0$ для деякого $m \in \mathbb{Z}$. Тоді $m\theta \circ \xi = -m\theta$. З того, що $\theta > 0$ випливає, що $m = 0$, а значить $E_0 \cap \ker \varphi_F = \{0\}$.

(2) Так як $\ker \varphi_F = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої строго додатної функції θ , то $\mathbf{F}$ не має незамкнутих орбіт, θ є постійною уздовж траєкторій $\mathbf{F}$, причому існує така відкрита і всюди щільна підмножина $Q \subset \tilde{M}$, що $\theta(x) = \text{Per}(x)$ для кожної точки $x \in Q$.

Тоді $\theta = \theta \circ \xi$. Дійсно, так як $Q' = \xi(Q) \cap Q$ також є відкритою і всюди щільною, то $\theta(x) = \theta \circ \xi(x)$ для всіх $x \in Q'$, а тому $\theta = \theta \circ \xi$ на всій поверхні M .

Покажемо, що $E_n = E_0 + \frac{n\theta}{2}$. Нехай $\alpha \in E_n$, тобто $\alpha + \alpha \circ \xi = n\theta$. Тоді $\alpha + \theta/2 \in E_{n+1}$. Дійсно,

$$(\alpha + \frac{\theta}{2}) + (\alpha \circ \xi + \frac{\theta \circ \xi}{2}) = n\theta + \theta = (n+1)\theta.$$

Тому $\varphi_F(E_n) \neq \varphi_F(E_{n+1})$, а так як $\varphi_F(\alpha + \theta) = \varphi_F(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$, то

$$\varphi_F(E_n) = \varphi_F(E_n + 2\theta/2) = \varphi_F(E_{n+2}).$$

(3) Досить лише довести, що $E = \varphi_F^{-1}(\tilde{\mathcal{E}}(F))$. Це твердження означає, що $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ належить до E тоді і тільки тоді, коли $\varphi_F(\alpha)$ є симетричним відображенням. Відмітимо, що

$$\xi \circ \varphi_F(\alpha) \circ \xi(x) = \xi \circ \mathbf{F}(\xi(x), \alpha \circ \xi(x)) = \mathbf{F}(x, -\alpha \circ \xi(x)).$$

Очевидно, що це відображення співпадатиме з $\varphi_F(\alpha)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha + \alpha \circ \xi \in \ker \varphi_F$, тобто $\alpha \in E$, що і треба було довести.

(4) Нехай $\varphi_F(\mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)$. Спочатку покажемо, що тоді

$$\varphi_F(E_0) \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F) \subseteq \varphi_F(E).$$

Дійсно, так як множина E_0 є зв'язною, то $\varphi_F(E_0) \subset \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$. Навпаки, нехай $h \in \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F) \subset \mathcal{E}_{\text{id}}(F) = \varphi_F(\mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}))$, тобто $h = \varphi_F(\alpha)$ для деякої функції $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$. Тоді згідно (3) $\alpha \in E$.

Для доведення рівності $\varphi_F(E_0) = \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$ розглянемо два випадки.

(а) Припустимо, що φ_F є неперіодичним, тобто $\ker \varphi_F = \{0\}$. Тоді $E = E_0$, а отже $\varphi_F(E_0) = \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$.

(б) Нехай тепер φ_F — періодичне, тобто $\ker \varphi_F = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Тоді за умовою φ_F є відкритим відносно W^∞ -топологій. Припустимо, що

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F) = \varphi_F(E) \stackrel{(2)}{=} \varphi_F(E_0) \cup \varphi_F(E_1).$$

Зафіксуємо $\varepsilon \in (0, 1/4)$ і визначимо множини

$$\mathcal{U}_0 = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \mid |\alpha + \alpha \circ \xi| < \varepsilon\}$$

$$\mathcal{U}_1 = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \mid |\alpha + \alpha \circ \xi - \theta| < \varepsilon\}.$$

Тоді $\mathcal{U}_i \in W^\infty$ -відкритим околom E_i , $i = 0, 1$, причому, аналогічно до доведення (2), $\varphi_F(\mathcal{U}_0) \cap \varphi_F(\mathcal{U}_1) = \emptyset$. Так як $\varphi_F \in$ відкритим відображенням, то $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$ є об'єднанням двох диз'юнктних W^∞ -відкритих підмножин $\varphi_F(\mathcal{U}_0) \cap \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$ та $\varphi_F(\mathcal{U}_1) \cap \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$, що протирічить зв'язності $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$. Отже $\varphi_F(E_0) = \tilde{\mathcal{E}}_{\text{id}}(F)$.

Доведення рівності $\varphi_F(\Gamma_0) = \tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(F)$ залишаємо читачеві. $\square$

4.3 Властивості P -функцій

Нехай $\mathbf{F} : M \times \mathbb{R} \supset \mathcal{U} \rightarrow M$ — локальний потік на многовиді M .

Лема 4.3.1. *Нехай $z \in M$. Припустимо, що знайдеться така збіжна до z послідовність періодичних точок $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = 0$. Тоді $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$.*

Доведення. Припустимо, що $z \notin \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді існує таке $\tau > 0$, що $z \neq \mathbf{F}_\tau(z)$, а тому знайдеться окіл U точки z такий, що

$$U \cap \mathbf{F}_\tau(U) = \emptyset. \quad (4.5)$$

Так як $\mathbf{F}(z, 0) = z$, то існує $\varepsilon > 0$ і інший окіл W точки z такі, що $W \times [0, \varepsilon] \subset \mathcal{U}$ і $\mathbf{F}(W \times [0, \varepsilon]) \subset U$. Тоді знайдеться така точка $x_i \in W$, що $\text{Per}(x_i) < \varepsilon$, а тому

$$\mathbf{F}_\tau(x_i) \in \mathbf{F}_\tau(U).$$

З іншого боку,

$$\mathbf{F}_\tau(x_i) \in o_{x_i} = \mathbf{F}(x_i, [0, \text{Per}(x_i)]) \subset \mathbf{F}(W \times [0, \varepsilon]) \subset U,$$

що суперечить (4.5). $\square$

Лема 4.3.2 (Локальна єдиність P -функцій). *Нехай $V \subset M$ — довільна підмножина, $z \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $\theta \in P(V)$. Якщо $\theta(z) = 0$, то $\theta = 0$ на деякому околі точки z в V .*

Доведення. Припустимо, що θ не є тотожним нулем ні на якому околі точки z в $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді знайдеться послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, яка збігається до z і $\theta(x_i) \neq 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Це означає, кожна точка x_i є періодичною, а отже $\theta(x_i) = n_i \text{Per}(x_i)$ для деякого $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. З неперервності θ отримуємо, що

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} n_i \text{Per}(x_i).$$

Так як $|n_i| \geq 1$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = 0$, а тому за лемою 4.3.1 $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$. Отримали протиріччя. $\square$

Лема 4.3.3 (Локальна регулярність P -функцій на відкритих множинах). *Нехай $V \subset M$ — відкрита підмножина і $\theta \in P(V)$. Тоді для кожної точки $z \in V$ знайдеться такий окіл $W \subset V$, що обмеження $\theta|_W$ є регулярною P -функцією.*

Доведення. Припустимо, що θ не є регулярною ні в якому околі точки z . Тоді можна знайти дві послідовності $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ та $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що збігаються до z причому $y_i = \mathbf{F}(x_i, \tau_i)$ для деякого $\tau_i \in \mathbb{R}$ і $\theta(x_i) < \theta(y_i)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Зокрема, кожна точка x_i (а тому і y_i) є періодичною, причому $\theta(y_i) - \theta(x_i) = n_i \text{Per}(x_i)$ для деякого $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Покажемо, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться такий окіл W точки z , що $|\theta(y) - \theta(x)| < \varepsilon$ для всіх $x, y \in W$. Нехай $N > 0$ таке, що $x_i, y_i \in W$ для $i > N$. Тоді

$$\text{Per}(x_i) \leq n_i \text{Per}(x_i) = \theta(y_i) - \theta(x_i) < \varepsilon, \quad i > N.$$

Звідси випливає, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = 0$, а тому, за лемою 4.3.1, $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$.

Але в цьому випадку знайдеться окіл W_1 точки z і $\varepsilon > 0$ такі, що $W_1 \times [0, \varepsilon] \subset \mathcal{U}$

і $\mathbf{F}(W_1 \times [0, \varepsilon]) \subset V$. Візьмемо $x_i \in W_1$ таке, що $\text{Per}(x_i) < \varepsilon$. Тоді

$$o_{x_i} = \mathbf{F}(x_i \times [0, \text{Per}(x_i)]) \subset \mathbf{F}(W_1 \times [0, \varepsilon]) \subset V.$$

Це означає, що перетин $o_{x_i} \cap V = o_{x_i}$ є зв'язним, а тому за лемою 2.2.6, θ повинна бути постійною на всій орбіті o_{x_i} . Зокрема, $\theta(x_i) = \theta(y_i)$, що суперечить припущенню. $\square$

Лема 4.3.4 (Неперервне продовження регулярної P -функції). *Нехай $V \subset M$ — відкрита підмножина і $U = \mathbf{F}(V \times \mathbb{R} \cap \mathcal{U})$ — об'єднання всіх орбіт, що проходять через V . Тоді кожна регулярна P -функція $\theta \in RP(V)$ на V однозначно і неперервно продовжується до регулярної P -функції $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$.*

Якщо M є C^r -многовидом, $\mathbf{F}$ та θ належать класу C^r то τ також належить класу C^r на U .

Доведення. Визначимо функцію τ за наступним правилом: якщо $y \in U$, тобто $y = \mathbf{F}(x, \tau)$ для деякого $(x, \tau) \in V \times \mathbb{R}$, то покладемо $\tau(y) = \theta(x)$. Так як θ є регулярною, то це означення не залежить від вибору точки (x, τ) .

Доведемо неперервність τ на U . Нехай $y = \mathbf{F}(x, t) \in U$ для деякої точки $(x, t) \in V \times \mathbb{R}$. Так як V є відкритою множиною, то знайдеться такий окіл W точки y в U , що $\mathbf{F}_{-t}(W) \subset V$. Тоді τ можна визначити на W за формулою $\tau(z) = \theta \circ \mathbf{F}_{-t}(z)$ для всіх $z \in W$. Це доводить неперервність τ на W .

Більш того, якщо M є C^r -многовидом, а $\mathbf{F}$ та θ належать класу C^r , то τ також є C^r -функцією. $\square$

Лема 4.3.5 (Подільність P -функцій на цілі числа). *Нехай $V \subset M$ — відкрита зв'язна підмножина і $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ — регулярна P -функція. Припустимо, що знайдеться ціле число $p \geq 2$ і непорожня відкрита підмножина $W \subset V$ такі, що $\mathbf{F}(x, \theta(x)/p) = x$ для всіх $x \in W$. Іншими словами, обмеження θ/p на W є P -функцією. Тоді θ/p є P -функцією на всій множині V .*

Доведення. За лемою 4.3.4 можна вважати, що $V \in \mathbf{F}$ -інваріантною множиною. Більш того, досить розглянути випадок, коли $p \in \text{простим числом}$. Визначимо відображення $h : V \rightarrow V$ за формулою $h(x) = \mathbf{F}(x, \theta(x)/p)$. Так як $\theta \in \text{постійною уздовж орбіт } \mathbf{F}$, то $\theta(h(x)) = \theta(x)$, а тому

$$h \circ h(x) = \mathbf{F}(h(x), \theta(h(x))/p) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \theta(x)/p), \theta(x)/p) = \mathbf{F}(x, 2\theta(x)/p),$$

і т.д. Зокрема, $h^p = \text{id}_V$, а отже h індукує дію групи $\mathbb{Z}_p$ на V . За умовою, ця дія є тривіальною на непорожній підмножині W . Тому за теоремою М. Newman 2.2.13, ця дія є тривіальною на всьому V , тобто $\theta/p \in P$ -функцією на V . $\square$

Наслідок 4.3.6. *Нехай θ — регулярна P -функція на зв'язній відкритій множині $V \subset M$.*

- (i) *Якщо $V \cap \text{IntFix}(\mathbf{F}) \neq \emptyset$, то $\theta = 0$ на $V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$.*
- (ii) *Якщо $V \cap \text{IntFix}(\mathbf{F}) = \emptyset$ і $\theta = 0$ на деякій відкритій підмножині $W \subset V$, то $\theta = 0$ на всій V .*

Доведення. Досить перевірити, що в обох випадках $\theta = 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. У випадку (i) покладемо $W = V \cap \text{IntFix}(\mathbf{F})$.

Нехай p — довільне просте число. Тоді в обох випадках для всіх $y \in W$ виконується тотожність $\mathbf{F}(y, \theta(y)/p) = y$, де W — непорожня відкрита множина. Тому за лемою 4.3.5 $\mathbf{F}(y, \theta(y)/p) = y$ для всіх $y \in V$, тобто $\theta/p \in P$ -функцією на V . Таким чином, якщо $\theta(x) = n\text{Per}(x) \neq 0$ для деяких $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $n \in \mathbb{Z}$, то n ділиться на p . Так як p — довільне, ми отримуємо $n = 0$. $\square$

4.4 Доведення теореми 4.1.1

(A) Припустимо, що $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V \neq \emptyset$. Потрібно довести, що наступна множина

$$P' = \{\theta \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R}) : \theta|_{V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})} = 0\}.$$

співпадає з $P(V)$. Очевидно, $P' \subset P(V)$.

Навпаки, нехай $\theta \in P(V)$. Покажемо, що для кожної зв'язної компоненти T множини $V \setminus \overline{\text{IntFix}(\mathbf{F})}$ існує таке $z \in T$, що $\theta(z) = 0$. За лемою 4.3.2 це означатиме, що $\theta|_T = 0$. А так як T — довільна компонента, то ми отримаємо, що $\theta = 0$ на $V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$, а тому і на $\overline{V \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})}$. Зокрема, це доведе, що θ є регулярною P -функцією.

Так як V є зв'язною, то наступна множина B — непорожня, див. Рис. 4.4.1:

$$B := \overline{T} \cap V \cap (\overline{\text{IntFix}(\mathbf{F})} \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})) \neq \emptyset.$$

Нехай $x \in B \subset V = \text{Int}V$. Тоді за лемою 4.3.3 існує відкритий зв'язний окіл W такий, що обмеження $\theta|_W$ є регулярною P -функцією. Тому $W \cap \text{IntFix}(\mathbf{F}) \neq \emptyset$ і $W \cap T \neq \emptyset$. Так як θ є регулярною на W , то з (i) наслідку 4.3.6 випливає, що $\theta = 0$ на $W \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$ і, зокрема, $W \cap T$.

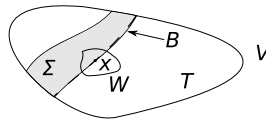


Рис. 4.4.1

(В) Припустимо, що $\text{IntFix}(\mathbf{F}) \cap V = \emptyset$ і $P(V) \neq \{0\}$, а отже, існує $\theta \in P(V)$, яка не є тотожним нулем. Потрібно показати, що $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої P -функції $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умови (1)-(3).

Позначимо через Y підмножину в V , що складається з усіх точок x , які мають одну з двох властивостей:

(L1) $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $\theta(x) = 0$;

(L2) $x \in V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ і існує послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що збігається до x і $\theta(x_i) = 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що $\theta = 0$ на Y .

Лема 4.4.1. Y є відкрито-замкнутою в V . Тому якщо V є зв'язною і $\theta(x) = 0$ для деякої точки $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, то $\theta = 0$ на V .

Доведення. Y є відкритою. Нехай $x \in Y$. Покажемо, що існує такий відкритий окіл W точки x , що $W \subset Y$.

Якщо $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, то, за лемою 4.3.2, $\theta = 0$ на деякому околі $W \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ точки x . Тоді, за властивістю (L1), $W \subset Y$.

Припустимо, що $x \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V \subset V = \text{Int}V$. Тоді за лемою 4.3.3 існує такий відкритий окіл W_x точки x , що обмеження $\theta|_{W_x}$ є регулярною P -функцією. Покажемо, що $W_x \subset Y$.

Спочатку доведемо, що $\theta = 0$ на W_x . Дійсно, за властивістю (L2) існує послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що збігається до x і $\theta(x_i) = 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Зокрема, $x_i \in W_x$ для деякого $i \in \mathbb{N}$. Нехай C — зв'язна компонента $W_x \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ що містить x_i . Тоді $\theta = 0$ на відкритій множині $C \subset W_x$, а тому, за твердженням (ii) наслідку 4.3.6, $\theta = 0$ на W_x .

Отже, $W_x \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}) \subset Y$. Нехай $y \in W_x \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$. Так як $W_x \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною в W_x , то знайдеться послідовність $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset W_x \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, збіжна до y . Але тоді $\theta(y_i) = 0$, звідки, за властивістю (L2), $y \in Y$.

Y є замкнутою. Нехай $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ — послідовність, що збігається до деякої точки $x \in V$. Потрібно показати, що $x \in Y$. Так як $\theta(x_i) = 0$, то за неперервність θ маємо, що $\theta(x) = 0$.

Якщо $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, то за (L1) $x \in Y$.

Припустимо, що $x \in V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді можна вважати, що або $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ або $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$. У першому випадку $x \in Y$ за властивістю (L2).

Отже нехай $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$. Так як $x_i \in Y$, то з (L2) для x_i впливає існування послідовності $\{y_i^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, яка збігається до x_i і задовольняє умову: $\theta(y_i^j) = 0$. Тоді для кожного $i \in \mathbb{N}$ можна знайти таке $n(i) \in \mathbb{N}$, що

діагональна послідовність $\{y_i^{n(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ збігається до x і $\theta(y_i^{n(i)}) = 0$. Тому, за (L2), $x \in Y$. $\square$

Таким чином, можна вважати, що $\theta \neq 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Зокрема всі точки $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ тоді є періодичними.

Візьмемо довільну точку $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і розглянемо наступний гомоморфізм:

$$e_x : P(V) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad e_x(\nu) = \nu(x)/\text{Per}(x),$$

де $\nu \in P(V)$. Якщо $\nu(x) = 0$, то, як показано вище, $\nu = 0$ на всій множині V , тому e_x є мономорфізмом. Більш того, $e_x(\theta) = \theta(x) \neq 0$, а тому e_x індукує ізоморфізм $P(V)$ на ненульову підгрупу $k\mathbb{Z}$ групи $\mathbb{Z}$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Покладемо $\theta = e_x^{-1}(k)$. Тоді $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Залишається перевірити властивості θ .

(2) $\Rightarrow$ (1). Ми маємо, що $\theta(x) = \text{Per}(x) > 0$ на відкритій і всюди щільній підмножині $Q \subset V$. Звідси випливає, що $\theta \geq 0$ на V . З іншого боку, за лемою 4.4.1, $\theta \neq 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, а тому $\theta > 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Потрібно показати, що θ є регулярною, тобто

$$\theta(x) = \theta(\mathbf{F}_\tau(x))$$

для $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $\tau \in \mathbb{R}$ таких, що $\mathbf{F}_\tau(x) \in V$.

Відмітимо для подальшого, що для довільних відкритих підмножин $A, B \subset M$ виконується співвідношення:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}. \quad (4.6)$$

Так як Q є відкритою і всюди щільною в V , то

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\tau(x) \in V \cap \mathbf{F}_\tau(V) &\subset \overline{Q \cap \mathbf{F}_\tau(V)} \stackrel{(4.6)}{=} \\ &= \overline{Q \cap \overline{\mathbf{F}_\tau(V)}} = \overline{Q \cap \overline{\mathbf{F}_\tau(Q)}} \stackrel{(4.6)}{=} \overline{Q \cap \mathbf{F}_\tau(Q)}. \end{aligned}$$

Іншими словами, існує така збіжна до x послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset Q$, що $\{\mathbf{F}_\tau(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset Q$. Тоді $\theta(\mathbf{F}_\tau(x_i)) = \theta(x_i) = \text{Per}(x_i)$, а тому

$$\theta(\mathbf{F}_\tau(x)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(\mathbf{F}_\tau(x_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(x_i) = \theta(x).$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Див. лему 4.3.4.

(2). Доведення цієї властивості складається з наступних трьох лем.

Лема 4.4.2. *Нехай $x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді існують відкритий зв'язний окіл W_x точки x в V , регулярна P -функція $\theta_x \in P(W_x)$, ненульове ціле число $m_x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, і відкрита всюди щільна множина $Q_x \subset W_x$, яка складається з періодичних точок, такі, що*

$$(a) \quad P(W_x) = \{m\theta_x\}_{m \in \mathbb{Z}},$$

$$(b) \quad \theta = m_x \theta_x \text{ на } W_x,$$

$$(c) \quad \theta_x(y) = \text{Per}(y) \text{ для всіх } y \in Q_x.$$

Доведення. За лемою 4.3.3 існує відкритий зв'язний окіл W_x точки x , що $\overline{W_x} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, а обмеження $\theta|_{W_x}$ є регулярною P -функцією. Відмітимо, що зменшенні околу W_x , обмеження θ на W_x залишається регулярним. Тому можна додатково вважати, що існує таке $\varepsilon \in (0, \text{Per}(x))$, що

$$(i) \quad \theta(y) < \theta(x) + \varepsilon \text{ для всіх } y \in \overline{W_x};$$

$$(ii) \quad \text{Per}(x) < \text{Per}(y) + \varepsilon \text{ для всіх } y \in \overline{W_x};$$

$$(iii) \quad \text{існує таке } N > 0, \text{ що } n_y := \theta(y)/\text{Per}(y) < N \text{ для всіх } y \in \overline{W_x}.$$

Дійсно, (i) випливає з неперервності θ , а (ii) — з напівнеперервності знизу функції Per , див. [105].

Більш точно, припустимо, (ii) не виконується. Тоді існує така збіжна до x послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що

$$\text{Per}(x) \geq \text{Per}(x_i) + \varepsilon.$$

Звідси випливає, що періоди точок x_i обмежені зверху, а тому можна вважати,

що $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = \tau < \infty$ для деякого τ . Тоді

$$\text{Per}(x) \geq \tau + \varepsilon > \tau. \quad (4.7)$$

Але $\mathbf{F}(x, \tau) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{F}(x_i, \text{Per}(x_i)) = x$, а тому $\tau = n\text{Per}(x) \geq \text{Per}(x)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Це суперечить (4.7). Отже можна вважати, що (ii) виконується.

Щоб довести (iii), відмітимо, що з (i) та (ii) випливає, що

$$n_y(\text{Per}(x) - \varepsilon) < n_y \text{Per}(y) = \theta(y) < \theta(x) + \varepsilon,$$

а тому

$$N := \frac{\theta(x) + \varepsilon}{\text{Per}(x) - \varepsilon} > n_y.$$

Властивість (iii) доведено.

Розглянемо групу $P(W_x)$. Так як окіл W_x є відкритим і зв'язним, то

$$P(W_x) = \{m\theta_x\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

для деякої функції $\theta_x \in \mathcal{C}(W, \mathbb{R})$. Але, за припущенням, $\theta \in P$ -функцією на W_x , а тому $\theta|_{W_x} = m_x \theta_x$ для деякого $m_x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Щоб побудувати Q_x відмітимо, що для кожної точки $y \in W_x \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ існує єдине $n_y \in \mathbb{Z}$ таке, що $\theta_x(y) = n_y \text{Per}(y)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через T_n підмножину в W_x , що складається з усіх точок y таких, що n_y ділиться на n . Так як значення n_y обмежені зверху, то T_n непорожня тільки для скінченної кількості чисел n . Відмітимо також, що

$$W_x \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}) = \bigcup_{n=1}^N T_n.$$

Покажемо, що $\overline{T_n}$ є ніде не щільною для $n \geq 2$. Дійсно, припустимо, що $\text{Int} \overline{T_n} \neq \emptyset$. Тоді θ_x/n є регулярною P -функцією на $\text{Int} \overline{T_n}$, а тому, за лемою 4.3.5, і на всьому околі W_x . Але це можливо тільки для $n = 1$, так як θ_x породжує $P(W_x)$. Тому множина $Q_x := \text{Int} \overline{T_1} \cap W_x$ є відкритою і всюди щільною в W і $\theta(y) = \text{Per}(y)$ для всіх $y \in Q_x$. $\square$

Лема 4.4.3. *Нехай $x, y \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді $\theta_x = \theta_y$ на $W_x \cap W_y$ і $m_x = m_y$.*

Доведення. Дійсно, так як Q_x (Q_y) є відкритою і всюди щільною в W_x (W_y), то перетин $Q_x \cap Q_y$ є відкритим і всюди щільним в $W_x \cap W_y$. Більш того, для кожної точки $z \in Q_x \cap Q_y$ виконується рівність $\theta_x(z) = \theta_y(z) = \text{Per}(z)$. Тому, за неперервністю, $\theta_x = \theta_y$ на $W_x \cap W_y$.

Зокрема, якщо $z \in Q_x \cap Q_y$, то

$$\theta(z) = m_x \text{Per}(z) = m_y \text{Per}(z),$$

а тому $m_x = m_y$. □

Нехай T — компонента зв'язності множини $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді за лемою 4.4.3 числа m_x співпадають для всіх $x \in T$. Тому їх спільне значення можна позначити через m_T . Очевидно, що функції $\{\theta_x\}_{x \in T}$ визначають таку неперервну функцію $\theta_T : T \rightarrow \mathbb{R}$, що $\theta|_T = m_T \theta_T$. Таким чином, якщо покласти $Q_T = \bigcup_{x \in T} Q_x$, то Q_T є відкритою і всюди щільною в T , а $\theta_T(y) = \text{Per}(y)$ для $y \in Q_T$.

Лема 4.4.4. *Нехай S та T — довільні компоненти зв'язності $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ такі, що $\overline{S} \cap \overline{T} \neq \emptyset$. Тоді $m_S = m_T$.*

Доведення. Можна вважати, що $T \neq S$. Нехай

$$x \in \overline{S} \cap \overline{T} \subset V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$$

і W_x — такий відкритий зв'язний окіл точки x в V , що $\theta|_{W_x}$ є регулярною P -функцією на W_x . Відмітимо, що функція $\theta_S = \theta/m_S$ є регулярною P -функцією на непорожній відкритій множині $W_x \cap S$, а тому за лемою 4.3.5, θ/m_S є P -функцією на всьому околі W_x .

Якщо $x \in Q_T \cap W_x$, то $\theta(x) = m_T \theta_T(x) = m_T \text{Per}(x)$, а тому m_T ділиться на m_S . Аналогічно, m_S ділиться на m_T , а отже $m_S = m_T$. □

Так як V є зв'язною, то з леми 4.4.4 випливає, що числа m_T співпадають для всіх зв'язних компонент T множини $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Позначимо їх спільне значення

цих чисел через m . Тоді θ/m є неперервною функцією на V і $\mathbf{F}(x, \theta(x)/m) = x$ для всіх $x \in V$. Так як θ породжує $P(V)$, то $m = 1$.

Нехай Q — об'єднання всіх множин Q_T , де T пробігає множину всіх зв'язних компонент $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Так як для кожної такої компоненти $\theta = m\theta_T = \theta_T$ на T , то $\theta(x) = \text{Per}(x)$ для всіх $x \in Q_T$. Теорему 4.1.1 доведено.

4.5 План доведення теореми 4.1.2

Доведення базується на наступних двох твердженнях.

Нехай F — $\mathcal{C}^1$ -векторне поле на многовиді M , $V \subset M$ — відкрита підмножина і $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$.

Лема 4.5.1. *Нехай $\theta : V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ — P -функція, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ — збіжна до z послідовність періодичних точок і $\mathcal{C} > 0$ такі, що*

$$\theta(x_i) \neq 0, \quad \text{Per}(x_i) < \mathcal{C}$$

для всіх $i \in \mathbb{N}$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх $i \in \mathbb{N}$

$$|\theta(x_i)| \geq \text{Per}(x_i) > \varepsilon,$$

тобто періоди точок x_i також обмежені знизу.

Лема 4.5.2. *Припустимо, що $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$. Тоді кожна з наступних умов гарантує, що $\theta(z) = 0$:*

- (a) $j^1 F(z)$ має таке власне значення λ , що $\Re(\lambda) \neq 0$;
- (b) дійсна нормальна форма Жордана матриці $j^1 F(z)$ має або блок $\mathbf{J}_q(\pm ib)$ або $\mathbf{J}_q(0)$ з $q \geq 2$.
- (c) $j^1 F(z) = 0$.

Доведення теореми 4.1.2. Нехай F — векторне поле класу $\mathcal{C}^1$ на многовиді M і $V \subset M$ — така відкрита зв'язна підмножина, що відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є

періодичним, тобто $P(V) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої невід'ємної P -функції $\theta : V \rightarrow [0, +\infty)$. Потрібно показати, що насправді $\theta > 0$ на всьому V .

Розглянемо наступну *замкнуту* множину $Y = \theta^{-1}(0)$ в V . Покажемо, що Y є також *відкритою* в V .

Дійсно, якщо $x \in Y \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ не є нерухомою точкою $\mathbf{F}$, то за лемою 4.3.2 $\theta = 0$ на деякому околі точки x .

Нехай $x \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap Y$. Припустимо, що θ не є тотожним нулем ні на якому околі точки x . Це означає існування послідовності точок $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, яка збігається до x і задовольняє умову: $\theta(x_i) > 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Нехай U — окіл точки x з компактним замиканням $\bar{U} \subset V$ і $C = \sup_{y \in \bar{U}} |\theta(y)|$. Можна вважати, що $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset U$, а тому $\text{Per}(x_i) \leq \theta(x_i) < C$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Тоді за лемою 4.5.1 існує таке $\varepsilon > 0$, що $|\theta(x_i)| > \varepsilon$. Так як θ неперервна, то $|\theta(x)| \geq \varepsilon > 0$, що суперечить припущенню $\theta(x) = 0$. Таким чином $\theta = 0$ на деякому околі точки x .

Тепер із зв'язності V випливає, що або $Y = \emptyset$ або $Y = V$. За теоремою 4.1.1 $\theta > 0$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тому $Y \neq V$, а отже $Y = \emptyset$. Іншими словами $\theta > 0$ на всьому V .

Заливається встановити, що для кожної точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ лінійна частина $j^1 F(z)$ поля F в точці z подібна до матриці (4.1). Для цього досить показати, що

- (а) $j^1 F(z)$ не має власних значень λ з $\Re(\lambda) \neq 0$;
- (б) дійсна нормальна Жорданова форма $j^1 F(z)$ не містить блоків $\mathbf{J}_q(\pm ib)$ та $\mathbf{J}_q(0)$ з $q \geq 2$;
- (в) $j^1 F(z) \neq 0$.

Але якщо хоча б одна з цих умов порушується, то з леми 4.5.2 випливає, що $\theta(z) = 0$. □

Отже потрібно довести леми 4.5.1 та 4.5.2. Насправді ми отримаємо більш

загальні твердження.

Лема 4.5.1 є частинним випадком теореми 4.7.1. Для її доведення ми наводимо результати D. Hoffman та L. N. Mann що оцінюють діаметри ефективних дій компактних груп Лі на многовидах. Далі в §4.6 будуть встановлені деякі властивості P -функцій на відкритих множинах, а теорема 4.7.1 буде адаптацією цих властивостей на випадок $\mathcal{C}^1$ -векторних полів.

Лема 4.5.2 є частинним випадком твердження 4.8.5, доведення якого наведено в §4.8.

Ефективні дії скінчених циклічних груп $\mathbb{Z}_p$.

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ позначимо через $d(x, y)$ звичайну евклідову відстань, а через $B_r(x)$, ($r > 0$), — відкритий шар радіусу r з центром в точці x .

Нехай W — відкрита підмножина півпростору $\mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$ і $x \in W$. Означимо *радіус випуклості*, r_x , *множини* W *в точці* x наступним чином.

Нехай $x \in \text{Int}\mathbb{R}_+^n \cap W$. Тоді

$$r_x = \sup\{r > 0 : B_r(x) \subset W\}$$

Якщо ж $x \in \partial\mathbb{R}_+^n \cap W$, то покладемо

$$r_x = \sup\{r > 0 : (B_r(x) \cap \mathbb{R}_+^n) \subset W\}.$$

Лема 4.5.3. [47, теорема 1], [90] *Нехай W — відкрита підмножина в $\mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$, p — просте число і $h : \overline{W} \rightarrow \overline{W}$ — нетотожний періодичний гомеоморфізм періоду p . Припустимо, що $h(z) = z$ для деякої точки $z \in W$. Нехай r_z — радіус випуклості W в точці z і $r \in (0, r_z)$.*

Якщо $z \in \text{Int}\mathbb{R}_+^n$, то існує така точка $x \in \partial B_{r/2}(z)$ і таке число $a = 1, \dots, p-1$, що

$$d(z, x) \leq 2 \cdot d(x, h^a(x)).$$

Якщо $z \in \partial\mathbb{R}_+^n$, то знайдуться такі $x \in \partial(B_{2r/3}(z) \cap W)$ і $a = 1, \dots, p-1$,

що

$$d(z, x) \leq 4 \cdot d(x, h^a(x)).$$

Це твердження доведене в роботі D. Hoffman та L. N. Mann [47, теорема 1] для внутрішніх точок, а в статті автора [90] узагальнене для точок на межі $\mathbb{R}_+^n$.

Періодичні орбіти. Нехай F — векторне поле класу $\mathcal{C}^1$ на многовиді M і d — довільна ріманова метрика на M . Тоді для кожної періодичної точки x поля F довжину її орбіти $l(x)$ відносно даної метрики можна обчислити за наступною формулою:

$$l(x) = \int_0^{\text{Per}(x)} \|F(\mathbf{F}(x, t))\| dt. \quad (4.8)$$

Тому

$$l(x) \leq \text{Per}(x) \cdot \sup_{t \in [0, \text{Per}(x)]} \|F(\mathbf{F}(x, t))\|. \quad (4.9)$$

Також відмітимо, що

$$2 \cdot \text{diam}(o_x) \leq l(x). \quad (4.10)$$

Дійсно, нехай $y, z \in o_x$ — такі дві точки, що $d(y, z) = \text{diam}(o_x)$. Очевидно, що вони розбивають o_x на дві дуги кожна з яких має довжину меншу від $d(y, z)$. Це доводить (4.10).

4.6 P -функції на множині регулярних точок

Нехай $V \subset M$ — відкрита підмножина, $\theta : V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ — P -функція і $\alpha \in \mathbb{R}$. Визначимо відображення $h_\alpha : V \rightarrow M$ за формулою:

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} \mathbf{F}(x, \alpha \theta(x)), & x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}), \\ x, & x \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V. \end{cases}$$

Це відображення неперервне на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, але, взагалі кажучи, може бути на множині $\text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$.

В цьому розділі ми встановимо співвідношення між наступними п'ятьма твердженнями:

- (A) Періоди періодичних точок в $V \setminus \theta^{-1}(0)$ рівномірно обмежені зверху деякою константою $C > 0$, тобто $\text{Per}(x) < C$ для кожної точки $x \in V$ такої, що $\theta(x) \neq 0$.
- (B) Кожна точка $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ має такий окіл $W \subset V$, що θ є *регулярною* P -функцією на $W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, тобто для всіх $y \in W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ обмеження θ на $o_y \cap W$ є постійною функцією.
- (C) $_{\alpha}$ Відображення h_{α} неперервне на всій множині V .
Нехай $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$.
- (D) $_{\alpha}$ Припустимо, що $\alpha = q/p \in \mathbb{Q}$, де $q \in \mathbb{Z}$ і $p \in \mathbb{N}$. Тоді існує такий окіл $W \subset V$ точки z , що $h_{\alpha}(W) = W$, обмеження $h_{\alpha} : W \rightarrow W$ є періодичним гомеоморфізмом періоду p , тобто $h_{\alpha}^p = \text{id}_W$.
- (E) Існує $T > 0$, евклідова метрика d на деякому околі W точки z і така збіжна до z послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що $\theta(x_i) \neq 0$ і

$$d(z, x_i) < T \cdot \text{diam}(o_{x_i} \cap W).$$

Зауваження 4.6.1. Під *евклідовою* метрикою на W в (E) будемо розуміти метрику індуковану деяким вкладенням $W \subset \mathbb{R}^n$. В дійсності, умову (E) можна формулювати для довільної ріманової метрики, але з технічних причин, (див. лему 4.7.4) ми обмежимося лише евклідовими метриками.

Зауваження 4.6.2. Якщо $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ має такий окіл $W \subset V$, що множина $W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ є зв'язною, що за теоремою 4.1.1 умова (B) виконується для точки z .

Лема 4.6.3. *Мають місце наступні імплікації:*

$$(A) \Rightarrow (B) \& (C)_{\alpha}.$$

Якщо $\alpha \in \mathbb{Q}$, то для кожного $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$

$$(B) \& (C)_\alpha \Rightarrow (D)_\alpha.$$

Якщо h не є тотожним на деякому околі точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$, то

$$(D)_\alpha \Rightarrow (E),$$

причому в умові (E) можна вважати, що $T = 4$.

Доведення. $(A) \Rightarrow (B)$. Так як $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$, то існує такий окіл W точки z , що $\mathbf{F}(W \times [0, c]) \subset V$. Тоді W задовольняє (B) . Дійсно, нехай $y \in W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Потрібно показати, що обмеження $\theta|_{o_y \cap W}$ є постійною функцією.

Якщо $\theta = 0$ на $o_y \cap W$, то твердження тривіальне. Отже нехай $\theta(y) \neq 0$. Тоді, згідно (A) , $\text{Per}(y) < \mathbf{C}$, а отже

$$o_y = \mathbf{F}(y \times [0, \text{Per}(y)]) = \mathbf{F}(y \times [0, \mathbf{C}]) \subset \mathbf{F}(W \times [0, \mathbf{C}]) \subset V.$$

Таким чином, перетин $o_y \cap V = o_y$ є зв'язним. Тоді за лемою 2.2.6 θ є постійною на o_y і, зокрема, на $o_y \cap W$.

$(A) \Rightarrow (C)_\alpha$. Досить показати, що відображення h_α є неперервним в кожній точці $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$. Нехай $V' \subset V$ — довільний окіл точки z і W — інший окіл цієї точки, такий, що $\mathbf{F}(W \times [0, c]) \subset V'$. Покажемо, що $h_\alpha(W) \subset V'$. Звідси випливатиме, неперервність h_α в точці z .

Нехай $x \in W$. Якщо $x \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap W$ або $\theta(x) = 0$, то $h_\alpha(x) = x \in W \subset V'$. В протилежному випадку, $\theta(x) \neq 0$, а тому x є періодичною. Тому $h_\alpha(x) = \mathbf{F}(x, \tau)$ для деякого $\tau \in [0, \text{Per}(x)] \subset [0, c]$, а отже $h_\alpha(x) \in \mathbf{F}(W \times [0, c]) \subset V'$.

$(B) \& (C)_\alpha \Rightarrow (D)_\alpha$. За умовою $\alpha = q/p$, де $q \in \mathbb{Z}$ і $p \in \mathbb{N}$. Для спрощення позначимо h_α через h . Так як $h(z) = z$ і h є неперервним відображенням, то знайдеться такий окіл B точки z , що $h^i(B) \subset V$ для всіх $i = 0, \dots, p$. Покажемо, що наступна множина

$$W = B \cup h(B) \cup \dots \cup h^{p-1}(B).$$

задовольняє умову (D) .

Дійсно, припустимо, що $h(x) \in V$ для деякої точки $x \in V$. Так як $h(x)$ належить орбіті точки x , то згідно з (B) , $\theta(x) = \theta(h(x))$. Тому

$$\begin{aligned} h^2(x) &= \mathbf{F}(h(x), \alpha \cdot \theta(h(x))) = \mathbf{F}(h(x), \alpha \cdot \theta(x)) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \alpha \cdot \theta(x)), \alpha \cdot \theta(x)) = \mathbf{F}(x, 2\alpha \cdot \theta(x)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Використовуючи індукцію отримаємо, що як тільки $h^i(x) \in V$ для всіх $i = 0, \dots, j-1$, то

$$h^j(x) = \mathbf{F}(x, j\alpha \cdot \theta(x)).$$

Зокрема, $h^{kp}(x) = \mathbf{F}(x, kp\theta(x)) = x$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$. За умовою $(C)_\alpha$ відображення h є неперервним на V , а тому h індукує такий гомеоморфізм W на себе, що $h^p|_W = \text{id}_W$.

$(D)_\alpha \Rightarrow (E)$. Знову позначимо h_α через h . Так як h не є тотожним відображенням на W , то можна вважати, що p є простим числом, а тому дія h є ефективною. Цього можна досягнути замінивши h на h^n для деякого $n \in \mathbb{N}$ такого, що p/n є простим числом.

Зменшуючи W можна також вважати, що W є відкритою підмножиною в замкнутому півпросторі $\mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$. Нехай d — відповідна евклідова метрика на W і r_z — радіус випуклості W в точці z . Тоді за лемою 4.5.3 для кожного $r \in (0, r_z)$ існують такі $x_r \in W$ та $a_r \in \{1, \dots, p-1\}$, що

$$d(z, x_r) \leq S \cdot r \leq T \cdot d(x_r, h^{a_r}(x_r)) \leq T \cdot \text{diam}(o_{x_r}),$$

для деяких констант $S, T > 0$. В дійсності, $S = \frac{1}{2}$ та $T = 2$ для $z \in \text{Int}M$, і $S = \frac{2}{3}$ та $T = 4$ для $z \in \partial M$. Відмітимо, що a_r може приймати лише скінчену кількість значень. Тому знайдуться таке $a \in \{1, \dots, p-1\}$ і така послідовність $\{x_{r_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$ і $a_{r_i} = a$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. □

4.7 Періоди точок для $\mathcal{C}^1$ -потоків

Умова (E), визначена в попередньому підрозділі, дає нижню оцінку для діаметрів орбіт послідовності періодичних точок $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що збігається до нерухомої точки z . В цьому підрозділі буде показано, що для $\mathcal{C}^1$ -потoku ця умова дозволяє оцінити періоди точок x_i .

Нехай M — зв'язний $\mathcal{C}^r$ -многовид, ($r \geq 1$), розмірності m , можливо некомпактний, з межею або без неї. Нехай також F — векторне поле на M класу $\mathcal{C}^r$ дотичне до ∂M і $\mathbf{F}$ — локальний потік поля F . Через $\text{Fix}(\mathbf{F})$ позначатимемо множину нерухомих точок потоку $\mathbf{F}$. Очевидно, що вона співпадає з множиною нулів або особливих точок F .

Теорема 4.7.1. *Нехай $V \subset M$ — відкрита підмножина, $\theta : V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ — P -функція, $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ і $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ — збіжна до z послідовність періодичних точок, що задовольняє умову (E). Таким чином, $\theta(x_i) \neq 0$ і знайдеться така константа $T > 0$ і така евклідова метрика f на деякому околі точки z , що $d(z, x_i) < T \cdot \text{diam}(o_{x_i})$. Якщо періоди точок x_i обмежені зверху деяким числом $C > 0$ (зокрема, якщо виконується умова (A)), то*

(e₁) *існує таке $\varepsilon > 0$, що $|\theta(x_i)| \geq \text{Per}(x_i) > \varepsilon$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, тобто періоди точок x_i також обмежені знизу і*

(e₂) *$j^1 F(z) \neq 0$.*

Для доведення нам будуть потрібні наступні два твердження, перше з яких — очевидне.

Лема 4.7.2. *Нехай X — топологічний простір, K — компактний простір, і $g : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція. Тоді функція $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$, визначена за формулою $\gamma(x) = \sup_{y \in K} g(x, y)$ є неперервною.* □

Лема 4.7.3. *Нехай K — компактний многовид і*

$$Q = (Q_1, \dots, Q_n) : \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$$

— неперервне відображення, що задовольняє наступні умови:

- (а) $Q(0 \times K) = 0$.
- (б) Для кожного $k \in K$ відображення $Q_k = Q(\cdot, k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ належить класу $\mathcal{C}^1$.
- (с) Для кожного $i, j = 1, \dots, n$ частинна похідна $\frac{\partial Q_i}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною.

Зокрема, умови (б) та (с) виконуються якщо K є многовидом і Q належить класу $\mathcal{C}^1$. Тоді існує така неперервна функція $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$\|Q(x, k)\| \leq \|x\| \cdot \alpha(x), \quad (x, k) \in \mathbb{R}^n \times K.$$

Якщо $j^1 Q_k(0) = 0$ для всіх $k \in K$, то $\alpha(0) = 0$.

Доведення. З умов (а)-(с) та леми Адамара 3.0.1 випливає, що

$$Q_i(x, k) = \sum_{j=1}^n x_j q_{ij}(x, k)$$

для деяких для неперервних функцій $q_{ij} : \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що $q_{ij}(0, k) = \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0, k)$. Тому $Q(x, k) = A(x, k)x$, де $A(x, k) = (q_{ij}(x, k))$ — $(n \times n)$ -матриця з неперервними коефіцієнтами. Нехай S^{n-1} — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$ з центром в початку координат. Визначимо функцію $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ за формулою

$$\alpha(x) = \sup_{(v, k) \in S^{n-1} \times K} \|A(x, k) \cdot v\|. \quad (4.12)$$

Тоді за лемою 4.7.2 α є неперервною. Біль того,

$$\|Q(x, k)\| = \|A(x, k)x\| = \left\| A(x, k) \frac{x}{\|x\|} \right\| \cdot \|x\| \leq \alpha(x) \cdot \|x\|.$$

Залишається відмітити, що коли $j^1 Q_k(0) = 0$, тобто $A(0, k) = 0$, для всіх $k \in K$, то з (4.12) випливає, що $\alpha(0) = \sup_{(v, k) \in S^{n-1} \times K} \|A(0, k) \cdot v\| = 0$. $\square$

Лема 4.7.4. Нехай F — векторне поле в $\mathbb{R}^n$ класу $\mathcal{C}^1$ і $(\mathbf{F}_t)$ — локальний потік F . Припустимо, що $F(0) = 0$. Тоді для кожного $C > 0$ існує такий окіл W

початку координат $0 \in \mathbb{R}^n$ і така неперервна функція $\gamma : W \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$\|F(\mathbf{F}(x, t))\| \leq \|x\| \cdot \gamma(x)$$

для всіх $(x, t) \in W \times [-C, C]$. Якщо $j^1 F(0) = 0$, то $\gamma(0) = 0$.

Припустимо, що F належить класу $\mathcal{C}^2$, тоді має місце звичайна оцінка $\|F(\mathbf{F}(x, t))\| \leq A \cdot \|x\|^2$ для деякого $A > 0$.

Доведення. Так як $\mathbf{F}(0, t) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то існує такий окіл W точки z , що для кожної точки $(x, t) \in W \times [-C, C]$ її образ, $\mathbf{F}(x, t)$, коректно визначений і належить V , тобто $\mathbf{F}(W \times [-C, C]) \subset V$.

Більш того, $\mathbf{F}$ належить класу $\mathcal{C}^1$, а тому задовольняє умови (а)-(с) леми 4.7.3 з $K = [-C, C]$. Тому існує така неперервна функція $\alpha : W \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$\|\mathbf{F}(x, t)\| \leq \|x\| \cdot \alpha(x), \quad (x, t) \in W \times [-C, C].$$

Так як F належить класу $\mathcal{C}^1$ і $F(0) = 0$, то знову за лемою 4.7.3 (для $K = \emptyset$) існує така неперервна функція $\beta : W \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \cdot \beta(x).$$

Визначимо $\gamma : W \rightarrow \mathbb{R}$ за формулою

$$\gamma(x) = \sup_{t \in [-C, C]} \alpha(x) \cdot \beta(\mathbf{F}(x, t)).$$

Тоді за лемою 4.7.2 γ є неперервною і

$$\|F(\mathbf{F}(x, t))\| \leq \|\mathbf{F}(x, t)\| \cdot \beta(\mathbf{F}(x, t)) \leq \|x\| \cdot \alpha(x) \cdot \beta(\mathbf{F}(x, t)) \leq \|x\| \cdot \gamma(x).$$

Крім того, якщо $j^1 F(0) = 0$, то $\beta(0) = 0$. Так як $\mathbf{F}(0, t) = 0$, то $\gamma(0) = \sup_{t \in [-C, C]} \alpha(0) \cdot \beta(0) = 0$. □

Доведення теореми 4.7.1. Потрібно показати, що порушення будь-якої з умов (e_1) чи (e_2) приводить до протиріччя.

За лемою 4.7.4 для довільного $C > 0$ існує такий окіл W точки z і така неперервна функція $\gamma : W \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$\|F(\mathbf{F}(x, t))\| \leq d(x, z) \cdot \gamma(x), \quad (x, t) \in W \times [-C, C]. \quad (4.13)$$

Тоді

$$d(z, x_i) < T \cdot \text{diam}(o_{x_i}) \stackrel{(4.10)}{\leq} \frac{T}{2} \cdot l(x_i) \stackrel{(4.8) \text{ \& } (4.13)}{\leq} \frac{T}{2} \cdot \text{Per}(x_i) \cdot d(z, x_i) \cdot \gamma(x_i).$$

Тому

$$0 < \frac{2}{T} < \text{Per}(x_i) \cdot \gamma(x_i) \leq |\theta(x_i)| \cdot \gamma(x_i).$$

Таким чином, якщо умова (e_1) порушується, тобто $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = 0$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(x_i) = +\infty$, що суперечить неперервності γ в точці z .

Нехай $j^1 F(z) = 0$. Тоді за лемою 4.7.4 $\gamma(z) = 0$, а отже $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(x_i) = \gamma(z) = 0$. Тому $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} |\theta(x_i)| = +\infty$, що суперечить обмеженості періодів точок x_i . $\square$

4.8 Необмеженість періодів

Нехай $F — \mathcal{C}^1$ векторне поле на $\mathbb{R}^n$ таке, що $F(0) = 0$. Його можна розглядати як $\mathcal{C}^1$ відображення $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Нехай

$$A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

— матриця Якобі F в точці 0 . Називатимемо цю матрицю *лінійною частиною F в точці 0* . З дійсного варіанту теореми Жордана про нормальну форму матриці випливає, що матриця A подібна до матриці наступного виду:

$$\bigoplus_{\sigma=1}^s \mathbf{J}_{q_\sigma}(a_\sigma \pm ib_\sigma) \oplus \bigoplus_{\tau=1}^r \mathbf{J}_{p_\tau}(\lambda_\tau), \quad (4.14)$$

де $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$ і $a_\tau \pm ib_\tau \in \mathbb{C}$ — всі власні значення A .

Теорема 4.8.1. *Припустимо, що виконується одна з наступних умов:*

- (1) *A має таке власне значення λ , що $\Re(\lambda) \neq 0$;*

- (2) матриця (4.14) має або блок $\mathbf{J}_q(\pm ib)$ або $\mathbf{J}_q(0)$ з $q \geq 2$;
- (3) $A = 0$ і знайдуться відкритий окіл V точки $\mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^n$ і неперервна P -функція $\theta : V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що θ приймає ненульові значення як завгодно близько від точки $\mathbf{0}$, тобто $\mathbf{0} \in \overline{V \setminus \theta^{-1}(0)}$.

Тоді існує така збіжна до $\mathbf{0}$ послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що або кожна точка x_i є неперіодичною, або всі x_i — періодичні і $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = +\infty$.

Доведення. (1) В цьому випадку за теоремою Адамара-Перрона, див. [46], можна знайти таку неперіодичну орбіту o поля F , що $\mathbf{0} \in \bar{o} \setminus o$. Це означає існування послідовності $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset o$ збіжної до $\mathbf{0}$.

(2) Розглянемо два випадки.

(а) Припустимо, що матриця (4.14) містить блок $\mathbf{J}_q(0)$ з $q \geq 2$. Тоді можна вважати, що

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

(b) Нехай тепер (4.14) має блок $\mathbf{J}_q(\pm ib)$ з $q \geq 2$ для деякого $b > 0$. Ототожнимо $\mathbb{R}^n$ з $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-4}$, і таким чином вважатимемо, що перші дві координати x_1 та x_2 є комплексними. Тоді

$$A = \begin{pmatrix} ib & 0 & \dots & 0 \\ 1 & ib & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

В обох випадках позначимо через p_1 проекцію на першу (дійсну або комплексну) координату, тобто $p_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$.

Лема 4.8.2. *Нехай S^{n-1} — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$ з центром в початку координат $\mathbf{0}$, $\varepsilon > 0$, $Y_\varepsilon = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} : |x_1| \geq \varepsilon\}$, і C_ε — конус над Y_ε з вершиною в $\mathbf{0}$. Тоді для довільного $L > 0$ існує такий окіл $W = W_{L,\varepsilon}$ точки $\mathbf{0}$, що кожна точка $x \in (W \cap C_\varepsilon) \setminus \mathbf{0}$ є або неперіодичною, або періодичною періоду $\text{Per}(x) > L$.*

Доведення. Нехай $(\mathbf{F}_t)$ — локальний потік поля F . Тоді, взагалі кажучи, $\mathbf{F}$ визначений лише на деякому відкритому околі $\mathbb{R}^n \times \mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Але, так як

$\mathbf{F}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то для кожного $L > 0$ знайдеться такий окіл V точки $\mathbf{0}$, що потік $\mathbf{F}$ буде визначений на $V \times [-2L, 2L]$.

Покажемо, що у обох випадках (а) і (б) існує таке $c > 0$, що

$$\|e^{At}x - x\| \geq c|t \cdot x_1| = c|t \cdot p_1(x)|. \quad (4.17)$$

(а) Нехай A співпадає з матрицею (4.15). Тоді

$$e^{At}x = (x_1, tx_1 + x_2, \dots)$$

і можна покласти $c = 1$:

$$\|e^{At}x - x\| = \|(0, tx_1, \dots)\| \geq |t \cdot x_1| = |t \cdot p_1(x)|.$$

(б) Якщо A задається (4.16), то

$$e^{At}x = (e^{ibt}x_1, e^{ibt}(tx_1 + x_2), \dots).$$

Відмітимо, що $e^{ibt} = 1 + t\gamma(t)$ для деякої C^∞ функції $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Позначимо

$$c = \min_{t \in [-2L, 2L]} |\gamma(t)|. \text{ Тоді } c > 0 \text{ і}$$

$$\|e^{At}x - x\| = \|(e^{ibt}x_1 - x_1, \dots)\| \geq |t \cdot \gamma(t) \cdot x_1| = c|t \cdot p_1(x)|.$$

Так як $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$ відображенням і $\mathbf{F}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то з леми 4.7.3 випливає, що знайдеться така неперервна функція $\alpha : V \rightarrow [0, +\infty)$ що

$$1) \alpha(\mathbf{0}) = 0,$$

$$2) \|\mathbf{F}(x, t) - e^{At}x\| \leq \|x\| \cdot \alpha(x) \text{ для всіх } (x, t) \in V \times [-2L, 2L].$$

Тому

$$\|\mathbf{F}(x, t) - x\| \geq \|e^{At}x - x\| - \|\mathbf{F}(x, t) - e^{At}x\| \geq c|t \cdot p_1(x)| - \|x\|\alpha(x)$$

для $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [-2L, 2L]$. Більш того, якщо $p_1(x) \neq 0$, то

$$\|\mathbf{F}(x, t) - x\| \geq c|t \cdot p_1(x)| - \|x\|\alpha(x) = c|p_1(x)| \cdot \left(|t| - \frac{\|x\|\alpha(x)}{c|p_1(x)|}\right).$$

Так як $\alpha(\mathbf{0}) = 0$, то існує такий окіл $W \subset V$ точки $\mathbf{0}$, що

$$\alpha(x) < c \cdot \varepsilon \cdot L, \quad x \in W.$$

Нехай тепер $x \in (W \cap C_\varepsilon) \setminus \mathbf{0}$. Тоді $|x| \leq 1$ і $|p_1(x)| \geq \varepsilon$, а отже

$$\frac{\|x\| \alpha(x)}{c \cdot |p_1(x)|} < \frac{1 \cdot c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{L}}{c \cdot \varepsilon} = \mathbf{L}.$$

Тому $\|\mathbf{F}(x, t) - x\| \geq c \cdot \varepsilon(|t| - \mathbf{L})$ для $t \in [-2\mathbf{L}, 2\mathbf{L}]$. Зокрема, $\mathbf{F}(x, t) \neq x$ для $t \in [\mathbf{L}, 2\mathbf{L}]$. Таким чином, x є або неперіодичною точкою або періодичною періоду більшого за $2\mathbf{L} - \mathbf{L} = \mathbf{L}$. $\square$

(3) Припустимо, що існує такий окіл V точки $\mathbf{0}$, що множина $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ складається лише з періодичних точок. Якщо періоди точок з $V \setminus \theta^{-1}(\mathbf{0})$ обмежені зверху, тобто виконується умова (A), то з (e_2) теореми 4.7.1 слідує, що $j^1 F(\mathbf{0}) \neq 0$. Теорему 4.8.1 доведено. $\square$

Зауваження 4.8.3. Взагалі кажучи невірно, що за умов леми 4.8.2 для *кожної* збіжної до $\mathbf{0}$ послідовності $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ періодичних точок, їх періоди обмежені зверху. Дійсно, нехай

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

і $F(x) = Ax$ — відповідне лінійне векторне поле на $\mathbb{R}^4$. Тоді кожна послідовність вигляду $\{(0, 0, x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, що збігається до $\mathbf{0}$, складається з періодичних точок, періоди яких дорівнюють 2π .

З іншого боку, в наступному спеціальному випадку це дійсно так.

Приклад 4.8.4. Нехай $f(x, y) = x^{2b} + y^2$ — многочлен на $\mathbb{R}^2$, де $2b \geq 4$, і

$$F = -f'_y \frac{\partial}{\partial x} + f'_x \frac{\partial}{\partial y} = -2y \frac{\partial}{\partial x} + 2bx^{2b-1} \frac{\partial}{\partial y}$$

— гамільтонове векторне поле f . Тоді орбіти F — це початок координат $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ і концентричні замкнуті криві, що обходять навколо $\mathbf{0}$, див. рис. 4.8.1. Очевидно, що лінійна частина A поля F в точці $\mathbf{0}$ є нільпотентною: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді зі структури орбіт поля F і леми 4.8.2 випливає, що для довільної збіжної до $\mathbf{0}$ послідовності $\{x_i\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$, маємо, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = +\infty$.

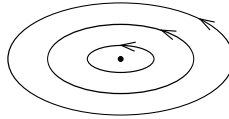


Рис. 4.8.1: $f(x, y) = x^{2b} + y^2$, $(2q \geq 4)$

Твердження 4.8.5. Нехай $F — \mathcal{C}^1$ векторне поле на многовиді M , $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$, $V \subset M$ — окіл z і $\theta \in P(V) — P$ -функція. Нехай також $W = \cup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ — об'єднання всіх компонент зв'язності $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ для яких $z \in \overline{W}_\lambda$. Тоді кожна з наступних умов гарантує, що $\theta = 0$ на $\overline{W} \cap V$:

- (a) $j^1 F(z)$ має таке власне значення λ , що $\Re(\lambda) \neq 0$;
- (b) дійсно нормальна форма Жордана матриці $j^1 F(z)$ має або блок $\mathbf{J}_q(\pm ib)$ або $\mathbf{J}_q(0)$ з $q \geq 2$.
- (c) $j^1 F(z) = 0$;
- (d) $z \in \overline{\text{IntFix}(\mathbf{F})} \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$.
- (e) $\theta(z) = 0$;

Доведення. Припустимо, що θ приймає ненульові значення в періодичних точках, що лежать як завгодно близько до z . Спочатку покажемо, що кожне з кожного з припущень (a)-(d) впливає (e), а далі встановимо, що умова (e) приводить до протиріччя.

(a) $\vee$ (b) $\vee$ (c) $\Rightarrow$ (e). Нехай $j^1 F(z)$ задовольняє одну з умов (a), (b) або (c). Тоді з припущення про θ та теореми 4.8.1 впливає існування такої збіжної до z послідовності $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, що всі x_i є або неперіодичними, або періодичними і причому $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = +\infty$.

Якщо кожна x_i є неперіодичною, то за лемою 2.2.6 $\theta(x_i) = 0$, тому з неперервності θ отримуємо, що $\theta(z) = 0$.

Припустимо, що всі x_i є періодичними. Тоді $\theta(x_i) = n_i \text{Per}(x_i)$ для деякого $n_i \in \mathbb{Z}$. Так як $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Per}(x_i) = +\infty$ і θ — неперервна, то $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = 0$, тобто $n_i = 0$ для всіх достатньо великих i . Тому $\theta(x_i) = 0$, а тому $\theta(z) = 0$.

(d) $\Rightarrow$ (c). Умова $z \in \overline{\text{IntFix}(\mathbf{F})} \setminus \text{IntFix}(\mathbf{F})$ означає існування послідовності $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{IntFix}(\mathbf{F})$, яка збігається до z . Але тоді $j^1 F(z_i) = 0$ для всіх i . Так як F належить класу C^1 , то $j^1 F(z) = 0$.

(e). Припустимо, що $\theta(z) = 0$. Нехай U — окіл точки z з компактним замиканням $\bar{U} \subset V$ і $C = \sup_{x \in \bar{U}} |\theta(x)|$. Тоді періоди точок в $U \setminus \theta^{-1}(0)$ обмежені зверху числом C , тобто θ задовольняє умову (A), а тому за лемою 4.6.3, і умову (E). Нехай $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset U \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ — послідовність точок, що збігається до z і задовольняє умову (E). Тоді за теоремою 4.7.1 таке існує $\varepsilon > 0$, що $|\theta(x_i)| > \varepsilon$. Так як функція θ неперервна, то $|\theta(z)| \geq \varepsilon > 0$, що суперечить умові $\theta(z) = 0$. $\square$

4.9 Висновки

В четвертому розділі ми вивчили структуру ядра відображення зсуву (множини P -функцій) неперервного потоку на топологічному многовиді M для всіх відкритих зв'язних підмножин $V \subset M$ (теорема 4.1.1) та отримали наслідки з цієї теореми про гомотопічний тип образу відображення зсуву φ_F . Крім того, показано, що якщо потік $\mathbf{F}$ є топологічно спряженим до $\mathcal{C}^1$ -потoku, а його множина нерухомих точок $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна, то нетривіальні P -функції відносно $\mathbf{F}$ не можуть набувати нульових значень $\text{Fix}(\mathbf{F})$ (теорема 4.1.2).

Розділ 5 ОБРАЗ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ

Нехай знову V — D -підмноговид і F — векторне поле на M класу $\mathcal{C}^\infty$. Для простоти опускаємо верхній індекс $r = \infty$ і позначатимемо $P(V)^\infty$, $\text{func}(F, V)^\infty$, $\varphi_{F,V}^\infty$ та $Sh(F, V)^\infty$ через $P(V)$, $\text{func}(F, V)$, $\varphi_{F,V}$ та $Sh(F, V)$ відповідно.

Обчислення з розділу 3 показують, що $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$ для лінійних потоків на $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^2$. В цьому розділі ми наводимо достатні умови для того, щоб $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ для деякого r .

Спочатку буде показано, що $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, якщо V не містить особливих точок поля F , (теорема 5.1.1). Іншими словами, якщо відображення $h \in \mathcal{E}(F, V)$ гомотопне тотожному вкладенню $i_V : V \subset M$, то для заданої гомотопії можна побудувати функцію зсуву на множині регулярних точок з V .

Якщо ж V містить особливі точки, то для того, щоб така функція зсуву деформації гладко продовжувалась на всю множину V потрібно накладати додаткові умови типу гладкої залежності деформації від параметру (теорема 5.2.2).

Ми також покажемо, що при «правильному зменшенні» V до підмножини $W \subset V$ властивість $Sh(F, W) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, W)^0$ зберігається (лема 5.3.1).

5.1 Функції зсуву на множині регулярних точок

Скрізь далі S — зв'язний гладкий многовид, T — *лінійно зв'язний* та *локально лінійно зв'язний* топологічний простір, $\sigma_0 \in S$ і $\tau_0 \in T$.

Нехай $V \subset M$ — відкрита підмножина, $\Omega : V \times S \times T \rightarrow M$ — $(S; T, k)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, V)$ (див. §1.1) і $A \subset V \times S \times T$ — підмножина. Неперервна функція

$\Lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ називатиметься *функцією зсуву* для деформації Ω якщо

$$\Omega(x, \sigma, \tau) = \mathbf{F}(x, \Lambda(x, \sigma, \tau)), \quad \forall (x, \sigma, \tau) \in A.$$

Теорема 5.1.1. *Припустимо, що $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F}) = \emptyset$.*

(1) *Нехай $(x_0, \sigma_0, \tau_0) \in V \times S \times T$ і $a \in \mathbb{R}$ такі точки, що*

$$\Omega(x_0, \sigma_0, \tau_0) = \mathbf{F}(x, a). \quad (5.1)$$

Тоді існують зв'язні околи $W_{x_0} \subset V$ точки x , $W_{\sigma_0} \subset S$ точки σ_0 , $W_{\tau_0} \subset T$ точки τ_0 і така єдина неперервна функція зсуву

$$\Delta : W_{x_0} \times W_{\sigma_0} \times W_{\tau_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

для Ω , що $\Delta(x_0, \sigma_0, \tau_0) = a$. Таким чином $\Omega(x, \sigma, \tau) = \mathbf{F}(x, \Delta(x, \sigma, \tau))$ для всіх $(x, \sigma, \tau) \in W_{x_0} \times W_{\sigma_0} \times W_{\tau_0}$. Більш того, Δ є $(W_{\sigma_0}; W_{\tau_0}, k)$ -деформацією в $\mathcal{C}^\infty(W_{x_0}, \mathbb{R})$.

(2) *Будь-яка неперервна функція зсуву $\Lambda : V \times S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ для $\Omega \in (S; T, k)$ -деформацією.*

(3) *Позначимо $P = S \times T$ і припустимо, що виконуються наступні умови:*

- (а) *для кожного $x \in V$ відображення $\Omega_x : P \rightarrow o_x$ визначене за формулою $\Omega_x(\rho) = \Omega(x, \rho)$, є гомотопним нулю (це, очевидно, має місце, коли P є однозв'язним, тобто $\pi_1 P = 0$, або коли F не має замкнутих орбіт),*
- (б) *для деякої точки $\rho_0 \in P$ відображення Ω_{ρ_0} має неперервну функцію зсуву $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$, тобто $\Omega_{\rho_0}(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$.*

Тоді існує така єдина неперервна функція зсуву $\Lambda : V \times P \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω , що $\Lambda_{\rho_0} = \alpha$.

Доведення. Нехай $x_0 \in V$. За умовою $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F}) = \emptyset$, а отже x_0 є регулярною точкою поля F . Тому існують $\varepsilon > 0$, окіл U точки x_0 і дифеоморфізм $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ такі, що в координатах (y, s) на U індукованих η ,

$$\mathbf{F}((y, s), t) = (y, s + t), \quad \text{за умови } s, s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (5.2)$$

Називатимемо U — ε -трубкою потоку в точці x_0 . Відмітимо, що якщо $z \in U$ — періодична точка, то її період $\text{Per}(z) \geq 2\varepsilon$.

Тому нижче ми будемо вважати, що для кожної періодичної точки $z \in U$ виконується нерівність

$$\text{Per}(z) > 10\varepsilon. \quad (5.3)$$

Щоб досягти цього, достатньо замінити ε -трубку U на її «центральною» $\frac{\varepsilon}{6}$ -трубку $U' = \eta^{-1}(\mathbb{R}^{m-1} \times (-\frac{\varepsilon}{6}, \frac{\varepsilon}{6}))$. Тоді $\text{Per}(z) \geq 2\varepsilon = 12 \cdot \frac{\varepsilon}{6} > 10 \cdot \frac{\varepsilon}{6}$ для кожної періодичної точки $z \in U'$.

Нехай також $p : U \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ проекція на останню координату, тобто $p(y, s) = s$.

(1) Нехай U — ε -трубка в точці x_0 , що задовольняє умову (5.3). Тоді з (5.1) випливає, що $\mathbf{F}_{-a} \circ \Omega(x_0, \sigma_0, \tau_0) = x_0$, а тому знайдеться такий окіл W точки (x_0, σ_0, τ_0) в $V \times S \times T$, що $\mathbf{F}_{-a}(W) \subset U$. Можна також вважати, що W представлено у вигляді добутку $W_{x_0} \times W_{\sigma_0} \times W_{\tau_0}$ зі зв'язними множинами.

Визначимо функцію $\Delta : W \rightarrow \mathbb{R}$ за наступною формулою:

$$\Delta(x, \sigma, \tau) = p \circ \mathbf{F}_{-a} \circ \Omega(x, \sigma, \tau) - p(x) + a. \quad (5.4)$$

Тоді (5.2) легко випливає, що Δ є функцією зсуву для Ω і задовольняє твердження (1) теореми. Зокрема, з леми 1.1.7 випливає, що $\Delta \in (W_{\sigma_0}; W_{\tau_0}, k)$ -деформацією так само як і Ω . Єдиність Δ випливає з наступної леми, яка, в дійсності, доводить більше.

Лема 5.1.2. *Нехай $(x, \sigma, \tau) \in W$ і $b \in \mathbb{R}$ такі, що*

$$\Omega(x, \sigma, \tau) = \mathbf{F}(x, b) \quad \text{and} \quad |\Delta(x, \sigma, \tau) - b| \leq 10\varepsilon.$$

Тоді $\Delta(x, \sigma, \tau) = b$.

Доведення. Для спрощення покладемо $\xi = (x, \sigma, \tau)$. Відмітимо, що $\Omega(\xi) \in o_x$. Якщо x є неперіодичною, то може існували лише одне таке $c \in \mathbb{R}$, що $\Omega(\xi) = \mathbf{F}(x, c)$. Тому $b = c = \Delta(\xi)$.

Припустимо, що x — періодична точка. Тоді $\Delta(\xi) - b = k \cdot \text{Per}(x)$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$. З іншого боку згідно (5.3) $\text{Per}(\Omega(\xi)) = \text{Per}(x) > 10\varepsilon$. Тому

$$|k \cdot \text{Per}(x)| = |\Delta(\xi) - b| \leq 10\varepsilon < \text{Per}(x),$$

а отже $k = 0$. □

Наслідок 5.1.3. Нехай $A \subset W$ — зв'язна підмножина і $\Delta' : A \rightarrow \mathbb{R}$ — така неперервна функція зсуву для Ω , що для деякої точки $\xi = (x, \sigma, \tau) \in A$ виконується нерівність $|\Delta(\xi) - \Delta'(\xi)| < 10\varepsilon$. Тоді $\Delta = \Delta'$ на A .

Доведення. Покладемо

$$\tilde{B} = \{\eta \in A \mid |\Delta(\eta) - \Delta'(\eta)| < 10\varepsilon\}, \quad B = \{\eta \in A \mid \Delta(\eta) = \Delta'(\eta)\}.$$

Потрібно показати, що $B = A$.

Очевидно, що B є замкнутою підмножиною в A , в той час як $\tilde{B}$ — відкритою. Більш того, за лемою 5.1.2 $B = \tilde{B}$ і $\xi \in B \neq \emptyset$. Тому $B = \tilde{B} = A$. □

Твердження (2) є прямим наслідком (1).

(3) Для $x \in V$ нехай

$$\mathbf{F}_x : \mathbb{R} \longrightarrow o_x \subset M, \quad \mathbf{F}_x(t) = \mathbf{F}(x, t)$$

— відображення, що визначає орбіту o_x точки x . Так як Ω є деформацією в $\mathcal{E}(F, V)$, то $\Omega(x \times P) \subset o_x$. За умовою це відображення гомотопне нулю. Тому з властивості підняття гомотопії для накриваючих відображень впливає існування такої неперервної функції $\Lambda^x : x \times P \rightarrow \mathbb{R}$, що $\Lambda^x(\rho_0) = \alpha(x)$. Ця функція робить комутативною наступну діаграму:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ \Lambda^x \nearrow & \downarrow \mathbf{F}_x & \\ x \times P & \xrightarrow{\Omega} & o_x \end{array} \quad \text{тобто} \quad \Omega(x, \rho) = \mathbf{F}(x, \Lambda^x(\rho)),$$

Визначимо наступну функцію $\Lambda : V \times P \rightarrow \mathbb{R}$ by $\Lambda(x, \rho) = \Lambda^x(\rho)$. Тоді $\Lambda(x, \rho_0) = \alpha(x)$ і $\Omega(x, \rho) = \mathbf{F}(x, \Lambda(x, \rho))$ для $(x, \rho) \in V \times P$. Залишається показати, що Λ є неперервною.

Нехай $(x, \rho) \in V \times P$. Тоді згідно твердженню (1) існують зв'язні околи $W_x^{(x, \rho)} \subset V$ точки x і $W_\rho^{(x, \rho)} \subset P$ точки ρ , а також неперервна функція зсуву

$$\Delta^{(x, \rho)} : W^{(x, \rho)} = W_x^{(x, \rho)} \times W_\rho^{(x, \rho)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

для Ω такі, що

$$\Delta^{(x, \rho)}(x, \rho) = \Lambda^x(\rho). \quad (5.5)$$

Наша мета — показати, що $\Delta^{(x, \rho)} = \Delta^{(x', \rho')}$ на $W^{(x, \rho)} \cap W^{(x', \rho')}$ для $(x, \rho), (x', \rho') \in V \times P$. Тоді функції $\{\Delta^{(x, \rho)}\}_{(x, \rho) \in V \times P}$ визначатимуть єдину неперервну функцію на всьому $V \times P$.

Відмітимо, що проекція p приймає значення в інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Тому з (5.4) випливає, що

$$|\Delta^{(x, \rho)}(\xi) - \Delta^{(x, \rho)}(\eta)| < 4\varepsilon, \quad \text{для } \xi, \eta \in W^{(x, \rho)}. \quad (5.6)$$

Лема 5.1.4. *Припустимо, що*

$$|\Delta^{(x, \rho)}(\xi) - \Delta^{(x', \rho')}(\xi)| < 2\varepsilon$$

для деякого $\xi \in W^{(x, \rho)} \cap W^{(x', \rho')}$. Тоді $\Delta^{(x, \rho)} = \Delta^{(x', \rho')}$ на $W^{(x, \rho)} \cap W^{(x', \rho')}$.

Доведення. Якщо $\eta \in W^{(x, \rho)} \cap W^{(x', \rho')}$, то

$$\begin{aligned} |\Delta^{(x, \rho)}(\eta) - \Delta^{(x', \rho')}(\eta)| &\leq |\Delta^{(x, \rho)}(\eta) - \Delta^{(x, \rho)}(\xi)| + \\ &+ |\Delta^{(x, \rho)}(\xi) - \Delta^{(x', \rho')}(\xi)| + |\Delta^{(x', \rho')}(\xi) - \Delta^{(x', \rho')}(\eta)| < \\ &< 4\varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon = 10\varepsilon. \end{aligned}$$

Тому за лемою 5.1.2 $\Delta^{(x, \rho)}(\eta) = \Delta^{(x', \rho')}(\eta)$. □

Лема 5.1.5. $\Delta^{(x, \rho)} = \Delta^{(x, \rho')}$ на $W^{(x, \rho)} \cap W^{(x, \rho')}$.

Доведення. Так як $\Delta^{(x, \rho)}$ і Λ^x — неперервні функції зсуву для Ω на зв'язній множині $x \times W_\rho^{(x, \rho)}$, то з (5.5) і наслідку 5.1.3 випливає, що $\Delta^{(x, \rho)} = \Lambda^x$ на $x \times W_\rho^{(x, \rho)}$.

Тому

$$\Delta^{(x,\rho)}(x, \rho') = \Lambda^x(\rho') \stackrel{(5.5)}{=} \Delta^{(x,\rho')}(x, \rho') \text{ for all } \rho' \in W_\rho^{(x,\rho)}.$$

Тоді за лемою 5.1.4 $\Delta^{(x,\rho)} = \Delta^{(x,\rho')}$ на $W^{(x,\rho)} \cap W^{(x,\rho')}$. $\square$

Таким чином, для кожної точки $x \in V$ функції $\{\Delta^{(x,\rho)}\}_{\rho \in P}$ визначають неперервну функцію зсуву $\Delta^x : W^x \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω на відкритому околі $W^x := \bigcup_{\rho \in P} W^{(x,\rho)}$ точки $x \times P$ в $V \times P$. Так як P і кожна множина $W^{(x,\rho)}$ є зв'язною, то окіл W^x також є зв'язним. Тоді з леми 5.1.2 та наслідку 5.1.3 слідує, що Δ^x — єдина функція зсуву для Ω на W^x така, що $\Delta^x(\rho) = \Lambda^x(\rho)$ хоча б для одного $\rho \in P$.

Лема 5.1.6. $\Delta^{(x,\rho_0)} = \Delta^{(x',\rho_0)}$ на $W^{(x,\rho_0)} \cap W^{(x',\rho_0)}$, а тому $\Delta^x = \Delta^{x'}$ на $W^x \cap W^{x'}$.

Доведення. Відмітимо, що $\Delta^{(x,\rho_0)}$ і α — неперервні функції зсуву для Ω на зв'язній множині $W_x^{(x,\rho_0)} \times \rho_0$ і, за умовою,

$$\Delta^{(x,\rho_0)}(x, \rho_0) = \Lambda^x(\rho_0) = \alpha(x).$$

Тоді за наслідком 5.1.3

$$\Delta^{(x,\rho_0)}(x', \rho_0) = \alpha(x') = \Delta^{(x,\rho_0)}(x', \rho_0) \text{ для всіх } x' \in W_x^{(x,\rho_0)}.$$

Тому за лемою 5.1.4 $\Delta^{(x,\rho_0)} = \Delta^{(x',\rho_0)}$ на $W^{(x,\rho_0)} \cap W^{(x',\rho_0)}$. $\square$

Таким чином, функції $\{\Delta^x\}_{x \in V}$ визначають неперервну функцію на всьому $V \times P$ і ця функція співпадає з Λ . Теорему 5.1.1 доведено. $\square$

Наслідок 5.1.7. Припустимо, що $f \in \mathcal{E}(F, V)$, $z \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $a \in \mathbb{R}$ такі, що $f(z) = \mathbf{F}(z, a)$. Тоді існує окіл W точки z і така єдина неперервна функція зсуву $\alpha : W \rightarrow \mathbb{R}$ для f , що $\alpha(z) = a$. В дійсності α належить класу $\mathcal{C}^\infty$.

Наслідок 5.1.8. Нехай $V \subset M$ — відкрита підмножина, $\hat{V} = V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\hat{V} \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}), \mathbb{R})$ і $\Omega : V \times S \times T \rightarrow M$ — $(S; T, k)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, V)$, такі, що $\Omega(x, \sigma_0, \tau_0) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ для всіх $x \in \hat{V}$.

Якщо $\pi_1(S \times T) = 0$, то існує така єдина $(S; T, k)$ -деформація $\Lambda : \hat{V} \times S \times T \rightarrow \mathbb{R}$, що $\Lambda(x, \sigma_0, \tau_0) = \alpha(x)$ для $x \in \hat{V}$ і $\Omega(x, \sigma, \tau) = \mathbf{F}(x, \Lambda(x, \sigma, \tau))$ для $(x, \sigma, \tau) \in \hat{V} \times S \times T$.

5.2 Продовження функцій зсуву деформацій

рп-точки. Для підмножини $V \subset M$ позначатимемо через $\hat{V} := V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ — множину всіх регулярних точок поля F в V . Нехай така відкрита зв'язна підмножина, що $\hat{V}$ також є зв'язним. Припустимо, що відображення зсуву $\varphi_{F, \hat{V}}$ є періодичним, тобто $P(\hat{V}) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, де $\theta : \hat{V} \rightarrow (0, +\infty)$ — деяка $\mathcal{C}^\infty$ -функція. Тоді $P(V) \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли θ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції на V .

Як зауважено вище, одна з перешкод до цього — необмеженість θ в околі $\text{Fix}(\mathbf{F})$.

Означення 5.2.1. Скажемо, що точка $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ є **рп-точкою** якщо існує такий відкритий окіл V точки z , що множина регулярних точок $\hat{V} = V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ є зв'язною, відображення зсуву $\varphi_{F, \hat{V}}$ є періодичним, але ні для якого іншого відкритого зв'язного околу $W \subset V$ точки z відображення зсуву $\varphi_{F, W}$ не є періодичним.

Нехай $\theta : \hat{V} \rightarrow (0, +\infty)$ — додатна твірна $P(\hat{V})$. Назвемо z — **сильною рп-точкою**, якщо $\lim_{x \rightarrow z} \theta(x) = +\infty$.

Нехай $V \subset M$ — відкрита зв'язна підмножина і $\Omega : V \times I \rightarrow M$ — така k -гомотопія в $\mathcal{E}(F, V)$, що $\Omega_0 = \varphi_{F, V}(\alpha)$ для деякої $\mathcal{C}^\infty$ функції $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді згідно наслідку 5.1.8 α продовжується до такої неперервної функції $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω , що $\Lambda_0 = \alpha$. Але, в загальному випадку, Λ_τ для $\tau > 0$ не може бути продовжена до $\mathcal{C}^\infty$ функції на V .

Нехай T — компактний однозв'язний і локально лінійно зв'язний топологічний простір і $\tau_0 \in T$.

Теорема 5.2.2. *Припустимо, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в V і існує така точка $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$, що виконується одна з наступних умов:*

- (a) z не є **pn**-точкою;
- (b) z є **pn**-точкою, $j^1 F(z) = 0$, і $k \geq 1$;
- (c) z є сильною **pn**-точкою і $k \geq 1$.

Нехай $\Omega : V \times T \rightarrow M - (T, k)$ -деформація в $Sh(F, V)$, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ — довільна функція зсуву для Ω_{τ_0} , і $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times T \rightarrow \mathbb{R}$ — така єдина неперервна функція зсуву для Ω , що $\Lambda_{\tau_0} = \alpha$, див. теорему 5.1.1. Тоді існує такий окіл W точки z , що для кожного $\tau \in T$ функція Λ_τ також продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції на W , і таким чином $\Omega_\tau|_W = \varphi_{F,W}(\Lambda_\tau|_W)$.

Відмітимо, що умови (a)-(c) не включають випадок коли z є **pn**-точкою, яка не сильною і $j^1 F(z) \neq 0$. Більш того, теорема не стверджує, що Λ є стає неперервною на $V \times T$.

Наслідок 5.2.3. *Нехай F — таке векторне поле на M , що множина $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна і нехай $k \geq 0$. Припустимо, що для кожної точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ існує такий відкритий зв'язний окіл V , що $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$ і виконується одна з умов (a)-(c) теореми 5.2.2. Тоді $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^k$.*

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^k$, тобто існує k -гомотопія $\Omega : V \times I \rightarrow M$ в $\mathcal{E}(F, V)$ між тотожним відображенням $\Omega_0 = \text{id}_M$ і $\Omega_1 = f$. За теоремою 5.1.1 існує єдина k -гомотопія $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I \rightarrow \mathbb{R}$, що є функцією зсуву для Ω і задовольняє умову $\Lambda_0 \equiv 0$. Покажемо, що Λ_τ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції на всьому M . Звідси впливатиме, що $\Omega_\tau = \varphi_F(\Lambda_\tau)$ для $\tau \in I$, а тому і $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^k$.

Нехай $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ і V — такий окіл точки z , що $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$. Тоді $\Omega_\tau|_V \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$, тобто $\Omega|_{V \times I} \in k$ -гомотопією в $Sh(F, V)$. Більш того, $\Lambda|_{(V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I}$ — єдине продовження $\Lambda_0|_V = 0$. За умовою теореми одне виконується одне з припущень (a)-(c) теореми 5.2.2, а тому для кожного $\tau \in I$ функція Λ_τ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції на деякому околі точки z . З того, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна

в M впливає, що таке продовження єдине. Так як z — довільна точка, то Λ_τ гладко продовжується на весь многовид M . $\square$

Для доведення теореми 5.2.2 нам будуть потрібні кілька допоміжних тверджень.

Спрощення 1-струменів в околі особливої точки. Нехай $\Omega : V \times T \rightarrow M$ — (T, k) -деформація в $Sh(F, V)$ і $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times T \rightarrow \mathbb{R}$ — функція зсуву для Ω . Візьмемо точку $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ і виберемо в її околі локальні координати $(x_1, \dots, x_m)$ в яких $z = 0 \in \mathbb{R}^m$. Позначимо через A — лінійну частину поля F в точці z . Таким чином A — це $(m \times m)$ -матриця. Тоді ми маємо експоненційне відображення

$$e : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{R}), \quad e(t) = \exp(At).$$

Позначимо його образ через $\mathcal{R}_A$. Якщо $A \neq 0$, то e є зануренням, тобто локальним гомеоморфізмом на свій образ.

Для кожної точки $\tau \in T$ позначимо через J_τ матрицю Якобі відображення Ω_τ в точці z . За умовою $\Omega_\tau = \varphi_{F,V}(\alpha_\tau)$ для деякої функції $\alpha_\tau \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$. Тоді з леми 2.5.2 випливає, що $J_\tau = \exp(A \alpha_\tau(z))$, а тому ми маємо коректно визначене відображення $\eta : T \rightarrow \mathcal{R}_A$, $\eta(\tau) = J_\tau$.

Очевидно, що при $k \geq 1$ відображення η є неперервним.

Лема 5.2.4. *Припустимо, що η неперервне і піднімається до неперервного відображення $\tilde{\eta} : T \rightarrow \mathbb{R}$, яке робить комутативною наступну діаграму:*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{\eta} & \downarrow e \\ T & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{R}_A \end{array}$$

Це виконується, наприклад, коли T є компактим, лінійно зв'язним та однозв'язним простором. Зокрема це вірно для $T = I^d$.

Нехай $W \subset V$ — довільний малий окіл точки z . Тоді знайдеться неперервна функція $\nu : V \times T \rightarrow \mathbb{R}$, яка є (T, ∞) -деформацією в $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$, дорівнює нулю

на доповненні до $W \times T$ і така, що (T, k) -деформація

$$\Omega' : V \times T \rightarrow M, \quad \Omega'(x, \tau) = \mathbf{F}(\Omega(x, \tau), -\nu(x, \tau))$$

має наступні властивості: для кожного $\tau \in T$

- 1) $j^1\Omega'_\tau(z)$ є тотожним відображенням, а
- 2) функція $\Lambda'_\tau = \Lambda_\tau - \nu_\tau$ є функцією зсуву для Ω' .

Зокрема, Λ_τ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функцій в околі точки z тоді тільки тоді, коли Λ'_τ може бути гладко продовжено на окіл точки z .

Доведення. Нехай $\mu : V \rightarrow [0, 1]$ — така $\mathcal{C}^\infty$ функція, що $\mu = 1$ на деякому околі точки z і $\mu = 0$ на $\overline{V \setminus W}$. Покладемо $\nu(x, \tau) = \mu(x)\hat{\eta}(\tau)$. Тоді легко перевірити, що ν задовольняє твердження леми. $\square$

Гладкість функцій зсуву. В цьому параграфі будемо вважати, що $V \subset M$ є відкритою зв'язною множиною такою, що іножтна регулярних точок $\hat{V} = V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ також зв'язна, а відображення зсуву $\varphi_{F, \hat{V}}$ — періодичне. Нехай $\theta : \hat{V} \rightarrow (0, +\infty)$ — додатна твірна $\ker \varphi_{F, \hat{V}}$.

Визначимо відображення $h : V \rightarrow M$ за формулою

$$h(x) = \begin{cases} \mathbf{F}(x, \theta(x)/2), & x \in \hat{V} = V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}), \\ x, & x \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V. \end{cases}$$

Очевидно, h неперервне на $\hat{V}$, але, взагалі кажучи, воно може бути розривне на $\text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$. Якщо $x \in \hat{V}$, то $\theta(x) = n_x \text{Per}(x)$ для деякого $n_x \in \mathbb{Z}$. Тому $h(x) = x$ тоді і тільки тоді, коли n_x є парним числом, див. рис. 5.2.1.

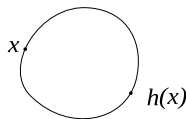


Рис. 5.2.1: $\theta(x) = n_x \text{Per}(x)$, n_x непарне

Теорема 5.2.5. Нехай $\Omega : V \times T \rightarrow M$ — $(T, 1)$ -деформація в $Sh(F, V)$, $\Lambda_{\tau_0} \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ — довільна функція зсуву для Ω_{τ_0} і $\Lambda : \hat{V} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ — єдина неперервне продовження функції Λ_{τ_0} , яке є функцією зсуву для Ω . Припустимо, що існує точка $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$, що задовольняє одну з наступних умов:

(HD) h є розривним в точці z ;

(JF0) $j^1 F(z) = 0$;

(TI) $\lim_{\hat{V} \ni x \rightarrow z} \theta(x) = \infty$.

Тоді

(EX) для кожного $\tau \in T$ функція $\Lambda_\tau : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ на всьому V , але індукована функція $\Lambda : V \times T \rightarrow \mathbb{R}$ взагалі кажучи не буде неперервною.

Доведення. Спочатку відмітимо, що для довільної (T, k) -деформації $\nu : V \times T \rightarrow \mathbb{R}$ в $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ наступне відображення

$$\Omega' : V \times T \rightarrow M, \quad \Omega'(x, t) = \mathbf{F}(\Omega(x, \tau), -\nu(x, \tau)) \quad (5.7)$$

є (T, k) -деформацією так само як і Ω . Більш того, функція

$$\Lambda' = \Lambda - \nu : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

є функцією зсуву для Ω' на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $\Lambda'_{\tau_0} = \Lambda_{\tau_0} - \nu_{\tau_0}$ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції $\alpha_{\tau_0} - \nu_{\tau_0}$ на всьому V . Тому $\Lambda'_\tau = \Lambda_\tau - \nu_\tau$ продовжуватиметься до $\mathcal{C}^\infty$ функції на V тоді і лише тоді, коли Λ_τ гладко продовжується на V . Таким чином, досить довести твердження для Ω' .

Зокрема, можна додатково вважати, що Ω задовольняє наступні умови:

($\Omega\Lambda$) $\Omega_{\tau_0} = i_V : V \subset M$ є тотожним включенням і $\Lambda_{\tau_0} \equiv 0$.

($J\Omega\text{id}$) $j^1 \Omega_\tau(z) = \text{id}$ для всіх $\tau \in T$.

Щоб досягти ($\Omega\Lambda$) покладемо $\nu(x, \tau) = \alpha_{\tau_0}(x)$. Тоді $\Lambda'_{\tau_0} = 0$ і $\Omega'_{\tau_0} = i_V$.

Припустимо далі, що ($\Omega\Lambda$) виконується для Ω . Так як $\Omega(z, \tau) = z$ для всіх $\tau \in T$, то з леми 5.2.4 випливає існування такої (T, ∞) -деформації $\nu : V \times T \rightarrow \mathbb{R}$, що $\nu_{\tau_0} = 0$, а $(T, 1)$ -деформація (5.7) задовольняє ($J\Omega\text{id}$).

Нехай $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \hat{V}$ — збіжна до z послідовність. Введемо до розгляду ще кілька умов.

(НС) h неперервне на деякому околі точки z .

(PU) послідовність періодів $\{\text{Per}(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ необмежена зверху;

(TU) послідовність $\{\theta(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ необмежена зверху;

(ΩН) $\Omega_\tau(x_i) \neq h(x_i)$ для всіх $\tau \in T$ і всіх достатньо великих $i \in \mathbb{N}$;

(D) існує таке $L > 0$ і така ріманова метрика $\|\cdot, \cdot\|$ на деякому околі точки z ,
що

$$\|x_i, z\| < L \cdot \|x_i, h(x_i)\|, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Лема 5.2.6. *Мають місце наступні імплікації:*

- 1) $(\Omega\Lambda) \ \& \ (\text{TU}) \ \& \ (\Omega\text{H}) \Rightarrow (\text{EX})$;
- 2) $(\text{HD}) \Rightarrow$ існує така послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = z$ і виконані умови (PU) та (ΩН);
- 3) $(\text{НС}) \Rightarrow$ існує така послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = z$ і виконується умова (D);
- 4) $(\text{JF0}) \ \& \ (\text{D}) \Rightarrow (\text{PU})$;
- 5) $(\text{НС}) \ \& \ (\text{J}\Omega\text{id}) \ \& \ (\text{D}) \Rightarrow (\Omega\text{H})$;
- 6) $(\text{TI}) \Rightarrow (\text{TU})$.
- 7) $(\text{PU}) \Rightarrow (\text{TU})$.

Спочатку покажемо, як вивести з цієї леми теорему 5.2.5. Потрібно довести, що кожна з умов (HD), (JF0), та (TI) разом з умовами (ΩΛ) та (JΩid) гарантує виконання умови (EX).

Імплікація $(\text{HD}) \ \& \ (\Omega\Lambda) \Rightarrow (\text{EX})$ випливає з 2), 7) та 1) леми 5.2.6.

Далі, якщо (HD) не виконується ні для якого $z \in V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$, то h є неперервним на всьому V , тобто виконана умова (НС).

Тоді $(\text{НС}) \ \& \ (\text{JF0}) \ \& \ (\Omega\Lambda) \ \& \ (\text{J}\Omega\text{id}) \Rightarrow (\text{EX})$ за твердженнями 4), 7), 5) та 1) леми 5.2.6.

Більш того, $(\text{HC}) \ \& \ (\text{TI}) \ \& \ (\Omega\Lambda) \ \& \ (\text{J}\Omega\text{id}) \Rightarrow (\text{EX})$ за твердженнями 3), 6) та 1) леми 5.2.6.

Теорему 5.2.5 доведено. $\square$

Доведення леми 5.2.6. Імплікації 6) та 7) тривіальні.

1) $(\Omega\Lambda) \ \& \ (\text{TU}) \ \& \ (\Omega\text{H}) \Rightarrow (\text{EX})$.

Маємо, що $\Omega_{\tau_0} = i_V : V \subset M$, $\Lambda_{\tau_0} \equiv 0$ і існує така збіжна до деякої точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$ послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що задовольняє умови:

$$(\text{TU}) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(x_i) = +\infty,$$

$$(\Omega\text{H}) \quad \Omega_\tau(x_i) \neq h(x_i), \quad i \in \mathbb{N}, \tau \in T.$$

Потрібно довести, що для кожного $\tau \in T$ функція Λ_τ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції на всьому V .

Відмітимо, що з умови (TU) випливає, що відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є неперіодичним. Дійсно, припустимо, що $\varphi_{F,V}$ — періодичне і ν — додатна твірна $\ker \varphi_{F,V}$. Тоді за наслідком 4.2.5 $\nu = \theta$ на $\hat{V}$, а тому θ є обмеженою на $\hat{V}$, що суперечить умові (TU) .

З неперіодичності $\varphi_{F,V}$ випливає, що для кожного $\Omega_\tau \in Sh(F, V)$, $(\tau \in T)$, існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ функція зсуву $\alpha_\tau \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$. Зокрема $\Lambda_{\tau_0} = \alpha_{\tau_0}$. Покажемо, що $\Lambda_\tau = \alpha_\tau$ на $\hat{V}$ для всіх $\tau \in T$.

Так як $\alpha_\tau|_{\hat{V}}$ і Λ_τ — функції зсуву для Ω_τ на $\hat{V}$, то з леми 2.2.3 випливає, що

$$\alpha_\tau - \Lambda_\tau = k_\tau \theta$$

на $\hat{V}$ для деякого $k_\tau \in \mathbb{Z}$. Досить встановити, що $k_\tau = 0$.

Умова (ΩH) означає, що точка $h(x_i)$ не належить образу відображення $\omega_i : T \rightarrow o_{x_i}$, визначеного за формулою

$$\omega_i(\tau) = \mathbf{F}(x_i, \Lambda_\tau(x_i)) = \Omega(x_i, \tau).$$

Більш того, так як $\Omega_{\tau_0}(x_i) = x_i \neq h(x_i)$ і $\Lambda_{\tau_0} = 0$, то з побудови функції Λ випливає, що

$$|\Lambda_\tau(x_i) - \Lambda_{\tau_0}(x_i)| = |\Lambda_\tau(x_i)| < \frac{1}{2} \text{Per}(x_i) \leq \frac{1}{2} \theta(x_i) \quad (5.8)$$

для всіх $\tau \in T$ та $i \in \mathbb{N}$.

З іншого боку з (TU) та функції неперервності α_τ отримуємо, що

$$|\alpha_\tau(x_i) - \alpha_{\tau_0}(x_i)| = |\alpha_\tau(x_i)| < \frac{1}{2} \theta(x_i)$$

для всіх достатньо великих $i \in \mathbb{N}$.

Тому

$$\begin{aligned} k_\tau \theta(x_i) = |\Lambda_\tau(x_i) - \alpha_\tau(x_i)| &\leq |\Lambda_\tau(x_i)| + |\alpha_\tau(x_i)| < \\ &< \frac{1}{2} \text{Per}(x_i) + \frac{1}{2} \theta(x_i) \leq \theta(x_i). \end{aligned}$$

Звідси слідує, що $k_\tau = 0$, а отже $\Lambda_\tau = \alpha_\tau$ на $\hat{V}$.

2) (HD) $\Rightarrow$ існує така послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = z$ і виконані умови (PU) та (Ω H);

Розривність h (тобто умова (HD)) в точці z означає, що існує така збіжна до z послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, її образ $\{h(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ лежить в доповненні до деякого околу W точки z .

(Ω H). Так як $\Omega(z \times T) = z$, а простір T є компактним, то можна вважати, що $\{\Omega_\tau(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset W$ для всіх $i \in \mathbb{N}$ і $\tau \in T$. Тому $\Omega_\tau(x_i) \neq h(x_i)$.

(PU). Припустимо, що умова (PU) не виконується. Тоді існує така константа $C > 0$, що $\text{Per}(x_i) < C$ для всіх i . Так як z — нерухома точка потоку $\mathbf{F}$, то знайдеться інший окіл U точки z такий, що $\mathbf{F}(U \times [0, C]) \subset W$. Тому (переходячи, якщо потрібно, до підпослідовності) можна вважати, що $x_i \in U$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, а отже

$$h(x_i) = \mathbf{F}(x_i, \text{Per}(x_i)/2) \in \mathbf{F}(U \times [0, C]) \subset W,$$

що суперечить припущенню $h(x_i) \notin W$.

3) (НС) $\Rightarrow$ існує така послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = z$ і виконується умова (D);

Це твердження є частинним випадком лема 4.6.3.

4) (JF0) & (D) $\Rightarrow$ (PU).

Маємо, що $j^1 F(z) = 0$ і знайдеться збіжна до z послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, яка задовольняє умову (D). Покажемо, що існує така підпослідовність $\{x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Per}(x_{i_k}) = +\infty$.

Припустимо, що $\text{Per}(x_i) < C$ для всіх i і деякого $C > 0$. Так як z — нерухома точка $\mathbf{F}$, то, зменшуючи U , можна вважати, що $\mathbf{F}(U \times [0, C]) \subset V$. Більш того, так як $j^1 F(z) = 0$, то можна також припустити існування такого $A > 0$, що

$$|F(x)| \leq A \cdot \|z, x\|^2, \quad \text{для всіх } x \in U.$$

Відмітимо, що довжина $l(x_i)$ орбіти точки x_i обчислюється за наступною формулою:

$$l(x_i) = \int_0^{\text{Per}(x_i)} |F(\mathbf{F}(x_i, t))| dt,$$

а, отже

$$l(x_i) \leq \text{Per}(x) \cdot \sup_{t \in [0, \text{Per}(x)]} |F(\mathbf{F}(x, t))| \leq C \cdot A \cdot \|z, x_i\|^2.$$

Тому

$$\|z, x_i\| < L \cdot \|z, h(x_i)\| \leq L \cdot l(x_i) \leq L \cdot C \cdot A \cdot \|z, x_i\|^2.$$

Звідси випливає, що $0 < \frac{1}{L \cdot C \cdot A} \leq \|z, x_i\|$. Це суперечить збіжності $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ до z .

5) (J Ω id) & (D) $\Rightarrow$ (Ω H);

Маємо, що $j^1 \Omega_\tau(z) = \text{id}$ для всіх $\tau \in T$ і існує збіжна до z послідовність $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ така, що $\|z, x_i\| < L \cdot \|x_i, h(x_i)\|$ для деякого $L > 0$. Потрібно довести, що $\Omega_\tau(x_i) \neq h(x_i)$ для всіх $\tau \in T$ та всіх достатньо великих i .

Так як $\Omega \in (T, 1)$ -деформацією, то з умови (J Ω id) випливає існування неперервної функції $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $\gamma(z) = 0$ і

$$\|x, \Omega_\tau(x)\| \leq \gamma(x) \cdot \|z, x\|$$

для всіх $(x, \tau) \in U \times T$. Якби Ω було $\mathcal{C}^2$ відображенням, або хоча б $(T, 2)$ -деформацією, то ми мали б звичайну оцінку:

$$\|x, \Omega_\tau(x)\| \leq C \cdot \|z, x\|^2$$

для деякої константи $C > 0$.

Тоді

$$\begin{aligned} \|h(x_i), \Omega_\tau(x_i)\| &\geq \|x_i, h(x_i)\| - \|x_i, \Omega_\tau(x_i)\| > \\ &> \frac{1}{L} \|z, x_i\| - \gamma(x_i, t) \cdot \|z, x_i\| = \left(\frac{1}{L} - \gamma(x_i)\right) \cdot \|z, x_i\|. \end{aligned}$$

Відмітимо, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(x_i) = \gamma(z) = 0$. Тому (переходячи, якщо потрібно до підпоследовності) можна вважати, що $\frac{1}{L} - \gamma(x_i, \tau) > 0$ для всіх i , а тому $\|h(x_i), \Omega_\tau(x_i)\| > 0$. Це означає, що $\Omega_\tau(x_i) \neq h(x_i)$.

Лему 5.2.6 доведено.

Доведення теореми 5.2.2. Нехай V — такий окіл точки z , що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною в V , $\Omega : V \times T \rightarrow M$ — (T, k) -деформація в $Sh(F, V)$ і $\Lambda : \hat{V} \times T \rightarrow M$ — неперервна функція зсуву для Ω така, що Λ_{τ_0} продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції α на всьому V . Потрібно показати, що існує такий окіл W точки z , що для кожного $\tau \in T$ функція Λ_τ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції на W .

За припущенням $\Omega_\tau \in Sh(F, V)$, тобто існує така функція $\alpha_\tau \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$, що $\Omega_\tau = \varphi_{F,V}(\alpha_\tau)$. Тому $\Lambda_\tau = \alpha_\tau + \mu_\tau$ на $\hat{V}$ для деякої функції $\mu_\tau \in \ker \varphi_{F,\hat{V}}$.

(а) Припустимо, що z не є **pn**-точкою. Тоді знайдеться окіл W точки z , такий, що або

(а') $\varphi_{F,\hat{W}}$ є неперіодичним, або

(а'') обидва відображення зсуву $\varphi_{F,W}$ та $\varphi_{F,\hat{W}}$ — періодичні,

де $\hat{W} = W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$.

У випадку (а') маємо, що $\ker \varphi_{F,\hat{W}} = \{0\}$. Зокрема, $\mu_\tau = 0$, а отже $\Lambda_\tau = \alpha_\tau$ on $\hat{W}$. Тому Λ_τ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції α_τ на W .

У випадку (a'') з наслідку 4.2.5 випливає, що $\ker \varphi_{F,W} = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої функції $\theta \in \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R})$ і $\ker \varphi_{F,\hat{W}} = \{n\theta|_{\hat{W}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Тому $\mu_\tau = k_\tau \theta|_{\hat{W}}$ для деякого $k_\tau \in \mathbb{Z}$, а отже Λ_τ знову продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції $\alpha_\tau + k_\tau \theta$ на всьому W .

Нарешті у випадках (b) та (c) z є **pn**-точкою, тобто знайдеться такий окіл W точки z , що $\varphi_{F,W}$ є неперіодичним, в той час як $\varphi_{F,\hat{W}}$ є періодичним. Тоді у випадку (b) (відповідно (c)) обмеження $\Omega|_{W \times T}$ задовольняє умови теореми 5.2.5 і умову (JF0) (відповідно умову (TI)). Тому для кожного $\tau \in T$ функція Λ_τ також гладко продовжується на весь окіл W . $\square$

5.3 «Зменшення» множини V

В цьому підрозділі показано, що співвідношення $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$ зберігається, якщо множину V зменшити «правильним» чином.

Лема 5.3.1. *Нехай $V \subset M$ — така відкрита зв'язна множина, що $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ є нідє не щільним в V і $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$ для деякого $k \geq 0$. Нехай також $W \subset V$ — відкрита зв'язна підмножина така, що перетин $W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ є **замкнутим** (а тому **відкрито-замкнутим**) в $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді $Sh(F, W) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, W)^k$.*

Доведення. Нехай $\Omega : W \times I \rightarrow M$ — така k -гомотопія, що $\Omega_0 = i_W : W \subset M$ є тотожним включенням. Потрібно показати, що для кожного $t \in I$ існує така $\mathcal{C}^\infty$ функція $\alpha_t : W \rightarrow \mathbb{R}$, що $h = \varphi_{F,W}(\alpha)$.

Нехай $\Lambda : (W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ — єдина k -гомотопія, що є функцією зсуву для Ω і задовольняє $\Lambda_0 \equiv 0$. Покажемо, що кожна з функцій Λ_t або продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ функції на всьому W , або її можна замінити на іншу функцію зсуву для Ω_t , яка гладко продовжуватиметься на всю множину W . Спочатку продовжимо Λ на $(V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I$, змінивши її зовні $(W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I$.

За припущенням множина $W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ є відкрито-замкнутою в $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$, тому знайдеться така $\mathcal{C}^\infty$ функція $\mu : V \rightarrow [0, 1]$, що $\mu = 1$ на деякому відкритому

околі $N \subset V$ множини $W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $\mu = 0$ на деякому околі $V \setminus W$, див. рис. 5.3.1.

Тоді з леми 1.1.7 випливає, що функція

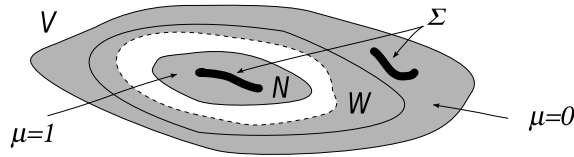


Рис. 5.3.1

$$\Lambda' : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda'(x, t) = \begin{cases} \mu(x)\Lambda(x, t), & x \in W \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}), \\ 0, & x \in V \setminus W \end{cases}$$

є k -гомотопією, яка співпадає з Λ на $(N \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I$. Очевидно, що тоді відображення $\Omega' : V \times I \rightarrow M$, визначене за правилом

$$\Omega'(x, t) = \begin{cases} \mathbf{F}(x, \Lambda'(x, t)), & x \in V \setminus (W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})), \\ x, & x \in W \cap \text{Fix}(\mathbf{F}), \end{cases}$$

є k -гомотопією в $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$ і співпадає з Ω на $N \times I$.

Так як $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$, то Ω'_t має $\mathcal{C}^\infty$ функцію зсуву α'_t на V . Таким чином

$$\Omega'_t(x) = \mathbf{F}(x, \mu(x)\Lambda_t(x)) = \mathbf{F}(x, \alpha'_t(x)), \quad x \in V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F}).$$

Покладемо $\hat{V} = V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді $\mu\Lambda_t$ є функцією зсуву для Ω'_t на $\hat{V}$, в той час як α'_t є функцією зсуву для Ω'_t на V . Розглянемо три випадки.

1) Якщо $\varphi_{F,V}$ і $\varphi_{F,\hat{V}}$ — неперіодичні, то з леми 2.2.3 випливає, що $\alpha'_t = \Lambda'_t = \mu\Lambda_t$ на $\hat{V}$. Так як $\mu = 1$ в околі $W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ і Λ_t є гладкою на доповненні до цієї множини, то можна покласти $\Lambda_t = \alpha_t$ на $W \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$. Тоді Λ_t стає гладкою на всій множині W .

2) Якщо обидва відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ та $\varphi_{F,\hat{V}}$ є періодичними, то за лемою 2.2.3 та наслідком 4.2.5 $\mu\Lambda_t = \alpha'_t + l_t\theta$ на $\hat{V}$, де $\theta : V \rightarrow (0, \infty)$ — додатна твірна ядра $\varphi_{F,V}$ і $l_t \in \mathbb{Z}$. Тоді аналогічно до випадку 1) Λ_t гладко продовжується на всю множину W .

3) Припустимо, що $\varphi_{F,\hat{V}}$ є періодичним, а $\varphi_{F,V}$ — неперіодичним. Нехай $\theta : \hat{V} \rightarrow (0, \infty)$ — додатна твірна ядра $\varphi_{F,\hat{V}}$. Тоді $\alpha'_t = \mu\Lambda_t - l_t\theta$ на $\hat{V}$ для деякого $l_t \in \mathbb{Z}$. Знову $\alpha_t = \Lambda_t - l_t\theta$ гладко продовжується на всю W .

Покажемо, що α_t є функцією зсуву для Ω_t . Дійсно, $\Omega_t(x) = \mathbf{F}_t(x, \Lambda_t(x))$ і $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = \mathbf{F}(x, -l_t\theta(x)) = x$, тому

$$\mathbf{F}(x, \Lambda_t(x) - l_t\theta(x)) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, -l_t\theta(x)), \Lambda_t(x)) = \mathbf{F}(x, \Lambda_t(x)) = \Omega_t(x).$$

Таким чином $\Omega_t = \varphi_{F,W}(\Lambda_t - l_t\theta) \in Sh(F, W)$. □

Наслідок 5.3.2. *Припустимо, що z є ізольованою особливою точкою поля F , і нехай V — такий зв'язний відкритий окіл точки z , що $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F}) = \{z\}$ і $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$ для деякого $k \geq 0$. Тоді $Sh(F, W) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, W)^k$ для довільного іншого зв'язного відкритого околу $W \subset V$ точки z .*

5.4 Образ відображення зсуву регулярних розширень

Властивість $(E)^l$.

Означення 5.4.1. *Нехай $l \geq 0$ і $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ така точка, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною біля z . Скажемо, що F має **властивість $(E)^l$** в цій точці, якщо для довільного*

- відкритого околу V точки z в M ,
- $S^l = \mathbb{R}^l$ або $\mathbb{R}_+^l$,
- $(S^l, \mathcal{C}^\infty)$ -деформації $\Omega : V \times S^l \rightarrow M$ в $\mathcal{E}(F, V)$, тобто такого $\mathcal{C}^\infty$ -відображення, що $\Omega_\sigma \in \mathcal{E}(F, V)$, $\sigma \in S^l$, та
- $\mathcal{C}^\infty$ -функції зсуву $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω , тобто такої функції, що

$$\Omega(x, \sigma) = \mathbf{F}(x, \Lambda(x, \sigma)), \quad (x, \sigma) \in (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l, \quad (5.9)$$

знайдеться такий окіл $W \subset V \times S^l$ точки $(z, 0)$, що Λ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції $\Lambda : W \rightarrow \mathbb{R}$.

Зауваження 5.4.2. (а) Таким чином, для того, щоб перевірити $(E)^l$ потрібно *гладко розв'язати* рівняння (5.9) відносно Λ в деякому околі точки $(z, 0) \in V \times S^l$ використовуючи умову, що Ω_σ лишає інваріантними орбіти поля F і є локальним дифеоморфізмом в околі кожної точки $x \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$.

(b) З означення випливає, що Λ продовжується до гладкої функції в деякому відкритому околі множини $z \times S^l$.

(c) Властивість $(E)^l$ є властивістю паростка F в точці z .

(d) $(E)^{l'} \Rightarrow (E)^l$ при $l' \geq l$.

Приклад 5.4.3. З тверджень 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2 та леми 3.2.8 випливає, що *векторне поле* $F = \lambda x \frac{\partial}{\partial x}$ на $\mathbb{R}$ та *наступні векторні поля*

$$y \frac{\partial}{\partial x}, \quad (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (-bx + ay) \frac{\partial}{\partial y}, \quad bx \frac{\partial}{\partial x} - by \frac{\partial}{\partial y}$$

на $\mathbb{R}^2$, $\lambda, a, b \neq 0$, мають властивість $(E)^l$ в початку координат 0 на відносно просторі $\mathbb{R}^m$, $m = 1, 2$, для всіх $l \geq 0$.

Доведення. Дійсно, нехай V , Ω та Λ такі як в означенні 5.4.1. Тоді з формул, наведених у вказаних параграфах, випливає, що Ω має C^∞ -функцію зсуву $\Lambda' : V \times S^l \rightarrow \mathbb{R}$. Зокрема, її обмеження на $(V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l$ є також функцією зсуву для Ω .

Якщо F одне з перших трьох векторних полів, то воно не має замкнутих орбіт, а множина $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^m$, то Ω може мати не більше однієї неперервної функції зсуву на $(V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l$. Тому $\Lambda = \Lambda'$ на цій множині, а значить Λ гладко продовжується на $V \times S^l$.

Якщо ж $F(x, y) = bx \frac{\partial}{\partial x} - by \frac{\partial}{\partial y}$, то Λ гладко продовжується на $V \times S^l$ за лемою 3.2.2. Фактично, ця лема виражає властивість $(E)^l$. $\square$

Приклад 5.4.4. З іншого боку, приклад 3.1 та лема 3.1.4 показують, що *векторне поле* $F(x) = x^n \frac{\partial}{\partial x}$ при $n \geq 2$ не задовольняє властивість $(E)^l$ ні для якого l .

Розглянемо гомотопію $\Omega(x, t) = 2xt$. Очевидно, $\Omega_t \in \mathcal{E}(F)$ для всіх $t \in I$. Так як $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ складається з двох незамкнених орбіт поля F , то Ω має єдину функцію зсуву

$$\Lambda : (\mathbb{R} \setminus 0) \times I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що точна формула для Λ залежить від n . Так як $(\Omega_t)'_x \neq 1$, то з прикладу 3.1 випливає, що $\Omega_t \notin Sh(F)$ при $t > 0$, а тому жодна з функцій Λ_t при $t > 0$ не може продовжуватись до $\mathcal{C}^\infty$ -функції на $\mathbb{R}$. Неважко показати, що $\lim_{x \rightarrow 0} \Lambda_t(x) = \infty$ для всіх $t > 0$.

В прикладі 5.4.4 жодна з властивостей $(E)^l$ не виконувалась тому, що $Sh(F) \subsetneq \mathcal{E}_{id}(F)^0$. З іншого боку, наступні дві теореми показують, що умова $(E)^0$ гарантує $Sh(F) = \mathcal{E}_{id}(F)^0$, а умови $(E)^l$ гарантують $(E)^0$ (а отже і $Sh(F) = \mathcal{E}_{id}(F)^0$) для регулярних розширень розмірності $\leq l$.

Теорема 5.4.5. *Нехай $V \subset M$ — така вікрита підмножина, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною в V . Якщо F має властивість $(E)^0$ в кожній точці $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap U$, то $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{id}(F, V)^0$. Зокрема, якщо $V = M$, то $Sh(F) = \mathcal{E}_{id}(F)^0$.*

Доведення. Нехай $h \in \mathcal{E}_{id}(F, V)^0$, тобто існує така гомотопія $\Omega : V \times I \rightarrow M$, що $\Omega_0 = \text{id}_M$, $\Omega_1 = h$ і $\Omega_t \in \mathcal{E}(F)$ для всіх $t \in I$. Нехай $\Lambda_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ функція, яка тотожно дорівнює нулю на V . Тоді Λ_0 є функцією зсуву для Ω_0 , а тому за теоремою 5.1.1 Λ_0 продовжується до неперервної функції зсуву $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω . Тепер з властивості $(E)^0$ для особливих точок поля F випливає, що кожна функція Λ_t продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції на всій множині V , яка буде функцією зсуву для Ω_t , (хоча отримане продовження Λ на $V \times I$ не обов'язково повинно бути навіть неперервним). Зокрема, $h = \Omega_1 = \varphi_{F,V}(\Lambda_1) \in Sh(F, V)$. $\square$

Теорема 5.4.6. *Нехай G (відп. F) — паросток векторного поля на $\mathbb{R}^n$ в точці 0^n (відповідно на $\mathbb{R}^{m+n}$ в точці 0^{m+n}), причому F є регулярним розширенням G . Якщо G має властивість $(E)^{l+n}$ в точці 0^m , то F має властивість $(E)^l$ в точці 0^{m+n} .*

Доведення. Нехай V^m та V^n — відкриті зв'язні околи точок 0^m та 0^n відповідно, а тому $V^{m+n} = V^m \times V^n$ є зв'язним відкритим околom точки 0^{m+n} . Нехай далі $S^l = \mathbb{R}^l$ або $\mathbb{R}_+^l$,

$$\Omega : V^{m+n} \times S^l \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

— таке $\mathcal{C}^\infty$ -відображення, що $\Omega_\sigma \in \mathcal{E}(F, V^{m+n})$ для всіх $\sigma \in S^l$ і

$$\Lambda : (V^{m+n} \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l \rightarrow \mathbb{R}$$

— єдина $\mathcal{C}^\infty$ -функція зсуву для Ω .

Нехай $p_m : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ проекція на перші m координат. Тоді згідно леми 1.2.12 відображення

$$\Psi = p_m \circ \Omega : V^m \times V^n \times S^l \rightarrow \mathbb{R}^m$$

є $(V^n \times S^l, \mathcal{C}^\infty)$ -деформацією в $\mathcal{E}(G, V^m)$, а Λ — є функцією зсуву для Ψ . Тоді за властивістю $(E)^{l+n}$ для 0^m функція Λ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції на деякому околі $W \subset V^m \times V^n \times S^l$ точки $(0^m, 0^n, 0) = (0^{m+n}, 0)$. Це доводить властивість $(E)^l$ для 0^{m+n} . $\square$

Властивість $\text{ESD}(l; d, k)$.

В цьому розділі ми введемо серію властивостей $\text{ESD}(l; d, k)$ для особливих точок поля F , що є більш слабкими ніж $(E)^l$. Властивість $\text{ESD}(0; 1, k)$ гарантує, що $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^k$, в той час як з $\text{ESD}(l; d, k)$ випливає $\text{ESD}(0; d, k)$ для регулярних розширень поля F .

Для $l \geq 0$ нехай $\mathbb{R}_+^l = \{x_l \geq 0\}$ позначає замкнуту верхню півплощину в $\mathbb{R}^l$.

Означення 5.4.7. Припустимо, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є нідє не щільною. Нехай $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$, $0 \leq l < \infty$, $0 \leq d < \infty$ і $0 \leq k \leq \infty$. Скажемо, що F має властивість $\text{ESD}(l; d, k)$ *продовження функцій зсуву відносно k -деформацій* в точці z , якщо виконані наступні умови: нехай

- V — відкритий зв'язний окіл точки z ;

- S^l — або $\mathbb{R}^l$ або $\mathbb{R}_+^l$;
- $\Omega : V \times S^l \times I^d \rightarrow M$ — така $(S^l; I^d, k)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, V)$, що для деякої точки $(\sigma_0, \tau_0) \in S^l \times I^d$ відображення $\Omega_{(\sigma_0, \tau_0)}$ має C^∞ -функцію зсуву α , визначену на всьому V ;
- $\Lambda : (V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l \times I^d \rightarrow \mathbb{R}$ — єдине неперервне продовження α , що є функцією зсуву для Ω , тобто $\Lambda_{(\sigma_0, \tau_0)} = \alpha$;

тоді існує такий окіл $W \subset V \times S^l$ точки (z, σ_0) , що для кожного $\tau \in I^d$ функція Λ_τ гладко продовжується на весь окіл W .

Для $d = 0$ число k не грає ролі, тому в цьому випадку ми позначатимемо відповідну властивість через $\text{ESD}(l; 0, -)$. Відмітимо також, що властивість $\text{ESD}(0; 0, -)$ є тавтологією, а тому ми вважатимемо, що $l + d \geq 1$.

Зауваження 5.4.8. (а) Означення 5.4.7 не вимагає, щоб функція Λ була неперервною на всьому $W \times S^l \times I^d$.

(b) Відмітимо також, що $\text{ESD}(l; d, k)$ є властивістю паростка поля F в точці z , тобто якщо U — відкритий окіл точки z , то F має властивість $\text{ESD}(l; d, k)$ в z тоді і лише тоді, коли обмеження $F|_U$ має цю властивість в точці z .

(c) Теорема 5.2.2 стверджує, що з кожна з її умов (а)-(с) гарантує властивість $\text{ESD}(0; d, k)$ в точці z для всіх $d \geq 0$.

(d) Нехай $0 \leq l \leq l' < \infty$, $0 \leq d \leq d' < \infty$ та $0 \leq k \leq k' \leq \infty$. Тоді мають місце імплікації:

- $(E)^l \Rightarrow \text{ESD}(l; d, k)$,
- $\text{ESD}(l'; d', k) \Rightarrow \text{ESD}(l; d, k')$.

Зокрема, умови $\text{ESD}(1; 0, -)$ та $\text{ESD}(0; 1, \infty)$ є найслабкішими.

Наступні дві теореми аналогічні теоремам 5.4.5 та 5.4.6. Доведення першої з них ми залишаємо читачеві.

Теорема 5.4.9. Припустимо, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є нідє не щільною в V і знайдеться таке $k \geq 0$, що F має властивість $\text{ESD}(0; 1, k)$ в кожній точці $z \in \text{Fix}(\mathbf{F}) \cap V$. Тоді

$$Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k, \quad (5.10)$$

Зокрема, якщо $V = M$, то $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^k$.

Теорема 5.4.10. Нехай G (відн. F) — паросток векторного поля в околі початку координат $0^n \in \mathbb{R}^n$ (відн. $0^{m+n} \in \mathbb{R}^{m+n}$). Припустимо, що F є регулярним розширенням поля G , тобто

$$F(x, y) = (G(x), H(x, y))$$

причому $F(0^{m+n}) = 0$, а тому $G(0^m) = 0$. Якщо G має властивість $\text{ESD}(l + n; d, k)$ в точці 0^m , то F має властивість $\text{ESD}(l; d, k)$ в точці 0^{m+n} .

Доведення. Нехай V^m та V^n — відкриті зв'язні околи точок 0^m та 0^n відповідно. Тоді $V^{m+n} = V^m \times V^n$ є зв'язним відкритим оточом точки 0^{m+n} .

Нехай $S^l = \mathbb{R}^l$ або $\mathbb{R}_+^l$, $(\sigma_0, \tau_0) \in S \times I^d$,

$$\Omega : V^{m+n} \times S^l \times I^d \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

— така $(S^l; I^d, k)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, V^{m+n})$, що

$$\Omega_{(\sigma_0, \tau_0)} = Sh(F, V^{m+n})(\alpha)$$

для деякої функції $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V^{m+n}, \mathbb{R})$ і

$$\Lambda : (V^{m+n} \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l \times I^d \rightarrow \mathbb{R}$$

— єдина неперервна функція зсуву для Ω така, що $\Lambda_{(\sigma_0, \tau_0)} = \alpha$.

Нехай $p_m : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ проекція на перші m координат. Тоді згідно леми 1.2.12 відображення

$$\Psi = p_m \circ \Omega : V^m \times V^n \times S^l \times I^d \rightarrow \mathbb{R}^m$$

є $(V^n \times S^l; I^d, k)$ -деформацією в $\mathcal{E}(G, V^m)$, а Λ — є функцією зсуву для Ψ . Тоді за властивістю $\text{ESD}(l + n; d, k)$ для 0^m існує такий окіл W точки $(0^m, 0^n, \sigma_0)$ в $V^m \times V^n \times S^l$, що для кожної точки $\tau \in I^d$ функція Λ_τ гладко продовжується на весь окіл W . Звідси випливає властивість $\text{ESD}(l; d, k)$ для 0^{m+n} . $\square$

Наступна лема встановлює зв'язок між властивістю $\text{ESD}(\infty; 0, k)$ та збереженням гладкості локальних обернених відображення зсуву.

Лема 5.4.11. *Нехай F — векторне поле на многовиді M , $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ і $k \geq 0$. Припустимо, що існує база топології $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i \in J}$ в точці z , яка складається з D -окілів точки z і така, що для кожного $V \in \mathcal{B}$ виконуються наступні умови:*

- (i) *відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ та $\varphi_{F,\hat{V}}$ для множин V та $\hat{V} = V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ є ін'єктивними, а обернене відображення $(\varphi_{F,V})^{-1} : Sh(F, V) \rightarrow \text{func}(F, V)$ зберігає гладкість (його неперервність відносно яких-небудь топологій не вимагається);*
- (ii) $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k$;

Тоді F має властивість $\text{ESD}(\infty; 0, -)$ в точці z .

Доведення. Нехай U — відкритий окіл точки z , $\Omega : W \times S^l \rightarrow M - (S^l, \mathcal{C}^\infty)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, U)$ і $\Lambda : (U \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l \rightarrow \mathbb{R}$ — така $\mathcal{C}^\infty$ -функція зсуву для Ω , що для деякого $\sigma_0 \in S^l$ функція Λ_{σ_0} гладко продовжується на весь окіл U .

Потрібно показати, що Λ гладко продовжується на деякий окіл $V \subset U \times S^l$ точки (z, σ_0) .

Нехай $V \in \beta$ такий D -окіл точки z , що $V \subset U$. Позначимо через Ω' обмеження Ω на $V \times S^l$, а через Λ' обмеження Λ на $(V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l$. Тоді $\Omega' \in (S^l, \mathcal{C}^k)$ -деформацією в $\mathcal{E}(F, V)$. Так як

$$\Omega'_{\sigma_0} = \varphi_{F,V}(\Lambda'_{\sigma_0}) \in Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^k,$$

то Ω' в дійсності є деформацією в $Sh(F, V)$. Те, що обернене відображення

$(\varphi_{F,V})^{-1}$ зберігає гладкість означає існування єдиної функції зсуву $\Delta : V \times S^l \rightarrow \mathbb{R}$ для Ω .

З іншого боку, за умовою, $\Omega'_\sigma = \varphi_{F,V}(\Lambda'_\sigma)$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Так як обидва відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ та $\varphi_{F,\hat{V}}$ є ін'єктивними, то $\Lambda'_\sigma = \Delta_\sigma$ на $V \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Таким чином, Λ' гладко продовжується навіть на множину $V \times S^l$.

(ii) Нехай $\Omega : W \times S^l \rightarrow M - (S^l, \mathcal{C}^k)$ -деформація в $\mathcal{E}(F, U)$ і $\Lambda : (U \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})) \times S^l \rightarrow \mathbb{R}$ — така $\mathcal{C}^\infty$ -функція зсуву для Ω , що для деякого $\sigma_0 \in S^l$ функція Λ_{σ_0} гладко продовжується на весь окіл U . $\square$

5.5 Висновки

В п'ятому розділі встановлено, що якщо відображення $h \in \mathcal{E}(F, V)$ гомотопне тотожному вкладенню $i_V : V \subset M$, то для заданої гомотопії можна побудувати функцію зсуву на множині регулярних точок з V . Звідси слідує, що $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, якщо V не містить особливих точок поля F , (теорема 5.1.1).

Якщо ж V містить особливі точки, то для того, щоб така функція зсуву деформації гладко продовжувалась на всю множину V потрібно накладати додаткові умови типу гладкої залежності деформації від параметру. Такі достатні умови наведені в теоремі 5.2.2.

Крім того, показано, що, в певному сенсі, властивість $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$ є «локальною», тобто при «правильному зменшенні» V до підмножини $W \subset V$ властивість $Sh(F, W) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, W)^0$ зберігається (лема 5.3.1).

Розділ 6 ВІДКРИТІСТЬ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗСУВУ

Нехай $V \subset M$ — D -підмноговид такий, що $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в V . Тоді $\varphi_{F,V}$ є локально ін'єктивним відображенням. Виникає природне питання: чи буде $\varphi_{F,V} : Sh(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ локальним гомеоморфізмом на свій образ. Так як $\varphi_{F,V}$ є $S^{r,r}$ -неперервним відображенням для кожного $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$, то потрібно навчитись перевіряти $S^{\infty,\infty}$ -відкритість $\varphi_{F,V}$.

Нагадаємо, що в попередньому розділі ми отримали достатні умови, коли $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ для деякого $r \geq 0$. Якщо ж додатково відомо, що $\varphi_{F,V}$ є відкритим на свій образ $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$, то з наслідку 4.2.9 отримаємо, що $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^r$ та $\mathcal{D}_{\text{id}}(F, V)^r$ є або стягнутими або гомотопічно еквівалентним до кола.

Це застосування є головною мотивацією досліджень дисертаційної роботи.

В даному розділі ми даємо достатні умови, за яких відображення зсуву буде $S^{r,s}$ -відкритим на свій образ. Спочатку буде показано, що відкритість відображення зсуву досить перевіряти лише для деякого околу тотожного вкладення $i_V : V \subset M$, (теорема 6.1.2). Далі в §6.2 наводяться приклади потоків, відображення зсуву яких, не є гомеоморфізмом на свій образ. Наступний крок (теорема 6.3.1) дозволяє звести глобальну задачу перевірки відкритості $\varphi_{F,V}$ до сім'ї локальних задач перевірки відкритості φ_{F,V_i} , де $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$ — довільне локально скінченне покриття V . Ця задача знову є важкою, тому ми показуємо, що можна замінити F його обмеженням на довільний окіл W множини V_i (теоре-

ма 6.4.1), за умови, що образ відображення $\varphi_{F|W,V}$ є відкритим в $\varphi_{F,V}$.

Таким чином можна отримуємо локальну підзадачу: перевірити відкритість відображення зсуву для випадку, коли $W = \mathbb{R}^n$, а $V \subset \mathbb{R}^n$ — деякий окіл дочастку координат. Приклади обчислень вже були наведені в розділі 3.

З іншого боку згадані вище додаткова проблема про відкритість $\varphi_{F|W,V}$ в $\varphi_{F,V}$ може бути розв’язана в суто топологічних термінах. В §6.5 ми даємо розв’язуємо цю задачу для випадку, коли $V \subset W$ — достатньо малі околи регулярної точки, а в §6.6 розглядаємо випадок сингулярної точки.

Останній має зв’язок з результатами використовує результатами С. Conley та R. Easton про ізолюючі блоки.

6.1 Відкритість відображення зсуву в околі тотожного відображення

В цьому підрозділі буде показано, що $S^{r,s}$ -відкритість $\varphi_{F,V}$ для деяких $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$ еквівалентна $S^{s,r}$ -неперервності локального оберненого відображення, визначеного *лише* в як завгодно малому околі тотожного вкладення $i_V : V \subset M$ в $Sh(F, V)$.

Означення 6.1.1. Нехай A — група і S — напівгрупа з одиницею e . Тоді **правою дією** S на A називається таке відображення $*$: $A \times S \rightarrow A$, що $\alpha * e = \alpha$ і $\alpha * (f g) = (\alpha * f) * g$ для всіх $\alpha \in A$ та $f, g \in S$. Відображення $\sigma : S \rightarrow A$ називається **схрещеним гомоморфізмом** якщо

$$\sigma(f g) = (\sigma(f) * g) \sigma(g).$$

Припустимо, що F породжує глобальний потік $\mathbf{F}$. Покладемо $S = Sh(F)$ і $A = Sh(F) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. Тоді A є абелевою групою і згідно [70, Eq (8)] S є напівгрупою в $C^\infty(M, M)$, що діє справа на A за правилом:

$$\alpha \circ s : M \xrightarrow{s} M \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}, \quad \alpha \in A, s \in S.$$

Припустимо також, що відображення зсуву $\varphi_F \in \text{ін'єктивним}$, тобто $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$ — є бієкцією. Тоді з [70, Eq (8)] випливає, що обернене відображення

$$\sigma = \varphi_F^{-1} : Sh(F) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

є схрещеним гомоморфізмом, тобто

$$\sigma(f \circ g) = \sigma(f) \circ g + \sigma(g), \quad \forall f, g \in S.$$

Якщо φ_F не є ін'єктивним, то локальне обернене відображення для φ_F , визначене біля $\text{id}_M \in$ “*локальним схрещеним гомоморфізмом*”. Більш того, якщо $\mathbf{F}$ не є глобальним потоком, то $Sh(F)$ є відкритим оточенням нульової функції в $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, тобто “*локальною групою*”.

Відмітимо також, що якби $Sh(F)$ була групою а φ_F^{-1} — гомоморфізмом, то неперервність φ_F^{-1} була б еквівалентною неперервності φ_F^{-1} лише в одиничному елементі id_M , що суттєво спрощує її перевірку. В нашому випадку $Sh(F)$ є лише напівгрупою, φ_F^{-1} — локальним схрещеним гомоморфізмом, а $Sh(F, V)$ — локальною групою. Ми покажемо, що навіть при цих послаблених умовах, неперервність локальних обернених φ_F еквівалентна неперервності локального оберненого до φ_F лише в точці $i_V : V \subset M$.

Теорема 6.1.2. *Нехай $V \subset M$ — D -підмноговид і $r, s \in \bar{\mathbb{N}}_0$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

- (A) *Відображення зсуву $\varphi_{F,V} : Sh(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ є $S^{r,s}$ -відкритим;*
- (B) *Для кожної функції $\alpha \in Sh(F, V)$ існує S^s -окіл $\mathcal{N}_f$ відображення $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$ в $Sh(F, V)$ і таке $S^{s,r}$ -неперервне відображення*

$$\sigma : \mathcal{N}_f \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}),$$

що $\sigma(f) = \alpha$ і $\varphi_{F,V} \circ \sigma = \text{id}(\mathcal{N}_f)$. Іншими словами

$$f(x) = \mathbf{F}(x, \sigma(f)(x)),$$

для $g \in \mathcal{N}_f$ та $x \in V$.

(C) Властивість (B) виконується для нульової функції $\alpha = 0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ та тотожного включення $f = \varphi_{F,V}(0) = i_V : V \subset M$.

Доведення. (A) $\Rightarrow$ (B). Припустимо, що $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V) \in S^{r,s}$ -відкритим. Так як $\varphi_{F,V}$ — локально ін'єктивне відносно топології S^0 , то умова (A) означає, що для кожної функції $\alpha \in Sh(F, V)$ існує такий S^r -відкритий окіл $\mathcal{M}_\alpha$ в $Sh(F, V)$, що

- а) обмеження $\varphi_{F,V}|_{\mathcal{M}_\alpha} : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \varphi_{F,V}(\mathcal{M}_\alpha)$ є бієкцією,
- б) образ $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}_\alpha) \in S^s$ -відкритим в $Sh(F, V)$, тобто $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}_\alpha) = Sh(F, V) \cap \mathcal{N}_f$ для деякого S^s -відкритого околу $\mathcal{N}_f$ $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$ в $\mathcal{C}^\infty(V, M)$,
- с) обернене відображення $\sigma_V = \varphi_{F,V}^{-1} : \varphi_{F,V}(\mathcal{M}_\alpha) \rightarrow \mathcal{M}_\alpha \in S^{s,r}$ -неперервним.

Тоді очевидно, що $\mathcal{N}_f := \varphi_{F,V}(\mathcal{M}_\alpha) = Sh(F, V) \cap \mathcal{N}_f$ та σ_V задовольняють умову (B).

Імплікація (B) $\Rightarrow$ (C) очевидна.

(C) $\Rightarrow$ (A). Досить показати, що для кожної функції $\alpha \in Sh(F, V)$ знайдеться S^r -відкритий окіл $\mathcal{M}_\alpha$ в $Sh(F, V)$, що задовольняє а)-с). Відмітимо, умова (C) означає, що такий окіл $\mathcal{M}_0$ існує для нульової функції 0 .

Для кожної функції $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ покладемо:

$$\mathcal{U}_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^\infty(V, M) : (f(x), \alpha(x)) \in \text{dom}(F), \forall x \in V\}$$

і розглянемо відображення $q_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, M)$ визначене за наступним правилом:

$$q_\alpha(f)(x) = \mathbf{F}(f(x), \alpha(x)), \quad f \in \mathcal{U}_\alpha, \quad x \in V.$$

Легко бачити, що $\mathcal{U}_\alpha \in S^0$ -відкритою підмножиною а $\mathcal{C}^\infty(V, M)$, відображення $q_\alpha \in S^{r,r}$ -неперервним для всіх $r \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Крім того, $i_V \in \mathcal{U}_\alpha$ тоді і лише тоді, коли $\alpha \in Sh(F, V)$.

Лема 6.1.3. Образ відображення q_α співпадає з $\mathcal{U}_{-\alpha}$, а відображення $q_{-\alpha}$ є оберненим до q_α , тобто $q_{-\alpha} = q_\alpha^{-1} : \mathcal{U}_{-\alpha} \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$. Таким чином q_α здійснює $S^{r,r}$ -гомеоморфізм ($\forall r \in \overline{\mathbb{N}}_0$) між S^0 -відкритими множинами $\mathcal{U}_\alpha$ та $\mathcal{U}_{-\alpha}$.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{U}_\alpha$, тобто $(f(x), \alpha(x)) \in \text{dom}(F)$ для всіх $x \in V$. Тоді

$$(q_\alpha(f)(x), -\alpha(x)) = (\mathbf{F}(f(x), \alpha(x)), -\alpha(x)) \in \text{dom}(F),$$

$$q_{-\alpha} \circ q_\alpha(f)(x) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(f(x), \alpha(x)), -\alpha(x)) = \mathbf{F}(f(x), \alpha(x) - \alpha(x)) = f(x).$$

Тому $q_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathcal{U}_{-\alpha}$ і $q_{-\alpha} \circ q_\alpha = \text{id}_{\mathcal{U}_\alpha}$. Заміна α на $-\alpha$ доводить лему. $\square$

Закінчимо доведення теореми 6.1.2. Для кожної функції $\alpha \in Sh(F, V)$ розглянемо наступну підмножину в $Sh(F, V)$:

$$\mathcal{M}_\alpha := (\mathcal{M}_0 \cap \varphi_{F,V}^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) + \alpha) \cap Sh(F, V).$$

Очевидно, що $\mathcal{M}_\alpha \in S^r$ -відкритою в $Sh(F, V)$.

Крім того, $\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$. Дійсно, так як $\alpha \in Sh(F, V)$, то $i_V \in \mathcal{U}_\alpha$. Тому $0 \in \varphi_{F,V}^{-1}(i_V) \subset \varphi_{F,V}^{-1}(\mathcal{U})$ а отже $\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$.

Покажемо, що $\mathcal{M}_\alpha$ задовольняє умови а)-с).

а). Так як обмеження $\varphi_{F,V}|_{\mathcal{M}_0}$ є бієкцією, то тим більше бієкцією є $\varphi_{F,V}|_{\mathcal{M}_\alpha}$.

Умови б) та с) випливають з наступної лема:

Лема 6.1.4. *Нехай $\mathcal{M}'_\alpha \subset \mathcal{M}_\alpha$ — довільна S^r -відкрита підмножина. Тоді $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_\alpha)$ є S^s -відкритим в $Sh(F, V)$.*

Доведення. Покладемо $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}'_\alpha - \alpha$. Тоді $\mathcal{M}'_0 \subset \mathcal{M}_0 \cap \varphi_{F,V}^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ і за умовою б) для $\mathcal{M}_0$ існує така S^s -відкрита підмножина $\mathcal{N}' \subset C^\infty(V, M)$, що

$$\varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_0) = Sh(F, V) \cap \mathcal{N}'.$$

Розглянемо $S^{r,r}$ -гомеоморфізм

$$a_\alpha : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{R}), \quad a_\alpha(\beta) = \alpha + \beta.$$

Він замикає наступну комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'_0 & \xrightarrow{\varphi_{F,V}} & \varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_0) = Sh(F, V) \cap \mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha \\ a_\alpha \downarrow & & \downarrow q_\alpha \\ \mathcal{M}'_\alpha & \xrightarrow{\varphi_{F,V}} & Sh(F, V) \cap q_\alpha(\mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha) \end{array} \quad (6.1)$$

яка означає, що $\mathbf{F}(x, \beta(x) + \alpha(x)) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \beta(x)), \alpha(x))$ для всіх $\beta \in \mathcal{M}_0$ та $x \in V$.

Покажемо, що

$$\varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_\alpha) = Sh(F, V) \cap q_\alpha(\mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha).$$

Дійсно, з (6.1) отримуємо, що $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_\alpha) \subset Sh(F, V) \cap q_\alpha(\mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha)$.

Навпаки, нехай $g \in Sh(F, V) \cap q_\alpha(\mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha)$. Тоді існують такі $\beta \in Sh(F, V)$ і $f \in \mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha$, що

$$g(x) = \mathbf{F}(x, \beta(x)) = \mathbf{F}(f(x), \alpha(x)), \quad \forall x \in V. \quad (6.2)$$

Очевидно, що $f(x) = \mathbf{F}(x, \beta(x) - \alpha(x))$, тобто $f \in Sh(F, V)$, а тому

$$f = \varphi_{F,V}(\beta - \alpha) \in Sh(F, V) \cap \mathcal{N}' \cap \mathcal{U}_\alpha = \varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_0).$$

Таким чином, знайдеться $\gamma \in \mathcal{M}'_0$, можливо відмінна від $\beta - \alpha$, така, що $f = \varphi_{F,V}(\gamma)$. Покладемо $\beta' = \gamma + \alpha$. Тоді $\beta' \in \mathcal{M}'_\alpha$ і

$$g(x) = \mathbf{F}(f(x), \alpha(x)) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \gamma(x)), \alpha(x)) = \mathbf{F}(x, \beta'(x)).$$

Іншими словами, $g = \varphi_{F,V}(\beta') \in \varphi_{F,V}(\mathcal{M}'_\alpha)$. Це доводить лему 6.1.4 і теорему 6.1.2. $\square$

6.2 Приклад, коли відображення зсуву не є відкритим

В цьому параграфі наведено приклади потоків, відображення зсуву яких, не є гомеоморфізмом на свій образ. Наступна лема дає достатні умови не відкритості відображення зсуву:

Лема 6.2.1. *Нехай F — векторне поле на компактному многовиді дотичне до ∂M . Припустимо, що відображення зсуву φ_F поля F є ін'єктивним і будь-яких $r \in \mathbb{N}_0$, W^r -околу $\mathcal{N}$ тотожного відображення id_M , та як завгодно великого $T > 0$ знайдеться $t \in \mathbb{R}$ (розглядуване як постійна функція $t : M \rightarrow \mathbb{R}$)*

таке, що $|t| > T$ і $\mathbf{F}_t = \varphi_F(t) \in \mathcal{N}$. Тоді φ_F не є $W^{r,s}$ -відкритим ні для яких $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Зокрема, φ_F не є гомеоморфізмом на свій образ відносно топологій W^∞ на $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ та $Sh(F)$.

Доведення. Розглянемо наступний W^0 -окіл нульової функції:

$$\mathcal{M}_0 = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : |\alpha(x)| < 1\}.$$

Припустимо, що такий знайдеться W^r -окіл $\mathcal{N}$ тотожного відображення id_M , що $\mathcal{N} \subset \varphi_F(\mathcal{M}_0)$. За умовою, існує таке $t > 1$, що $\varphi_F(t) \in \mathcal{N}$. Так як φ_F є ін'єктивним і $t \notin \mathcal{M}_0$, то $\varphi_F(t) \notin \varphi_F(\mathcal{M}_0)$. Тому $\mathcal{N} \not\subset \varphi_F(\mathcal{M}_0)$. Це означає, що φ_F не є $W^{r,s}$ -відкритим ні для яких $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$. $\square$

Ірраціональний потік. Для простоти розглянемо ірраціональний потік на 2-торі $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Нехай $\mu \in \mathbb{R}$ — довільне ірраціональне число і $\mathbf{F}$ — ірраціональний потік на T^2 , визначений за формулою: $\mathbf{F}(x, y, t) = (x + t, y + t/\mu)$.

Лема 6.2.2. Відображення зсуву $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(T^2, T^2)$ потоку F не є $W^{r,s}$ -відкритим ні для яких $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

Доведення. Відмітимо, що кожна орбіта $\mathbf{F}$ є незамкнутою і всюди щільною в T^2 . Тому φ_F є ін'єктивним відображенням.

Спочатку випишемо формули для метрик, що породжують топології W^r на $\mathcal{C}^\infty(T^2, T^2)$. Нехай $f \in \mathcal{C}^\infty(T^2, T^2)$. Тоді f піднімається до деякого $\mathbb{Z}^2$ -еквіваріантного відображення $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Очевидно, що квадрат $I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ є фундаментальною областю для накриваючого відображення $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$. Визначимо r -норму f за формулою:

$$\|f\|^r = \sum_{j=1,2} \left(\sup_{(x,y) \in I^2} \min(\{|\tilde{f}_j|\}, 1 - \{|\tilde{f}_j|\}) + \sum_{1 \leq i_1+i_2 \leq r} \sup_{(x,y) \in I^2} \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} \tilde{f}_j}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} \right| \right),$$

де $\{t\}$ — дробова частина модуля $t \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо W^r -окіл $\mathcal{N}_\varepsilon^r = \{f \in \mathcal{C}^\infty(T^2, T^2) : \|f - \text{id}_{T^2}\|^r < \varepsilon\}$ тотожного відображення $\text{id}_{T^2} = \varphi_F(0) \in \mathcal{C}^\infty(T^2, T^2)$. Покажемо, що

знайдеться таке як завгодно велике (за модулем) $n \in \mathbb{Z}$, що $\varphi_F(n\mu) = \mathbf{F}_{n\mu} \in \mathcal{N}_\varepsilon^r$.
Тоді наша лема впливатиме з леми 6.2.1.

Відмітимо, що $\mathbf{F}_{n\mu}(x, y) = (x + n\mu, y + n) \equiv (x + n\mu, y)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, тобто $\mathbf{F}_{n\mu}$ є просто “поворотом уздовж першої координати”. Так як це відображення визначене додаванням константи до координат, то з формули для $\|f\|^r$ отримуємо, що

$$\|\mathbf{F}_{n\mu} - \text{id}_{T^2}\|^r = \min(\{|n\mu|\}, 1 - \{|n\mu|\}), \quad \forall r \in \mathbb{N}_0.$$

Зокрема, отриманий вираз не залежить від r .

Так як μ — ірраціональне, то множина $T_\mu = \{\min(\{|n\mu|\}, 1 - \{|n\mu|\})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ є всюди щільною в $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Тому знайдеться таке як завгодно велике (за модулем) $n \in \mathbb{Z}$, що $\|\mathbf{F}_{n\mu} - \text{id}_{T^2}\|^r < \varepsilon$, тобто $\mathbf{F}_{n\mu} \in \mathcal{N}_\varepsilon^r$. $\square$

Ірраціональний потік на заповненому торі. Нехай $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ — одиничний диск в комплексній площині, $T = S^1 \times D^2$ — заповнений тор і μ — ірраціональне число. Визначимо потік на T за формулою: $\mathbf{F}(\phi, z, t) = (\phi + t \bmod 1, e^{2\pi i t/\mu} z)$. Тоді аргументи, аналогічні до леми 6.2.2, показують, що $\mathbf{F}$ задовольняє припущенням леми 6.2.1.

Періодичні лінійні потоки. Для довільних чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ визначимо лінійний потік на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ за формулою:

$$\mathbf{F}(z_1, \dots, z_n, t) = (e^{i\lambda_1 t} z_1, \dots, e^{i\lambda_n t} z_n). \quad (6.3)$$

Очевидно, що замкнений $2n$ -диск D_r радіуса r з центром в початку координат є інваріантним відносно $\mathbf{F}$.

Лема 6.2.3. *Наступні умови для потоку $\mathbf{F}$ еквівалентні:*

- (1) існує таке $\tau > 0$, що $\mathbf{F}_\tau = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$, тобто $\lambda_j \tau \in \mathbb{Z}$ для всіх $j = 1, \dots, n$;
- (2) кожна точка $z \in \mathbb{C}^n$ є або нерухомою або періодичною точкою $\mathbf{F}$;
- (3) знайдеться хоча б одна періодична точка $z = (z_1, \dots, z_n)$, у якої всі координати ненульові.

Потік, що задовольняє одній з цих умов, називатиметься **періодичним**.

Доведення. Очевидно, що $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Нехай $z \in \mathbb{C}^n$ — періодична точка з усіма ненульовими координатами і θ — її період. Тоді $e^{i\lambda_j\theta}z_j = z_j \neq 0$ для всіх $j = 1, \dots, n$. Тому $\lambda_j \cdot \theta/2\pi \in \mathbb{Z}$. $\square$

Лема 6.2.4. Якщо потік $\mathbf{F}$ не є періодичним, то його відображення зсуву φ_F є ін'єктивним, але не є $W^{r,s}$ -відкритим ні для яких $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

Доведення. За лемою 6.2.3 кожна точка $z \in \mathbb{C}^n$ з усіма ненульовими координатами є неперіодичною. Неважко переконатись, що орбіта такої точки є всюди щільною на деякій відкритій підмножині сфери $S_{|x|}^{2n-1} = \partial D_{|x|}$ радіуса $|x|$. Зокрема, ця орбіта є незамкнутою, а тому відображення зсуву φ_F потоку $\mathbf{F}$ — ін'єктивне. Тоді, аналогічно до леми 6.2.2, можна знайти як завгодно велике (за модулем) $t \in \mathbb{R}$ таке, що відображення $\mathbf{F}_t$ є як завгодно близьким до $\text{id}_{\mathbb{R}^{2n}}$ в будь-якій з топологій W^r . $\square$

Потоки на S^{2n} , $n \geq 2$.

Нехай $\mathbb{R}_1^{2n}$ та $\mathbb{R}_2^{2n}$ — дві копії $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Визначимо дифеоморфізм $\eta : \mathbb{R}_1^{2n} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_2^{2n} \setminus \{0\}$ за формулою: $\eta(z) = \frac{z}{\|z\|^2}$, де $\|z\|$ — звичайна Евклідова норма в $\mathbb{R}^{2n}$. Очевидно, що η гладко відображає кожную сферу радіуса r з центром в початку координат 0 на сферу радіуса $1/r$. Склеїмо $\mathbb{R}_1^{2n}$ та $\mathbb{R}_2^{2n}$ за допомогою η . Отриманий простір, очевидно, є $2n$ -сферою.

Відмітимо, що формула (6.3) визначає потоки на $\mathbb{R}_1^{2n}$ та $\mathbb{R}_2^{2n}$, причому наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1^{2n} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{R}_2^{2n} \setminus \{0\} \\ \mathbf{F}_t \downarrow & & \downarrow \mathbf{F}_t \\ \mathbb{R}_1^{2n} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{R}_2^{2n} \setminus \{0\}. \end{array}$$

Тому ці потоки визначають єдиний потік $\mathbf{F}'$ на S^{2n} з двома нерухомими точками. Біль того $\mathbf{F}'$ лінеаризований на картах $\mathbb{R}_1^{2n}$ та $\mathbb{R}_2^{2n}$ в цих точках.

Припустимо, що $\mathbf{F}$ не є періодичним. Тоді знайдеться таке, як завгодно велике, $t \in \mathbb{R}$, що відображення $\mathbf{F}_t$ є як завгодно близьким до $\text{id}_{\mathbb{R}^{2n}}$ в будь-якій з топологій $\mathbf{W}^r$. Отже, $\mathbf{F}'$ задовольняє припущення леми 6.2.1, а тому відображення зсуву φ_F не є $\mathbf{W}^{r,s}$ -відкритим ні для яких $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

6.3 Теорема фрагментації

Нехай F — векторне поле на M дотичне до ∂M . В цьому розділі даються достатні умови відкритості відображення зсуву $\varphi_F : Sh(F) \rightarrow Sh(F)$.

Теорема 6.3.1. *Нехай F — векторне поле на M дотичне до ∂M і таке, що $\text{Fix}(\mathbf{F})$ є ніде не щільною в M . Припустимо, що знайдуться $a \in \mathbb{N}_0$, функція $d : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, локально скінчене покриття $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$ многовиду M D -підмноговидами і скінченна (можливо, порожня) підмножина індексів $\Lambda' \subset \Lambda$ такі, що $\{\text{Int} V_i\}_{i \in \Lambda}$ є також покриттям M , а відображення зсуву $\varphi_{F_{V_i}} : Sh(F_{V_i}) \rightarrow Sh(F_{V_i})$ є $\mathbf{S}^{\infty, \infty}$ -відкритим для $i \in \Lambda'$ і $\mathbf{S}^{r, d(r)}$ -відкритим для всіх $r \geq a$ при $i \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Тоді відображення зсуву $\varphi_F : Sh(F) \rightarrow Sh(F)$ є $\mathbf{S}^{\infty, \infty}$ -відкритим. Якщо $\Lambda' = \emptyset$, то φ_F є $\mathbf{S}^{r, d(r)}$ -відкритим для кожного $r \geq a$.*

Зокрема, якщо $\varphi_F : Sh(F) \rightarrow Sh(F)$ — ін'єктивне відображення, то φ_F є гомеоморфізмом на свій образ відносно топологій $\mathbf{S}^\infty$. В протилежному випадку φ_F є $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням.

Доведення. Так як $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна, то знайдеться така неперервна функція $\delta : M \rightarrow (0, \infty)$, що для кожної періодичної точки x її період θ_x задовольняє співвідношення: $\delta(x) < 3\theta_x$.

Нехай $\alpha \in Sh(F)$, $r \geq a$, d^r — метрика на многовиді r -струменів $J^r(M, \mathbb{R})$, $\nu : M \rightarrow (0, 1)$ — строго додатна неперервна функція така, що $\nu < \delta$, і

$$\mathcal{M} := \{\beta \in Sh(F) \mid d^r(j^r \alpha(x), j^r \beta(x)) < \nu(x), \forall x \in M\}$$

— базисний $\mathbf{S}^r$ -окіл α , де $j^r \beta(x)$ позначає r -струмінь β в x . Тоді обмеження φ_F

на $\mathcal{M}$ є ін'єктивним, [70, Pr. 14]. Покажемо, що образ $\varphi_F(\mathcal{M})$ цього околу є S^∞ -відкритою множиною в $Sh(F)$, причому, якщо $\Lambda' = \emptyset$, то $\varphi_F(\mathcal{M})$ є навіть $S^{d(r)}$ -відкритим в $Sh(F)$. Це доведе нашу теорему 6.3.1.

Для кожного $i \in \Lambda$ розглянемо наступний S^r -окіл

$$\mathcal{M}_i := \{\beta \in Sh(F_{V_i}) : d^r(j^r \alpha(x), j^r \beta(x)) < \nu(x), \forall x \in V_i\} \quad (6.4)$$

обмеження $\alpha|_{V_i}$ функції α на V в $Sh(F_{V_i})$. Тоді з умови відкритості $\varphi_{F_{V_i}}$ випливає, що

$$\varphi_{F_{V_i}}(\mathcal{M}_i) = Sh(F_{V_i}) \cap \mathcal{N}_i,$$

де $\mathcal{N}_i$ деяка підмножина в $\mathcal{C}^\infty(V_i, M)$, що є S^∞ -відкритою для $i \in \Lambda'$ і $S^{d(r)}$ -відкритою для $i \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Більш того, обмеження $\varphi_{F_{V_i}}$ на $\mathcal{M}_i$ є ін'єктивним.

Нехай $p_i : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V_i, \mathbb{R})$ і $q_i : \mathcal{C}^\infty(M, M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V_i, M)$ — відображення “обмеження на V_i ”. Тоді має місце наступна комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} Sh(F) & \xrightarrow{\varphi_F} & Sh(F) \\ p_i \downarrow & & \downarrow q_i \\ Sh(F_{V_i}) & \xrightarrow{\varphi_{F_{V_i}}} & Sh(F_{V_i}) \end{array} \quad (6.5)$$

За означенням φ_F та $\varphi_{F_{V_i}}$ сюр'єктивні. Легко бачити, що q_i є також сюр'єктивним. Дійсно, з означення $Sh(F)$ і $Sh(F_{V_i})$ та з умови, що $V_i \in D$ -підмноговином, впливає, що кожна функція $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ продовжується до деякої функції $\bar{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Більш того, якщо $\sigma \in Sh(F_{V_i})$, то можна вважати, що $\bar{\sigma} \in Sh(F)$. Тому $p_i(Sh(F)) = Sh(F_{V_i})$, а значить q_i є відображенням “на”.

Очевидно, що

$$\mathcal{M} = \bigcap_{i \in \Lambda} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i).$$

Покладемо

$$\mathcal{N} := \bigcap_{i \in \Lambda} q_i^{-1}(\mathcal{N}_i). \quad (6.6)$$

Так як $\{V_i\}_{i \in \Lambda}$ є локально скінченим покриттям і Λ' — скінчена множина, то з [70, Lm. 18] впливає, що $\mathcal{N}$ є S^∞ -відкритою в $\mathcal{C}^\infty(M, M)$ множиною і навіть $S^{d(r)}$ -відкритою якщо $\Lambda' = \emptyset$.

Для завершення доведення теореми, покажемо, що

$$\varphi_F(\mathcal{M}) = Sh(F) \cap \mathcal{N}. \quad (6.7)$$

З (6.5) та (6.6) випливає, що $\varphi_F(\mathcal{M}) \subset Sh(F) \cap \mathcal{N}$. Навпаки, нехай $g \in Sh(F) \cap \mathcal{N}$. Тоді $g|_{V_i} = q_i(g) \in Sh(F_{V_i}) \cap \mathcal{N}_i = \varphi_{F_{V_i}}(\mathcal{M}_i)$ для всіх $i \in \Lambda$ і $g = \varphi_F(\beta')$ для деякої функції $\beta' \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Потрібно знайти (можливо іншу) функцію $\beta \in \mathcal{M}$ таку, що $g = \varphi_F(\beta)$. Так як обмеження $\varphi_{F_{V_i}}$ на $\mathcal{M}_i$ — ін'єктивне, то $g|_{V_i} = \varphi_{F_{V_i}}(\beta_i)$ для єдиної функції $\beta_i \in \mathcal{M}_i$.

Залишається довести, що $\beta_i = \beta_j$ на $V_i \cap V_j$ для будь-яких $i, j \in \Lambda$. Так як $\{\text{Int}V_i\}_{i \in \Lambda}$ є також покриттям M , то сім'я функцій $\{\beta_i\}_{i \in \Lambda}$ визначатиме єдину гладку функцію $\beta \in \bigcap_{i \in \Lambda} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}$ таку, що $\beta|_{V_i} = \beta_i$ і $\varphi_F(\beta) = g$. Це доведе (6.7) і нашу теорему.

Нехай $x \in \text{Int}V_i \cap \text{Int}V_j$ для деяких $i, j \in \Lambda$. Тоді $g(x) = \mathbf{F}(x, \beta_i(x)) = \mathbf{F}(x, \beta_j(x))$.

Якщо x є неперіодичною регулярною точкою, то $\beta_i(x) = \beta_j(x)$.

Якщо x — періодична періоду θ_x , то $\beta_i(x) - \beta_j(x) = b\theta_x$ для деякого $b \in \mathbb{Z}$. Але $|\beta_i(x) - \beta_j(x)| \leq |\alpha(x) - \beta_i(x)| + |\alpha(x) - \beta_j(x)| < 2\delta(x) < \theta_x$, а значить $b = 0$.

Таким чином, $\beta_i = \beta_j$ на $(\text{Int}V_i \cap \text{Int}V_j) \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$. Так як $\text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна, то $\beta_i = \beta_j$ на $V_i \cap V_j$. □

6.4 Заміна M відкритою множиною

Теорема 6.3.1 зводить перевірку відкритості відображення зсуву до відкритості сім'ї відображень зсуву $\{\varphi_{F_{V_i}}\}$, де $\{V_i\}$ — довільне локально скінченне покриття M D -підмноговидами. Мета цього розділу — “локалізувати” перевірку відкритості $\varphi_{F,V}$ заміною M на деякий відкритий окіл W множини V .

Нехай F — векторне поле на M дотичне до ∂M , $W \subset M$ — відкрита зв'язна підмножина і $\mathbf{F}_W : W \times \mathbb{R} \supset \text{dom}(F_W) \rightarrow W$ — локальний потік породжений обмеженням $F|_W$ поля F на W . Тоді $\text{dom}(F_W) \subset \text{dom}(F) \cap (W \times \mathbb{R})$ і $\mathbf{F} =$

$\mathbf{F}_W$ на $\text{dom}(F_W)$. Очевидно також, що для довільного D -підмноговиду $V \subset W$ множина $Sh(F, W, V) \in \mathbf{S}^0$ -відкритою підмножиною в $Sh(F, V)$, а відповідне відображення зсуву $\varphi_{F,W,V}$ потоку $\mathbf{F}_W$ співпадає з $\varphi_{F,V}$ на $Sh(F, W, V)$, тобто

$$\varphi_{F,W,V} = \varphi_{F,V}|_{Sh(F,W,V)} : Sh(F, W, V) \rightarrow Sh(F, W, V) \subset Sh(F, V). \quad (6.8)$$

Наступна теорема характеризує відкритість $\varphi_{F,V}$ через відкритість $\varphi_{F,W,V}$.

Теорема 6.4.1. *Нехай $V \subset W$ — D -підмноговид і $r, s \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Тоді наступні умови еквівалентні (A)-(C):*

- (A) *Відображення зсуву $\varphi_{F,V} \in \mathbf{S}^{r,s}$ -відкритим;*
- (B) *Відображення зсуву $\varphi_{F,W,V} \in \mathbf{S}^{r,s}$ -відкритим, а його образ $Sh(F, W, V) \in \mathbf{S}^s$ -відкритою підмножиною в $Sh(F, V)$, тобто знайдеться така $\mathbf{S}^s$ -відкрита підмножина $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}^\infty(V, W)$, що*

$$Sh(F, V) \cap \mathcal{N} = Sh(F, W, V).$$

- (C) *Відображення зсуву $\varphi_{F,W,V} \in \mathbf{S}^{r,s}$ -відкритим і знайдеться такий $\mathbf{S}^s$ -окіл $\mathcal{N}$ тотожного включення $i_V : V \subset W$ в $\mathcal{C}^\infty(V, W)$, що*

$$Sh(F, V) \cap \mathcal{N} \subset Sh(F, W, V).$$

Доведення. (A) $\Rightarrow$ (B). З того, що $Sh(F, W, V) \in \mathbf{S}^0$ -відкритою підмножиною в $Sh(F, V)$, а $\varphi_{F,V} \in \mathbf{S}^{r,s}$ -відкритим відображенням, випливає, що обмеження $\varphi_{F,V}|_{Sh(F,W,V)} = \varphi_{F,W,V}$ також $\in \mathbf{S}^{r,s}$ -відкритим, а його образ $Sh(F, W, V) \in \mathbf{S}^s$ -відкритою множиною в $Sh(F, V)$.

Імплікація (B) $\Rightarrow$ (C) очевидна.

(B) $\Rightarrow$ (A). Припустимо, що $\varphi_{F,W,V} \in \mathbf{S}^{r,s}$ -відкритим. Тоді з (B) теореми 6.1.2 випливає, що знайдеться $\mathbf{S}^s$ -окіл $\mathcal{U}$ тотожного включення $i_V : V \subset W$ в $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ і $\mathbf{S}^{s,r}$ -неперервне відображення

$$\sigma : Sh(F, V) \supset Sh(F, W, V) \supset \mathcal{U} \cap Sh(F, W, V) \xrightarrow{\sigma} Sh(F, W, V) \subset Sh(F, V),$$

яке є оберненим до $\varphi_{F,W,V}$, тобто $\varphi_{F,W,V} \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{U}'}$, де $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap Sh(F, W, V)$.

Так як $Sh(F, V) \cap \mathcal{N} \subset Sh(F, W, V)$ і $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ є S^0 -відкритою множиною в $\mathcal{C}^\infty(V, M)$, то $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}' \cap \mathcal{N} \in S^s$ -околом $i_V : V \subset M$ в $\mathcal{C}^\infty(V, M)$. Крім того, $\varphi_{F,V}$ співпадає з $\varphi_{F,W,V}$ на $Sh(F, W, V)$. Тому σ є також локальним оберненим до $\varphi_{F,V}$ на $\mathcal{U}''$. Тоді знову з (В) теореми 6.1.2 випливає, що $\varphi_{F,V} \in S^{r,s}$ -відкритим відображенням. $\square$

Підкреслимо, що в цій теоремі W є довільним відкритим околом V .

6.5 Відкритість $Sh(F, W, V)$ в $Sh(F)$. Регулярний випадок

Нехай z — регулярна точка поля F , тобто $F(z) \neq 0$. В цьому розділі даються необхідні і достатні умови для $W^{r,r}$ -відкритості відображення зсуву $\varphi_{F,V}$, де V як завгодно малий D -оکیل точки z , див. теорему 6.5.2. В якості наслідку ми отримаємо наступну теорему:

Теорема 6.5.1. *Нехай z — регулярна точка F , яка задовольняє одну з наступних умов:*

- (а) z є неперіодичною і нерекурентною;
- (б) z є періодичною і паросток в точці z **відображення першого повернення Пуанкаре** $R : (B, z) \rightarrow (B, z)$ є періодичним;
- (с) z є періодичною і дотичне відображення $T_z R : T_z B \rightarrow T_z B$ має хоча б одне власне значення λ таке, що $|\lambda| \neq 1$.

Тоді для довільного зв'язного D -околу V точки z відповідне відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ поля F є $W^{r,r}$ -відкритим для кожного $r \geq 1$. Крім того, якщо z задовольняє одну з умов (а) або (б), то $\varphi_{F,V}$ є також $W^{0,0}$ -відкритим.

Так як z є регулярною точкою F , то знайдуться такі $\varepsilon > 0$, оکیل W' точки z і дифеоморфізм $\eta : W' \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times (-4\varepsilon, 4\varepsilon)$, що в координатах (y, s) на W' , індукованих η , потік $\mathbf{F}$ задається наступною формулою: $\mathbf{F}((y, s), t) = (y, s + t)$, як тільки $s, s + t \in (-4\varepsilon, 4\varepsilon)$. Називатимемо $W' - 4\varepsilon$ -трубною потоку в точці z ,

див. Рис. 6.5.1.

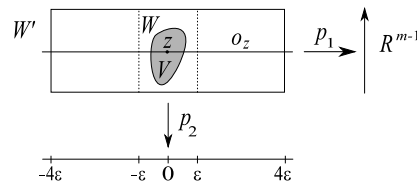


Рис. 6.5.1: Трубка потоку

Нехай $W = \eta^{-1}(\mathbb{R}^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \subset W'$ — “центральна” ε -трубка в точці z . Для кожного D -підмноговиду $V \subset W$ позначимо

$$\mathcal{U}_V = \{\alpha \in Sh(F, V) : \varphi_{F,V}(\alpha)(V) \subset W\}. \quad (6.9)$$

Тоді $Sh(F, W, V) \subset \mathcal{U}_V$ і $\varphi_{F,V}(\mathcal{U}_V) = Sh(F, V) \cap \mathcal{C}^\infty(V, W) \in W^0$ -околом i_V в $Sh(F, V)$.

Нехай $p_1 : W' \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ та $p_2 : W' \rightarrow (-4\varepsilon, 4\varepsilon)$ — стандартні проекції. Тоді можна визначити відображення $P_1 : \mathcal{U}_V \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^{m-1})$ і $P_2 : \mathcal{U}_V \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, (-\varepsilon, \varepsilon))$ за наступними формулами:

$$\begin{aligned} P_1(\alpha) &= p_1 \circ \varphi_{F,V}(\alpha) : V \xrightarrow{\varphi_{F,V}(\alpha)} W \cong \mathbb{R}^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^{m-1}, \\ P_2(\alpha) &= p_2 \circ \varphi_{F,V}(\alpha) : V \xrightarrow{\varphi_{F,V}(\alpha)} W \cong \mathbb{R}^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{p_2} (-\varepsilon, \varepsilon), \end{aligned}$$

для $\alpha \in \mathcal{U}_V$. Таким чином $\varphi_{F,V}(\alpha) = (P_1(\alpha), P_2(\alpha))$.

Теорема 6.5.2. *Нехай $V \subset W$ — зв’язний компактний D -підмноговид і $0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ — нульова функція. Тоді виконуються наступні умови.*

- (А) *Відображення P_1 є локально постійне відносно топології W^0 на $\mathcal{U}_V$, а його образ $P_1(\mathcal{U}_V) \subset \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^{m-1})$ є не більш ніж злічений.*
- (В) *Відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ є $W^{r,r}$ -відкритим тоді і тільки тоді, коли $P_1(0)$ є ізольованою точкою в $P_1(\mathcal{U}_V)$ в топології W^r .*

Доведення. (А). Для доведення нам потрібна наступна лема:

Лема 6.5.3. *Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{U}_V$. Тоді виконується одна з наступних умов:*

- (i) $|\alpha(x) - \beta(x)| < 2\varepsilon$ для всіх $x \in V$,
- (ii) $\alpha(x) - \beta(x) > 6\varepsilon$ для всіх $x \in V$.
- (iii) $\beta(x) - \alpha(x) > 6\varepsilon$ для всіх $x \in V$.

Більш того, з (i) випливає, що

$$(iv) \quad P_1(\beta) = P_1(\alpha) \quad i \quad P_2(\beta) = P_2(\alpha) + \beta - \alpha.$$

Доведення. Розглянемо наступні три відкритих попарно диз'юнктних підмножини в V .

$$K_1 = \{x \in V : |\alpha(x) - \beta(x)| < 2\varepsilon\},$$

$$K_2 = \{x \in V : \alpha(x) - \beta(x) > 6\varepsilon\},$$

$$K_3 = \{x \in V : \beta(x) - \alpha(x) > 6\varepsilon\}.$$

Нехай $x \in V$ така точка, що $|\beta(x) - \alpha(x)| \geq 2\varepsilon$, тобто $x \notin K_1$. Так як W є центральною ε -трубною в 4ε -трубці, і

$$\varphi_{F,V}(\alpha)(V) \cup \varphi_{F,V}(\beta)(V) \subset W,$$

то $|\beta(x) - \alpha(x)| > 6\varepsilon$, тобто $x \in K_2 \cup K_3$. Таким чином $V = K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Так як V — зв'язний, а K_1 , K_2 та K_3 — відкриті і попарно диз'юнктні, то V співпадає з однією з цих множин.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Позначимо $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$, $g = \varphi_{F,V}(\beta)$ і $\tau(x) = \beta(x) - \alpha(x)$. Тоді

$$g(x) = \mathbf{F}(x, \beta(x)) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x, \alpha(x)), \beta(x) - \alpha(x)) = \mathbf{F}(f(x), \tau(x)) \quad (6.10)$$

для всіх $x \in V$. Припустимо, що $|\tau| < 2\varepsilon$ на V . Нагадаємо, що $\mathbf{F}(y, s; t) = (y, s + t)$, як тільки $s, t, s + t \in (-4\varepsilon, 4\varepsilon)$ і $y \in \mathbb{R}^{m-1}$. Так як $|P_2(\alpha)|, |P_2(\beta)| < \varepsilon$, то $|P_2(\alpha) + \tau| < 3\varepsilon$ і

$$(P_1(\beta), P_2(\beta)) = g \stackrel{(6.10)}{=} \mathbf{F}(P_1(\alpha), P_2(\alpha); \tau) = (P_1(\alpha), P_2(\alpha) + \tau).$$

Тому $P_1(\beta) = P_1(\alpha)$ і $P_2(\beta) = P_2(\alpha) + \beta - \alpha$. □

Наслідок 6.5.4. Визначимо наступне відношення **еквівалентності** на $\mathcal{U}_V$: $\alpha \sim \beta$ тоді і тільки тоді, коли $|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$. Очевидно, що кожен клас з фактор-простору $\mathcal{U}_V / \sim \in W^0$ -відкритим. Крім того, з (iv) лема 6.5.3 випливає, що відображення P_1 коректно визначене на $\mathcal{U}_V / \sim$. Тому P_1 є локально постійним відображенням.

Відмітимо, що існує природний **строгий порядок** “ $>$ ” на $\mathcal{U}_V / \sim$: якщо $A, B \in \mathcal{U}_V / \sim$, причому $A \neq B$, то покладемо $A > B$ тоді і лише тоді, коли $\alpha - \beta > 6\varepsilon$ на V для деяких $\alpha \in A$ і $\beta \in B$. Тому $\mathcal{U}_V / \sim$ має не більше ніж злічену кількість елементів, а значить образ $P_1(\mathcal{U}_V)$ також не більше ніж злічений.

Доведення. Досить показати, що означення порядку “ $>$ ” не залежить від вибору α та β . Нехай $\alpha' \in A$ і $\beta' \in B$ — інші функції. Тоді

$$\alpha' - \beta' = (\alpha' - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - \beta') > -2\varepsilon + 6\varepsilon - 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Звідси, за лемою 6.5.3, $\alpha' - \beta' > 6\varepsilon$. □

Цей наслідок доводить твердження (A) теореми 6.5.2.

(B). Нехай $A_0 \in \mathcal{U}_V / \sim$ — клас еквівалентності, що містить нульову функцію 0, тобто $A_0 = \{\alpha \in \mathcal{U}_V : |\alpha| < 2\varepsilon\}$. Тоді очевидно, що $A_0 = Sh(F, W, V)$, а отже $Sh(F, W, V) = \varphi_{F,W,V}(A_0) = \varphi_{F,V}(A_0)$. Таким чином ми отримуємо наступну комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccccc} A_0 = Sh(F, W, V) & \hookrightarrow & \mathcal{U}_V & \hookrightarrow & Sh(F, V) \\ \downarrow \varphi_{F,W,V} = \varphi_{F,V} & & \downarrow \varphi_{F,V} & & \downarrow \varphi_{F,V} \\ \varphi_{F,V}(A_0) = Sh(F, W, V) & \hookrightarrow & \varphi_{F,V}(\mathcal{U}_V) = Sh(F, V) \cap \mathcal{C}^\infty(V, W) & \hookrightarrow & Sh(F, V) \\ \downarrow p_1^* & & \downarrow p_1^* & & \\ P_1(A_0) & \hookrightarrow & \text{im} P_1 & & \end{array}$$

Лема 6.5.5. Образ $Sh(F, W, V)$ є W^r -відкритим в $Sh(F, V)$ для деякого $r \in \mathbb{N}_0$ тоді і лише тоді, коли $P_1(0) = P_1(A_0)$ є ізольованою точкою образу $\text{im} P_1 = P_1(\mathcal{U}_V) \subset \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^{m-1})$ в топології W^r .

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $P_1(0)$ є ізольованою точкою в $\text{im}P_1$ в топології W^r . Тоді ця точка $P_1(0)$ є W^r -відкритою множиною в $\text{im}P_1$. Так як $p_1^* - W^{r,r}$ -неперервне, то $Sh(F, W, V) = \varphi_{F,V}(A_0) \in W^r$ -відкритим в множині $\varphi_{F,V}(\mathcal{U}_V)$, яка, в свою чергу, є W^r -відкритою в $Sh(F, V)$. Тому $Sh(F, W, V)$ є W^r -відкритим в $Sh(F, V)$.

Достатність. Припустимо, що $P_1(0)$ не є ізольованою точкою в $\text{im}P_1$ в топології W^r . Ми побудуємо таку послідовність функцій $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, що

- (i) $P_1(\beta_i) \neq P_1(0)$, а
- (ii) послідовність $\{\varphi_{F,V}(\beta_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ збігається до тотожного вкладення $i_V : V \subset M$ в топології W^r .

З (i) тоді випливатиме, що $\varphi_{F,V}(\beta_i) \notin Sh(F, W, V) = \varphi_{F,V}(A_0)$ і, зокрема, $\beta_i \notin A_0 = Sh(F, W, V)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Крім того, з (ii) ми отримаємо, що $Sh(F, W, V) = \varphi_{F,W,V}(A_0)$ не є W^r -околом i_V в $Sh(F, V)$, а отже $Sh(F, W, V)$ не є W^r -відкритим в $Sh(F, V)$.

Так як $P_1(0)$ не є ізольованою точкою в $\text{im}P_1$, то знайдеться така послідовність класів $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_V / \sim$, відмінних від A_0 , що її образ $\{P_1(A_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ збігається до $P_1(A_0)$ в топології W^r .

Легко бачити, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує така функція $\beta_i \in A_i$, що $P_2(\beta_i)(x, s) = P_2(0)(x, s) = s$. Дійсно, візьмемо довільну $\beta'_i \in A_i$ і покладемо $\beta_i = \beta'_i - P_2(\beta'_i)$.

Покажемо, що послідовність $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ задовольняє умови (i) та (ii). Умова (i) випливає з того, що $P_1(\beta_i) = P_1(A_i) \neq P_1(A_0)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Більш того, ми маємо, що $P_2(\beta_i) = P_2(0) = p_2 \circ i_V$ і $\{P_1(\beta_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^{m-1})$ збігається до $P_1(0) = p_1 \circ i_V$ в топології W^r . Тому $\{\varphi_{F,V}(\beta_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ збігається до i_V в цій же топології, що доводить (ii). $\square$

Лема 6.5.6. *Відображення $\varphi_{F,W,V}$ є $W^{r,r}$ -відкритим для кожного $r \geq 0$.*

Доведення. Відмітимо, що

$$Sh(F, W, V) = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) : |\alpha(y, s)| < \varepsilon, |s + \alpha(y, s)| < \varepsilon\},$$

i

$$\varphi_{F,W,V}(\alpha)(y, s) = (y, \alpha(y, s) + s).$$

Тому

$$Sh(F, W, V) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(V, W) : p_1 \circ f(y, s) = y, |p_2 \circ f| < \varepsilon\},$$

а обернене відображення $\varphi_{F,W,V}^{-1} : Sh(F, W, V) \rightarrow Sh(F, W, V)$ визначається за наступною формулою: $\varphi_{F,W,V}^{-1}(f)(y, s) = p_2 \circ f(y, s) - s$. Очевидно, що $\varphi_{F,W,V}^{-1} \in W^{r,r}$ -неперервним для всіх $r \in \bar{\mathbb{N}}_0$. Це означає, що $\varphi_{F,W,V} \in W^{r,r}$ -відкритим. $\square$

Тепер твердження (В) випливає з 6.5.5, 6.5.6, та твердження (В) теореми 6.4.1. Теорему 6.5.2 доведено. $\square$

Періодичний випадок. Нехай z — періодична точка F . Покажемо, що для достатньо малої трубки потоку в цій точці *образи класів $\mathcal{U}_V / \sim$, визначені в 6.5.4 можна описати в термінах відображення першого повернення орбіти*, див (6.12).

Нехай θ — період точки z , $B \subset M$ — відкритий $(m-1)$ -диск, що трансверсально перетинає орбіту o_z в точці z і $R : (B, z) \rightarrow (B, z)$ — паросток відображення першого повернення. Зафіксуємо $\varepsilon < \theta/5$ і розглянемо 4ε -трубку $\eta : W' \rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times (-4\varepsilon, 4\varepsilon)$ потоку поля F в точці z . Зменшуючи W' , можна також вважати, що

$$o_z \cap W' = \mathbf{F}(z \times (-4\varepsilon, 4\varepsilon)), \quad (6.11)$$

$B \subset W$ і, що диск B є трансверсальним до всіх орбіт в W' . Звідси випливає, що обмеження $p_1|_B : W' \supset B \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ є дифеоморфізмом. Розглянемо відображення:

$$d = (p_1|_B)^{-1} \circ p_1 : W \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^{m-1} \xrightarrow{(p_1|_B)^{-1}} B.$$

Очевидно, що d зберігає першу координату, тобто $p_1 = p_1 \circ d : W \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$.

Нехай $W \subset W'$ — “центральна” ε -трубка в точці z , $V \subset W$ — зв’язний D -окіл точки z і A — деякий клас в $\mathcal{U}_V / \sim$. Тоді з (6.11) випливає, що знайдеться єдине $k \in \mathbb{Z}$ таке, що $|\alpha(z) - k\theta| < \varepsilon$ для кожної функції $\alpha \in A$ і

$$P_1(A) = p_1 \circ R^k \circ d : V \xrightarrow{d} B \xrightarrow{R^k} B \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^{m-1}. \quad (6.12)$$

Доведення теореми 6.5.1. За теоремою 6.5.2 досить знайти таку 4ε -трубку W' в точці z , що для будь-якого зв’язного D -околу V точки z , що міститься в “центральної” ε -трубці W , образ $P_1(0)$ є ізольованою точкою в $P_1(\mathcal{U}_V)$ в топології W^r , де $r \geq 0$ у випадках (а) і (б), та $r \geq 1$ у випадку (с).

(а). Припустимо, що z є неперіодичною і нерекурентною. Тоді знайдеться $\varepsilon > 0$ і 4ε -трубка W' поля F в точці z такі, що $\mathbf{F}(z, t) \in W'$ тоді і тільки тоді, коли $|t| < 4\varepsilon$. Нехай $W \subset W'$ — “центральна” ε -трубка і $V \subset W$ — зв’язний D -підмноговид. Тоді з леми 6.5.3 випливає, що існує лише єдиний клас еквівалентності $\sim$. Тому $\text{im} P_1 = P_1(0)$, а значить $P_1(0)$ є ізольованою точкою в $\text{im} P_1$ в будь-якій топології W^r .

Нехай тепер z — періодична точка, B — відкритий $(m-1)$ -диск, що трансверсально перетинає орбіту o_z в точці z , $R : (B, z) \rightarrow (B, z)$ — паросток відображення першого повернення. Нехай також W' , W і V позначають ті ж самі множини, що і в §6.5.

(б). Якщо паросток R в z є періодичним деякого періоду q , то можна вважати, що знайдеться такий відкритий окіл E точки z в B , що $R(E) = E$ і $d(V) \subset E$. Тоді з (6.12) випливає, що образ $\text{im} P_1$ є скінченним і складається з q точок. Тому $P_1(0)$ є ізольованою точкою в $\text{im} P_1$ в будь-якій топології W^r .

(с). Припустимо, що дотичне відображення $T_z R : T_z B \rightarrow T_z B$ має таке власне значення λ , що $|\lambda| \neq 1$. Нехай $v \in T_z B \subset T_z V$ — ненульовий власний вектор, що відповідає λ . Тоді $T_z R^k(v) = \lambda^k v$. Розглянемо дотичне відображення $T_z p_1 : T_z B \rightarrow T_0 \mathbb{R}^{m-1}$ до p_1 в точці z і позначимо $u = T_z p_1(v)$. Тоді для кожного класу

$A \in \mathcal{U}_V / \sim$, що відповідає деякому $k \in \mathbb{Z}$ ми маємо, що

$$T_z(P_1(A)) \stackrel{(6.12)}{=} T_z(p_1 \circ R^k \circ d)(v) = \lambda^k u.$$

Так як $|\lambda| \neq 1$, то, очевидно, що $P(0)$ є ізольованою точкою в $\text{im} P_1$ в будь-якій з топологій W^r ($r \geq 1$). $\square$

6.6 Відкритість $Sh(F, W, V)$ в $Sh(F)$. Сингулярний випадок

Нехай $W \subset M$ — відкрита підмножина і $V \subset W$ — D -підмноговид. Аналогічно до (6.9) покладемо: $\mathcal{U}_V = \{\alpha \in Sh(F, V) : \varphi_{F,V}(\alpha)(V) \subset W\}$.

Тоді $Sh(F, W, V) \subset \mathcal{U}_V$, а образ

$$\varphi_{F,V}(\mathcal{U}_V) = Sh(F, V) \cap \mathcal{C}^\infty(V, W) \quad (6.13)$$

є S^0 -відкритим околom i_V в $Sh(F, V)$. В цьому розділі дається достатня умова для того, щоб $Sh(F, W, V) = \mathcal{U}_V$. Тоді з (6.13) випливатиме, що перетин

$$Sh(F, W, V) := \varphi_{F,V}(Sh(F, W, V)) = \varphi_{F,V}(\mathcal{U}_V) = Sh(F, V) \cap \mathcal{C}^\infty(V, W) \quad (6.14)$$

є S^0 -відкритим в $Sh(F, V)$.

Означення 6.6.1. Нехай $V \subset W$ — підмножина. Скажемо, що пара (W, V) має властивість **регулярного перетину межі** (р.п.м.), якщо для довільних $x \in V$, $a \in \mathbb{R}$ і $T > 1$ таких що

- $\mathbf{F}(x, \tau a) \in W$ для $\tau \in [0, 1) \cup \{T\}$, але
- $\mathbf{F}(x, a) \in \text{Fr}(W) = \overline{W} \setminus W$,

знайдеться таке $\tau' \in (1, T)$, що $\mathbf{F}(x, \tau' a) \notin \overline{W}$, див. Рис. 6.6.1a).

Грубо кажучи, властивість р.п.м. означає, що якщо орбіта o_x для деякого $x \in V$ виходить з W на деякий час і потім повертається назад в W , то за цей час o_x також повинна вийти з замикання $\overline{W}$. Наприклад пара (W, V) , зображена на Рис. 6.6.1b), не задовольняє р.п.м. Наступна лема є основним наслідком

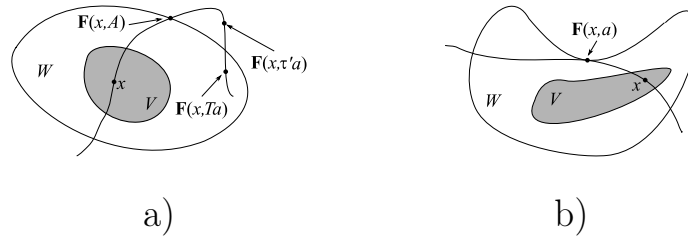


Рис. 6.6.1

властивості р.п.м.:

Лема 6.6.2. Нехай $z \in W$ — сингулярна точка F , тобто $F(z) = 0$, і $V \subset W$ — такий зв'язний D -окіл точки z , що пара (W, V) має властивість р.п.м. Тоді $Sh(F, W, V) = \mathcal{U}_V$.

Таким чином, якщо відображення зсуву $\varphi_{F,V} \in \mathbf{W}^{r,s}$ -відкритим, і пара (W, V) має властивість р.п.м., то $Sh(F, W, V) \in \mathbf{W}^s$ -відкритим в $Sh(F, V)$.

Доведення. Нехай $\alpha \in \mathcal{U}_V$, тобто $\mathbf{F}(x, \alpha(x)) \in W$ для всіх $x \in W$. Потрібно довести, що $\alpha \in Sh(F, W, V)$.

Розглянемо наступну підмножину в V :

$$K_\alpha = \{x \in V : \mathbf{F}(x, s\alpha(x)) \in W \text{ для всіх } s \in I = [0, 1]\}.$$

Досить довести, що $K_\alpha = V$.

Відмітимо, що $z \in K_\alpha$, так як z — нерухома точка потоку $\mathbf{F}$. Більш того, так як множина W є відкритою в M , то K_α є відкритою в V . Отже потрібно перевірити замкнутість K_α , або, що те ж саме, відкритість доповнення $V \setminus K_\alpha$ в V . Так як V є зв'язним, то звідси випливатиме, що $K_\alpha = V$.

Нехай $x \in V \setminus K_\alpha$. Це означає, що $x = \mathbf{F}(x, 0 \cdot \alpha(x))$ і $\mathbf{F}(x, 1 \cdot \alpha(x))$ належать W і знайдеться таке $\tau_0 \in (0, 1)$, що $\mathbf{F}(x, \tau \alpha(x)) \in W$ для всіх $\tau \in [0, \tau_0)$ в той час як $\mathbf{F}(x, \tau_0 \alpha(x)) \in \text{Fr}(W)$. Тоді з властивості р.п.м. для пари (W, V) слідує, що знайдеться таке $\tau' \in (\tau_0, 1)$, що $\mathbf{F}(x, \tau' \alpha(x)) \notin \overline{W}$. Тому існує такий відкритий окіл V_x точки x в V , що $\mathbf{F}(y, \tau' \alpha(y)) \notin \overline{W}$ для всіх $y \in V_x$. Звідси $V_x \subset V \setminus K_\alpha$, а отже, $V \setminus K_\alpha$ є відкритою підмножиною в V . $\square$

Наступна лема очевидна:

Лема 6.6.3. (1) Якщо (W, V) має властивість р.п.м., то для будь-якої підмножини $V' \subset V$ пара (W, V') також має цю властивість.

(2) Нехай W' — відкритий окіл замикання $\overline{W}$. Тоді (W, V) має властивість р.п.м. відносно поля F тоді і тільки тоді ця пара має р.п.м. відносно обмеження $F|_{W'}$. Іншими словами, р.п.м. залежить лише від поведінки F в як завгодно малому околі множини $\overline{W}$.

(3) Для кожного $x \in W$ позначимо через γ_x — зв'язну компоненту перетину $o_x \cap W$, що містить x . Припустимо, що $\text{Fr}(W)$ є гладким підмноговидом M і для кожного $x \in V$ його орбіта o_x є трансверсальною до $\text{Fr}(W)$ в кожній точці $y \in \overline{\gamma_x} \cap \text{Fr}(W)$ (якщо така точка існує). Тоді пара (W, V) має властивість р.п.м.

Ізолюючі блоки. Твердження (3) леми 6.6.3 тісно пов'язане з одним з принципів результатів роботи С. Conley та Р. Easton [21]. Відкрита множина $U \subset M$ називається *ізолюючим оком* для потоку $\mathbf{F}$, якщо $o_x \not\subset \overline{U}$ для кожної точки $x \in \text{Fr}U = \overline{U} \setminus U$. Замкнута $\mathbf{F}$ -інваріантна підмножина $X \subset M$ називається *ізолюваною*, якщо X є максимальною інваріантною підмножиною деякого свого ізолюючого околу U .

Нехай W — компактний D -підмноговид в M і $w = \overline{W} \setminus \text{Int}W$ — його межа. Позначимо

$$w^+ = \{x \in w : \exists \varepsilon > 0 \text{ with } \mathbf{F}(x \times (-\varepsilon, 0)) \cap W = \emptyset\},$$

$$w^- = \{x \in w : \exists \varepsilon > 0 \text{ with } \mathbf{F}(x \times (0, \varepsilon)) \cap W = \emptyset\},$$

$$\tau = \{x \in w : F \text{ є дотичним до } w\}.$$

Тоді W називається *ізолюючим блоком* для потоку $\mathbf{F}$ якщо $w^+ \cap w^- = \tau$ і τ є гладким підмноговидом в w корозмірності 1. Таким чином, w^+ та w^- — підмноговиди (можливо з кутами, якщо кути є у W) в w зі спільною межею τ .

Легко бачити, внутрішність ізолюючого блоку є ізолюючим оком. Більш того, що з (3) леми 6.6.3 випливає, наступне твердження:

Лема 6.6.4. *Якщо W є ізолюючим блоком, то для довільної підмножини $V \subset \text{Int}W$ пара $(\text{Int}W, V)$ має властивість р.п.м.*

Теорема 6.6.5. [21] *Нехай $X \subset M$ — замкнута ізолювана $\mathbf{F}$ -інваріантна підмножина і $U \supset X$ — її ізолюючий окіл. Тоді існує ізолюючий блок W для X такий, що $X \subset \text{Int}W \subset U$.*

Це твердження доведене для випадку, коли W є многовидом з межею. Але якщо ∂M є $\mathbf{F}$ -інваріантною і $X \cap \partial M \neq \emptyset$, то доведення легко переноситься на D -підмноговиди.

Наслідок 6.6.6. *Нехай z є ізолюваною особливою точкою поля F . Тоді існує така база топології $\beta = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в точці z , що для кожного $W \in \beta$ і довільної підмножини $V \subset W$ пара (W, V) має властивість р.п.м.*

Напів-інваріантні множини. Скажемо, що множина W є від'ємно (додатно) інваріантна відносно $\mathbf{F}$, якщо $\mathbf{F}(x, t) \in W$ для довільних $x \in W$ і $t \leq 0$ ($t \geq 0$) таких, що $(x, t) \in \text{dom}(F)$. В цьому випадку також говоритимемо, що W є напів-інваріантною.

Лема 6.6.7. *Якщо W є напів-інваріантною відносно $\mathbf{F}$, то для довільної підмножини $V \subset W$ пара (W, V) має властивість р.п.м.*

Доведення. Відмітимо, що як тільки $x, \mathbf{F}(x, Ta) \in W$ для деяких $a \in \mathbb{R}$ і $T > 1$, то з напів-інваріантності W випливає, що $\mathbf{F}(x, \tau a) \in W$ для всіх $\tau \in [0, T]$. Тому не існує таких $x \in V$, $a \in \mathbb{R}$ та $T > 1$, що задовольняють припущення означення 6.6.1. Це означає, що (W, V) має властивість р.п.м. $\square$

Добуток потоків. Для $i = 1, 2$ нехай M_i — гладкий многовид, F_i — векторне поле на M_i , $W_i \subset M_i$ — відкрита множина, і $V_i \subset W_i$ деяка підмножина. Покла-

демо $M = M_1 \times M_2$ і $W = W_1 \times W_2$. Розглянемо добуток цих векторних полів $F(x, y) = (F_1(x), F_2(y))$ на M . Це векторне поле породжує локальний потік $\mathbf{F}(x, y, t) = (\mathbf{F}_1(x, t), \mathbf{F}_2(y, t))$.

Лема 6.6.8. *Припустимо, що (W_i, V_i) має властивість р.п.м. відносно F_i , $(i = 1, 2)$, і нехай $V \subset V_1 \times V_2$ деяка підмножина. Тоді (W, V) має властивість р.п.м. відносно F .*

Доведення. Нехай $x = (x_1, x_2) \in V$, $a \in \mathbb{R}$ і $T > 1$ такі, що

$$\mathbf{F}(x, \tau a) = (\mathbf{F}_1(x_1, \tau a), \mathbf{F}_2(x_2, \tau a)) \in W, \quad \tau \in [0, 1) \cup \{T\},$$

$$\mathbf{F}(x, a) = (\mathbf{F}_1(x_1, a), \mathbf{F}_2(x_2, a)) \in \text{Fr}W = (\text{Fr}(W_1) \times W_2) \cup (W_1 \times \text{Fr}(W_2)).$$

Зокрема, $\mathbf{F}_i(x_i, a) \in \text{Fr}(W_i)$ хоча б для одного індексу $i = 1, 2$. Для визначеності припустимо, що $\mathbf{F}_1(x_1, a) \in \text{Fr}(W_1)$. Так як $x_1 \in V_1$, то з властивості р.п.м. для (W_1, V_1) випливає існування такого $\tau' \in (1, T)$, що $\mathbf{F}_1(x_1, \tau' a) \notin \overline{W_1}$. Тоді $\mathbf{F}(x, \tau' a) \notin \overline{W}$, а значить, пара (W, V) має властивість р.п.м. відносно F . $\square$

6.7 Відкритість відображення зсуву для регулярних розширень

Нехай $V \subset M \times N$ — зв'язний компактний D -підмноговид. Тоді з (1.9) випливає, що $\text{func}(F, V) \in \mathbf{W}^0$ -відкритою підмножиною в $\text{func}(\bar{G}, V)$. Визначимо відображення $P : Sh(F, V) \rightarrow Sh(\bar{G}, V)$ за правилом: якщо $f \in Sh(F, V)$ і $f(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$, то $P(f)(x, y) = (A(x, y), y)$.

Зрозуміло, що P коректно визначене і є $\mathbf{W}^{r,r}$ -неперервним для всіх $r \in \mathbb{N}_0$. Більш того, має місце комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} \text{func}(F, V) & \xrightarrow{\varphi_{F,V}} & Sh(F, V) \\ \downarrow & \searrow \bar{\psi}_{\bar{G},V} & \downarrow P \\ \text{func}(\bar{G}, V) & \xrightarrow{\bar{\psi}_{\bar{G},V}} & \text{func}(\bar{G}, V) \end{array} \quad (6.15)$$

Наступна теорема описує як наслідуються відкритість відображень зсуву при регулярних розширеннях.

Теорема 6.7.1. *Припустимо, що множина $\text{Fix}(\mathbf{G})$ ніде не щільна в M і нехай $r, s, t \in \overline{\mathbb{N}}_0$.*

- (1) *Якщо відображення $\bar{\psi}_{\bar{G},V}$ є ін'єктивним та $W^{r,s}$ -відкритим, то $\varphi_{F,V}$ є також $W^{r,s}$ -відкритим.*
- (2) *Якщо $\bar{\psi}_{\bar{G},V}$ та $\varphi_{F,V} \in W^{r,s}$ -відкритими, то P є локально ін'єктивним відносно топології W^s на $Sh(F, V)$.*
- (3) *Якщо $\bar{\psi}_{\bar{G},V} \in W^{r,s}$ - та $W^{s,t}$ -відкритим, а P — локально ін'єктивним відносно топології W^s на $Sh(F, V)$, то $\varphi_{F,V} \in W^{r,t}$ -відкритим.*
- (4) *Припустимо, що $\bar{\psi}_{\bar{G},V} \in W^{r,s}$ - та $W^{s,t}$ -відкритим і знайдеться такий відкритий зв'язний окіл $W \subset M \times N$ множини V , що обидва відображення $\bar{\psi}_{\bar{G},W}$ та $\varphi_{F,W} \in W^{r,t}$ -відкритими. Тоді P є локально ін'єктивним відносно топології W^0 на $Sh(F, V)$, а значить $\varphi_{F,V} \in W^{r,t}$ -відкритим.*

Доведення. (1) Якщо $\bar{\psi}_{\bar{G},V} : \text{func}(\bar{G}, V) \rightarrow \text{func}(\bar{G}, V)$ є бієкцією, то з (6.15) випливає, що $\varphi_{F,V}$ — також бієкція. Нехай $\mathcal{M} \subset \text{func}(F, V)$ — W^r -відкрита підмножина. Тоді з $W^{r,s}$ -відкритості $\bar{\psi}_{\bar{G},V}$ та $W^{s,s}$ -неперервності P випливає, що образ $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}) = P^{-1} \circ \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\mathcal{M}) \in W^s$ -відкритим в $Sh(F, V)$.

(2) Нехай $\alpha \in \text{func}(F, V)$ і $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$. Потрібно знайти такий W^s -окіл $\mathcal{N}$ відображення f , що обмеження $P|_{\mathcal{N}}$ є взаємно однозначним.

Так як обидва відображення $\varphi_{F,V}$ та $\bar{\psi}_{\bar{G},V} \in W^{r,s}$ -відкритими і локально ін'єктивними відносно топологій W^0 на $\text{func}(F, V)$ та $\text{func}(\bar{G}, V)$ відповідно, то знайдеться такий W^r -окіл $\mathcal{M}$ функції α в $\text{func}(F, V)$, що $\mathcal{N} = \varphi_{F,V}(\mathcal{M}) \in W^s$ -околом f в $Sh(F, V)$, а обмеження $\varphi_{F,V}$ та $\bar{\psi}_{\bar{G},V}$ на $\mathcal{M}$ є взаємно однозначними. Тоді з (6.15) випливає, що обмеження $P|_{\mathcal{N}}$ також є взаємно однозначним.

(3) Нехай $\mathcal{M} \subset \text{func}(F, V)$ — W^r -відкрита підмножина і $\alpha \in \mathcal{M}$. Покажемо, що існує такий W^s -окіл $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ функції α , що $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}')$ є W^t -відкритою

підмножиною в $Sh(F, V)$. Так як функція $\alpha \in \mathcal{M}$ — довільна, то ми отримаємо, що $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}) \in W^t$ -відкритим в $Sh(F, V)$.

З $W^{r,s}$ -відкритості обмеження $\bar{\psi}_{\bar{G},V}|_{\mathcal{M}}$ та $W^{s,s}$ -неперервності P випливає, що множина $P^{-1} \circ \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\mathcal{M}) \in W^s$ -відкритим околом $\varphi_{F,V}(\alpha)$ в $Sh(F, V)$. Більш того, так як P є локально ін'єктивним відносно топології W^s на $Sh(F, V)$, то існує такий W^s -окіл $\mathcal{N} \subset P^{-1} \circ \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\mathcal{M})$ відображення $\varphi_{F,V}(\alpha)$, що обмеження $P|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \text{func}(\bar{G}, V)$ є взаємно однозначним.

Покладемо $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cap \varphi_{F,V}^{-1}(\mathcal{N})$ і покажемо, що

$$\varphi_{F,V}(\mathcal{M}') = P^{-1} \circ \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\mathcal{M}') \cap \mathcal{N}.$$

Звідси випливатиме, що $\varphi_{F,V}(\mathcal{M}')$ буде W^t -відкритим в $Sh(F, V)$. Дійсно,

$$P^{-1} \circ \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\mathcal{M}') \cap \mathcal{N} \stackrel{(6.15)}{=} P^{-1} \circ P \circ \varphi_{F,V}(\mathcal{M}') \cap \mathcal{N} = \varphi_{F,V}(\mathcal{M}').$$

Друга рівність випливає з ін'єктивності обмеження $P|_{\mathcal{N}}$.

(4) Припустимо, що обидва відображення зсуву $\bar{\psi}_{\bar{G},W}$ та $\varphi_{F,W}$ є періодичними. Покажемо, що тоді для деякого $m > 0$ існує така вільна P -еквіваріантна дія групи $\mathbb{Z}_m$ на $Sh(F, V)$, що $P(f) = P(g)$ тоді і лише тоді, коли f, g належать одній $\mathbb{Z}_m$ -орбіті. Звідси випливатиме, що P розкладається в композицію відображень $P : Sh(F, V) \xrightarrow{q} Sh(F, V)/\mathbb{Z}_m \xrightarrow{\sigma} \text{func}(\bar{G}, V)$, де q — є накриваючим відображенням, а σ — бієкцією зі своїм образом $P(Sh(F, V)) \subset \text{func}(\bar{G}, V)$. Зокрема отримаємо, що q є локально ін'єктивним відносно топології W^0 , так як $\mathbb{Z}_m$ є скінченною групою. Тому P також буде локально ін'єктивним відображенням.

Періодичність відображень зсуву $\bar{\psi}_{\bar{G},W}$ та $\varphi_{F,W}$ означає, що

$$\text{func}(\bar{G}, W) = \text{func}(F, W) = \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R}),$$

$$\ker \bar{\psi}_{\bar{G},W} = \{n\bar{\eta}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \ker \varphi_{F,W} = \{n\eta\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

для деяких гладких функцій $\bar{\eta}, \eta : M \times N \rightarrow (0, \infty)$ таких, що

$$\bar{\mathbf{G}}(x, y, t + \bar{\eta}(x, y)) \equiv \bar{\mathbf{G}}(x, y, t), \quad \mathbf{F}(x, y, t + \eta(x, y)) \equiv \mathbf{F}(x, y, t).$$

Іншими словами

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}(x, t + \bar{\eta}), y) &= (\mathbf{G}(x, t), y), \\ (\mathbf{G}(x, t + \eta), \mathbf{H}(x, y, t + \eta)) &= (\mathbf{G}(x, t), \mathbf{H}(x, y, t)). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Тому $\bar{\mathbf{G}}(x, y, t + \eta) = (\mathbf{G}(x, t + \eta), y) = (\mathbf{G}(x, t), y) = \bar{\mathbf{G}}(x, y, t)$, а значить $\eta \in \ker \bar{\psi}_{\bar{G}, W}$, тобто $\eta = m\bar{\eta}$ для деякого $m \in \mathbb{Z}$.

Зв'язність W гарантує, що функція $\bar{\eta}$ постійна уздовж орбіт поля F . Так як для кожної функції $\alpha \in \mathbf{func}(F, V)$ відображення $\varphi_{F,V}(\alpha)$ лишає інваріантною кожен орбіту поля F , то $\bar{\eta} \circ \varphi_{F,V}(\alpha) = \bar{\eta}$, а тому

$$\varphi_{F,V}(\bar{\eta}) \circ \varphi_{F,V}(\alpha) = \varphi_{F,V}(\alpha + \bar{\eta} \circ \varphi_{F,V}(\alpha)) = \varphi_{F,V}(\alpha + \bar{\eta}).$$

Тепер можна визначити дію $*$ групи $\mathbb{Z}_m$ на $Sh(F, V)$ за правилом:

$$k * f = \varphi_{F,V}(k\bar{\eta}) \circ f, \quad k \in \mathbb{Z}_m, f \in Sh(F, V).$$

Очевидно, що ця дія є вільною і, згідно (6.16), еківаріантною відносно P .

Більш того, нехай $\alpha, \beta \in \mathbf{func}(F, V)$, $f = \varphi_{F,V}(\alpha)$, $g = \varphi_{F,V}(\beta)$ такі, що $P(f) = P(g)$, тобто $\bar{\psi}_{\bar{G}, V}(\alpha) = \bar{\psi}_{\bar{G}, V}(\beta)$. Тоді $\alpha - \beta = k\bar{\eta}$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$, а тому $f = \varphi_{F,V}(k\bar{\eta}) \circ g$. Так як $\eta = m\bar{\eta}$, то k можна вибирати по модулю m . Іншими словами, $P(f) = P(g)$ тоді і лише тоді, коли $f = k * g$ для деякого $k \in \mathbb{Z}_m$. $\square$

6.8 Підсумки

Для зручності читача сформулюємо достатні умови для того, виконувалась наступна властивість:

(Z) Відображення зсуву $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$ є локальним гомеоморфізмом відносно топологій W^∞ .

Нехай V — компактний D -підмноговид і W — відкритий окіл V . Тоді обмеження $F|_W$ поля F на W породжує локальний потік

$$\mathbf{F}_W : W \times \mathbb{R} \supset \mathbf{dom}(F_W) \longrightarrow W.$$

Нехай $\varphi_{F,W,V} : \text{func}(F, W, V) \rightarrow Sh(F, W, V)$ — відповідне відображення зсуву поля $F|_W$.

Накладемо наступні умови на V та W .

- (A) Відображення зсуву $\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ є відкритим між відповідними топологіями W^∞ ;
- (B) Відображення зсуву $\varphi_{F,W,V} : \text{func}(F, W, V) \rightarrow Sh(F, W, V)$ є відкритим між відповідними топологіями W^∞ ;
- (C) Множина $Sh(F, W, V)$ є відкритою в топології W^∞ .

Нарешті, для кожної точки $z \in M$ розглянемо наступні властивості.

- (A1) Існує база топології $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J}$ в точці z , яка складається з компактних D -околів, кожен з яких задовольняє умову (A).
- (B1) Існує відкритий окіл W точки z і база $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J} \subset W$ топології в точці z , яка складається з компактних D -околів, кожен з яких задовольняє умову (B).
- (C1) Існує такий окіл W точки z , що для кожного компактного D -околу $V \subset W$ задовольняє (C).
- (R1) z є неперіодичною та нерекурентною.
- (R2) z є періодичною, а відображення Пуанкаре орбіти o_z точки z є тотальним.
- (S1) $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ і ця точка має F -інваріантний окіл W .
- (S2) $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ і існує окіл W точки z з наступною властивістю: якщо $x \in \partial W = \overline{W} \setminus W$, то існує такий окіл $\gamma \subset o_x$ точки x в орбіті o_x , що $\gamma \cap \partial W = \{x\}$.

Наслідок 6.8.1. *Мають місце наступні імплікації:*

- 1) (A1) для кожної точки $z \in M \Rightarrow (\mathbf{Z})$, (теорема 6.3.1);
- 2) (A) $\Leftrightarrow$ (B) & (C), (теорема 6.4.1)
- 3) (R1) $\vee$ (R2) $\Rightarrow$ (A1), (теорема 6.5.1);

4) (S1) $\vee$ (S2) $\Rightarrow$ (C1), (леми 6.6.7 та 6.6.2)

Зокрема, припустимо, що кожна регулярна точка $z \in M \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ поля F задовольняє одну з умов (R1) або (R2), а кожна особлива точка $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ поля F — одну з умов (S1), (S2), або (B1). Тоді відображення зсуву $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sh}(F)$ є або гомеоморфізмом, або $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням між топологіями S^∞ .

6.9 Лінійні векторні поля

Нехай $F(x) = Ax$ — лінійне векторне поле в $\mathbb{R}^m$ визначене ненульовою $(m \times m)$ -матрицею A . Воно визначає глобальний потік

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{F}(x, t) = e^{At}x.$$

Очевидно, що $0 \in \mathbb{R}^m$ є особливою точкою F . Нехай V — компактний зв'язний D -окіл точки 0 .

Використовуючи результати попередніх розділів ми опишемо ядро та образ відображення зсуву

$$\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^m), \quad \varphi_{F,V}(\alpha)(x) = e^{A\alpha(x)}x,$$

а також встановимо за яких умов $\varphi_{F,V}$ буде локальним гомеоморфізмом на свій образ.

Не втрачаючи загальності можна вважати, що A має дійсну Жорданову нормальну форму:

$$A = \bigoplus_{\alpha=1}^a J_{p_\alpha}(\lambda_\alpha) \oplus \bigoplus_{\beta=1}^b J_{q_\beta}(\gamma_\beta \pm i\mu_\beta), \quad \lambda_\alpha, \gamma_\beta, \mu_\beta \in \mathbb{R}. \quad (6.17)$$

Теорема 6.9.1. 1) $\text{Sh}(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, тобто маємо сюр'єктивне відображення

$$\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0, \quad (6.18)$$

яке є $W^{r,r}$ -неперервним для всіх $r \geq 0$.

2) Нехай

$$A = \bigoplus_{\beta=1}^b J_1(\pm i\mu_\beta) = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -\mu_1 & & \\ \mu_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & -\mu_b \\ & & & \mu_b & 0 \end{array} \right\|. \quad (6.19)$$

а) Припустимо, що існує таке $\tau > 0$, що

$$\frac{\tau}{2\pi} \mu_1, \dots, \frac{\tau}{2\pi} \mu_b \in \mathbb{Z}. \quad (6.20)$$

Нехай τ_0 — найменше серед таких τ . Тоді ядро $\varphi_{F,V}$ складається з постійних функцій, цілочисельно кратних τ_0 :

$$\ker \varphi_{F,V} = \{n\tau_0\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (6.21)$$

а відображення (6.18) є $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням відносно топологій W^∞ , а тому $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$ є гомотопічно еквівалентним до кола відносно топологій W^∞ .

Зокрема, якщо $A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{array} \right\|$, $\mu \neq 0$, то $\ker \varphi_{F,V} = \left\{ \frac{2\pi n}{\mu} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

б) Якщо ж такого τ не існує, то

$$\ker \varphi_{F,V} = \{0\},$$

а (6.18) є лише неперервною бієкцією, яка не буде локальним гомеоморфізмом ні відносно яких топологій W^r .

3) У всіх інших випадках

$$\ker \varphi_{F,V} = \{0\},$$

а відображення (6.18) є гомеоморфізмом відносно W^∞ -топологій. Більш детально,

а) якщо Жорданова форма (6.17) містить клітину $J_p(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то (6.18) є $W^{r,r+1}$ -відкритою бієкцією для кожного $r \geq 0$;

б) якщо (6.17) містить клітину $J_p(a \pm ib)$ причому $a, b \neq 0$, то (6.18) є $W^{r,r+2}$ -відкритою бієкцією для кожного $r \geq 0$;

с) якщо ж (6.17) містить клітину $J_p(\pm ib)$ з $p \geq 2$, то відображення (6.18) є $W^{\infty,\infty}$ -відкритою бієкцією для кожного $r \geq 0$.

Доведення. Як відмічалось в прикладі 1.2.10 кожне ненульове лінійне векторне поле є регулярним розширенням хоча б одного з наступних векторних полів:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lambda x \frac{\partial}{\partial x}, & \text{(iii)} \quad & (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (-bx + ay) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{(ii)} \quad & y \frac{\partial}{\partial x}, & \text{(iv)} \quad & by \frac{\partial}{\partial x} - bx \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

для деяких $\lambda, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1) Згідно прикладу 5.4.3 ці векторні поля G мають властивість $(E)^l$ для всіх $l \geq 0$. Тому за теоремою 5.4.6 такою ж властивістю володіють всі регулярні розширення таких полів. Тепер з теореми 5.4.5 отримуємо, що $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$ для кожного регулярного розширення поля типу (i)-(iv).

2a) Нехай A має вигляд (6.19) і існує $\tau > 0$, що задовольняє (6.20). Звідси легко випливає, що ядро $\ker \varphi_{F,V}$ відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ визначається за формулою (6.21). Відмітимо, що F є добутком векторних полів типу (iv), відображення зсуву яких є періодичними. Так як згідно твердження 6.7.1 відображення зсуву для поля типу (iv) є $W^{\infty, \infty}$ -відкритим на свій образ, то згідно твердження (4) теореми 6.7.1 $W^{\infty, \infty}$ -відкритим на свій образ буде і відображення зсуву $\varphi_{F,V}$. Тепер твердження про гомотопічний тип $Sh(F, V)$ випливає з наслідку 4.2.9.

Відмітимо, що у всіх інших випадках F має незамкнуті орбіти, а тому ядро $\ker \varphi_{F,V}$ відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є нульовим.

2b) Якщо не існує τ , яке б задовольняло (6.20), то згідно леми 6.2.4 $\varphi_{F,V}$ не є локальним гомеоморфізмом ні відносно яких топологій W^r .

3a) Припустимо, що Жорданова форма (6.17) містить клітину $J_p(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді F є регулярним розширенням векторного поля типу (i) або типу (ii). Згідно тверджень 3.1.2 та 3.2.1 відображення зсуву будь-яких тривіальних розширень таких векторних полів є ін'єктивними і $W^{r, r+1}$ -відкритими для всіх $r \geq 0$. Тому згідно твердження (1) теореми 6.7.1 $\varphi_{F,V}$ також є $W^{r, r+1}$ -відкритою бієкцією для кожного $r \geq 0$.

3b) Нехай (6.17) містить клітину $J_p(a \pm ib)$ причому $a, b \neq 0$. Тоді F є регулярним розширенням векторного поля типу (iii). Згідно твердження 3.2.2 ві-

дображення зсуву будь-якого тривіального розширення такого векторного поля є ін'єктивним і $\mathbf{W}^{r,r+2}$ -відкритим для всіх $r \geq 0$. Тому згідно твердження (1) теореми 6.7.1 $\varphi_{F,V}$ також є $\mathbf{W}^{r,r+2}$ -відкритою бієкцією для кожного $r \geq 0$.

Зс) Припустимо, що (6.17) містить клітину $J_p(\pm ib)$ з $p \geq 2$. Це означає, що F є регулярним розширенням лінійного векторного поля на просторі $\mathbb{R}^4$ (який ми ототожнимо з $\mathbb{C}^2$), породженого матрицею

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -b & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}.$$

Відмітимо також, що в комплексних координатах на $\mathbb{C}^2$ матриця B (як лінійний оператор) має вигляд $\begin{vmatrix} ib & 1 \\ 0 & ib \end{vmatrix}$.

Позначимо через $H(x, y) = -by\frac{\partial}{\partial x} + bx\frac{\partial}{\partial y}$ — векторне поле на $\mathbb{R}^2$ з особливістю типу центр в початку координат. Тоді G є регулярним 2-розширенням H , то F є регулярним $(l+2)$ -розширенням H . Нехай також $\bar{G}$ — тривіальне $(l+2)$ -розширення H . Таким чином, F та $\bar{G}$ визначені на $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times S^l$ та і породжують наступні повні потоки:

$$\mathbf{F}(z_1, z_2, \sigma; t) = (e^{ibt}(z_1 + tz_2), e^{ibt}z_2, \sigma), \quad \bar{\mathbf{G}}(z_1, z_2, \sigma; t) = (z_1, e^{ibt}z_2, \sigma).$$

Покладемо $\theta = \frac{2\pi}{b}$ і нехай $V \subset \mathbb{C}^2 \times S^l$ — D -окіл $0 \in \mathbb{C}^2 \times S^l$. Для кожної функції $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ нехай

$$\mathbf{f}(\alpha)(z_1, z_2, \sigma) = e^{ib\alpha(z_1, z_2, \sigma)} z_1, \quad \mathbf{g}(\alpha)(z_1, z_2, \sigma) = e^{ib\alpha(z_1, z_2, \sigma)} z_2,$$

Тоді відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ та $\bar{\psi}_{\bar{G},V}$ полів F та G відповідно, визначаються за формулами:

$$\varphi_{F,V}(\alpha) = (\mathbf{f}(\alpha) + \alpha \cdot \mathbf{g}(\alpha), \mathbf{g}(\alpha), \sigma), \quad \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\alpha) = (z_1, \mathbf{g}(\alpha), \sigma). \quad (6.22)$$

Аналогічно до (6.15) визначимо відображення $P : Sh(F, V) \rightarrow Sh(\bar{G}, V)$ за правилом: якщо $h = (f, g, \sigma) \in Sh(F, V) \subset \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times S^l)$, то $P(h)(z_1, z_2) = (z_1, g(z_1, z_2), \sigma)$. Очевидно, що $\bar{\psi}_{\bar{G},V} = P \circ \varphi_{F,V}$.

За твердженням 3.2.4 відображення зсуву $\bar{\psi}_{\bar{G},V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(\bar{G}, V)$ є $W^{\infty,\infty}$ -відкритим. Покажемо, що такою ж властивістю володіє $\varphi_{F,V} : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F, V)$. Так як G має незамкнуті орбіти, то $\bar{\psi}_{\bar{G},V}$ завжди ін'єктивне, а тому з твердження (1) теореми 6.7.1 відображення зсуву для довільного регулярного розширення поля G також є $W^{\infty,\infty}$ -відкритим.

Згідно твердження (3) теореми 6.7.1 досить показати, що P є локально ін'єктивним відносно топології W^1 . Очевидно, що $\psi_{G,V}^{-1} \circ \psi_{G,V}(\alpha) = \{\alpha + \theta n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, а тому з (6.22) випливає, що

$$P^{-1} \circ \bar{\psi}_{\bar{G},V}(\alpha) = \{\varphi_{F,V}(\alpha) + (0, \theta n \cdot \mathbf{g}(\alpha), 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Визначимо наступний C_W^1 -окіл відображення $\varphi_{F,V}(\alpha)$ в $Sh(F, V)$:

$$\mathcal{N} = \{f \in Sh(F, V) \mid \|f - \varphi_{F,V}(\alpha)\|_V^1 < |\theta|/4\},$$

і покажемо, що обмеження $P|_{\mathcal{N}}$ є ін'єктивним.

Так як $\varphi_{F,V}$ є ін'єктивним відображенням, то досить встановити, що $n = 0$, як тільки обидва відображення $\varphi_{F,V}(\beta)$ та $\varphi_{F,V}(\beta + \theta n)$ належать до $\mathcal{N}$ для деякої функції $\beta \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$. Відмітимо, що

$$\|\mathbf{g}(\beta)\|_V^1 \geq |\mathbf{g}(\beta)'_{z_2}|_{(z_1, z_2)=0} = |e^{ib\beta} (ib z_2 \beta'_{z_2} + 1)|_{(z_1, z_2)=0} = 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|\varphi_{F,V}(\beta) - \varphi_{F,V}(\beta + \theta n)\|_V^1 &\leq \|\varphi_{F,V}(\beta) - \varphi_{F,V}(\alpha)\|_V^1 + \\ &+ \|\varphi_{F,V}(\beta + \theta n) - \varphi_{F,V}(\alpha)\|_V^1 \leq |\theta|/2. \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\|\varphi_{F,V}(\beta) - \varphi_{F,V}(\beta + \theta n)\|_V^1 = \|(0, \theta n \mathbf{g}(\beta), 0)\|_V^1 \geq |\theta n|.$$

Отже $n = 0$.

Теорему доведено. □

6.10 Гамільтонові векторні поля однорідних многочленів на площині

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $\deg f \geq 1$. Тоді він розкладається на незвідні над $\mathbb{R}$ множники:

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^l L_i(x, y)^{a_i} \cdot \prod_{j=1}^q Q_j(x, y)^{b_j}, \quad (6.23)$$

де $L_i = a_i x + b_i y$, ($i = 1, \dots, l$) — лінійна функція, Q_j , $j = 1, \dots, q$ — визначена квадратична форма, тобто $Q_j(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $(x, y) = 0$. Можна вважати, що $L_i/L_{i'} \neq \text{const}$ для $i \neq i'$ та $Q_j/L_{j'} \neq \text{const}$ для $j \neq j'$.

Неважко показати, що наступний многочлен

$$D = \prod_{i=1}^l L_i \cdot \prod_{j=1}^q Q_j$$

є найбільшим спільним дільником частинних похідних f'_x та f'_y в кільці $\mathbb{R}[x, y]$.

Наступне векторне поле

$$\hat{F} = -f'_y/D \frac{\partial}{\partial x} + f'_x/D \frac{\partial}{\partial y}.$$

називатимемо *редукованим* Гамільтоновим векторним полем f .

Очевидно, що якщо $f = L_1^{a_1}$, то F є векторним полем з постійними координатними функціями. Зокрема $\hat{F}$ не має особливих точок. У всіх інших випадках початок координат 0 є єдиною особливою точкою поля F , а координатні функції $\hat{F}$ є однорідними многочленами степеня

$$d = l + 2q - 1.$$

Нехай $S = \mathbb{R}^l$ або $\mathbb{R}_+^l$ і F — тривіальне розширення поля $\hat{F}$ на $\mathbb{R}^2 \times S$, тобто $F(x, y, \sigma) = (\hat{F}(x, y), 0)$ не залежить від $\sigma \in S$.

Нехай далі $V \subset \mathbb{R}^2 \times S$ — зв'язний D -підмноговид,

$$\varphi_{F,V} : Sh(F, V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^2 \times S)$$

— відображення зсуву поля F і $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^1$ — компонента зв'язності тотожного вкладення $i_V : V \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathcal{E}(F, V)$ відносно топології W^1 .

Позначимо через $\mathcal{E}(\mathbf{F}, V, S)_k \subset \mathcal{E}(F, V)$, $k \geq 2$, підмножину, що складається з відображень h для яких $j_S^{k-1}h = j_S^{k-1}\text{id}$. Зокрема, $\mathcal{E}(\mathbf{F}, V, S)_2$ складається з усіх $h \in \mathcal{E}(F, V)$, матриця Якобі яких в точці 0 є одиничною.

В цьому параграфі ми наводимо результати робіт автора [80, 85, 165] про відображення зсуву $\varphi_{F,V}$.

Зауваження 6.10.1. Припустимо, що $d = 1$, тобто F є лінійним. Тоді виконується одна з двох наступних умов.

1) f є степенем незвідної квадратичної форми, тобто лінійною заміною координат f зводиться до вигляду $(x^2 + y^2)^p$ для деякого $p \geq 1$, то F є тривіальним розширенням лінійного векторного поля типу «центр», а тому, згідно теореми 6.9.1, $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, а відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ (6.24) є $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням. Якщо V є компактним, то простір $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$ в топології W^∞ гомотопічно еквівалентний до кола S^1 .

2) f є добутком двох лінійних функцій, тобто лінійною заміною координат f зводиться до вигляду $x^p y^q$ для деяких $p, q \geq 1$, то F є тривіальним розширенням лінійного векторного поля типу «сідло», а тому, згідно теореми 6.9.1, $Sh(F, V) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, а відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ (6.24) є гомеоморфізмом. Якщо V є компактним, то простір $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$ в топології W^∞ є стягуваним.

Тому надалі ми майже завжди розглядатимемо випадок $d \geq 2$.

Означення 6.10.2. Нехай $d \geq 2$. Скажемо, що F має тип (HE), якщо f є добутком хоча б двох різних визначених (незвідних над $\mathbb{R}$) квадратичних форм. В протилежному випадку говоритимемо, що F має тип (HS).

Зрозуміло, що для поля типу (HE) початок координат $0 \in \mathbb{R}^2$ буде локальним екстремумом для f , а для поля типу (HS) f має лінійні множники і початок координат буде виродженою сідловою точкою.

Теорема 6.10.3. *Нехай $d \geq 2$. Тоді виконуються наступні твердження.*

1) $Sh(F, V) = \mathcal{E}(\mathbf{F}, V, S)_2 = \dots = \mathcal{E}(\mathbf{F}, V, S)_d = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^1$, а індукване відображення

$$\varphi_{F,V} : \text{func}(F, V) \rightarrow \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^1 \quad (6.24)$$

є гомеоморфізмом відносно топологій S^∞ . Зокрема, для компактного V простір $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^1$ в топології W^∞ є стягуваним.

2) Якщо F має тип (HS), то F також володіє властивістю $(E)^k$ в кожній точці виду $(0, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times S^l$ для всіх $k \geq 0$. Тому за теоремою 5.4.5 $Sh(F, V)$ співпадає з $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$. Більш того, $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0 = \mathcal{E}(F, V)$, а тому $Sh(F, V) = \mathcal{E}(F, V)$.

3) Припустимо, що F має тип (HE). Тоді

- (a) F також володіє властивістю $\text{ESD}(l; d, k)$ в кожній точці виду $(0, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times S^l$ для всіх $l, d \geq 0$ та $k \geq 1$;
- (b) в топології W^0 простір $\mathcal{E}^+(F, V)$ є лінійно зв'язною, а тому $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0 = \mathcal{E}^+(F, V)$;
- (c) в топології W^r , $r \geq 1$, простір $\mathcal{E}^+(F, V)$ є незв'язним, а множина $\pi_0(\mathcal{E}^+(F, V))$ його компонент зв'язності є нетривіальною скінченною циклічною групою $\mathbb{Z}_{2k}$ парного порядку, тобто $k \geq 1$;
- (d) $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^1 \neq \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, а тому в точці $(0, \sigma)$ не виконується умова $\text{ESD}(l; d, 0)$ з $l + d \geq 1$.

Зауваження 6.10.4. Відмітимо, що твердження 1) означає, що для $h \in \mathcal{E}(F, V)$ наступні умови є еквівалентними

- (i) Існує така C^∞ -функція $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$, що $h(x, y, \sigma) = (\mathbf{F}(x, y, \alpha(x, y, \sigma)), \sigma)$.
- (ii) $j_S^1 h = j_S^1 \text{id}$.
- (iii) Існує 1-гомотопія між h та тотожним вкладенням $i_V : V \subset \mathbb{R}^2 \times S$.

Твердження 1) випливають з результатів робіт [85, 165], а 2) та 3а) можна вивести з 1). Через обмеженість об'єму дисертації ми не будемо їх доводити,

але покажемо як довести 3c-d).

Для спрощення викладок вважатимемо, що $l = 0$, тобто розглянемо випадок відсутності параметрів.

Доведення 3b-d) теореми 6.10.3. (b) Нехай $h \in \mathcal{E}^+(F, V)$. Покажемо, що існує неперервна гомотопія між h та id_V в $\mathcal{E}^+(F, V)$. Це доведе лінійну зв'язність $\mathcal{E}^+(F, V)$ в топології $\mathbf{W}^0$.

Неважко показати, що h можна продеформувати у відображення нерухоме зовні деякого околу W точки 0 . Якщо тепер h є нерухомим зовні деякого околу початку координат, то 0 -гомотопію між h та id_V можна визначити за формулою

$$H(z, t) \begin{cases} th(\frac{z}{t}), & t > 0, \\ z, & t = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Легко перевіряється, що H є неперервним відображенням, $H_0 = \text{id}$, $H_1 = h$, див [80]. Отже $\mathcal{E}^+(F, V)$ є лінійно зв'язним в топології $\mathbf{W}^0$, а значить співпадає з $\mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$.

(c) Розглянемо відображення $J : \mathcal{E}^+(F, V) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$, яке ставить у відповідність кожному $h \in \mathcal{E}^+(F, V)$ його матрицю Якобі в точці 0 . Позначимо через $\text{im}(J)$ образ J в $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.

Лема 6.10.5. *Індуковане відображення $J_0 : \pi_0 \mathcal{E}^+(F, V) \rightarrow \pi_0 \text{GL}(2, \mathbb{R})$ відносно топологій $\mathbf{W}^r$, $r \geq 1$, є ін'єктивним, а його образ є нетривіальною скінченною циклічною групою парного порядку.*

Доведення. Відмітимо, що кожне відображення $h \in \mathcal{E}^+(F, V)$ зберігає орбіти поля F , а тому воно зберігає і функцію f , тобто $f \circ h = f$. Так як f є однорідним многочленом, то згідно леми 3.2.7 лінійний оператор, що визначається матрицею Якобі $J(h)$ також зберігає f , тобто $J(h) \in \mathcal{E}^+(F, V)$. Таким чином, $\text{im}(J)$ складається з усіх лінійних ізоморфізмів з $\text{GL}(2, \mathbb{R})$, які зберігають f .

Тепер з результатів роботи [50] про лінійні симетрії многочленів випливає, що $\text{im}(J)$ є скінченною циклічною групою.

Покажемо, що J_0 є мономорфізмом, тобто, що J_0 *індукує бієкцію між компонентами лінійної зв'язності $\mathcal{E}^+(F, V)$ та образом $\text{im}(J)$* . Нехай $h_0, h_1 \in \mathcal{E}^+(F, V)$ такі, що $J(h_0) = J(h_1)$. Позначимо відповідне лінійне відображення через $A = J(h_0)$. Потрібно показати, що h_0 та h_1 гомотопні в $\mathcal{E}^+(F, V)$. Розглянемо відображення $g_i = A^{-1} \circ h_i$ для $i = 0, 1$. Зрозуміло, що $J(g_i) = \text{id}$, тобто $g_i \in \mathcal{E}(\mathbf{F}, V, S)_2 = \mathcal{E}_{\text{id}}(F, V)^0$, а тому існує гомотопія $(g_t)_{t \in [0,1]}$ між g_0 та g_1 в $\mathcal{E}(F, V)$. Тоді гомотопія $h_t = A \circ g_t$ з'єднує h_0 та h_1 в $\mathcal{E}(F, V)$.

Залишається довести, що $\text{im}(J)$ є нетривіальною і має парний порядок. Для цього досить показати, що $\text{im}(J)$ має елемент порядку 2. Визначимо $\eta = -\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\eta(z) = -z$. Так як f є добутком квадратичних форм, то $f(-z) = z$, тобто $f \circ \eta = f$, а значить $\eta \in \mathcal{E}^+(F, V)$. З іншого боку, $J(\eta) = -E$. Очевидно, що $-E$ є нетривіальним ізоморфізмом порядку 2. $\square$

Твердження (d) випливає з (b), (c) і теореми 5.2.2. $\square$

6.11 Висновки

В цьому розділі отримано достатні умови для того, щоб відображення зсуву $\varphi_{F,V} : Sh(F, V) \rightarrow Sh(F, V)$ локальним гомеоморфізмом на свій образ відносно топологій W^∞ , де $V \subset M$ — такий D -підмноговид, що $V \cap \text{Fix}(\mathbf{F})$ ніде не щільна в V . Використовуючи обчислення, проведені в розділі 3, було описано відображення зсуву для всіх лінійних векторних полів. Також описано відображення зсуву для редукованих гамільтонових векторних полів дійсних однорідних многочленів двох змінних.

Розділ 7 СТАБІЛІЗАТОРИ ТА ОРБІТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА МНОГОВИДАХ

Нехай M — гладкий зв'язний компактний m -вимірний многовид, P — або числова пряма, або коло і $\mathcal{D}(M)$ та $\mathcal{D}(P)$ — групи дифеоморфізмів M та P відповідно. Тоді можна визначити природну *ліву* дію групи $\mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(P)$ на $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ за формулою: якщо $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$, $h \in \mathcal{D}(M)$ і $p \in \mathcal{D}(P)$, то

$$(h, p) \cdot f = p \circ f \circ h^{-1}. \quad (7.1)$$

Ця дія є одним з головних об'єктів вивчення теорії особливостей, напр. [149, 153]. Її також часто називають «право-лівою».

Нехай $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ і $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(P)$ — підгрупа. Тоді можна визначити стабілізатор $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(f)$ та орбіту $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(f)$ функції f відносно індукованої дії групи $\mathcal{G}$.

Зокрема, ототожнимо $\mathcal{D}(M)$ з підгрупою $\mathcal{D}(M) \times \text{id}_P$ в $\mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(P)$. Тоді обмеження право-лівої дії на $\mathcal{D}(M)$, очевидно, визначається за формулою

$$h \cdot f = f \circ h^{-1}. \quad (7.2)$$

Цю дію групи $\mathcal{D}(M)$ також часто називають «правою». Нехай також

$$\mathcal{S}_M(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f = f \circ h\}, \quad \mathcal{O}_M(f) = \{f \circ h^{-1} \mid h \in \mathcal{D}(M)\},$$

відповідно, стабілізатор та орбіта f відносно правої дії (7.2) групи $\mathcal{D}(M)$.

Нижче ми визначимо певну підгрупу $\mathcal{D}_{MP} \subset \mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(P)$, що містить $\mathcal{D}(M)$ і сформулюємо (без доведення) дві теореми з [75], які стверджують, що за до-

сильши широких умов на f вкладення $\mathcal{S}_M(f) \subset \mathcal{S}_{MP}(f)$ та $\mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}_{MP}(f)$ є гомотопічним еквівалентностями, де $\mathcal{S}_{MP}(f)$ та $\mathcal{O}_{MP}(f)$ — стабілізатор та орбіта f відносно дії $\mathcal{D}_{MP}$, див. теореми 7.1.1 та 7.2.3. Доведення цих результатів базується на вивченні відображення зсуву градієнтного векторного поля f .

Умови (V) та (J) на функцію. Нехай $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$. Скажемо, що f задовольняє умову (V), якщо

(V) f приймає постійне значення на кожній зв'язній компоненті межі ∂M та має лише скінченне число **критичних значень**.

Відмітимо, що умова (V) не забороняє, щоб число *критичних точок* f було нескінченним. Більш того, допускаються критичні точки на межі ∂M . Значення f на зв'язних компонентах межі ∂M називатимуться *граничними*, всі критичні та граничні значення f — *виключними*, а їх прообрази (тобто відповідні множини рівня) — *виключними* множинами рівня.

Для кожної точки $z \in M$ позначимо через $C_z^\infty(M)$ — алгебру паростків гладких функцій в точці z і нехай $f \in C_z^\infty(M)$. Тоді *ідеалом Якобі* $\Delta(f, z)$ функції f в точці z називається ідеал в $C_z^\infty(M)$, породжений першими частинними похідними f в z . Очевидно, що $\Delta(f, z)$ не залежить від часткового вибору локальних координат в точці z .

Скаємо, що відображення $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ задовольняє умову (J), якщо виконується наступне:

(J) Нехай z — критична точка f і $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — таке локальне представлення f в цій точці z , що $f(z) = 0$. Тоді паросток f в точці z належить до ідеалу Якобі $\Delta(f, z)$.

Іншими словами, існують такі паростки гладких функцій $F_1, \dots, F_m$, що

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x) F_i(x), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m. \quad (7.3)$$

Визначимо векторне поле F в околі точки z за формулою

$$F = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + F_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Тоді (7.3) можна записати у вигляді

$$f(x) = F.f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (7.4)$$

де $F.f$ — похідна f уздовж F .

Відмітимо, що умови (V) та (J) є інваріантним відносно право-лівої дії.

Приклад 7.0.1. Функція $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ називається *квазі-однорідною* степеня d з вагами $s_1, \dots, s_m$, якщо $f(t^{s_1}x_1, \dots, t^{s_m}x_m) = t^d f(x_1, \dots, x_m)$ для всіх $t > 0$, див. напр. [149, §12]. Еквівалентна вимога полягає в тому, щоб функція $g(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^{s_1}, \dots, x_m^{s_m})$ була однорідною степеня d . Тоді має місце наступна тотожність *тотожність Ейлера*: $f = \frac{x_1}{s_1} f'_{x_1} + \cdots + \frac{x_m}{s_m} f'_{x_m}$, яка показує, що f задовольняє умову (J).

Більш того, для комплексно-аналітичних функцій $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ умова (J) характеризує квазіоднорідні функції, див. [127].

З іншого боку легко побудувати приклади дійсних функцій, що задовольняють умову (J), але не є квазіоднорідними, див. [75].

Групи $\mathcal{D}_{M\mathbb{R}}$ та $\mathcal{D}_{MS^1}$. Припустимо, що $f \in C^\infty(M, P)$ задовольняє (V). Нехай n — загальне число виключних значень f . Так як многовид M є компактним, то $n < \infty$.

Очевидно, що якщо $n = 0$, то M є замкнутим многовидом, $P = S^1$, а $f : M \rightarrow S^1$ — є локально тривіальним розшаруванням.

Припустимо, що $n \geq 1$. Для випадку $P = S^1$ у цьому параграфі ми розглядатимемо коло S^1 як групу дійсних чисел по модулю n : $S^1 \equiv \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$, а не як $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$!

Тому в обох випадках P можна вважати, що $\{1, \dots, n\}$ є множиною виключних значень f , причому для випадку $P = S^1$, ці значення беруться по модулю n . Зокрема $n \equiv 0$.

Визначимо наступні групи. Якщо $P = \mathbb{R}$, то нехай

- $\mathcal{D}^{[1,n]}(\mathbb{R})$ — підгрупа в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, що складається з дифеоморфізмів, які зберігають орієнтацію $\mathbb{R}$, мають компактний носій та лишають інваріантним образ $f(M) = [1, n]$ функції f ;
- $\mathcal{D}^e(\mathbb{R})$ — the підгрупа of $\mathcal{D}^{[1,n]}(\mathbb{R})$, що складається з таких дифеоморфізмів p , що $p(i) = i$ для всіх $i = 1, \dots, n$;
- $\mathcal{D}_{M\mathbb{R}} = \mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}^{[1,n]}(\mathbb{R})$.

Якщо ж $P = S^1$, то нехай

- $\mathcal{D}^+(S^1)$ — група дифеоморфізмів кола S^1 , що зберігають його орієнтацію;
- $\mathcal{D}^E(S^1)$ — підгрупа в $\mathcal{D}^+(S^1)$, що лишає інваріантною множину $\{1, \dots, n\}$ виключних значень f . Якщо $n = 0$, то $\mathcal{D}^E(S^1) = \mathcal{D}^+(S^1)$;
- $\mathcal{D}^e(S^1)$ — (нормальна) підгрупа в $\mathcal{D}^E(S^1)$, що лишає кожне виключне значення $\{1, \dots, n\}$ нерухомим, а отже $\mathcal{D}^E(S^1)/\mathcal{D}^e(S^1)$ є циклічною групою $\mathbb{Z}_{n+1}$ порядку n ;
- $\mathcal{D}_{MS^1} = \mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}^+(S^1)$.

Нехай

$$\mathcal{S}_{MP}(f) = \{(h, p) \in \mathcal{D}_{MP} \mid f = p \circ f \circ h^{-1}\}, \quad \mathcal{O}_{MP}(f) = \{p \circ f \circ h^{-1} \mid h \in \mathcal{D}_{MP}\},$$

стабілізатор та орбіта f відносно право-лівої дії групи $\mathcal{D}_{MP}$ на $\mathcal{C}^\infty(M, P)$. Тоді

$$\mathcal{S}_M(f) \times \text{id}_P \subset \mathcal{S}_{MP}(f), \quad \mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}_{MP}(f).$$

Наділимо простори $\mathcal{D}(M)$, $\mathcal{D}(P)$, та $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ відповідними W^∞ -топологіями.

Ці топології indukують деякі топології на стабілізаторах та орбітах f .

7.1 Стабілізатори

Скажемо, що дифеоморфізм $p \in \mathcal{D}(P)$ є *ліво-тривіальним* для f , якщо існує такий дифеоморфізм $h \in \mathcal{D}(M)$, що $(h, p) \in \mathcal{S}_{MP}(f)$, тобто $p \circ f = f \circ h$. Таким чином, застосовуючи p до f («діючи зліва») ми залишаємось в *правій* орбіті $\mathcal{O}_M(f)$ функції f . Це пояснює термін «ліво-тривіальний».

Нехай $p : \mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(P) \rightarrow \mathcal{D}(P)$ — стандартна проекція. Очевидно, що p є гомоморфізмом. Розглянемо обмеження p на $\mathcal{S}_{MP}(f)$. Тоді його ядро співпадає із $\mathcal{S}_M(f)$, а образ $p(\mathcal{S}_{MP}(f)) \subset \mathcal{D}(P)$ складається з усіх ліво-тривіальних для f дифеоморфізмів.

Теорема 7.1.1. [75] *Припустимо, що $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ задовольняє умови (V) та (J). Тоді*

$$(1) \text{ Випадок } P = \mathbb{R}: \quad p(\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f)) = \mathcal{D}^e(\mathbb{R}),$$

$$(2) \text{ Випадок } P = S^1, n \geq 1: \quad \mathcal{D}^e(S^1) \subseteq p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) \subseteq \mathcal{D}^E(S^1).$$

$$(3) \text{ Випадок } P = S^1, n = 0: \quad p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) = \mathcal{D}^+(S^1).$$

У випадках (1) та (2) p має неперервний переріз $\Theta : \mathcal{D}^e(P) \rightarrow \mathcal{S}_{MP}(f)$, тобто $p \circ \Theta = \text{id}(\mathcal{D}^e(P))$. Більш того, цей переріз є гомоморфізмом.

У випадку (3) p має неперервний переріз $\Theta : \mathcal{D}^+(S^1) \rightarrow \mathcal{S}_{MS^1}(f)$ тоді і лише тоді, коли розшарування $f : M \rightarrow S^1$ є тривіальним. Цей переріз також можна вибрати так, щоб він був гомоморфізмом.

Зауваження 7.1.2. Переріз проекції p в теоремі 7.1.1 повинен мати вигляд $\Theta(p) = (\theta(p), p)$, де $\theta : \mathcal{D}^e(P) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ — таке неперервне відображення, що $p \circ f = f \circ \theta(p) \in \mathcal{O}_M(f)$ для кожного дифеоморфізму $p \in \mathcal{D}^e(P)$. Відмітимо також, що Θ є гомоморфізмом тоді і лише тоді, коли гомоморфізмом є θ .

Зауваження 7.1.3. У випадку (2) покладемо $\tilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) = p^{-1}(\mathcal{D}^e(S^1))$. Так як

$\mathcal{D}^E(S^1)/\mathcal{D}^e(S^1) \approx \mathbb{Z}_n$, то з теореми 7.1.1 випливає, що

$$\mathcal{S}_{MS^1}(f) / \tilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) \approx p(\mathcal{S}_{MS^1}(f)) / \mathcal{D}^e(S^1) \approx \mathbb{Z}_c, \quad (7.5)$$

для деякого c , що ділить n .

Теорему 7.1.1 можна переформулювати наступним чином:

Теорема 7.1.4. *Наступні послідовності групових гомоморфізмів є точними:*

- (1) Випадок $P = \mathbb{R}$: $1 \rightarrow \mathcal{S}_M(f) \rightarrow \mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f) \xrightarrow{p} \mathcal{D}^e(\mathbb{R}) \rightarrow 1$,
- (2) Випадок $P = S^1$, $n \geq 1$: $1 \rightarrow \mathcal{S}_M(f) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) \xrightarrow{p} \mathcal{D}^e(S^1) \rightarrow 1$,
- (3) Випадок $P = S^1$, $n = 0$: $1 \rightarrow \mathcal{S}_M(f) \rightarrow \mathcal{S}_{MS^1}(f) \xrightarrow{p} \mathcal{D}^+(S^1) \rightarrow 1$.

Ці послідовності завжди розщепляються у випадках (1) та (2), а у випадку (3) — тоді і лише тоді, коли $f : M \rightarrow S^1$ є тривіальним розшаруванням.

Відмітимо, що існування розщеплення у випадках (1) та (2) є природним, так як p — головне $\mathcal{S}_M(f)$ -розшарування, а групи $\mathcal{D}^e(\mathbb{R})$ та $\mathcal{D}^e(S^1)$, як легко бачити є стягуваними для $n \geq 1$.

Таким чином, у виипадку (1) ми отримуємо гомеоморфізм $\mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f) \cong \mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e(\mathbb{R})$, а тому вкладення $\mathcal{S}_M(f) \subset \mathcal{S}_{M\mathbb{R}}(f)$ є гомотопічною еквівалентністю.

У випадку (2) маємо, що $\tilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f) \cong \mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e(S^1)$. Так як $\mathcal{S}_{MS^1}(f)/\tilde{\mathcal{S}}_{MS^1}(f)$ — циклічна група $\mathbb{Z}_c$, то $\mathcal{S}_{MS^1}(f) \cong \mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e(S^1) \times \mathbb{Z}_c$, а тому $\mathcal{S}_{MS^1}(f)$ є гомотопічно еквівалентним до $\mathcal{S}_M(f) \times \mathbb{Z}_c$.

Більш того, припустимо, що група $\mathbb{Z}_c$ нетривіальна, тобто $c > 1$. Тоді існує $(h, p) \in \mathcal{S}_{MS^1}(f)$, тобто $p \circ f = f \circ h$, такий, що p циклічно зсовує виключні значення $1, \dots, n$ функції f , а h — циклічно переставляє відповідні виключні множини рівня виключний f :

$$p(k) = k + n/c, \quad h(L_k) = L_{k+n/c}, \quad (k = 1, \dots, n),$$

де $L_k = f^{-1}(k)$, а кожна сума береться по модулю n . Таким чином, множини рівня $L_k, L_{k+n/c}, \dots, L_{k+n(c-1)/c}$ гомеоморфні одна одній. Такі функції, звичайно, не є типовими, хоча воми можуть бути «стійкими», тобто їх право-ліві орбіти

будуть відкритими множинами (наприклад для відображень Морса загального положення). Отже для більшості функцій ми маємо, що $\mathcal{D}^e(S^1) = p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))$ і у цьому випадку стабілізатор $\mathcal{S}_{MS^1}(f)$ гомеоморфний до $\mathcal{S}_M(f) \times \mathcal{D}^e(S^1)$, а вкладення $\mathcal{S}_M(f) \subset \mathcal{S}_{MS^1}(f)$ є гомотопічною еквівалентністю.

7.2 Орбіти

Означення 7.2.1. Критична точка z відображення $f \in C^\infty(M, P)$ називається **суттєвою**, якщо для кожного її околу U існує такий W^∞ -окіл $\mathcal{N}$ функції f в $C^\infty(M, P)$, що для кожного відображення $g \in \mathcal{N}$ має критичну точку в U .

Приклад 7.2.2. Нехай $f(x) = x^2$ і $g(x) = x^3$. Тоді $0 \in \mathbb{R}$ є суттєвою для f , але не для g .

Теорема 7.2.3. [75] Припустимо, що f задовольняє умови (V) та (J) і кожна **критична множина рівня** відображення f містить або суттєву критичну точку, або зв'язну компоненту межі ∂M .

Якщо $P = \mathbb{R}$, то вкладення $\mathcal{O}_M(f) \subset \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f)$ продовжується до гомеоморфізму

$$\mathcal{O}_M(f) \times \mathbb{R}^{n-2} \approx \mathcal{O}_{M\mathbb{R}}(f).$$

Нехай $P = S^1$ і c — індекс підгрупи $\mathcal{D}^e(S^1)$ в $p(\mathcal{S}_{MS^1}(f))$, (див. теорему 7.1.1).

а) Якщо $n = 0$, то $\mathcal{O}_M(f) = \mathcal{O}_{MS^1}(f)$.

б) Якщо n є парним, а n/c — непарним, то

$$\mathcal{O}_M(f) \times S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1} \approx \mathcal{O}_{MS^1}(f),$$

де $S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1}$ — тотальний простір єдиного нетривіального $(n-1)$ -вимірного векторного розшарування над S^1 .

в) В протилежному випадку, $\mathcal{O}_M(f) \times S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \approx \mathcal{O}_{MS^1}(f)$.

7.3 Висновки

В цьому розділі наведено результати роботи [75] про зв'язок між правими та право-лівими стабілізаторами, а також між відповідними орбітами, гладких функцій на многовидах зі значеннями в $\mathbb{R}$ та колі S^1 . Основне твердження полягає в тому, що за досить широких умов функції, відповідні стабілізатори, а також відповідні орбіти, гомотопічно еквівалентні.

Розділ 8 ГОМОТОПІЧНИЙ ТИП СТАБІЛІЗАТОРІВ ТА ОРБІТ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ НА ПОВЕРХНЯХ

Вивчення просторів гладких функцій, векторних полів, дифеоморфізмів, та 1-форм на поверхнях в останні роки було стимульоване застосуваннями в симплектичній топології та Гамільтонових системах [52, 59, 72, 150, 156, 161, 174, 175].

Зв'язні компоненти простору функцій Морса були описані в [72, 156, 161, 174]. Групи кобордизмів функцій Морса обчислені в [52].

В цьому розділі будуть обчислені гомотопічні типи стабілізаторів та орбіт широкого класу гладких функцій на компактних поверхнях відносно правих дій груп дифеоморфізмів цих поверхонь. Цей клас включає в себе множину всіх функцій Морса, що є відкритою та всюди щільною в просторі всіх гладких функцій.

Нехай M — компактна поверхня, P — числова пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1 і $f : M \rightarrow P$ — C^∞ -відображення, що задовольняє наступні умови, див. §1.3:

- (i) f приймає постійне значення на кожній компоненті межі ∂M
- (ii) всі критичні точки f є ізольованими і містяться в $\text{Int}M$.

Через $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ ми позначатимемо простір всіх C^∞ -відображень $f : M \rightarrow P$, що задовольняють лише умову (i).

Нагадаємо, що група $\mathcal{D}(M)$ дифеоморфізмів M природно діє справа на про-

сторі $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ за наступною формулою: якщо $h \in \mathcal{D}(M)$ і $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$, то

$$h \cdot f = f \circ h^{-1}.$$

Для $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ нехай $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ h = f\}$ — *стабілізатор* і $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}$ — *орбіта* функції f відносно цієї дії.

Зауваження 8.0.1. В розділі 7 стабілізатор $\mathcal{S}(f)$ позначався через $\mathcal{S}_M(f)$, а орбіта $\mathcal{O}(f)$ через $\mathcal{O}_M(f)$.

Позначимо через Σ_f множину критичних точок f , а через $\mathcal{D}(M, \Sigma_f)$ — групу всіх дифеоморфізмів h поверхні M , таких, що $h(\Sigma_f) = \Sigma_f$. Тоді можна визначити стабілізатор $\mathcal{S}(f, \Sigma_f)$ та орбіту $\mathcal{O}(f, \Sigma_f)$ функції f відносно дії групи $\mathcal{D}(M, \Sigma_f)$. Так як $\mathcal{S}(f) \subset \mathcal{D}(M, \Sigma_f)$, то $\mathcal{S}(f, \Sigma_f) = \mathcal{S}(f)$.

Наділимо простори $\mathcal{D}(M)$ та $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ топологіями W^∞ , а їх відповідні підпростори $\mathcal{S}(f)$, $\mathcal{O}(f)$ та $\mathcal{O}(f, \Sigma_f)$ — індукованими топологіями.

На протязі всієї роботи ми використовуватимемо наступні позначення: $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; $I = [0, 1]$; D^2 — замкнутий одиничний в $\mathbb{R}^2$; S^2 — одинична сфера в $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}P^2$ — дійсна проективна площина; $M\ddot{o}$ стрічка Мьобіуса; $T^2 = S^1 \times S^1$ — 2-тор; K — пляшка Клейна.

8.1 Спеціальні критичні точки

В цьому параграфі ми введемо три типи критичних точок, що гратимуть принципову роль.

Для кожної критичної точки $z \in \Sigma_f$ позначимо через $\widehat{\mathcal{D}}(\Delta_f, z)$ групу паростків дифеоморфізмів $h : (M, z) \rightarrow (M, z)$ в точці z , що лишають інваріантними шари Δ_f біля z , тобто якщо V — окіл точки z і $h : V \rightarrow M$ — таке вкладення, що $h(z) = z$, то $h \in \widehat{\mathcal{D}}(\Delta_f, z)$ тоді і лише тоді, коли $h(\omega \cap V) \subset \omega$ для кожного шару ω .

Означення 8.1.1. (Спеціальні критичні точки) Нехай $z \in \Sigma_f$ — ізольована критична точка f . Скажемо, що z є **спеціальною** для f , якщо існує окіл U точки z і векторне поле F_z на U з наступними властивостями:

(SP1) $df(F_z) \equiv 0$ і z є єдиною особливою точкою F_z ;

(SP2) існує така база $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J}$ компактних зв'язних D -околів точки z , що для кожного $V \in \beta_z$ відображення зсуву $\varphi_{F_z, V} : \text{func}(F_z, V) \rightarrow Sh(F_z, V)$ є $W^{\infty, \infty}$ -відкритим, а отже локальним гомеоморфізмом відносно топологій W^∞ .

Нехай $z \in \Sigma_f$ — спеціальна критична точка f і F — векторне поле в околі точки z , що задовольняє умови (SP1) та (SP2). Тоді згідно (SP1) орбіти F співпадають з лініями рівня f біля z , а тому

$$\widehat{\mathcal{D}}(F, z) = \widehat{\mathcal{D}}(\Delta_f, z). \quad (8.1)$$

Лема 8.1.2. Нехай M — орієнтовна поверхня і $f : M \rightarrow P$ — C^∞ -функція, яка приймає постійні значення на кожній компоненті межі ∂M , і у якій всі критичні точки є спеціальними. Тоді існує таке векторне поле F на M , що

(а) $df(F) \equiv 0$, причому $F(z) = 0$ тоді і лише тоді, коли $z \in \Sigma_f$.

(б) $F = \pm F_z$ біля z для кожної точки $z \in \Sigma_f$.

Більш того, будь-яке векторне поле F , що задовольняє (а) та (б), має таку наступну властивість:

(с) відображення зсуву $\varphi_F : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$ є або гомеоморфізмом або $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням відносно топологій W^∞ . Тому такою ж властивістю володіє обмеження $\varphi_F|_{\Gamma^+} : \Gamma^+ \rightarrow \varphi_F(\Gamma^+)$, а обидва простори $Sh(F)$ та $\varphi_F(\Gamma^+)$ є або стягнутими, або гомотопічно еквівалентними до кола S^1 .

Доведення. (а) & (б) Так як M є орієнтовною, то на ній існує симплектична структура і ми можемо побудувати відповідне Гамільтонове векторне поле F'

функції f . За означенням, це векторне поле задовольняє умову (а) і є паралельним до F_z в околі кожної точки $z \in \Sigma_f$. Змінюючи, якщо потрібно, знак F_z , можна вважати, що F' та F_z мають однакові напрямки біля z . Тоді, використовуючи техніку розбиттів одиниці, можна склеїти F' з усіма полями F_z так, що результуюче векторне поле F на M задовольнятиме умови (а) та (b).

(с) Скористаємось наслідком 6.8.1. З (b) та умови (SP2) випливає, що для кожної точки $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ виконується умова (B1) з §6.8. Тоді згідно наслідку 6.8.1 для доведення твердження (с) достатньо показати, що кожна регулярна точка $z \in M \setminus \text{Fix}(\mathbf{F})$ поля F задовольняє одну з умов (R1) та (R2), а кожна особлива точка $z \in \text{Fix}(\mathbf{F})$ поля F — одну з умов (S1) та (S2).

Нехай z — регулярна точка f . Тоді z є також неособливою точкою для F . Позначимо через ω — зв'язну компоненту лінії рівня $f^{-1}f(z)$, що містить точку z .

Якщо ω містить критичні точки f , то орбіта o_z точки z є або «дугою, що з'єднує дві критичні точки» або «петлею в деякій критичній точці» f , див. точки z_1 та z_2 на Рис. 8.1.1. В обох випадках гранична множина орбіти o_z є скінченною, а тому z є нерекурентною, а отже задовольняє (R1).

В протилежному випадку ω взагалі не містить критичних точок, а тому є дифеоморфною до кола S^1 . Отже ω — періодична орбіта F , див. Рис. 8.1.1. Тоді легко бачити, що відображення першого повертання цієї орбіти є тотожним, а отже z має властивість (R2).

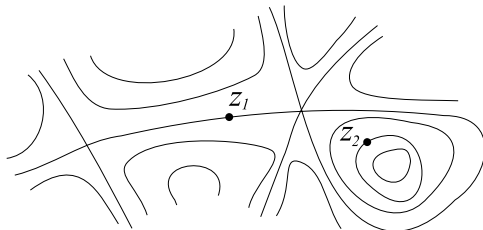


Рис. 8.1.1

Нехай z — критична точка f і U — окіл z , на якому $F = F_z$. Тоді за умовою

(SP2) означення 8.1.1 існує база $\beta_z = \{V_j\}_{j \in J} \subset U$, що складається з таких D -околів точки z , що для кожного $V \in \beta_z$ відображення зсуву поля F_z

$$\varphi_{F_z|U,V} : \text{func}(F_z|_U, V) \rightarrow Sh(F_z|_U, V) \quad (8.2)$$

є локальним гомеоморфізмом між відповідними топологіями W^∞ . Так як $F = F_z$ на U , то відображення (8.2) співпадає з наступним відображенням

$$\varphi_{F|U,V} : \text{func}(F|_U, V) \rightarrow Sh(F|_U, V)$$

Зокрема, $\varphi_{F|U,V}$ є також відкритим. Тому згідно теореми фрагментації 6.3.1 відкритим є відображення зсуву φ_F .

Припустимо, що z є *локальним екстремумом* f . Тоді z має як завгодно малі F -інваріантні околи, див. Рис. 8.1.2а), тобто задовольняє умову (S1). Нарешті

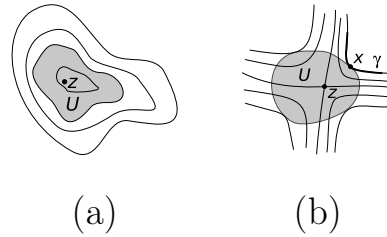


Рис. 8.1.2: Окіл U

розглянемо випадок, коли z є *сідловою точкою*. Тоді існує як завгодно малий 2-диск U такий, що ∂U є гладкою і трансверсальною до орбіт поля F скрізь за виключенням скінченного числа точок $x_1, \dots, x_k$, причому для кожної точки x_i існує відкрита дуга γ_i на орбіті o_{x_i} , що містить x_i і $\gamma_i \cap \partial U = \{x_i\}$, див. Рис. 8.1.2b). Звідси випливає властивість (S2) для точки z . $\square$

Означення 8.1.3. Скажемо, що спеціальна критична точка z є **S-точкою** для f якщо z не є локальним екстремумом f , (тобто z — сідлова точка) і існує векторне поле F , що задовольняє умови (SP1) та (SP2) і до того ж $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{D}(F, z)$. Таке векторне поле називатимемо **спеціальним** векторним полем для z .

Нехай тепер z — локальний екстремум f . Тоді можна вважати, що U є зв'язним і F -інваріантним, причому всі орбіти F за виключенням z є періодичними, див. §1.3. Нехай $\theta : U \setminus z \rightarrow (0, +\infty)$ — функція, що ставить у відповідність кожній точці $x \in U \setminus z$ її період $\text{Per}(x)$. Тоді з гладкості відображення першого повертання випливає, що θ належить класу C^∞ на $U \setminus z$, хоча вона може бути розривною в точці z . Назвемо θ *функцією періодів* поля F .

В [92] показано, що лінійною заміною координат лінійна частина $\nabla F(z)$ поля F в точці z , зводиться до однієї з наступних форм:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

для деякого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Нехай $J_z : \widehat{D}(F, z) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ — відображення, що ставить у відповідність кожному $h \in \widehat{D}(F, z)$ його матрицю Якобі в точці z . Тоді з формули (2.19) випливає, що образ $J_z(\widehat{Sh}(F, z))$ співпадає з $\{e^{\nabla F(z) \cdot t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, а тому ми отримуємо наступні три можливості для $J_z(\widehat{Sh}(F, z))$:

$$a) SO(2), \quad b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad c) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (8.4)$$

Означення 8.1.4. Нехай z — спеціальний локальний екстремум f . Скажемо, що z є **Р-точкою** для f якщо існує векторне поле F на деякому околі U точки z , що задовольняє умови (SP1) та (SP2) причому відповідна функція періодів $\theta : U \setminus z \rightarrow (0, +\infty)$ гладко продовжується на весь окіл U .

В цьому випадку F також називатиметься **спеціальним**.

Лема 8.1.5. [92, 139] Нехай $z \in \Sigma_f$ — локальний екстремум f . Виберемо локальні координати $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ біля z в яких $z = 0$. Нехай $F = (F_1, F_2)$ — векторне поле класу C^∞ біля z таке, що $F(f) \equiv 0$ і z є єдиною особливою точкою F . Тоді наступні умови (P1)-(P6) еквівалентні.

(P1) z є Р-точкою f , а F є відповідним спеціальним векторним полем.

(P2) Власні значення $\nabla F(z)$ є ненульовими і суто уявними, а тому $\nabla F(z)$ можна звести до виду а) з (8.3).

(P3) Існують такі паростки $\mathcal{C}^\infty$ функцій $\beta, \bar{X}, \bar{Y} : U \rightarrow \mathbb{R}$ в точці z , що $\beta(z) \neq 0$, $\bar{X}$ та $\bar{Y}$ є **плоскими** в z , а F є $\mathcal{C}^\infty$ -еквівалентним до векторного поля виду

$$\beta(x^2 + y^2) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \bar{X} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

(P4) Існує зв'язний гладкий 2-підмноговид $V \subset U$ такий, що $z \in \text{Int}V$, а відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є періодичним, тобто $\ker(\varphi_{F,V}) \neq \{0\}$.

(P5) Для кожного зв'язного гладкого 2-підмноговиду $V \subset U$ відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є періодичним.

(P6) Підгрупа $J_z(\widehat{Sh}(F, z))$ спряжена в $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ до $\text{SO}(2)$.

В цих випадках $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{D}^+(F, z)$, $\ker(\varphi_{F,V}) = \{n\theta|_V\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для довільного зв'язного 2-підмноговиду $V \subset U$.

Більш того, існують такі $\mathcal{C}^\infty$ -паростки $g, \mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ в точці z , що μ є плоскою в $z = 0$, а $f - \mathcal{C}^\infty$ -еквівалентна до функції $g(x^2 + y^2) + \mu(x, y)$.

Якщо хоча б одна з цих умов (P1)-(P6) порушується, то $\lim_{x \rightarrow z} \theta(z) = +\infty$.

Доведення. Еквівалентність $(P1) \Leftrightarrow (P2) \Leftrightarrow (P3)$ встановлена в [92]. В дійсності F. Takens [139] описав нормальні форми векторних полів, що задовольняють умову (P2). Він довів, що існує два типи таких форм. Перша описується в умові (P3). Більш того, в [92] показано, що векторне поле другого типу має незамкнуті орбіти як завгодно біля z , а тому в цьому випадку F може належати лише першому типу. Це доводить, що $(P2) \Rightarrow (P3)$. Доведення $(P3) \Rightarrow (P1) \Rightarrow (P2)$ є основним результатом роботи [92].

$(P4) \Rightarrow (P1)$. Припустимо, що $\ker(\varphi_{F,V}) = \{n\nu\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для деякої $\mathcal{C}^\infty$ -функції $\nu : V \rightarrow (0, +\infty)$. Тоді за наслідком 4.2.5 $\nu = \text{Per} \equiv \theta$ на відкритій і всюди щільній підмножині $Q \subset V \setminus \{z\}$, а тому $\nu = \theta$ на $V \setminus \{z\}$. Отже θ продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції ν в околі z .

$(P1) \Rightarrow (P5)$. Припустимо, що θ належить класу $\mathcal{C}^\infty$ на U і нехай $V \subset U$ — деякий зв'язний 2-підмноговид. Тоді $\mathbf{F}(x, \theta(x)) = x$ для всіх $x \in V$, а тому

$\theta|_V \in \ker(\varphi_{F,V}) \neq \{0\}$. За попередніми аргументами $\ker(\varphi_{F,V}) = \{n\theta|_V\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Імплікація (P5) $\Rightarrow$ (P4) очевидна, імплікація (P2) $\Leftrightarrow$ (P6) випливає з (8.4), а тожність $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{D}^+(F, z)$ — з леми 3.2.8. Решта тверджень також доведені в [92]. $\square$

Означення 8.1.6. Нехай z — спеціальний локальний екстремум функції f . Скажемо, що $z \in \mathbf{N}$ -*точкою* для f , якщо існує векторне поле F в околі точки z , яке задовольняє умови (SP1) та (SP2) і таке, що

(i) відповідна функція періодів $\theta : U \setminus \{z\} \rightarrow (0, +\infty)$ не може бути гладко продовжена на весь окіл, а отже за лемою 8.1.5 $\lim_{x \rightarrow z} \theta(x) = +\infty$;

(ii) $\ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z)$;

(iii) якщо $\nabla F(z) = 0$, то підгрупа $J_z(\widehat{D}(F, z)) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ є скінченною.

У цьому випадку векторне поле F також називатиметься **спеціальним**.

Умова (ii) означає, що для кожного $h \in \widehat{D}(F, z)$ з $J_z(h) = \mathrm{id}$ існує паросток $\mathcal{C}^\infty$ -функції $\alpha \in \mathcal{C}_z^\infty(M)$ такий, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ для всіх x досить близьких до z .

Розглянемо наступні підмножини в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{A}_{++} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{A}_{--} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{A}_{+-} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{A}_{-+} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_{++} \cup \mathcal{A}_{--}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_{++} \cup \mathcal{A}_{--} \cup \mathcal{A}_{-+} \cup \mathcal{A}_{+-}.$$

Очевидно, що $\mathcal{A}_{++} \subset \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$ є підгрупами в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, причому $\mathcal{A}_{++}$ — є компонентою одиниці обох груп $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_+/\mathcal{A}_{++} \approx \mathbb{Z}_2$ і $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{++} \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Лема 8.1.7. [91] Нехай z — $\mathbf{N}$ -точка функції f і F — спеціальне векторне поле для z . Тоді виконуються наступні умови.

(N1) матриця $\nabla F(z)$ є нільпотентною, а отже вона подібна або до однієї з матриць b) або c) з (8.3).

(N2) Якщо $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, див. b) з (8.3), то

$$J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = \mathcal{A}_{++}, \quad (8.5)$$

$$\widehat{Sh}(F, z) = J_z^{-1}(\mathcal{A}_{++}), \quad (8.6)$$

$$J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) \subseteq \mathcal{A}_+, \quad (8.7)$$

$$J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z)) \subseteq \mathcal{A}. \quad (8.8)$$

Тому або $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ або $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) \approx \mathbb{Z}_2$, а фактор-група $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z)$ ізоморфна до деякої підгрупи групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(N3) Якщо $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, див. c) з (8.3), то $\ker(J_z) = \widehat{Sh}(F, z)$, а образ $J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z))$ є скінченною циклічною підгрупою в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ деякого порядку n_z , а отже $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) \approx \mathbb{Z}_{n_z}$. Якщо крім цього $\widehat{\mathcal{D}}(F, z) \neq \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$, то $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z)$ є дієдральною групою $\mathbb{D}_{n_z}$.

Доведення. Умова (N1) впливає з (P6) та (2.19).

(N2). (8.5) слідує з (2.19). Щоб довести (8.6) розглянемо паросток $h \in J_z^{-1}(\mathcal{A}_{++})$. Так як $J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = \mathcal{A}_{++}$, то існує такий паросток $g \in \widehat{Sh}(F, z)$, що $J_z(g) = J_z(h)$. Тому $g^{-1} \circ h \in \ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z)$, а отже $h \in \widehat{Sh}(F, z)$.

(8.8) доведено в [92], а значить $J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) \subset \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) = \mathcal{A}_+$. Це доводить (8.7).

Нарешті умова (N3) впливає з відомого факту, що кожна скінчена підгрупа в $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ є циклічною. $\square$

Згідно умов (N2) та (N3) леми 8.1.7 можна виділити наступні два типи **N**-точок.

Означення 8.1.8. **N**-точка з функції f називатиметься **NN-точкою**, якщо $\nabla F(z)$ є ненульовою нільпотентною матрицею. В протилежному випадку $\nabla F(z) = 0$ і ми називатимемо z — **NZ-точкою**.

Приклад. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — однорідний многочлен без кратних лінійних

множників, тобто

$$f = L_1 \cdots L_a \cdot Q_1^{q_1} \cdots Q_b^{q_b}, \quad (8.9)$$

де L_i , $i = 1, \dots, a$, — ненульова лінійна функція, Q_j , $j = 1, \dots, b$, — незвідна над $\mathbb{R}$ (визначена) квадратична форма, $q_j \geq 1$, $L_i/L_{i'} \neq \text{const}$ для $i \neq i'$ і $Q_j/Q_{j'} \neq \text{const}$ для $j \neq j'$. Тоді

$$D = Q_1^{q_1-1} \cdots Q_b^{q_b-1}.$$

є найбільшим спільним дільником частинних похідних f'_x та f'_y і можна визначити наступне *поліноміальне* векторне поле на $\mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = -(f'_y/D) \frac{\partial}{\partial x} + (f'_x/D) \frac{\partial}{\partial y}$$

яке називається *зведеним Гамільтоновим* векторним полем функції f , див. §6.10.

Так як f не має кратних лінійних множників то початок координат $0 \in \mathbb{R}^2$ є ізольованою особливою точкою F .

Лема 8.1.9. Початок координат $0 \in \mathbb{R}^2$ є **спеціальною** критичною точкою f і належить одному з типів S, P або N, а F є відповідним спеціальним векторним полем. Більш детально,

- (1) якщо $a > 0$, тобто f має лінійні множники, то 0 є S-точкою;
- (2) якщо $a = 0$ і $b = 1$, тобто $f = Q_1^{q_1}$, то $0 \in \mathbb{R}^2$ є P-точкою;
- (3) у всіх інших випадках, тобто коли $a = 0$ і $b \geq 2$, а отже $f = Q_1^{q_1} \cdots Q_b^{q_b}$, точка $0 \in \mathbb{R}^2$ є NZ-точкою f .

Доведення. Виконання умови (SP1) означення 8.1.1, тобто що $F(f) \equiv 0$, очевидна. Умова (SP2) доведена в теоремі 6.10.3. Отже $0 \in \mathbb{R}^2$ є спеціальною точкою.

(1) Нехай $a > 0$. Згідно теореми 6.10.3 $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{D}(F, z)$, тобто z є S-точкою.

(2) Припустимо, що $a = 0$ і $b = 1$. Тоді лінійною заміною координат функція f зводиться до вигляду $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{q_1}$, а значить $F(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Тоді з умови (P2) леми 8.1.5 отримуємо, що 0 є P-точкою f .

(3) Припустимо, що $a = 0$ і $b \geq 2$. Тоді умова (i) означення 8.1.6 випливає з твердження 3) теореми 4.8.1, умова (ii) — з тотожності $Sh(F, V) = \mathcal{E}(\mathbf{F}, V, S)_2$ доведеної твердженні 1) в теоремі 6.10.3, а (iii) — з твердження 3(c) теореми 6.10.3. Крім того, також зрозуміло, що $\nabla F(0) = 0$, а значить $0 \in \mathbf{NZ}$ -точкою. $\square$

Продовження функцій зсуву. Нехай $\mathbf{F}$ — потік на многовиді M , L — замкнута $\mathbf{F}$ -інваріантна підмножина в M і U — $\mathbf{F}$ -інваріантний окіл L .

Припустимо, що $h \in \mathcal{D}(F)$ має функцію зсуву α на U , тобто $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ для всіх $x \in U$. Тоді, взагалі кажучи, α не може бути продовжений до функції зсуву для h на всьому M .

Твердження 8.1.10. *Припустимо, що існують $\mathbf{F}$ -інваріантний окіл V множини L і гладка функція $\mu : M \rightarrow I$ такі, що $\bar{V} \subset U$, (i) $\mu = 1$ на V ; (ii) $\mu = 0$ в деякому околі множини $\overline{M \setminus U}$; (iii) μ є постійною уздовж траєкторій $\mathbf{F}$. Тоді h є ізотопним в $\mathcal{D}^+(F)$ до дифеоморфізма, що є тотожним на $\bar{V}$ і співпадає з h на $M \setminus U$.*

Доведення. Розглянемо наступну функцію $\nu = \alpha \cdot \mu$. Тоді з умови (ii) випливає, що ν коректно визначена на всьому M .

Покажемо, що для кожного $t \in I$ відображення $\tilde{h}_t : M \rightarrow M$, визначене за формулою $\tilde{h}_t(x) = \mathbf{F}(x, t\nu(x))$ є дифеоморфізмом M .

Дійсно, $\tilde{h}_t = \varphi_F(t\nu)$ є дифеоморфізмом тоді і лише тоді, коли $t\nu \in \Gamma^+$, тобто, коли

$$d(t\nu(F))(x) = t d\nu(F)(x) > -1 \quad (8.10)$$

для всіх $x \in M$, де F — векторне поле, що породжує $\mathbf{F}$. Так як h є дифеоморфізмом, то $d\alpha(F) > -1$. Більш того, з умови (iii) на μ випливає, що $d\mu(F) = 0$. Тому,

$$t d\nu(F) = t d(\mu \alpha)(F) = t \alpha d\mu(F) + t \mu d\alpha(F) = t \mu d\alpha(F) > -1.$$

Отже $\tilde{h}_t$ є дифеоморфізмом для всіх $t \in I$.

Тоді ізоотопія $h_t = h \circ \tilde{h}_t$ з'єднує h в $\mathcal{D}(F)$ з дифеоморфізмом h_1 , що є тотожним на $\bar{V}$ і співпадає з h на $M \setminus U$. Твердження 8.1.10 доведено. $\square$

Лема 8.1.11. *Нехай z — спеціальна критична точка f , що є локальним екстремумом, F — відповідне спеціальне векторне поле, визначене в деякому околі U точки z , $W \subset V$ — два відкритих зв'язних F -інваріантних околі точки z такі, що $\bar{W} \subset V$ і $h : V \rightarrow V$ — дифеоморфізм, що зберігає орієнтацію та орбіти поля F .*

(1) *Нехай $Y \subset V \setminus \{z\}$ — довільна зв'язна підмножина і $\alpha : Y \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка функція зсуву для h на Y . Якщо z є Р-точкою для f , то α продовжується до єдиної C^∞ -функції зсуву для h на всьому V .*

(2) *Будь-яка функція зсуву $\alpha : W \rightarrow \mathbb{R}$ для h на W продовжується до C^∞ -функції зсуву для h на всьому V .*

Доведення. Так як h зберігає орієнтацію, то неважко показати, що h має C^∞ -функцію зсуву $\beta : V \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{R}$, див. [92]. Ця функція визначена з точністю до доданку $n\theta$, $n \in \mathbb{Z}$. Зокрема, будь-яка інша функція зсуву для h , що визначена на $Y \subset V \setminus \{z\}$ співпадає з $\beta + n\theta$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Припустимо, що z є Р-точкою, тобто θ продовжується до C^∞ -функції на V . Тоді, як тільки що було відмічено, $\alpha = \beta + n\theta$ на Y для деякого n .

Покажемо, що β продовжується до C^∞ -функції на V . Дійсно, за лемою 8.1.5 $h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z) = \widehat{S}h(F, z)$, а тому h має C^∞ -функцію зсуву β' на деякому околі z . Тоді $\beta' = \beta + k\theta$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$. Так як β' та θ належать класу C^∞ біля z , то β також є функцією класу C^∞ .

Тому α єдиним чином продовжується до C^∞ -функції $\beta + n\theta$ на V .

(2) Маємо, що $\alpha = \beta + n\theta$ на $W \setminus \{z\}$ для деякого n , хоча β та θ навіть не визначені в точці z . З іншого боку, ці функції належать класу C^∞ на $V \setminus \{z\}$, а тому можна визначити α на $V \setminus W$ поклавши $\alpha = \beta + n\theta$. Отже $\alpha \in C^\infty$ -функцією на всьому V . $\square$

Потоки на $S^1 \times [0, 1]$. Нехай $\mathbf{F}$ — такий потік на циліндрі $C = S^1 \times I$, що його орбіти мають вигляд $S^1 \times \{t\}$, $t \in I$. Таким чином $\text{Fix}(\mathbf{F}) = \emptyset$. Для кожного $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ позначимо $C_\varepsilon = S^1 \times [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$.

Лема 8.1.12. (1) $\mathcal{D}^+(F) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)$. Тому для кожного $h \in \mathcal{D}^+(F)$ існує функція зсуву відносно $\mathbf{F}$.

(2) Припустимо, що дифеоморфізм $h \in \mathcal{D}^+(F)$ має часткову функцію зсуву $\alpha : S^1 \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, де $\varepsilon \in (0, 1)$. Тоді α єдиним чином продовжується до функції зсуву для h на всьому циліндрі C .

(3) Нехай t — скручування Дена уздовж кривої $S^1 \times \{1/2\}$. Припустимо, що h є нерухомим на C_ε . Тоді h ізотопний в $\mathcal{D}_{\text{id}}(F)$ до t^k для деякого $k \in \mathbb{Z}$. Більш того, якщо, $\alpha = 0$ на $S^1 \times [0, \varepsilon]$, то $\alpha = 0$ на $S^1 \times [1 - \varepsilon, 1]$ тоді і лише тоді, коли $k = 0$, тобто h є ізотопним до тотожного відносно C_ε .

(4) Нехай $h : C_{2\varepsilon} \rightarrow C_{2\varepsilon}$ — дифеоморфізм, що зберігає множини виду $S^1 \times \{t\}$, змінює їх орієнтацію і задовольняє умову $h^2 = \text{id}_{C_{2\varepsilon}}$. Тоді існує такий дифеоморфізм g циліндра C , що $g = h$ на C_ε , $g \in \mathcal{D}(F)$ і $g^2 = \text{id}_C$.

Продовження функцій зсуву деформацій.

Лема 8.1.13. Нехай $z \in \Sigma_f$ — критична точка f одного з типів **S**, **P**, або **N**, F — спеціальне векторне поле для z , визначене на деякому околі U точки z , який не містить інших критичних точок f , $V \subset U$ — відкритий окіл z і $\hat{V} = V \setminus \{z\}$. Нехай також $H : V \times I \rightarrow U$ — така r -гомотопія в $\mathcal{E}(F, V)$, що $H_0 = i_V : V \subset U$ і $\Lambda : \hat{V} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ — єдина r -гомотопія така, що $\Lambda_0 = 0$ і Λ_t є гладкою функцією зсуву для H_t на $\hat{V}$ для кожного $t \in I$, див. наслідок 5.1.8. Якщо z є **N**-точкою, то додатково припустимо, що $r \geq 1$. Тоді для кожного $t \in I$ функція Λ_t продовжується до C^∞ -функції на всьому V .

Доведення. Спочатку покажемо, що $H_t \in \widehat{Sh}(F, z)$ для кожного $t \in I$, тобто, що H_t має C^∞ -функцію зсуву α_t на деякому околі W точки z в V .

Дійсно, так як $H_0 = i_V$, то паросток H_t в z належить до $\widehat{D}^+(F, z)$. Тому якщо $z \in$ або **S**- або **P**-точкою, то за означеннями 8.1.3 та 8.1.4 $H_t \in \widehat{Sh}(F, z)$.

Нехай тепер, що $z \in$ **N**-точкою. Тоді за припущенням $r \geq 1$, а значить матриця $J_z(H_t)$ неперервно залежить від t . Якщо $\nabla F(z) \in$ ненульовою нільпотентною, то з умови (N3) леми 8.1.7 випливає, що $J_z(H_t)$ належить до компоненти зв'язності $\mathcal{A}_{++}$ одиниці групи A , бо $J_z(H_0) = \text{id}$. Тому $H_t \in J_z^{-1}(\mathcal{A}_{++}) = \widehat{Sh}(F, z)$.

Аналогічно, якщо $\nabla F(z) = 0$, то множина можливих значень для $J_z(H_t)$ є скінченною, а отже $J_z(H_t) = J_z(H_0) = \text{id}$ для всіх $t \in I$. Тому згідно (ii) означення 8.1.6 $H_t \in \ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z)$.

Таким чином, Λ_t та α_t є функціями зсуву для H_t на деякому зв'язному околі W точки z , а значить $\Lambda_t - \alpha_t \in \ker(\varphi_{F, \hat{W}})$, де $\hat{W} = W \setminus \{z\}$.

Якщо $z \in$ **S**-точкою, то $\hat{W}$ містить незамкнуті орбіти поля F , а отже $\ker(\varphi_{F, \hat{W}}) = \{0\}$. Тому $\Lambda_t = \alpha_t$ належить класу $\mathcal{C}^\infty$ на $\hat{W}$. Покладемо $\Lambda_t(z) = \alpha_t(z)$. Тоді Λ_t стає гладкою на всьому V .

Припустимо, що $z \in$ **P**-точкою. Тоді $\ker(\varphi_{F, \hat{W}}) = \{n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$, а значить $\Lambda_t - \alpha_t = n\theta$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$. Але за означенням 8.1.4 θ , а тому і $\Lambda_t = \alpha_t + n\theta$, гладко продовжуються на весь окіл W .

Припустимо, що $z \in$ **N**-точкою, тобто $\lim_{x \rightarrow z} \theta(x) = +\infty$. Тоді відображення зсуву $\varphi_{F, W}$ є неперіодичним, тобто α_t має *єдину* функцію зсуву для H_t на W . З припущення $r \geq 1$ випливає, що обмеження $H : W \times I \rightarrow U$ є по меншій мірі 1-гомотопією в $Sh(F, W)$, яка має таку функцію зсуву $\Lambda : \hat{W} \times I \rightarrow \mathbb{R}$, що $\Lambda_0 = 0$ є гладкою на W . Тоді за теоремою 5.2.2 $\Lambda_t = \alpha_t$ на $\hat{W}$ для всіх інших $t \in I$. Отже, Λ_t гладко продовжується на весь окіл V . $\square$

8.2 Основні результати

Нехай $f : M \rightarrow P$ гладка функція. Накладемо на неї наступні аксіоми.

Аксіома (A1). f приймає постійні значення на кожній зв'язній компоненті

∂M і $\Sigma_f \subset \text{Int}M$.

Аксіома (A2). Кожна критична точка f є або S- або P-, або N-точкою.

Аксіома (A3). Відображення $p : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{O}(f)$, визначене за формулою $p(h) = f \circ h$ є розширенням Серра з шаром $\mathcal{S}(f)$ у відповідних топологіях W^∞ , тобто задовольняє аксіому про підняття гомотопій для CW-комплексів.

Множини S-, P- та S-точок функції f позначатимемо через Σ_f^S , Σ_f^P та Σ_f^N відповідно.

Теорема 8.2.1. Припустимо, що $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіоми (A1) і (A2). Тоді

$$\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty = \cdots = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^2 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1. \quad (8.11)$$

Більш того, кожна з наступних умов гарантує, що $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^0$:

- (a) f не має критичних точок типу N, тобто $\Sigma_f^N = \emptyset$, (наприклад, коли f є відображенням Морса);
- (b) M є 2-диском, Σ_f складається з єдиної критичної точки z , яка належить типу N з $n_z = 1$;
- (c) M є 2-сферою, Σ_f складається рівно з двох критичних точок z' і z таких, що z' належить типу P, а z — типу N з $n_z = 1$.

Простір $\mathcal{S}_{\text{id}}(f) := \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty$ є стягуваним тоді і лише тоді, коли виконана одна з наступних умов:

- f має хоча б одну критичну точку типу S або N;
- M є неорієнтовною.

У всіх інших випадках $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є гомотопічно еквівалентним до кола S^1 .

Теорема 8.2.2. (1) Припустимо, що $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіоми (A1)-(A3) і має хоча б одну S-точку. Тоді $\pi_i \mathcal{O}_f(f) = \pi_i M$ для $i \geq 3$, $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$, а для $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ ми маємо наступну точну послідовність:

$$1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}(M) \oplus \mathbb{Z}^k \rightarrow \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1, \quad (8.12)$$

де $\mathcal{G}$ — деяка скінченна група і $k \geq 0$.

(2) Нехай f — функція загального положення, тобто на кожному критичному рівні існує всього одна критична точка. Тоді група $\mathcal{G}$ в формулі (8.12) є одиничною, а тому $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \approx \pi_1 \mathcal{D}(M) \oplus \mathbb{Z}^k$. Зокрема, ця група є абелевою групою.

Припустимо, що $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$. Тоді $\mathcal{O}_f(f)$ має гомотопічний тип m -тора $T^m = S^1 \times \cdots \times S$, де

$$m = \begin{cases} k + 2, & M = T^2 \\ k + 1, & M = D^2, S^1 \times I, M\ddot{o} \\ k, & \chi(M) < 0. \end{cases}$$

Сформулюємо без доведення ще кілька результатів.

Теорема 8.2.3. [74] Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення Морса, яке не має критичних точок індексу 1. Тоді f можна представити в наступному вигляді

$$f = p \circ \tilde{f} : M \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{P} \xrightarrow{p} P,$$

де $\tilde{f}$ — одне з відображень типу (A)-(E), наведених в таблиці нижче, $\tilde{P}$ — або числова пряма $\mathbb{R}$, або коло S^1 , і p — або накриваюче відображення, або вкладення. Гомотопічні типи $\mathcal{O}_f(f)$ та $\mathcal{O}_f(f, \Sigma_f)$ залежать тільки від $\tilde{f}$ і описуються наступною таблицею. Пляшка Клейна K розглядається тут

Тип	$\tilde{f} : M \rightarrow \tilde{P}$		c_0	c_1	c_2	$\mathcal{O}_f(f)$	$\mathcal{O}_f(f, \Sigma_f)$
(A)	$S^2 \rightarrow \mathbb{R}$	$\tilde{f}(x, y, z) = z$	1	0	1	S^2	точка
(B)	$D^2 \rightarrow \mathbb{R}$	$\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2$	1	0	0	точка	
(C)	$S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}$	$\tilde{f}(\phi, t) = t$	0	0	0	точка	
(D)	$T^2 \rightarrow S^1$	$\tilde{f}(x, y) = x$	0	0	0	S^1	
(E)	$K \rightarrow S^1$	$\tilde{f}(\{x\}, \{y\}) = \{2x\}$	0	0	0	S^1	

як фактор-простір T^2 за інволюцією $\xi(x, y) = (x + 1/2, -y)$. □

Для функції $f \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ покладемо

$$\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M).$$

Більш того, для підмножини $X \subset M$ позначатимемо через $\mathcal{S}'(f, X)$ підгрупу в $\mathcal{S}'(f)$, що складається з дифеоморфізмів нерухомих в деякому околі множини X .

Теорема 8.2.4. [87]. *Припустимо, що $\chi(M) < 0$. Нехай $f : M \rightarrow P$ — гладке відображення, що задовольняє аксіоми (A1) та (A2). Тоді існує компактна підповерхня $X \subset M$ з наступними властивостями.*

- (a) *f є приймає постійні значення на кожній зв'язній компоненті межі ∂X і кожна компонента зв'язності B поверхні $\overline{M \setminus X}$ є або 2-диском, або циліндром, або стрічкою Мьобіуса. Більш того, B обов'язково містить критичні точки f .*
- (b) *Нехай B — компонента зв'язності $M \setminus X$ і $h \in \mathcal{S}'(f, X)$. Тоді обмеження $h|_B$ ізотопне в B до id_B відносно деякого околу множини $\partial B \cap X$.*
- (c) *Вкладення $i : \mathcal{S}'(f, X) \subset \mathcal{S}'(f)$ індукує ізоморфізм $\pi_0 \mathcal{S}'(f, X) \approx \pi_0 \mathcal{S}'(f)$.*

З цієї теореми отримуємо наслідок, який спрощує обчислення фундаментальної групи $\pi_1 \mathcal{O}(f)$.

Нехай $X \subset M$ підповерхня, як в теоремі 8.2.4, і $B_1, \dots, B_l$ — всі компоненти зв'язності $\overline{M \setminus X}$. Для кожного $i = 1, \dots, l$ позначимо через $\mathcal{D}_{\text{id}}(B_i, \partial B_i)$ групу дифеоморфізмів B_i , нерухомих на деякому околі ∂B_i і ізотопних до id_{B_i} відносно деякого околу ∂B_i . Нехай також $\mathcal{S}'(f|_{B_i}, B_i)$ — стабілізатор обмеження $f|_{B_i} : B_i \rightarrow P$ відносно правої дії групи $\mathcal{D}_{\text{id}}(B_i, \partial B_i)$. Тоді маємо очевидний ізоморфізм груп:

$$\psi : \mathcal{S}'(f, X) \approx \times_{i=1}^l \mathcal{S}'(f|_{B_i}, B_i), \quad \psi(h) = (h|_{B_1}, \dots, h|_{B_l}), \quad (8.13)$$

Легко бачити, що, в дійсності, ψ є гомеоморфізмом відносно топологій W^∞ .

Наслідок 8.2.5. *За умов теореми 8.2.4 припустимо, що f також задовольняє аксіому (A3). Тоді має місце ізоморфізм:*

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \approx \bigtimes_{i=1}^l \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{B_i}, B_i).$$

Таким чином, загальна проблема обчислення $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ для відображень, що задовольняють аксіоми (A1)-(A3) зводиться до випадку $\chi(M) \geq 0$.

Обговорення аксіом. Аксіоми (A1) і (A2) накладають умови лише на шарування Δ_f of f . Наприклад, припустимо, що $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє ці аксіоми і має глобальний мінімум $\min f = 0$. Тоді для кожного $n \geq 2$ функція f^n також задовольняє ці аксіоми. Заміна f на її n -тий степінь робить глобальний мінімум f “більш виродженим”, але не змінює шарування Δ_f .

З іншого боку, якщо f задовольняє аксіому (A3), то звичайно орбіта $\mathcal{D}(f^n)$ функції f^n для $n \geq 2$ має нескінченну корозмірність в $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ і перевірка аксіоми (A3) для f^n виявляється дуже важкою справою, див. [114].

Достатні умови для (A3). Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція, $z \in \mathbb{R}^2$, причому $f(z) = 0$. Позначимо через $\mathcal{A}$ алгебру паростків гладких функцій $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, а через $\Delta(f, z)$ — ідеал в $\mathcal{A}$, породжений паростками частинних похідних $f'_x(z)$ та $f'_y(z)$ в точці z . Цей ідеал називається *ідеалом Якобі* функції f в точці z . Розглянемо корозмірність $\Delta(f, z)$ в $\mathcal{A}$ як векторних просторів над $\mathbb{R}$:

$$\mu_{\mathbb{R}}(f, z) = \dim_{\mathbb{R}}[\mathcal{A}/\Delta(f, z)].$$

Це число також називають *корозмірністю f в точці z* , див. [130], або *дійсним числом Мілнора*.

Лема 8.2.6. [130], див. також [74, § 11.30]. *Нехай M — компактний многовид. Нехай $\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ — підпростір в $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, що складається з відображень, які задовольняють аксіомі (A1) і нехай $f \in \mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$. Припустимо, що $\mu_{\mathbb{R}}(f, z) < \infty$ для кожної критичної точки $z \in \Sigma_f$. Тоді $\mathcal{O}(f)$ є підмноговидом Фреше в*

$\mathcal{C}_\partial^\infty(M, P)$ скінченної корозмірності, а відображення

$$p : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{O}(f), \quad p(h) = f \circ h,$$

є головним локально тривіальним $\mathcal{S}(f)$ -розшаруванням. Зокрема, p є розшаруванням Серра, а тому f задовольняє аксіому (A3).

Лема 8.2.7. с.f. [166]. Припустимо, що $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіому (A1) і має наступну властивість: для кожної критичної точки z функції f існує локальне представлення f у вигляді $f_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, в якому $z = (0, 0)$, а f_z є однорідним многочленом без кратних множників. Тоді f задовольняє і інші аксіоми (A2) та (A3), а тому для f справедливі теореми 8.2.1 та 8.2.2, а також теорема 7.1.1 про гомотопічну еквівалентність між правим та право-лівим стабілізаторами f .

Якщо ж додатково f не має 1-сідел, див. рис. 1.3.1, то для f також виконується теорема 7.2.3 про гомотопічну еквівалентність між правою та право-лівою орбітами f .

Доведення. Аксіома (A2) випливає з теореми 6.10.3.

Для аксіоми (A3) достатньо довести скінченність $\mu_{\mathbb{R}}(f_z, z)$. Розглянемо f_z як однорідний многочлен двох комплексних змінних з дійсними коефіцієнтами. Так як f_z не має кратних множників, то $z = (0, 0)$ є ізольованою критичною точкою f_z , а тому комплексне число Мілнора, визначене аналогічно відносно алгебри паростків аналітичних функцій $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ є скінченним: $\mu_{\mathbb{C}}(f_z, z) < \infty$, див. [149]. Залишається відмітити наступну нерівність $\mu_{\mathbb{R}}(f_z, z) \leq 2\mu_{\mathbb{C}}(f_z, z)$, яку легко перевірити.

Умова (V) випливає з аксіоми (A1), а умова (J) — з однорідності локальних представлень f в околах особливих точок випливає. Тому для f виконується теорема 7.1.1.

Відмітимо, що несуттєвими (у сенсі означення 7.2.1) є лише 1-сідла. Тому якщо f не має таких критичних точок, то для f справедлива теорема 7.2.3. $\square$

8.3 Доведення теореми 8.2.1

Орієнтовний випадок. Припустимо, що M є орієнтовною і нехай $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіоми (A1) та (A2). Для кожної точки $z \in \Sigma_f$ виберемо спеціальне векторне поле F_z , визначене на деякому околі U_z точки z . Тоді згідно леми 8.1.2 існує векторне поле F на M , що має наступні властивості:

- (a) $df(F) \equiv 0$, причому $F(z) = 0$ тоді і лише тоді, коли $z \in \Sigma_f$.
- (b) $F = \pm F_z$ біля z для кожної точки $z \in \Sigma_f$.
- (c) Відображення зсуву $\varphi_F : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow Sh(F)$ є або гомеоморфізмом або $\mathbb{Z}$ -накриваючим відображенням відносно топологій W^∞ . Тому такою ж властивістю володіє обмеження $\varphi_F|_{\Gamma^+} : \Gamma^+ \rightarrow \varphi_F(\Gamma^+)$, а обидва простори $Sh(F)$ та $\varphi_F(\Gamma^+)$ є або стягнутими, або гомотопічно еквівалентними до кола S^1 .

Лема 8.3.1. *Векторне поле F також задовольняє наступні умови:*

- 1) $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^r = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$ для всіх $r = 0, \dots, \infty$.
- 2) $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^1$, $\varphi_F(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^1$.
- 3) Якщо f має хоча б одну **N**-точку, то $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$ і $\varphi_F(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^0$.
- 4) Припустимо, що f має єдину **N**-точку z і жодної **S**-точки (хоча вона може мати деякі **P**-точки). Якщо при цьому $n_z = 1$, то $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$ і $\varphi_F(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^0$. В цьому випадку f задовольняє одну з умов (b) або (c) теореми 8.2.1.

Припустимо, що лема 8.3.1 доведена. Виведемо з неї орієнтовний випадок теореми.

Спочатку відмітимо наступне очевидне твердження, яке слідує з 1): якщо $\varphi_F(\Gamma^+) = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^r$ для деякого r , то $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$.

З нього випливають наступні імплікації: $2) \Rightarrow (8.11)$, $3) \Rightarrow (a)$, та $4) \Rightarrow (b), (c)$.

Опишемо тепер гомотопічний тип $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Згідно твердження (с) лему 8.3.1 $\varphi_F(\Gamma^+) = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty$ є або стягуваним, або гомотопічно еквівалентний до кола.

Якщо f має критичну точку z типу **S** або **N**, то існує такий окіл V точки z , що відображення зсуву $\varphi_{F,V}$ є неперіодичним, тобто для кожного $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ може існувати не більше ніж однієї $\mathcal{C}^\infty$ функції зсуву на V . Звідси випливає, що φ_F також є неперіодичним, а тому $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним.

З іншого боку, припустимо, що всі критичні точки f належать типу **P**. Тоді f має не більше двох критичних точок і неважко показати, що тоді φ_F є періодичним, а отже $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ гомотопічно еквівалентний до кола. Таким чином залишається довести лему 8.3.1.

Доведення лему 8.3.1. 1). З (а) випливає, що шарування Δ_f співпадає з шаруванням орбіт F , а отже $\mathcal{D}(\Delta_f) = \mathcal{D}(F)$. Тоді за лемою 1.4.1 $\mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(F)^r \subset \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$.

2). Потрібно ототожити $Sh(F)$ з $\mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$ для $r = 0$ чи 1. Нехай $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^r$, тобто існує така r -гомотопія $H : M \times I \rightarrow M$, що $H_0 = \text{id}_M$, $H_1 = h$ і $H_t \in \mathcal{E}(F)$ для всіх $t \in I$. Тоді за наслідком 5.1.8 існує r -гомотопія $\Lambda : (M \setminus \Sigma_f) \times I \rightarrow \mathbb{R}$, що $\Lambda_0 \equiv 0$ і $H_t(x) = \mathbf{F}(x, \Lambda_t(x))$ для всіх $x \in M \setminus \Sigma_f$.

Якщо $r = 1$ або якщо $r = 0$, але f не має жодної **N**-точки, то, застосовуючи лему 8.1.13 до кожної точки $z \in \Sigma_f$, отримаємо, що функція Λ_t , $t \in (0, 1]$, продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції на всьому M . Тому $H_t \in Sh(F)$. Зокрема, $h = H_1 \in Sh(F)$, а отже $Sh(F) = \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^1$.

3) & 4). Припустимо, що f не має жодної **S**-точки і лише одну **N**-точку z , для якої $n_z = 1$. Іншими словами, f має лише локальні екстремуми, один з яких співпадає з z . Так як M є зв'язною, то може існувати не більше двох таких точок. Таким чином, або $\Sigma_f = \{z, z'\}$, де z' — **P**-точка, $M = S^2$ і f задовольняє твердження (b) теореми 8.2.1, або $\Sigma_f = \{z\}$, $M = D^2$ і f задовольняє твердження (с) теореми 8.2.1.

Відмітимо, що орбіти F на $M \setminus \Sigma_f$ замкнуті, відображення зсуву $\varphi_{F, M \setminus \Sigma_f}$ — періодичне, а функція $\theta : M \setminus \Sigma_f \rightarrow (0, +\infty)$, що ставить у відповідність кожній точці $x \in M \setminus \Sigma_f$ її період $\text{Per}(x)$, породжує ядро $\ker F_{M \setminus \Sigma_f} \varphi$. Більш того, якщо $\Sigma_f = \{z, z'\}$ і $z' \in \mathbf{P}$ -точкою, то за означенням 8.1.4 θ гладко продовжується на деякий окіл точки z' . Таким чином, можна вважати, що θ належить класу $\mathcal{C}^\infty$ на $M \setminus \{z\}$.

Нехай тепер $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$. Потрібно перевірити, що $h \in Sh(F)$.

За теоремою 5.1.1 існує гладка функція зсуву $\alpha : M \setminus \Sigma_f \rightarrow \mathbb{R}$ для h на $M \setminus \Sigma_f$. Більш того, якщо $\Sigma_f = \{z, z'\}$, де $z' \in \mathbf{P}$ -точка, то за лемою 8.1.13 α гладко продовжується до $\mathcal{C}^\infty$ -функції в околі точки z' . Тому можна вважати, що α належить класу $\mathcal{C}^\infty$ на $M \setminus \{z\}$ так само як і θ . Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ функція $\alpha + k\theta$ є також $\mathcal{C}^\infty$ -функцією зсуву для h на $M \setminus \{z\}$.

За означенням h є локальним дифеоморфізмом в точці z , а так як $h \in \mathcal{E}_{\text{id}}(F)^0$, то h зберігає орієнтацію біля z . Тому $h \in \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$. Тоді з припущення $n_z = 1$, випливає, що $J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) = \text{id}$, а отже

$$h \in \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z) \subset \ker(J_z) \subset \widehat{Sh}(F, z).$$

Тому існує $\mathcal{C}^\infty$ -функція зсуву β для h на деякому околі W точки z .

Таким чином α та β — $\mathcal{C}^\infty$ -функції зсуву для h на $W \setminus \{z\}$, а значить $\beta - \alpha = n\theta$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$. Тому $\alpha + n\theta \in \mathcal{C}^\infty$ -функцією зсуву для h на всьому M , тобто $h \in Sh(F)$. $\square$

Неорієнтовний випадок. Припустимо, що M є неорієнтовною. Нехай $p : \tilde{M} \rightarrow M$ — орієнтоване дволистне накриття M і $\xi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ — $\mathcal{C}^\infty$ -інволюція, що породжує групу $\mathbb{Z}_2$ накриваючих перетворень.

Нехай F — векторне поле на $\tilde{M}$ дотичне до $\partial\tilde{M}$ і $\mathbf{F}$ — його потік. Скажемо, що F (а також $\mathbf{F}$) є *косо-симетричними*, якщо $\xi^*(F) = -F$, тобто, $F \circ \xi = -T\xi \circ F$. Ця вимога еквівалентна тому, що $\mathbf{F}_t \circ \xi = \xi \circ \mathbf{F}_{-t}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Гладке відображення $\tilde{h} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ буде називатись *симетричним*, якщо $\tilde{h} \circ \xi = \xi \circ \tilde{h}$. Позначимо через $\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{M})$ групу всіх симетричних дифеоморфізмів $\tilde{M}$, що зберігають орієнтацію $\tilde{M}$.

Припустимо, що f задовольняє аксіоми (A1) і (A2). Так як p є локальним дифеоморфізмом, то відображення $\tilde{f} = f \circ p : \tilde{M} \rightarrow P$, очевидно, також задовольняє ці аксіоми.

Нехай $y \in \Sigma_f$, G_y — спеціальне векторне поле а околі y і $z, z' \in \Sigma_{\tilde{f}}$ — критичні точки $\tilde{f}$ такі, що $p^{-1}(y) = \{z, z'\}$. Визначимо векторні поля F_z та $F_{z'}$ в околах z та z' відповідно, як прообрази поля G_y відносно p , тобто

$$F_z = p^*G_y, \quad F_{z'} = -p^*G_y.$$

Нехай F' — довільне векторне поле на $\tilde{M}$, що задовольняє умови (а) та (б). Тоді векторне поле $F = \frac{1}{2}(F' - \xi^*F')$ є косо-симетричним і також задовольняє (а) та (б), а отже і твердження леми 8.3.1.

Згідно твердження (4) леми 4.2.11

$$\varphi_F(\Gamma^+ \cap E_0) = \tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\tilde{f}})^1, \quad \varphi_F(\Gamma^+ \cap E_0) = \tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\tilde{f}})^0,$$

якщо f , а тому і $\tilde{f}$, не мають $\mathbf{N}$ -точок. Більш того для всіх $r = 0, \dots, \infty$ маємо наступні гомеоморфізми

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\text{id}}(\Delta_{\tilde{f}})^r \stackrel{\text{лема 4.2.10}}{\cong} \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r \stackrel{\text{лема 1.4.1}}{\cong} \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r.$$

Звідси випливає, що $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^\infty = \dots = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1$ і цей простір є стягуваним. Більш того, $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^1 = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^0$ за умови, що f не має $\mathbf{N}$ -точок.

Теорему 8.2.1 доведено. □

8.4 Група $\mathcal{D}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f)$

Припустимо, що $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіоми (A1) та (A2). Позначимо через $\mathcal{D}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)$ — підгрупу в $\mathcal{D}(M, \Sigma_f)$, яка складається з усіх таких дифеоморфізмів h , що для кожної $\mathbf{N}$ -точки $z \in \Sigma_f^{\mathbf{N}}$ та деякого спеціального векторного

поля F_z в точці z виконуються умова: $h(z) = z$, причому паросток h в точці z належить до $\widehat{Sh}(F, z)$. Іншими словами, $J_z(h) \in \mathcal{A}_{++}$ якщо $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, і $J_z(h) = \text{id}$ якщо $\nabla F(z) = 0$.

Покладемо

$$\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) = \mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f). \quad (8.14)$$

В цьому параграфі ми вивчаємо структуру групи $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$. Отриманий результат буде потрібний для доведення теореми 8.2.2.

Наступна лема описує тотожну компоненту $\mathcal{D}_{\text{id}}^{+,N}(\Delta_f)^r$ групи $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ відносно топологій W^r для $r \geq 1$.

Лема 8.4.1. *Нехай $\mathcal{D}_{\text{id}}^{+,N}(\Delta_f)^r$ — тотожна компонента лінійної зв'язності групи $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ відносно топології W^r . Тоді при $r \geq 1$ має місце рівність:*

$$\mathcal{D}_{\text{id}}^{+,N}(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}(\Delta_f)^r = \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r. \quad (8.15)$$

Зокрема, ці простори не залежать від $r \geq 1$.

Доведення. Останні три простори співпадають згідно леми 1.4.1. Тому досить показати, що $\mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r \subset \mathcal{D}_{\text{id}}^{+,N}(\Delta_f)^r$ для $r \geq 1$. Нехай $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}^+(\Delta_f)^r$. Це означає, що існує r -ізотопія $h_t : M \rightarrow M$ в $\mathcal{D}^+(\Delta_f)$ між $h_0 = \text{id}_M$ та $h_1 = h$. Так як $r \geq 1$, то для кожної N -точки z сім'я матриць $\{J_z(h_t)\}_{t \in I}$ неперервно залежить від t , причому $J_z(h_0) = \text{id}$. Тому $\{J_z(h_t)\}_{t \in I} \subset \mathcal{A}_{++}$, якщо $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, і $J_z(h_t) = \text{id}$ для всіх $t \in I$, якщо $\nabla F(z) = 0$. Це показує, що $h_t \in \mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ для всіх $t \in I$. Тобто $\{h_t\}_{t \in I}$ є шляхом між id_M та h в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$, а значить $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}^{+,N}(\Delta_f)$. $\square$

Далі нас цікавитиме структура групи $\pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ компонент лінійної зв'язності відносно топологій W^r для $r \geq 1$.

Нехай Γ_f — КР-граф f . Ребро e графа Γ_f буде називатись *зовнішнім*, якщо воно інцидентне деякій P - або ∂ -вершині. В протилежному випадку e називатиметься *внутрішнім*.

Внутрішнє ребро e назовемо **N-ребром** (відповідно **S-ребром**), якщо одна з його вершин є **N-вершиною**, а інша — або **S-** або **N-вершиною**, (відп. обидві його вершини є **S-вершинами**).

Нехай γ — регулярний (тобто гомеоморфний до кола S^1) шар шарування Δ_f . Позначимо через K_γ — зв'язну компоненту Δ_f^{reg} , що містить γ . Тоді K_γ дифеоморфна відкритому циліндру $S^1 \times (-1, 1)$ і існує скручування Дена τ_γ уздовж γ , яке зберігає інваріантним кожен шар шарування Δ_f , а його носій міститься в як завгодно малому околі $U_\gamma \subset K_\gamma$ кривої γ , причому цей окіл складається з шарів Δ_f , див. рис. 8.4.1. Зокрема, $\tau_\gamma \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$. Відмітимо, що образ K_γ в Γ_f

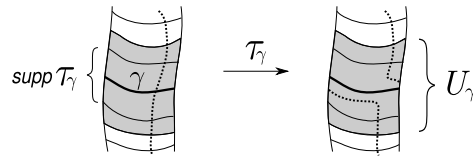


Рис. 8.4.1

є деяким ребром e . Скажемо, що γ , а також K_γ , є *внутрішніми* (відп. *зовнішніми*), якщо ребро e є *внутрішнім* (відп. *зовнішнім*). При цьому скручування τ_γ називатимемо *скручуванням навколо ребра e* . Більш того, скручування уздовж **N-ребра** (відп. **S-ребра**) називатимемо **N-скручуванням** (відп. **S-скручуванням**).

Нехай $e_1, \dots, e_k$ — всі внутрішні ребра Γ_f . Для кожного i виберемо довільний внутрішній шар γ_i , що відповідає e_i , і довільне скручування Дена $\tau_i \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ уздовж γ_i . Покладемо

$$T = \bigcup_{i=1}^k \text{supp } \tau_i.$$

Нехай $\mathcal{J} = \langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle \subset \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ — підгрупа, породжена відповідними скручуваннями Дена. Так як $\text{supp } \tau_i \cap \text{supp } \tau_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то $\mathcal{J}$ є вільною абелевою групою з базисом $\langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$, тобто $\mathcal{J} \approx \mathbb{Z}^k$.

Теорема 8.4.2. *Припустимо, що $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіоми (A1), (A2) і має хоча б одну критичну точку типу S. Тоді включення $\zeta : \mathcal{J} \subset \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$*

є гомотопічною еквівалентністю. Зокрема, має місце ізоморфізм

$$\zeta_0 : \mathcal{J} \equiv \pi_0 \mathcal{J} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f).$$

Іншими словами, $\pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \approx \mathbb{Z}^k$ вільно породжується класами ізотопії внутрішніх скручувань Дена.

Достатньо довести наступне:

Твердження 8.4.3. 1) Кожен $h \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ ізотопний в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ добутку деяких внутрішніх скручувань Дена, тобто $\zeta : \mathcal{J} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ є сюр'єктивним.

2) Якщо $h = \tau_1^{m_1} \circ \dots \circ \tau_k^{m_k} \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ для деякого $m_i \in \mathbb{Z}$, то $m_i = 0$ для всіх i , тобто $h = \text{id}_M$, а тому $\zeta : \mathcal{J} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ є мономорфізмом.

Доведення. Орієнтовний випадок. Припустимо спочатку, що M є орієнтовною і нехай F — векторне поле на M , що задовольняє припущення леми 8.3.1.

Лема 8.4.4. Для кожного $h \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ -функція $\sigma : M \setminus T \rightarrow \mathbb{R}$, яка є функцією зсуву для h відносно F . Якщо h є нерухомим на $M \setminus T$, то $\sigma = 0$ на $M \setminus T$.

Доведення. а) Нехай z — $\mathbf{N}$ -точка f . Тоді $h \in \ker(\text{sh}_z) = \widehat{Sh}(F, z)$, тобто h має єдину $\mathcal{C}^\infty$ -функцію зсуву σ_z , визначену на деякому замкнутому F -інваріантному околі V_z точки z , який не містить інших критичних точок f . Можна вважати, що $V_z \cap V_{z'} = \emptyset$ для $z \neq z'$. Тоді функції σ_z визначають єдину функцію зсуву $\sigma_{\mathbf{N}}$ для h на наступній множині $U_{\mathbf{N}} := \bigcup_{z \in \Sigma_f^{\mathbf{N}}} V_z$.

б) Так як f має хоча б одну $\mathbf{S}$ -точку, то існує критична компонента K шарування Δ_f (тобто зв'язна компонента Δ_f^{cr}), яка не є локальним екстремумом. Нехай $z \in K \cap \Sigma_f$. Тоді z є $\mathbf{S}$ -точкою f . Відмітимо, що припущення $h \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ означає, що $h \in \widehat{Sh}(F, z)$, існує окіл V_z точки z і єдина $\mathcal{C}^\infty$ -функція $\sigma_z : V_z \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $h(x) = \mathbf{F}(x, \sigma_z(x))$ для всіх $x \in V_z$. Так як $K \setminus \Sigma_f$ є незв'язним об'єднанням інтервалів, то функції $\{\sigma_z\}_{z \in \Sigma_f}$ продовжуються до єдиної $\mathcal{C}^\infty$ -функції

σ_K на деякому околі $V(K)$ множини K . Таким чином $h(x) = \mathbf{F}(x, \sigma_K(x))$ для всіх $x \in V(K)$.

Можна вважати, що $V(K) \in F$ -інваріантним, тобто $\partial V(K)$ складається з регулярних шарів Δ_f .

Покладемо $U_S := \cup_K V(K)$, де K — пробігає множину всіх критичних компонент Δ_f , які не є локальними екстремумами. Можна також припустити, що

$$V(K) \cap V(K') = V(K) \cap U_N = \emptyset$$

для різних критичних компонент K та K' . Тоді функції σ_K визначають єдину функцію зсуву σ_S для h на U_S .

с) Відмітимо, що множина $\overline{M \setminus U_S}$ є об'єднанням циліндрів та 2-дисків. Більш того, кожен циліндр не містить критичних точок f , а кожен 2-диск містить єдину критичну точку f і ця точка є локальним екстремумом f . Нехай $B_1, \dots, B_k$ — всі зв'язні компоненти $\overline{M \setminus U_S}$, що мають одну з наступних властивостей

- B_i є циліндром, причому $B_i \cap \partial M \neq \emptyset$, або
- B_i є 2-диском, що містить Р-точку f .

Зокрема, $B_i \cap U_N = \emptyset$. Позначимо $U_{\partial, P} = \cup_{i=1}^k B_i$. Покажемо, що σ_S продовжується до C^∞ -функції на $U_S \cup U_{\partial, P}$.

Дійсно, припустимо, що $B_i \approx S^1 \times I$ є циліндром. Тоді $B_i \cap U_S$ є зв'язним F -інваріантним окіл однієї із зв'язних компонент межі ∂B_i і цей окіл не містить інших компонент ∂B_i . Тому можна вважати, що $B_i \cap U_S = S^1 \times [0, \varepsilon]$. Тоді функція σ_S on $B_i \cap U_S$ продовжується до C^∞ -функції зсуву для h на всьому B_i , див. [74, Lm. 4.12(2)]. Позначимо цю функцію через $\beta_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$.

Припустимо, що B_i є 2-диском, що містить Р-точку z . Тоді $Y_i := B_i \cap U_S$ є околом ∂B_i , а тому згідно твердження (1) леми 8.1.11 σ_S продовжується до єдиної C^∞ -функції зсуву $\beta_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$ для h на всьому B_i .

Позначимо $U := U_N \cup U_S \cup U_{\partial, P}$. Тоді функції

$$\sigma_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad (i = 1, \dots, k),$$

визначають єдину $\mathcal{C}^\infty$ -функцію зсуву $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ для h . Відмітимо, що $M \setminus U$ міститься в об'єднанні внутрішніх компонент Δ_f^{reg} . Тому можна вважати, що в дійсності $M \setminus U \subset T$, а тому $U \supset M \setminus T$.

Якщо h є нерухомим на $M \setminus U \subset T$, то з єдиності функцій σ_N і σ_S , а також з єдиності продовження β_i функції σ_S на $U_{\partial, P}$, випливає, що $\sigma \equiv 0$. $\square$

Щоб завершити доведення твердження 1) потрібно побудувати ізотопію h в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ до дифеоморфізму нерухомого на $M \setminus T$. Нехай $\mu : M \rightarrow [0, 1]$ — $\mathcal{C}^\infty$ -функція, яка є постійною на шарах шарування Δ_f і $\mu = 1$ на деякому околі множини U . Визначимо відображення

$$H : M \times I \rightarrow M, \quad H_t(x) = \mathbf{F}(x, t \cdot \mu(x) \cdot \sigma_h(x)).$$

Тоді, згідно твердження 8.1.10, H належить класу $\mathcal{C}^\infty$, $H_0 = \text{id}_M$ і $H_1 = h$ на деякому околі U . Зокрема, кожен $H_t \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$. Тому наступна ізотопія $G_t = h \circ H_t^{-1}$ деформує $G_0 = h$ в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ у дифеоморфізм G_1 нерухомий на деякому околі U . Іншими словами, $\text{supp } G_1 \subset T$, а тому G_1 ізотопний в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ до добутку внутрішніх скручувань Дена.

2) Нехай $h = \tau_1^{m_1} \circ \dots \circ \tau_k^{m_k} \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$. Потрібно показати, що $m_i = 0$ для всіх $i = 1, \dots, k$. Нехай U_i , $i = 1, \dots, k$, — циліндричний окіл кривої γ_i , що містить носій $\text{supp } \tau_i$, див. рис. 8.4.1. Тоді $h|_{U_i} = \tau_i^{m_i}|_{U_i}$.

Так як $h \in \mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ і f має хоча б одну S -точку, то з твердження 2) леми 8.3.1 випливає існування єдиної $\mathcal{C}^\infty$ -функції зсуву $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ для h , тобто $h(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$ для всіх $x \in M$. Тому ізотопію між h та id_M в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ можна задати наступною формулою: $h_t(x) = \mathbf{F}(x, t\alpha(x))$, $(t \in I)$.

З іншого боку, за лемою 8.4.4 існує єдина $\mathcal{C}^\infty$ -функція $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}$, що є функцією зсуву для h на $M \setminus T$, а тому $\alpha = \sigma$ на $M \setminus T$. Більш того, так як h є нерухомим на $M \setminus T$, то $\alpha = \sigma = 0$ на $M \setminus T$. Тому h_t є нерухомим на $M \setminus T$ для всіх $t \in I$. Звідси випливає, що $h|_{U_i} = \tau_i^{m_i}|_{U_i}$ є ізотопним до id_{U_i}

відносно деякого околу ∂U_i . Але таке можливо тоді і тільки тоді, коли $m_i = 0$. Це доводить теорему 8.4.2 для неорієнтовного випадку.

Неорієнтовний випадок. Припустимо, що M є неорієнтовною. Нехай $p : \tilde{M} \rightarrow M$ — орієнтоване дволистне накриття M і ξ — p -еквіваріантна інволюція на $\tilde{M}$. Тоді ми маємо функцію $\tilde{f} = f \circ p : \tilde{M} \rightarrow P$. Так як кожен внутрішній шар γ_i є двостороннім, то $p^{-1}(\gamma_i)$ складається з двох зв'язних компонент γ_{i1} та γ_{i2} , що є внутрішніми шарами шарування $\Delta_{\tilde{f}}$ функції $\tilde{f}$. Тоді існують такі скручування Дена $\tau_{i1}, \tau_{i2} \in \tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$ уздовж γ_{i1} та γ_{i2} відповідно, що, $\tau_{i2} = \xi \circ \tau_{i1} \circ \xi$ і $\hat{\tau}_i := \tau_{i2} \circ \tau_{i1}$ є підняттям τ_i . Очевидно, що кожне скручування τ_{ij} є внутрішнім, і за орієнтованим випадком група $\pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$ породжена класами ізоморфії скручувань τ_{ij} , для $i = 1, \dots, \mathbf{k}$ та $j = 1, 2$.

Розглянемо підгрупу $\tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$ в $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$, що складається з симетричних h , тобто $h \circ \xi = \xi \circ h$.

Лема 8.4.5. *Класи ізоморфії $\hat{\tau}_i$, $i = 1, \dots, \mathbf{k}$, породжують $\pi_0 \tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$, а тому $\pi_0 \tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}}) \approx \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$.*

Доведення. Позначимо через $T \subset \tilde{M}$ об'єднання носіїв τ_{ij} . Нехай $\mathbf{F}$ — кососиметричний потік на $\tilde{M}$, орбіти якого співпадають з шарами шарування $\Delta_{\tilde{f}}$ і $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$. Тоді згідно леми 8.4.4 існує C^∞ -функція зсуву $\tilde{\sigma} : \tilde{M} \setminus T \rightarrow \mathbb{R}$ для $\tilde{h}$ відносно $\mathbf{F}$, тобто $\tilde{h}(x) = \mathbf{F}(x, \tilde{\sigma}(x))$. Так як $\tilde{h}$ є симетричним, то з леми 4.2.11 випливає, що $\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} \circ \xi \in \ker \varphi_F = \{0\}$, а тому $\tilde{\sigma} \circ \xi = -\tilde{\sigma}$ на $\tilde{M} \setminus T$.

Нехай μ — функція з твердження 8.1.10. Тоді функція $\mu_1 = (\mu + \mu \circ \xi)/2$ є симетричною і також задовольняє умови твердження 8.1.10, а значить $\mu_1 \cdot \alpha$ є гладкою кососиметричною функцією на всьому M . Тому $\tilde{h}_t(x) = \tilde{h} \circ \mathbf{F}(x, -t \cdot \mu_1(x) \cdot \alpha(x))$ є симетричною ізоморфією $\tilde{h}$ в $\tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$ до симетричного дифеоморфізму, який є тотожним на $M \setminus T$. Звідси випливає, що $\tilde{h}$ є добутком деяких τ_{ij} . Так як $\tilde{h}$ є симетричним, то $\tilde{h}$ в дійсності добутком деяких $\hat{\tau}_i = \tau_{i2} \circ \tau_{i1}$. $\square$

З леми 4.2.10 випливає, що має місце гомеоморфізм між $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ та $\tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$. Тому $\pi_0 \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \approx \mathbb{Z}^k$ і ця підгрупа породжується класами ізоtopії внутрішніх скручувань Дена. Теорему 8.4.2 доведено. $\square$

Дія групи $\mathcal{J}$ на $H_1(M, \Sigma_f)$. Нехай $\mathcal{J}_N$ та $\mathcal{J}_S$ — підгрупи в $\mathcal{J}$, породжені внутрішніми N - та S -скручуваннями відповідно. Тоді $\mathcal{J} = \mathcal{J}_N \oplus \mathcal{J}_S$. Відмітимо, що $\mathcal{J}$ природним чином діє на першій відносній групі гомологій $H_1(M, \Sigma_f)$ з цілими коефіцієнтами. Нехай $\nu : \mathcal{J} \rightarrow \text{Aut}(H_1(M, \Sigma_f))$ — відповідний гомоморфізм, що ставить у відповідність кожному $h \in \mathcal{J}$ індукований автоморфізм h_1 групи $H_1(M, \Sigma_f)$.

Лема 8.4.6. *Якщо M є орієнтовною, то $\ker(\nu) = \mathcal{J}_N$.*

Доведення. Очевидно, що кожне N -внутрішнє скручування Дена $\tau \in \mathcal{J}_N$ є ізоtopним до id_M відносно Σ_f , а тому $\ker(\nu) \supset \mathcal{J}_N$.

Щоб довести обернене включення, розглянемо форму перетинів $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $H_1(M, \Sigma_f)$. Тоді очевидно, що дія $\mathcal{J}_S$ на $H_1(M, \Sigma_f)$ визначається за формулою:

$$\prod_{i=1}^a \tau_i^{m_i} \cdot x = x + \sum_{i=1}^a m_i \langle x, \gamma_i \rangle \gamma_i,$$

див. також [74, (6.1)]. Відмітимо, що S -внутрішні криві представляють собою лінійно незалежні цикли в $H_1(M, \Sigma_f)$, а тому $\nu|_{\mathcal{J}_S}$ є мономорфізмом, тобто $\ker(\nu) = \mathcal{J}_N$. $\square$

Твердження 8.4.7. $\mathcal{J} \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r = \{\text{id}_M\}$ для $r \geq 1$.

Доведення. Достатньо показати, що

$$\mathcal{J}_S \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r = \mathcal{J}_N \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r = \{\text{id}_M\}.$$

1) Нехай $h \in \mathcal{J}_S \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r$. Тоді h тривіально діє на групі $H_1(M, \Sigma_f)$. Тому якщо M є орієнтовною, то за лемою 8.4.6 $h \in \mathcal{J}_N$, тобто $h \in \mathcal{J}_S \cap \mathcal{J}_N = \text{id}_M$.

Припустимо, що M — неорієнтовна, $p : \tilde{M} \rightarrow M$ — орієнтовне дволистне накриття M і $\xi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ — інволюція, що породжує групу накриваючих перетворень $\tilde{M}$. Нехай далі $\tilde{\mathcal{J}}_S$ — підгрупа в $\tilde{\mathcal{D}}^{+,N}(\Delta_{\tilde{f}})$, породжена (симетричними) підняттями елементів з $\mathcal{J}_S$, які є S -скручуваннями навколо S -ребер КР-графа функції $\tilde{f} = f \circ p : \tilde{M} \rightarrow P$. Тоді h має два симетричних підняття $\tilde{h}$ та $\tilde{h}'$, одне з яких, скажімо $\tilde{h}$, належить до $\tilde{\mathcal{J}}_S$, причому $\tilde{h}' = \xi \circ \tilde{h}$. Так як h ізотопний до відносно Σ_f , то хоча один з дифеоморфізмів $\tilde{h}$ або $\tilde{h}'$ також ізотопний до $\text{id}_{\tilde{M}}$ відносно $\Sigma_{\tilde{f}}$. Але очевидно, що $\tilde{h}$ зберігає орієнтацію M , (бо є композицією скручувань Дена), тому $\tilde{h}'$ — змінює орієнтацію, а значить саме $\tilde{h}$ ізотопний до $\text{id}_{\tilde{M}}$ відносно $\Sigma_{\tilde{f}}$. Таким чином $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{J}}_S \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r$. Тому, за орієнтовним випадком, $\tilde{h} = \text{id}_{\tilde{M}}$, а отже $h = \text{id}_M$.

2) Нехай $h \in \mathcal{J}_N \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)$ і $\tau_1, \dots, \tau_v$ — всі N -скручування, що породжують $\mathcal{J}_N$. Тоді $h = \tau_1^{m_1} \circ \tau_v^{m_v}$ для деяких $m_i \in \mathbb{Z}$. Нам потрібно показати, що $m_i = 0$ для всіх $i = 1, \dots, v$. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $v \geq 1$.

Відмітимо, що $\text{supp } \tau_i$ лежить в деякому замкнутому 2-диску $B_i \subset M$, який містить єдину критичну точку z_i функції f . Ця точка є N -точкою і $\text{supp } \tau_i \cap (z_i \cup \partial B_i) = \emptyset$.

Лема 8.4.8. *Існує ізотопія між id_M та h , нерухома на деякому околі множини Σ_f .*

Доведення. За припущенням існує 1-ізотопія $h_t : M \rightarrow M$ між $h_0 = \text{id}_M$ та $h_1 = h$ в $\mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)$. Це означає, що

- (а) h_t є нерухомим на Σ_f і для кожної особливої точки $z \in \Sigma_f$ 1-джет $j_z^1(h_t)$ дифеоморфізму h_t в точці z неперервно залежить від t ;
- (б) якщо $z \in \mathbf{NZ}$ -точкою, то множина можливих значень для $j_z^1(h_t)$ є скінченною, а тому $j_z^1(h_t) = j_z^1(h_0) = \text{id}$;
- (с) якщо $z_i \in \mathbf{NN}$ -точкою, то в деяких локальних координатах в точці z_i , в яких

$\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ маємо, що

$$J_{z_i}(h_t) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\lambda}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $\bar{\lambda} : I \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція така, що $\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}(1) = 0$.

Тоді існує 1-ізотопія $g_t : M \rightarrow M$, нерухома зовні деякого околу Σ_f , і така, що $g_0 = g_1 = \text{id}_M$, $g_t(z) = z$ і $J_z(g_t) = J_z(h_t)$ для всіх $t \in I$ та $z \in \Sigma_f$. Цю ізотопію (g_t) можна побудувати ввівши параметр в [110, лему 5.4].

Очевидно, що ізотопія $h'_t = g_t^{-1} \circ h_t$ з'єднує id_M з h в $\mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)$ і задовольняє $J_z(h_t) = \text{id}$ для всіх $z \in \Sigma_f$. Тепер, аналогічно до доведення [110, леми 5.2], можна знайти ще одну ізотопію h''_t між id_M та h_N , що h''_t є нерухомим на деякому околі V множини Σ_f для кожного $t \in I$. Тоді (h''_t) є шуканою ізотопією. $\square$

Нам буде потрібна наступна проста лема.

Лема 8.4.9. *Нехай M — компактна поверхня з непорожньою межею ∂M , $k \geq 1$ і $D_1, \dots, D_k$ — деякий (непорожній) набір попарно різних компонент ∂M . Для кожного $i = 1, \dots, k$ виберемо комір C_i для D_i так, щоб $C_i \cap C_j = \emptyset$ для $i \neq j$, скручування Дена τ_i уздовж D_i , носій якого міститься в C_i , і число $m_i \in \mathbb{Z}$. Визначимо дифеоморфізм $h = \tau_1^{m_1} \circ \dots \circ \tau_k^{m_k}$. Припустимо, h ізотопний до id_M за допомогою ізотопії нерухомої на множині $\cup_{i=1}^k D_i$. Тоді виконується одна з наступних умов:*

- a) $m_i = 0$ для всіх $i = 1, \dots, k$, тобто $h = \text{id}_M$;
- b) M є 2-диском і $k = 1$;
- c) M є 2-циліндром і $k = 1$, або 2.
- d) M є стрічкою М'юбіуса і $k = 1$. $\square$

Позначимо через k — загальне число всіх критичних точок f і нехай V — малий окіл множини Σ_f , на якому ізотопія з леми 8.4.8 є нерухомою. Можна вважати, що кожна компонента V є 2-диском, що містить єдину критичну точку f . Покладемо $M' = M \setminus \text{Int} V$ і $h' = h|_{M'} : M' \rightarrow M'$. Тоді h' можна розгля-

дати як композицію скручувань уздовж k компонент своєї межі, причому за лемою 8.4.8 ізотопний $h_{M'}$ за допомогою ізоотопії нерухомої на K . Таким чином ми знаходимось в умовах леми 8.4.9

Якщо не всі $m_i = 0$, то можливі лише три наступних випадки:

b, d) $k = 1$ і M' є або 2-диском, або стрічкою Мьобіуса. Це означає, що M є або 2-сферою або проективною площиною і f має рівно одну критичну точку, що неможливо.

c) M' є 2-циліндром і $k = 1$ або 2.

Якщо $k = 1$, то $M = D^2$, а f знову має рівно одну критичну точку, яка повинна бути екстремумом. Тому, за означенням, це ребро не є $\mathbf{N}$ -ребром, а отже $\mathbf{v} = 0$, що протирічить припущенню.

Нехай $k = 2$. У цьому випадку $M = S^2$ і f має рівно дві критичних точки z_1, z_2 , одна з яких, скажімо z_1 , повинна бути мінімумом, а інша, z_2 , — максимумом. Зному КР-граф f — це одне ребро e . Якщо одна критичних точок f є $\mathbf{P}$ -точкою, то ребро e не є $\mathbf{N}$ -ребром, а отже $\mathbf{v} = 0$, що протирічить припущенню. Таким чином, обидві точки є $\mathbf{N}$ -точками, $\mathbf{v} = 1$ і $h = \tau_1^{m_1}$. Але тоді h' ізотопний $\text{id}_{M'}$ відносно $\partial M'$ тоді і лише тоді, коли $m_1 = 0$.

Таким чином $m_i = 0$ для всіх $i = 1, \dots, \mathbf{v}$. Твердження 8.4.7 доведено. $\square$

Наслідок 8.4.10. $\mathcal{D}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f)^r$ для $r \geq 1$.

Доведення. Очевидно, що $\mathcal{D}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)^r \supset \mathcal{D}_{\text{id}}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f)^r$. Нехай $h \in \mathcal{D}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)^r$. Тоді за теоремою 8.4.2 h r -ізотопний в $\mathcal{D}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f)$ до деякого $h' \in \mathcal{J}$. Зокрема, ця ізоотопія міститься в $\mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)^r$, а тому за твердженням 8.4.7 $h' \in \mathcal{J} \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^{\mathbf{N}}(M, \Sigma_f)^r = \{\text{id}_M\}$, тобто $h' = \text{id}_M$. Таким чином h є r -ізотопним в $\mathcal{D}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f)$ до id_M , тобто $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}^{+, \mathbf{N}}(\Delta_f)^r$. $\square$

8.5 Кінці поверхні біля підграфу

В цьому параграфі ми доведемо один технічний результат, який грає принципову роль для доведення теореми 8.2.2, див. лему 8.6.5.

Нехай M — а компактна поверхня і $K \subset \text{Int}M$ — скінчений зв'язний підграф, тобто одновимірний CW-підкомплекс деякого кліткового розбиття M називатимемо *підграфом* в M , U_1, U_2 — дві регулярних околи K , і V_i ($i = 1, 2$) — деяка зв'язна компонента $U_i \setminus K$.

Скажемо, що V_1 та V_2 представляють один і той же *кінець* (поверхні $M \setminus K$) біля K , якщо існує регулярний окіл $U \subset \text{Int}U_1 \cap U_2$ графа K та зв'язна компонента V поверхні $U \setminus K$ така, що $V \subset V_1 \cap V_2$. Кінець, визначений компонентами V_i позначатиметься через $[V]_K$.

Очевидно, що коли $[V_1]_K = [V_2]_K$, то $K \cap \overline{V_1} = K \cap \overline{V_2}$. Скажемо, що ребро e графа K *належить* до $[V_i]_K$ якщо $e \subset K \cap \overline{V_1}$.

Нехай U — регулярний окіл K , V — зв'язна компонента $U \setminus K$ і $h : M \rightarrow M$ — такий дифеоморфізм, що $h(K) = K$. Говоритимемо, що кінець $[V]_K \in h$ -*інваріантним*, якщо $[h(V)]_K = [V]_K$.

Відмітимо також, що $V \approx S^1 \times [0, 1)$, де $S^1 \times 0$ відповідає зв'язній компоненті межі ∂U . Зафіксуємо орієнтацію V . Нехай $U_1 \subset U \cap h(U)$ — регулярний окіл K і V_1 — зв'язна компонента $U_1 \setminus K$ така, що $[V_1]_K = [V]_K$. Тоді $[V]_K$ називатиметься $(h, +)$ -*інваріантним*, якщо обмеження $h|_{V_1} : V_1 \rightarrow V$ зберігає орієнтацію.

Аналогічно, h -інваріантне ребро e (h -інваріантний простий цикл γ) називатиметься $(h, +)$ -*інваріантним*, якщо h зберігає його орієнтацію.

Наступна теорема є ключовою для встановлення точності послідовності (8.12). Ми застосовуватимемо її до випадку коли K є критичною компонентою деякої лінії рівня f .

Теорема 8.5.1. [74]. *Нехай $K \subset \text{Int}M$ — скінченний зв'язний підграф, що не має вершин степенів 1 та 2 і такий, що кожне його ребро належить рівно*

двом різним кінцям $M \setminus K$ біля K . Нехай далі $h : M \rightarrow M$ — дифеоморфізм такий, що $h(K) = K$ і h зберігає кінці біля K разом з їх орієнтацією, і нехай $\hat{h}$ — комбінаторний автоморфізм графа K індукований h . Тоді кожна з наступних умов (1) та (2) гарантує, що $\hat{h} = \text{id}_K$:

- (1) регулярний окіл K є **плоским**, тобто може бути вкладений в $\mathbb{R}^2$;
- (2) h ізотопний тотожному дифеоморфізму id_M .

8.6 Оснащення

В цьому параграфі ми також вважатимемо, що f задовольняє аксіоми (A1) та (A2), див. §8.2.

Оснащення для N-точок. Нехай z — N-точка f і F — відповідне спеціальне векторне поле, визначене на деякому околі U точки z . Нагадаємо, що група $\mathcal{G}_z = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z) / \widehat{Sh}(F, z)$ є, за означенням, скінченною циклічною. Позначимо її порядок через n_z .

Для кожного ненульового дотичного вектора $v \in T_z M$ покладемо

$$F_z(v) := \{\pm T_z h(v) \mid h \in \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)\}.$$

Таким чином, $F_z(v)$ є об'єднанням орбіт векторів v та $-v$ відносно природної дії групи $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ на $T_z M$. Еквівалентно, можна покласти

$$F_z(v) := \{\pm \xi(v) \mid \xi \in J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z))\}.$$

Означення 8.6.1. Множину $F_z(v)$ називатимемо **оснащенням в точці z** , якщо вона скінчена і інваріантна відносно всієї групи $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$.

Лема 8.6.2. (1) *Оснащення існують.*

(2) *Нехай $F_z(v)$ — довільне оснащення. Якщо порядок n_z непарний (відп. парний), то $F_z(v)$ складається з $2n_z$ (відп. з n_z) елементів.*

(3) *$\widehat{Sh}(F, z)$ є ядром дії $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ на довільному оснащенні $F_z(v)$, а тому $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ індукує вільну дію $\mathcal{G}_z$ на $F_z(v)$.*

(4) Нехай $F_z(v)$ — оснащення в точці z і $h \in \mathcal{S}(f)$. Тоді $z' := h(z) \in \Sigma_f^N$ і

$$F_{z'}(v) := T_z h(F_z(v)) \subset T_{z'} M$$

є оснащенням в точці z' .

(5) Якщо $g \in \mathcal{S}(f)$ такий, що $g(z) = h(z)$, то

$$T_z g(F_z(v)) = T_z h(F_z(v)).$$

Доведення. (1)-(3). Припустимо спочатку, що $z \in \mathbf{NN}$ -точкою, тобто можна вибрати локальні координати в точці z в яких $\nabla F(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді за лемою 8.1.7

$$J_z(\widehat{Sh}(F, z)) = \mathcal{A}_{++}, \quad J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) \subset \mathcal{A}_+, \quad J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z)) \subset \mathcal{A}.$$

Нехай $v = (a, 0) \in T_z M$ — довільний ненульовий дотичний вектор відносно цих координат, тобто $a \neq 0$. Очевидно, що орбіта v відносно кожної з груп $\mathcal{A}_+$ та $\mathcal{A}$ співпадає з $\{\pm v\}$, див. Рис. 8.6.1a), а $\mathcal{A}_{++}$ є стабілізатором v відносно $\mathcal{A}_+$. Звідси випливає, що $F_z(v) = \{\pm v\}$, причому ця множина є інваріантною відносно $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$, а $\widehat{Sh}(F, z) \in$ ядром дії $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$.

Якщо $\widehat{Sh}(F, z) = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$, тобто $n_z = 1$, то $|F_z(v)| = 2 = 2n_z$. В протилежному випадку, $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) = \mathbb{Z}_2$, а отже $n_z = 2 = |F_z(v)|$.

З іншого боку, якщо $w \in T_z M$ — інший дотичний вектор, який не є колінеарним до v , то $w = (b, c)$, де $c \neq 0$, а $F_z(w) = \{(t, \pm c) \mid t \in \mathbb{R}\}$ є парою прямих. Таким чином, $F_z(w)$ не є оснащенням, див. Рис. 8.6.1b).

Припустимо, що $z \in \mathbf{NZ}$ -точкою, тобто $\nabla F(z) = 0$. Тоді за лемою 8.1.7 $\widehat{Sh}(F, z)$ є ядром J_z , а

$$J_z(\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)) = \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) = \mathcal{G}_z$$

є скінченною циклічною групою порядку n_z . Тому для кожного ненульового вектора $v \in T_z M$ множина $F_z(v)$ є скінченною, а $\widehat{Sh}(F, z)$ — є ядром дії $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$ на $F_z(v)$.

Залишається вибрати v для якого $F_z(v)$ є інваріантним відносно $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$. Можна вважати, що $\widehat{\mathcal{D}}(F, z) \neq \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$, тобто $J_z(\widehat{\mathcal{D}}(F, z))$ є групою дієдра. Нехай

$h \in \widehat{\mathcal{D}}(F, z) \setminus \widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)$. Тоді h змінює орієнтації в точці z , а тому лінійне відображення $T_z h$ є симетрією відносно прямої $\{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, визначеної деяким ненульовим вектором $v \in T_z M$. Зокрема, $T_z h(v) = v$. Тепер очевидно, що $F_z(v)$ є інваріантним $\widehat{\mathcal{D}}(F, z)$, тобто $F_z(v)$ є оснащенням, див. Рис. 8.6.1с).

Твердження (4) та (5) майже очевидні. □

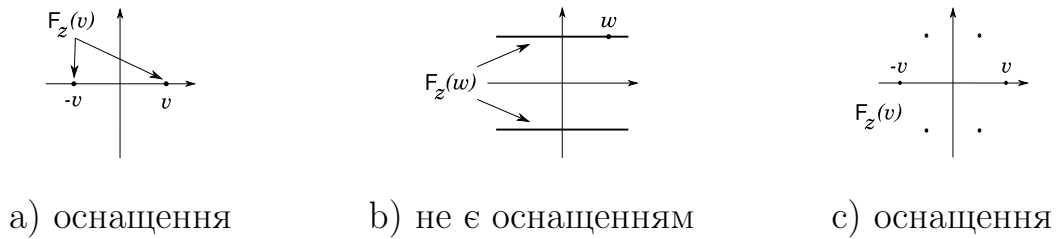


Рис. 8.6.1

Означення 8.6.3. Скажемо, що сім'я оснащень $\{F_z(v_z) : z \in \Sigma_f^N\}$ є **узгодженою**, якщо вона інваріантна відносно $\mathcal{S}(f)$, тобто

$$T_z h(F_z) = F_{h(z)}, \quad \forall h \in \mathcal{S}(f).$$

Наслідок 8.6.4. Узгоджені сім'ї оснащень існують.

Доведення. Так як $h(\Sigma_f^N) = \Sigma_f^N$ для кожного $h \in \mathcal{S}(f)$, то можна розділити Σ_f^N на орбіти відносно дії $\mathcal{S}(f)$. Нехай $O = \{z_1, \dots, z_l\} \subset \Sigma_f^N$ — одна з таких орбіт. Достатньо визначити узгоджене оснащення на O .

Зафіксуємо довільне оснащення F_{z_1} для z_1 . Нехай $z_i \in O$ та $h \in \mathcal{S}(f)$ такі, що $h(z_1) = z_i$. Тоді покладемо $F_{z_i} = T_{z_1} h(F_{z_1})$. За лемою 8.6.2 це означення не залежить від часткового вибору h . □

Оснащений КР-граф $\widehat{\Gamma}_f$ функції f . Нехай Γ_f — КР-граф f , $p_f : M \rightarrow \Gamma_f$ — фактор-відображення і w — вершина Γ_f . Скажемо, що

- w є ∂ -вершиною, якщо $p_f^{-1}(w)$ є зв'язною компонентою ∂M ;

- $w \in S$ -вершиною, якщо $p_f^{-1}(w)$ містить S -точки f (у цьому випадку $p_f^{-1}(w)$ є критичною компонентою Δ_f , яка не є локальним екстремумом f);
- $w \in P$ -вершиною (відп. N -вершиною), якщо $p_f^{-1}(w) \in P$ -точкою (відп. N -точкою) f .

Нехай w — N -вершина Γ_f і $z = p_f^{-1}(w)$ — відповідна N -точка f . Порядок n_z групи $\widehat{\mathcal{D}}^+(F, z)/\widehat{Sh}(F, z) \approx \mathbb{Z}_{n_z}$ назовемо *циклічним порядком* вершини w і позначимо через n_w . Таким чином $n_w := n_{p_f^{-1}(w)} = n_z$.

Нехай k_z — кількість векторів у (довільному) оснащенні в точці z . За ле-мою 8.6.2 воно однакове для всіх оснащень. Ми позначатимемо це число також через k_w . Таким чином, $k_z = n_z$ для парного n_z і $k_z = 2n_z$ для непарного n_z .

До кожної N -вершини w «приклеїмо» k_w ребер $e_w(1), \dots, e_w(k_w)$, так, як на Рис. 8.6.1. Назвемо ці ребра *дотичними до w* . Множину дотичних ребер до w позначатимемо через T_w . Потрібно мислити, що ці ребра «*лежать в площині, ортогональній до ребра яке містить w* ».

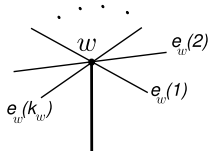


Рис. 8.6.1: Дотичні ребра до вершини w

Позначимо отриманий граф через $\widehat{\Gamma}_f$ і назовемо його *оснащеним КР-графом f* . Таким чином, $\Gamma_f \in$ підграфом $\widehat{\Gamma}_f$ і ми продовжимо КР-функцію $f^* : \Gamma_f \rightarrow P$ на весь граф $\widehat{\Gamma}_f$ поклавши її постійною на дотичних ребрах: $f^*(e_w(i)) = f^*(w)$.

Автоморфізми $\widehat{\Gamma}_f$. Нехай $\widehat{E} = E(\widehat{\Gamma}_f)$ — множина ребер графа Γ_f і $\text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$ — група гомеоморфізмів $\nu : \widehat{\Gamma}_f \rightarrow \widehat{\Gamma}_f$, що зберігають типи вершин, переводять дотичні ребра в дотичні, а також зберігають КР-функцію на $\widehat{\Gamma}_f$, тобто $f^* \circ \nu = f^*$.

Нехай далі $\text{Map}(\widehat{E}, \mathbb{Z}_2)$ — $\mathbb{Z}_2$ -модуль всіх функцій $o : \widehat{E} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Тоді група

$\text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$ природно діє зліва на $\text{Map}(\widehat{E}, \mathbb{Z}_2)$ за правилом

$$o \cdot \nu = o \circ \nu^{-1} : \widehat{E} \xrightarrow{\nu^{-1}} \widehat{E} \xrightarrow{o} \mathbb{Z}_2,$$

для $\nu \in \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$ та $o \in \text{Map}(\widehat{E}, \mathbb{Z}_2)$. Ця дія дозволяє побудувати напівпрямий добуток Q груп $\text{Map}(\widehat{E}, \mathbb{Z}_2)$ та $\text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$, тобто таку групу Q для якої має місце точна послідовність

$$0 \rightarrow \text{Map}(\widehat{E}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f) \rightarrow 1,$$

причому гомоморфізм β має переріз, тобто такий гомоморфізм $s : \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f) \rightarrow Q$, що $\beta \circ s = \text{id}_{\text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)}$.

Нагадаємо побудову групи Q . Нехай $Q = \text{Map}(\widehat{E}, \mathbb{Z}_2) \times \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$ — декартовий добуток множин. Визначимо на ньому групову структуру $\cdot$ за наступним правилом:

$$(o_1, \nu_1) \cdot (o_2, \nu_2) = (o_1 \circ \nu_2 + o_2 \pmod{2}, \nu_1 \circ \nu_2),$$

де $+$ — додавання групі $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Неважко бачити, що автоморфізми $\widehat{\Gamma}_f$ утворюють групу. Позначимо її через $\text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$. Одиницею $\text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f) \in (1, \text{id}_{\widehat{\Gamma}_f})$, де $0 : \widehat{E} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ постійне відображення в одиницю $0 \in \mathbb{Z}_2$, а оберненим до $(o, \nu) \in (o \circ \nu^{-1}, \nu^{-1})$.

Дія $\mathcal{S}(f)$ на $\widehat{\Gamma}_f$. Припустимо, що f має хоча б одну критичну точку. Наша мета визначити деякий гомоморфізм

$$\mu : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f).$$

Для цього

- виберемо узгоджену сім'ю оснащень $\{F_z : z \in \Sigma_f^N\}$ для N -точок f ,
- для кожної точки $z \in \Sigma_f^N$ зафіксуємо бієкцію $\xi_z : F_z \rightarrow T_{p_f(z)}$ між оснащенням F_z в точці z та множиною дотичних ребер у відповідній вершині $p_f(z)$ графа $\widehat{\Gamma}_f$ (див. Рис. 8.6.2, і

- орієнтацію зв'язних компонент Δ_f^{reg} (останнє можливо тому, що $\Sigma_f \neq \emptyset$, а отже всі регулярні компоненти Δ_f дифеоморфні до $S^1 \times (0, 1)$ а значить є орієнтовними).

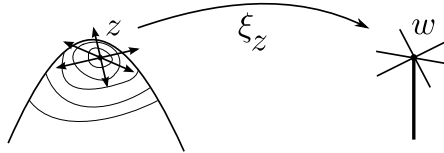


Рис. 8.6.2

Нехай тепер $h \in \mathcal{S}(f)$. Нам потрібно поставити у відповідність h пару (o, ν) .

Очевидно, що h індукує деякий автоморфізм ν_h графа Γ_f . Продовжимо його на множину дотичних ребер. Нехай $z \in \Sigma_f^N$, $z' = h(z)$, $w = p_f(z)$ і $w' = p_f(z')$ — відповідні вершини на $\widehat{\Gamma}_f$. Тоді $z' \in \Sigma_f^N$ а тому h індукує бієкцію має оснащеннями F_z та $F_{z'}$. Визначити $\nu_h : T_w \rightarrow T_{w'}$ за правилом:

$$\nu_h = \xi_{z'} \circ T_z h \circ \xi_z^{-1} : T_w \xrightarrow{\xi_z^{-1}} F_z \xrightarrow{T_z h} F_{z'} \xrightarrow{\xi_{z'}} T_{w'}.$$

Залишається визначити функцію $o : E(\Gamma_f) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Нехай e — ребро графа Γ_f і $\gamma = p_f(e)$ — відповідна зв'язна компонента Δ_f^{reg} . Тоді $\gamma' = h(\gamma)$ також є зв'язною компонентою Δ_f^{reg} . Так як ми зафіксували орієнтації γ та γ' , то покладемо $o(e) = 0$, якщо $h : \gamma \rightarrow \gamma'$ зберігає орієнтацію і $o(e) = 1$, а протилежному випадку. Неважко бачити, що відповідність $h \mapsto (\nu, o)$ є коректно визначеним гомоморфізмом $\mu : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_f)$.

Зрозуміло, що ядро $\ker(\mu)$ складається з дифеоморфізмів $h \in \mathcal{S}(f)$, які мають наступні властивості:

1. h лишає інваріантним кожен *регулярний* (тобто гомеоморфний до кола) шар шарування Δ_f і зберігає його орієнтацію; зокрема, звідси випливає, що $h(z) = z$ для кожного локального екстремуму f ;
2. $h \in \widehat{Sh}(F, z)$ для кожної N -точки $z \in \Sigma_f^N$ та деякого спеціального векторного поля F_z в точці z .

Це показує, що $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \subset \ker(\mu)$. Відмінність між $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ та $\ker(\mu)$ полягає у тому, що кожен $h \in \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$ повинен також лишати інваріантним кожен *одновимірний* шар шарування Δ_f . Легко побудувати приклади, коли $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \neq \ker(\mu)$.

Нагадаємо також, що ми маємо гомоморфізм $\lambda : \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$ в групу автоморфізмів (неоснащеного) КР-графу f . Тоді очевидно, що

$$\ker(\mu) = \ker(\lambda) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f). \quad (8.16)$$

Так як, за означенням, $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) = \mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f)$, див. (8.14), то з лем 1.4.3 та 1.4.4 випливає наступна

Лема 8.6.5. *Нехай $r \geq 1$. Тоді*

$$\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M) = \ker(\mu) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M),$$

а за умови (1) лема 1.4.4 перетини $\mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r$ з кожною з груп $\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)$, $\ker(\mu)$, та $\mathcal{S}(f)$ співпадають з $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r$.

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \cap \mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) &\stackrel{(8.14)}{=} \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \cap (\mathcal{D}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f)) \\ &\stackrel{\text{лема 1.4.3}}{=} \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \cap (\ker(\lambda) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f)) \\ &\stackrel{(8.16)}{=} \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \cap \ker(\mu). \end{aligned}$$

Тому

$$\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r = \ker(\mu) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r.$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r \cap \ker(\mu) &\stackrel{(8.16)}{=} \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r \cap \ker(\lambda) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f) \\ &\stackrel{\text{лема 1.4.4, (1)}}{=} \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r \cap \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}^N(M, \Sigma_f) \\ &= \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r \cap \mathcal{S}(f). \end{aligned}$$

Нарешті згідно наслідку 8.4.10

$$\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}^N(M, \Sigma_f)^r = \mathcal{D}_{\text{id}}^{+,N}(\Delta_f)^r \stackrel{\text{лема 1.4.1}}{=} \mathcal{S}_{\text{id}}(f)^r.$$

Лему доведено. □

8.7 Доведення теореми 8.2.2

Припустимо, що $f : M \rightarrow P$ задовольняє аксіоми (A1)-(A3) і має хоча б одну критичну точку типу S. Нехай id_M — базисна точка в $\mathcal{S}(f)$ та $\mathcal{D}(M)$, а f — базисна точка в $\mathcal{O}(f)$. Тоді з аксіоми (A3) і точної послідовності гомотопічних груп розшарування p маємо коротку точну послідовність:

$$\cdots \rightarrow \pi_k \mathcal{S}(f) \xrightarrow{i_k} \pi_k \mathcal{D}(M) \xrightarrow{p_k} \pi_k \mathcal{O}(f) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k-1} \mathcal{S}(f) \rightarrow \cdots,$$

де i_k — гомоморфізм індукований вкладенням $i : \mathcal{S}(f) \subset \mathcal{D}(M)$, а ∂_k — граничний гомоморфізм.

Нагадаємо, що $\pi_i \mathcal{D}(M) = \pi_i M$ для $i \geq 3$ і $\pi_2 \mathcal{D}(M) = 0$, див. [26, 26, 27, 40]. Так як за теоремою 8.2.1 $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним, то ми отримуємо ізоморфізми $\pi_k \mathcal{O}(f) \approx \pi_k \mathcal{D}(M)$ для $k \geq 2$ і наступну точну послідовність:

$$1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}(M) \xrightarrow{p_1} \pi_1 \mathcal{O}(f) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)) \rightarrow 1,$$

де $\pi_0(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$ можна розглядати як ядро відображення включення $i_0 : \pi_0 \mathcal{S}(f) \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}(M)$.

Залишається побудувати точну послідовність (8.12) для $\pi_1 \mathcal{O}(f)$.

Доведення (8.12). Нагадаємо, що має місце природний гомоморфізм $\mu : \pi_0 \mathcal{S}(f) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\Gamma}_f)$. Нехай $G = \mu(\ker i_0)$ — образ підгрупи $\ker i_0 = \pi_0(\mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$ групи $\pi_0 \mathcal{S}(f)$ під дією μ і $\mathcal{J}_0$ — ядро обмеження μ на $\ker i_0$. Таким чином,

$$\mathcal{J}_0 := \pi_0(\ker(\mu) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)) \stackrel{\text{лема 8.6.5}}{=} \pi_0(\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M)).$$

Так як $\mathcal{J} = \pi_0(\mathcal{D}^{+,N}(\Delta_f)) \approx \mathbb{Z}^k$ є вільною абелевою групою, то $\mathcal{J}_0$ також вільна абелева, тобто $\mathcal{J}_0 \approx \mathbb{Z}^l$ для деякого $l \geq 0$.

Тоді має місце комутативна діаграма, у якій всі рядки та стовпці є точними:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \rightarrow & \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) & \xrightarrow{p} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{J}_0 \approx \mathbb{Z}^1 \rightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) & \xrightarrow{p} & \pi_1 \mathcal{O}(f) & \xrightarrow{\partial_1} & \ker(i_0) \rightarrow 1 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & G & = & G & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

де $\mathcal{H} = \partial_1^{-1}(\mathcal{J}_0)$. Наступна теорема показує, що ліва вертикальна послідовність співпадає з (8.12). Вона завершує доведення теореми 8.2.2.

Спочатку формулюємо одну просту лему

Лема 8.7.1. [74]. *Образ $p(\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M))$ міститься в центрі групи $\pi_1 \mathcal{O}(f)$, а граничне відображення $\partial_1 : \pi_1 \mathcal{O}(f) \rightarrow \pi_0 \mathcal{S}(f)$ є гомоморфізмом.*

Теорема 8.7.2. *Коротка точна послідовність*

$$1 \rightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \xrightarrow{p_1} \mathcal{H} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{J}_0 \rightarrow 1 \quad (8.17)$$

допускає переріз $s : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{J}_0$, тобто такий гомоморфізм, що $\partial_1 \circ s = \text{id}_{\mathcal{J}_0}$. Так як ця послідовність є **центральним розширенням**, див. лему 8.7.1, то вона розщеплюється, тобто $\mathcal{H} \approx \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \oplus \mathbb{Z}^l$.

Доведення. Досить розглядати випадок $\chi(M) \geq 0$, тобто коли $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \neq 0$.

Нехай $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — довільна множина твірних $\mathcal{J}_0$. Для кожного $\alpha \in A$ нехай $\omega_\alpha : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ — такий шлях, що $\omega_\alpha(0) = \text{id}_M$ і $\omega_\alpha(1) = g_\alpha$, див. рис. 8.7.1a). Так як $g_\alpha \in \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{S}(f)$, то відображення $\nu : I \rightarrow \mathcal{O}(f)$, визначене за формулою $\nu(t) = f \circ \omega_\alpha(t)$ є петлею, тобто $\nu(0) = \nu(1) = f$.

відображення

$$\nu_{\hat{h}} : I \rightarrow \mathcal{O}(f), \quad \nu_{\hat{h}}(t) = f \circ \kappa_{\hat{h}}(t/a)$$

є петлею, причому, як легко бачити, $\psi(\hat{h}) = [\nu_{\hat{h}}]$.

Припустимо, що $\hat{h} \in \ker \eta$, тобто $h = \eta(\hat{h}) = \text{id}_M$. Тоді $\kappa_{\hat{h}}$ є петлею в $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$.

Лема 8.7.3. Нехай $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множина твірних для $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{F}$ — вільна група породжена символами $\{\hat{g}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ і $H = \{\hat{h}_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{F}$ — підмножина, нормальне замикання якої співпадає з $\ker \eta$. Таким чином

$$\mathcal{J}_0 = \langle \{g_\alpha\}_{\alpha \in A} \mid \{\hat{h}_\beta\}_{\beta \in B} \rangle$$

є копредставленням для $\mathcal{J}_0$. Для кожного $\alpha \in A$ виберемо такий шлях $\omega_\alpha : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$, що $\omega_\alpha(0) = \text{id}_M$ і $\omega_\alpha(1) = g_\alpha$. Тоді кожна з наступних умови гарантує, що $\ker \eta \subset \ker \psi$:

- (1) для кожного $\beta \in B$ петля κ_{h_β} є гомотопною нулю в $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$;
- (2) існує підмножина $Q \subset M$, що складається з $k > \chi(M)$ точок така, що $\omega_\alpha(t)$ є нерухомим на Q для всіх $\alpha \in A$ і $t \in I$.

Доведення. Твердження 1) тривіальне.

2) Нехай $x_1, \dots, x_k \in Q$ — k попарно різних точок, $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$ — група дифеоморфізмів M , які лишають множину Q поточно нерухомою і $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$ — тождественна компонента групи $\mathcal{D}(M, k)$. Тоді для кожного $\hat{h}_\beta$ петля $\kappa_{\hat{h}_\beta}$ міститься в $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$. Так як $\chi(M) < k$, то $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k)$ є стягуваною, а отже петля $\kappa_{\hat{h}_\beta}$ — гомотопна нулю в $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, k) \subset \mathcal{D}_{\text{id}}(M)$. Тому $\psi(\hat{h}_\beta) = [f \circ \kappa_{\hat{h}_\beta}]$ є гомотопною нулю в $\mathcal{H}$, а значить $\hat{h}_\beta \in \ker \psi$. $\square$

Таким чином, для доведення теореми 8.7.2 достатньо показати, що для кожної поверхні M з $\chi(M) \geq 0$ виконується одна з умов 1) або 2) леми 8.7.3.

Лема 8.7.4. Припустимо, що M є однією з поверхонь S^2 , $\mathbb{R}P^2$, D^2 , $M\ddot{o}$, або $S^1 \times I$. Тоді існує навіть нескінченна підмножина $Q \subset M$ така, що **кожне** внутрішнє скручування Дена є нерухомим на Q і ізотопне до id_M відносно

Q . Зокрема, це вірно для кожного $h \in \mathcal{J}_0$, а тому згідно твердження 2) лемми 8.7.3 $\ker \eta \subset \ker \psi$.

Доведення. Припустимо, що M є або 2-диском D^2 , або стрічною Мьобіуса $M\ddot{o}$, або циліндром $S^1 \times I$. Покладемо $Q = \partial M$ якщо M є або D^2 або $M\ddot{o}$ і $Q = S^1 \times 0$ якщо $M = S^1 \times I$. Тоді кожне внутрішнє скручування Дена є нерухомим в околі Q і ізотопним до id_M відносно Q , див. напр. [4], [29, Th. 3.4 & 5.2], [134].

Нехай M — або 2-сфера S^2 , або проективна площина $\mathbb{R}P^2$. У цьому випадку f завжди має локальний екстремум. Позначимо цю точку через z і нехай $Q \subset M \setminus T$ — замкнутий окіл точки z , дифеоморфний 2-диску. Тоді $M \setminus Q$ є або 2-диском (якщо $M = S^2$) або стрічкою Мьобіуса (якщо $M = \mathbb{R}P^2$). Більш того, кожну внутрішнє скручування Дена τ є нерухомим на деякому околі Q . Тому τ є ізотопним до id_M відносно Q . $\square$

Лема 8.7.5. *Нехай M — є або 2-тором T^2 , або пляшкою Клейна K . Припустимо, що кожний внутрішній шар γ_i , $i = 1, \dots, \mathbf{k}$, шарування Δ_f розбиває M . Тоді існує підмножина $Q \subset M$, що задовольняє умову 2) лемми 8.7.3.*

Доведення. Нехай U_i — відкритий окіл γ_i , дифеоморфний до $S^1 \times (0, 1)$ і такий, що ∂U_i складається з двох регулярний шарів Δ_f , а $\text{supp } \tau_i \subset U_i$. Так як γ_i розбиває M , то $M \setminus U_i$ складається з двох зв'язних компонент B_i та C_i . Далі, з того, що M є або 2-тором T^2 , або пляшкою Клейна K , випливає, що одна з компонент, скажімо B_1 , є або 2-диском, або стрічкою Мьобіуса.

а) Припустимо, що B_1 є стрічкою Мьобіуса. Тоді M є пляшкою Клейна, а C_1 і $C_1 \cup U_1$ — стрічками Мьобіуса. Покладемо $Q = \partial U_1 \cap B_1$. Тоді Q є простою замкнутою кривою «паралельною» до γ_1 і також розбиваючою M на дві стрічки Мьобіуса. Більш того, кожне внутрішнє скручування Дена τ_i є нерухомим на деякому околі Q , а тому ізотопним до id_M відносно Q .

б) Припустимо, що ні B_i ні C_i не є стрічкою Мьобіуса. Тоді B_i є 2-диском. Перенумеровуючи, якщо потрібно, γ_i , можна вважати, що існує $r \in \{1, \dots, \mathbf{k}\}$,

яке задовольняє наступні умови:

- якщо $i = 1, \dots, r$, то B_i не міститься в жодному з B_j для $j = 1, \dots, \mathbf{k}$ і $j \neq i$, тобто B_i є «максимальним» диском;
- для $j = r + 1, \dots, \mathbf{k}$ кожен B_j міститься в деякому B_i для $i = 1, \dots, r$.

Покладемо

$$Q := \bigcap_{i=1}^r C_i = \bigcap_{i=1}^r M \setminus (B_i \cup U_i) = M \setminus \bigcap_{i=1}^r (B_i \cup U_i). \quad (8.19)$$

Тоді Q є зв'язним, як доповнення до незв'язного об'єднання замкнутих 2-дисків на зв'язній поверхні. Звідси випливає, що Q не містить жодної внутрішньої кривої. Дійсно, припустимо, що $\gamma_j \subset Q$. Так як $\gamma_j \subset U_j$, то з (8.19) отримуємо, що $j \in \{r + 1, \dots, \mathbf{k}\}$, а значить $B_j \subset B_i$ для деякого $i = 1, \dots, r$. З іншого боку, γ_j розбиває Q на дві *непорожні* компоненти D_j і D'_j такі, що одна з них, скажімо D_j , міститься в B_j . Тому $D_j \subset B_j \subset B_i \subset M \setminus Q$, що протирічить припущенню, що $D_j \subset Q$.

Таким чином, Q не містить внутрішніх кривих, а значить кожне скручування τ_i є нерухомим на деякому околі Q . Так як $M \setminus Q$ є об'єднанням 2-дисків, то τ_i є ізотопним до id_M відносно Q . Тому кожен $g \in \mathcal{J}_0$ також є ізотопним до id_M . $\square$

Лема 8.7.6. *Нехай M — або 2-тор T^2 , або пляшка Клейна K . Припустимо, що γ_1 не розбиває M .*

(i) *Якщо M є 2-тором T^2 , то існує підмножина Q , що задовольняє умову 2) леми 8.7.3, а значить $\ker \eta \subset \ker \psi$.*

(ii) *Якщо M є пляшкою Клейна K , то $\ker \eta \subset \ker \psi$.*

Доведення. Так як всі γ_i є попарно диз'юнктними простими замкнутими кривими на 2-торі, або пляшці Клейна, то можна вважати що для деякого $a = 1, \dots, \mathbf{k}$ криві $\gamma_1, \dots, \gamma_a$ не розбивають і попарно ізотопні одна одній, а кожна з кривих

$\gamma_{a+1}, \dots, \gamma_k$ розбиває M так, що одна з компонент $M \setminus \gamma_i$ є 2-диском. Тому τ_i є ізотопним до τ_1 при $i = 2, \dots, a$ і до id_M при $i = a + 1, \dots, k$.

Нехай Q — регулярний шар шарування Δ_f , що міститься в $U_1 \setminus \text{supp } \tau_1$, див. рис. 8.7.1. Тоді кожне скручування τ_j є нерухомим на деякому околі Q в $U_1 \setminus \text{supp } \tau_1$.

Нехай тепер $h \in \mathcal{J}_0$. Таким чином, $h = \tau_1^{i_1} \circ \dots \circ \tau_a^{i_a} \circ \tau_{a+1}^{i_{a+1}} \circ \dots \circ \tau_k^{i_k}$ для деякого $i_j \in \mathbb{Z}$, а h є ізотопним до id_M . Покладемо $d = i_1 + \dots + i_a$. Так як $M \setminus Q$ є циліндром, то h є ізотопним до τ_1^d відносно Q .

(i) Припустимо, що M є 2-тором T^2 . Так як h є ізотопним до id_{T^2} , то $d = 0$. Тому τ_1^d (а значить і h) є ізотопним до id_{T^2} відносно Q .

(ii) Нехай M — пляшка Клейна K . Добре відомо, що τ_1^2 є ізотопним до id_K , див. [65, лема 5]. Більш того, можна вважати, що Q є інваріантною (але не нерухомою!) під дією такої ізотопії, див. рис. 8.7.1. Так як h є ізотопним до id_K , то d є парним числом і h — також ізотопний до id_K за допомогою ізотопії, що лишає множину Q інваріантною.

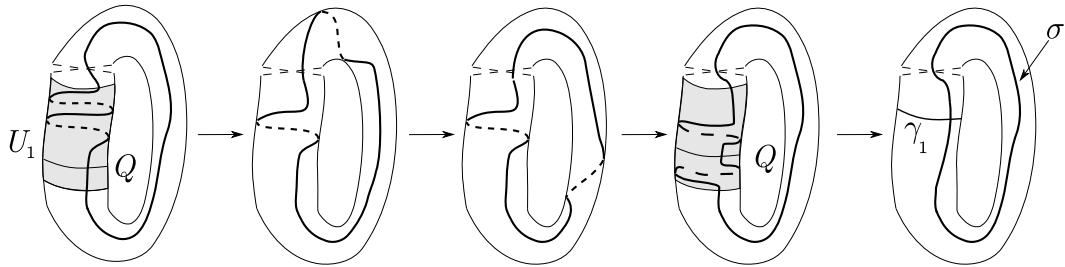


Рис. 8.7.1: Ізотопія між τ_1^2 та id_K

Нехай $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множина твірних для $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{F}$ — вільна абелева група, породжена символами $\{\hat{g}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ і $H = \{\hat{h}_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{F}$ — підмножина, нормальне замикання якої співпадає з $\ker \eta$. Міркуючи як і вище, для кожного g_α існує такий шлях $\omega_\alpha : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(K)$ між id_K та g_α , що $\omega_\alpha(t)(Q) = Q$ для всіх $\alpha \in A$ і $t \in I$.

Нехай $\beta \in B$ та $\kappa_{\hat{h}_\beta} : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(K)$ — відповідна петля в $\mathcal{D}_{\text{id}}(K)$. Тоді $\kappa_{\hat{h}_\beta}(t)(Q) = Q$ для всіх $t \in I$. Тепер легко бачити, що $\kappa_{\hat{h}_\beta}$ є гомотопним нулю, а отже вико-

нується припущення (2) леми 8.7.3.

Дійсно, нехай $\sigma \subset K$ — проста замкнута крива, зображена на рис. 8.7.1. Тоді $K \setminus \sigma$ складається з двох стрічок Мьобіуса. Добре відомо, що $\pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(K) = \mathbb{Z}$ і ця група породжується ізотопією, яка *повертає* K *двічі уздовж* σ , див. напр. [40]. Зокрема, якщо $\kappa : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(K)$ — негомотопна нулю петля, то $\kappa(t)(Q) \neq Q$ для деякого $t \in I$. Тому $\kappa_{\hat{h}_\beta}$ є гомотопним нулю для всіх $\hat{h}_\beta \in \ker \eta$. $\square$

Теорему 8.7.2 доведено. $\square$

8.8 Висновки

В цьому розділі обчислено гомотопічні типи стабілізаторів та орбіт широкого класу гладких функцій f з компактних поверхонь M в пряму та коло. Доведено, що за виключенням кількох простих ситуацій, компонента зв'язності $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ стабілізатора є стягуваною, $\pi_n \mathcal{O}_f(f) = \pi_n M$ для $n \geq 3$, $\pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0$ а $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ має скінчено породжену абелеву підгрупу (майже завжди вільну) скінченного індексу.

Розділ 9 КОМПОНЕНТИ ЗВ'ЯЗНОСТІ ПРОСТОРІВ ФУНКЦІЙ МОРСА НА КОМПАКТНИХ ПОВЕРХНЯХ

9.1 Вступ

Нехай M — гладка (C^∞) зв'язна компактна поверхня з можливо порожньою межею ∂M і P — одновимірний многовид, тобто або числова пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1 .

Нехай $\mathcal{M}(M, P)$ підмножина в $\mathcal{C}^\infty(M, P)$, що складається з відображень $f : M \rightarrow P$ таких, що *всі критичні точки f є невинудженими (тобто f є морсівським) і належать до внутрішності M .*

Нехай далі $\mathcal{M}_\partial(M, P) \subset \mathcal{M}(M, P)$ — підмножина, що складається з відображень $f : M \rightarrow P$ таких, що *f приймає постійні значення на зв'язних компонентах межі ∂M .*

Якщо $P = S^1$, то нехай $\mathcal{M}_{cov}(M, S^1) \subset \mathcal{M}(M, P)$ — підмножина, яка складається з таких відображень $f : M \rightarrow S^1$, що *для кожної зв'язної компоненти V межі ∂M обмеження f на V є або **постійним**, або **накриваючим** відображенням.*

Таким чином, $\mathcal{M}_\partial(M, S^1) \subset \mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$.

Нас цікавитимуть компоненти зв'язності просторів $\mathcal{M}_\partial(M, P)$ та $\mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$, тобто множини $\pi_0 \mathcal{M}_\partial(M, P)$ та $\pi_0 \mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$ відносно топологій W^∞ , див. теорему 9.1.3.

Множина $\pi_0\mathcal{M}_\partial(M, \mathbb{R})$ була незалежно та різними методами описана С. В. Матвєєвим (його доведення наведене та узагальнене в статті О. О. Кудрявцевої [156]) та В. В. Шарко [174], а множина $\pi_0\mathcal{M}_\partial(M, S^1)$ (для орієнтовних поверхонь) — в кандидатській дисертації автора дисертації див. [161]. Далі в роботі [72] автором отримано ще одне незалежне доведення цих класифікацій для орієнтовних та неорієнтовних поверхонь та обох випадків P , за допомогою твірних груп гомеотопій поверхонь, а в [86] — наведено опис множини $\pi_0\mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$.

В цьому розділі представлені результати робіт [72, 86]. Викладений підхід має зв'язок з роботою А. Hatcher та W. Thurston [44], де використовуються деформації функцій Морса для побудови скінченного копредставлення групи гомеотопій поверхні. Ми застосуємо відому інформацію про твірні групи гомеотопій для побудови деформацій між функціями Морса в $\mathcal{M}_\partial(M, P)$ та $\mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$. Основне спостереження полягає в тому, що «елементарні дифеоморфізми», типу скручувань Дена, Y -гомеоморфізмів та ін., які породжують цю групу, також зберігають деякі функції Морса.

Для зручності введемо наступне означення

Означення 9.1.1. Нехай $f, g \in \mathcal{M}_\partial(M, P)$ — два відображення Морса. Якщо існує гомотопія F між ними в $\mathcal{M}_\partial(M, P)$, то F називатиметься — **Σ -гомотопією** або Σ -деформацією між f та g і записуватимемо $f \stackrel{F_t}{\sim} g$. Запис $f \stackrel{\Sigma}{\sim} g$ означатиме, що f та g є Σ -гомотопними.

Таким чином питання про множину $\pi_0\mathcal{M}_\partial(M, P)$ — це питання про множину класів Σ -гомотопій відображень Морса.

Основний результат. Нехай $f \in \mathcal{M}_\partial(M, P)$ або $\mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$. Позначимо через $c_i(f) = c_i$, $i = 0, 1, 2$, число критичних точок f індексу i . Тоді $c_0(f) + c_1(f) - c_2(f) = \chi(M)$, див. (1.17).

Нехай далі V — така компонента зв'язності межі ∂M , що f приймає на ній

постійне значення, $z \in V$ і $\xi \in TM_z$ — дотичний вектор в точці z , направлений зовні поверхні M . Позначимо через $\varepsilon_f(V)$ знак числа $df(z)\xi$. Так як f не має критичних точок на V , то $\varepsilon_f(V) = \pm 1$ і не залежить від вибору точки $z \in V$ та вектора $\xi \in TM_z$ як вище. Назвемо V f -додатною або f -від'ємною у відповідності із знаком $\varepsilon_f(V)$.

Зауваження 9.1.2. Припустимо, що $f, g \in \mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$ гомотопні просто як неперервні відображення і нехай V — компонента межі ∂M . Тоді степені відображень $f|_V, g|_V : V \rightarrow S^1$ співпадають. Зокрема, якщо f приймає на V постійне значення, то g також постійне на V .

Наша мета дати нове доведення наступної теореми, див. §9.6.

Теорема 9.1.3. [72,86,156,161,174]. *Нехай $\mathcal{X} = \mathcal{M}_\partial(M, P)$ або $\mathcal{X} = \mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$, але M є орієнтовною. Два відображення Морса $f, g \in \mathcal{X}$ належать одній компоненті зв'язності простору $\mathcal{X}$ тоді і лише тоді, коли виконуються наступні три умови:*

- (i) f та g гомотопні, як неперервні відображення (для випадку $P = \mathbb{R}$ ця умова тривіально виконується)
- (ii) $c_i(f) = c_i(g)$ для $i = 0, 1, 2$;
- (iii) $\varepsilon_f(V) = \varepsilon_g(V)$ для кожної компоненти V межі ∂M , на якій f та g приймають постійне значення.

Більш точно ми представимо нові доведення цієї теореми лише для $\mathcal{X} = \mathcal{M}_\partial(M, P)$ у наступних випадках:

- 1) $P = \mathbb{R}$,
- 2) $P = S^1$, але M є орієнтовною
- 3) узагальнимо доведення роботи [161] (випадок $P = S^1$) для всіх компактних (орієнтовних та неорієнтовних) поверхонь.

Для $\mathcal{X} = \mathcal{M}_{cov}(M, S^1)$ доведення теореми 9.1.3 дається в [86]. Воно приблизно повторює ключові кроки доведень з [72,161], а тому ми не наводимо його.

Необхідність умов теореми очевидна, тому ми доводитимемо лише достатність. Коротко нагадаємо відомі підходи до доведення цієї теореми. Спочатку розглянемо випадок $P = \mathbb{R}$. Нехай f та g — дві функції Морса, які мають однакові критичні типи. В обох доведеннях [156, 174] задача зводилась до випадку, коли ці функції є мінімальними і взагалі не мають локальних екстремумів.

Нехай F — градієнтно-подібне векторне поле для мінімальної функції Морса f . Розглянемо об'єднання f -від'ємних компонент межі ∂M разом з траєкторіями поля F , що закінчуються в критичних точках f . Назвемо цю множину *спайном* M . С. В. Матвеев (див. О. Кудрявцева [156]) зауважує, що простір функцій Морса з ізотопними спайнами є лінійно зв'язним. Далі він вводить елементарні перетворення спайнів, які індукують Σ -гомотопії функцій Морса, і показує, що довільні два спайни можуть бути з'єднані скінченним числом цих елементарних перетворень.

В. В. Шарко [174] зводить доведення теореми до випадку, коли поверхня M має лише одну додатну та одну від'ємну компоненти межі. Таку поверхню можна розглядати як «оснащену» хордову діаграму, що є просто регулярним околom спайну. Відмітимо, що фундаментальна група $\pi_1 M$ є вільною. Виберемо базис цієї групи. Тоді ребра будь-якої іншої хордової діаграми, вкладеної в M , можна однозначно виразити як слова в термінах вибраних твірних. Тоді ці слова також утворюють базис $\pi_1 M$ і визначають хордову діаграму з точністю до еквівалентності. Більш того, за відомою теоремою Нільсена, будь-які два базиси скінчено породженої вільної групи пов'язані скінченною послідовністю так званих перетворень Нільсена. В. В. Шарко довів, що кожне таке перетворення Нільсена індукує Σ -гомотопію між відповідними функціями Морса і що функції Морса з еквівалентними хордовими діаграмами є Σ -гомотопними.

План доведення теореми 9.1.3. Аналогічно до роботи [156] ми зводимо задачу до випадку коли $g = f \circ h$, де h — дифеоморфізм M і f має спеціальний «канонічний» вид. Зручно говорити, що дифеоморфізм h є f -допустимим якщо

$f \stackrel{\Sigma}{\sim} f \circ h$. Використовуючи спеціальний вигляд f , ми виберемо певну систему твірних групи гомеотопій $\mathcal{M}(M)$ і покажемо, що у випадку $P = \mathbb{R}$ всі ці твірні є f -допустимими. Це доведе теорему 9.1.3 для даного випадку.

Якщо ж $P = S^1$, M є орієнтовною і f не гомотопне нулю, то одна з твірних принципово не може бути f -допустимою. Але використовуючи припущення про те, що f та $f \circ h$ є гомотопними, ми зведемо задачу до випадку, коли h тривіально діє на групі гомологій $H_1(M, \partial M)$, тобто h належить до групи Тореллі поверхні M . Твірні цієї групи добре відомі, див. [53, 103, 117] і це дозволить встановити, що $f \stackrel{\Sigma}{\sim} f \circ h$.

9.2 Допоміжні твердження

Розрізання M уздовж регулярного рівня f . Ми часто користуватимемось наступною конструкцією. Нехай c — регулярне значення відображення Морса $f : M \rightarrow S^1$. Тоді $f^{-1}(c)$ є незв'язним об'єднанням простих замкнутих кривих на M . Припустимо, що $f^{-1}(c) \cap \partial M = \emptyset$. Розріжемо M уздовж $f^{-1}(c)$ і позначимо отриману поверхню через $\tilde{M} = \tilde{M}(f, c)$. Аналогічно, розріжемо S^1 в точці $f(c)$ і отримаємо $[0, 1]$. Нехай $p : \tilde{M} \rightarrow M$ і $q : [0, 1] \rightarrow S^1$ — відповідні фактор-відображення, де $q(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Тоді існує така функція Морса $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & [0, 1] \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array} \quad (9.1)$$

Таким чином

$$f(x) = \exp \left(2\pi i \tilde{f}(p^{-1}(x)) \right), \quad \forall x \in M. \quad (9.2)$$

Покладемо $B_0 = \tilde{f}^{-1}(0)$, $B_1 = \tilde{f}^{-1}(1)$ і $B = B_0 \cup B_1$. Тоді існує природна відповідність між Σ -гомотопіями F_t функції $\tilde{f}$ відносно деякого околу B та Σ -

гомотопіями f_t функції f відносно деякого околу γ . Відповідні відображення F_t та f_t пов'язані комутативною діграмою (9.1).

Так як M є зв'язним, то кожна компонента зв'язності X поверхні $\tilde{M}$ перетинає B . Але можлива ситуація, що $X \cap B_i = \emptyset$ для деякого $i = 0, 1$. Таким чином, компоненти зв'язності $\tilde{M}$ можна розбити на наступні 4 групи:

$$Q_0 = Q_0(f, c), \quad Q_0^1 = Q_0^1(f, c), \quad Q^1 = Q^1(f, c) \quad (9.3)$$

що (відповідно) перетинають лише B_0 , перетинають обидві множини B_0 та B_1 , перетинають тільки B_1 .

Зрозуміло також, що для кожної зв'язної компоненти X множини $Q_0^1(f, c)$ і $t \in [0, 1]$ маємо співвідношення $X \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset$.

Мінімізація перетину кривої з лінією рівня. Нехай M — компактна поверхня і $f : M \rightarrow S^1$ — відображення Морса. Припустимо, що на M задано скінченна сім'я $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ попарно диз'юнктивних простих замкнутих кривих.

Лема 9.2.1. [72, 161] *f є Σ -гомотопним до відображення Морса g , для якого жодна з кривих γ_i не проходить через критичну точку g і для кожного $i = 1, \dots, m$ виконуються наступні умови:*

- (i) *якщо обмеження $f|_{\gamma_i}$ не є гомотопним нулю, то кожна γ_i трансверсально перетинає кожну множину рівня g ;*
- (ii) *якщо ж обмеження $f|_{\gamma_i}$ гомотопне нулю, то існує така регулярна множина рівня L відображення g , що $\gamma_i \cap L = \emptyset$.*

Доведення. Твердження (ii) співпадає з теоремою 5 з [161], а твердження (i) випливає з доведення. Ми залишаємо деталі читачеві. $\square$

Наслідок 9.2.2. *Кожне відображення Морса $f : M \rightarrow S^1$ є Σ -гомотопним до такого відображення Морса g , що для деякого регулярного значення c відображення g виконуються наступні умови:*

- (A) *якщо f є гомотопним нулю, то $g^{-1}(c) = \emptyset$;*

(В) в протилежному випадку число $\#(g^{-1}(c))$ компонент зв'язності лінії рівня $g^{-1}(c)$ дорівнює індексу підгрупи $f_*(H_1(M))$ в $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

9.3 Канонічні відображення Морса

Скажемо, що відображення Морса $f : M \rightarrow P$ є *канонічним*, якщо його КР-відображення еквівалентне до відображення зображеного на Рис. 9.3.1.

Спочатку розглянемо випадок $P = \mathbb{R}$, див. Рис. 9.3.1А). Частина КР-графу, прихована під прямокутником, відповідає наступним випадкам M :

- а) M — орієнтовна;
- б) M — неорієнтована непарного роду g ;
- в) M — неорієнтовна парного роду g ;
- д) M — неорієнтовна, $g \geq 3$ і є непарним. В цьому випадку ми використовуємо два типи канонічних функцій Морса, див. Рис. 9.3.1А). Ці дві функції зв'язані Σ -гомотопією, див. [156].

Для випадку $P = S^1$ канонічне відображення Морса $f : M \rightarrow S^1$ можна описати наступним чином: існує таке регулярне значення c відображення f , що $\gamma = f^{-1}(c)$ є простою замкнутою кривою. Більш того, якщо розрізати M уздовж γ , то обмеження $f : M \setminus \gamma \rightarrow S^1 \setminus c$ є канонічною функцією Морса. На Рис. 9.3.1В) КР-граф функції f «прихований» за прямокутником.

Відмітимо також, що канонічне відображення Морса є відображенням загального положення, а гомоморфізм $f_* : H_1(M) \rightarrow H_1(S^1)$ є сюр'єктивним.

Лема 9.3.1. *Нехай $f, g : M \rightarrow P$ — два канонічних відображення Морса, які мають однаковий критичний тип $K(f) = K(g)$. Тоді ці відображення еквівалентні.*

Більш того, існує Σ -гомотопія g у канонічне відображення Морса g_1 таке, що $g_1 = f \circ h$, де h — дифеоморфізм M .

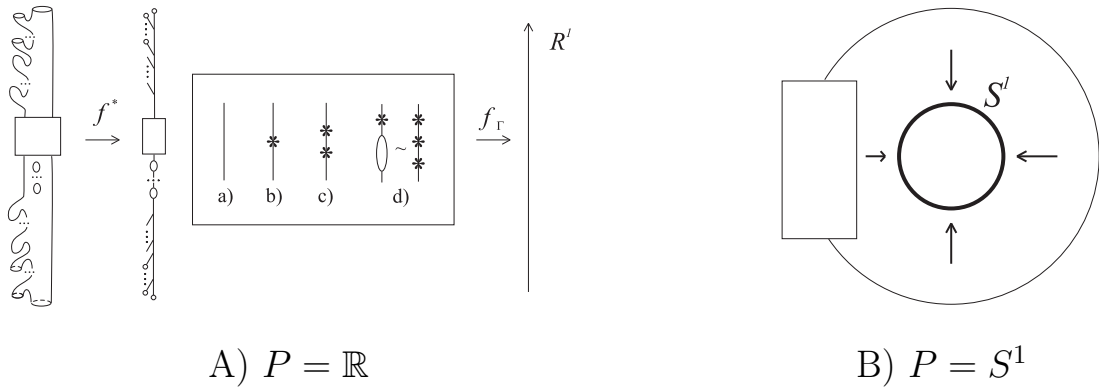


Рис. 9.3.1: КР-графи та КР-функції канонічних відображень Морса в P

Доведення. Очевидно, що КР-граф та КР-відображення канонічного відображення Морса визначається числами c_0 , c_2 , b_+ , b_- та (орієнтовним чи неорієнтовним) родом g поверхні M . Відмітимо також, що число c_1 виражається через c_0 та c_2 та Ейлерову характеристику поверхні.

Тому з умови $K(f) = K(g)$ випливає, що КР-відображення f та g еквівалентні. Тоді за лемою 1.3.2 f та g також є еквівалентними, тобто $p \circ g = f \circ h$, де p — дифеоморфізм, що зберігає орієнтацію P , а h — дифеоморфізм M . Зокрема, p є ізотопним до тотожного дифеоморфізму id_P . Нехай p_t — ізотопія між $p = p_1$ та $\text{id}_P = p_0$. Тоді $g_t = p_t \circ g \in \Sigma$ -гомотопією між $g = g_0$ та $g_1 = p_1 \circ g = p \circ g = f \circ h$. $\square$

Твердження 9.3.2 (див. також [156, лема 10]). *Кожне відображення Морса $f : M \rightarrow P$ таке, що гомоморфізм $f_*(H_1(M)) \subset H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$ є сюр'єктивним, Σ -гомотопне канонічному відображенню Морса.*

З цього твердження випливає, що $f \stackrel{\Sigma}{\sim} f_1$ і $g \stackrel{\Sigma}{\sim} g_1$, де f_1 та g_1 — канонічні відображення Морса однакового критичного типу $K(f) = K(g)$. Тоді за лемою 9.3.1 $g_1 = f_1 \circ h$, де h — дифеоморфізм M .

Доведення. Як відмічалось вище, дане твердження доведене в [156, лема 10] для випадку замкнутих поверхонь та $P = \mathbb{R}$. Доведення легко узагальнюється на поверхні з межею.

Припустимо, що $P = S^1$. Так як f_* є відображенням «на», то за лемою 9.2.2 $f \in \Sigma$ -гомотопним до такого відображення Морса f_1 , що $\alpha = f_1^{-1}(c)$ є простою замкнутою кривою, де c — деяке регулярне значення f_1 . Розрізавши M уздовж α як описано в §9.2 ми отримаємо поверхню $\tilde{M}$ та функцію $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$. Тоді за випадком $M = \mathbb{R}$ даного твердження $\tilde{f} \in \Sigma$ -гомотопним відносно деякого околу B до канонічної функції Морса. Ця Σ -гомотопія індукує Σ -гомотопію f до канонічного відображення Морса. $\square$

9.4 Допустимі дифеоморфізми та криві

Означення 9.4.1. Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення Морса і $h : M \rightarrow M$ — дифеоморфізм. Назвемо його *f -допустимим*, якщо $f \circ h \in \Sigma$ -гомотопним до f . Відмітимо, що з f -допустимості випливає, що h зберігає інваріантними множини f -додатних та f -від'ємних компонент межі ∂M і що f та $f \circ h$ є гомотопними.

Нехай $\mathcal{A}(f) \subset \mathcal{D}(M)$ — множина всієї f -допустимих дифеоморфізмів, $\mathcal{D}_{\text{id}}(M)$ — тотожна компонента $\mathcal{D}(M)$ і $C(f)$ — компонента лінійної зв'язності f в $\mathcal{M}_{\partial}(M, P)$.

Лема 9.4.2. $\mathcal{A}(f)$ є групою і складається з повних класів ізотопії, тобто $\mathcal{D}_{\text{id}}(M) \subset \mathcal{A}(f)$. Більш того, якщо $g \in C(f)$, то $\mathcal{A}(g) = \mathcal{A}(f)$.

Доведення. Припустимо, що $p, q \in \mathcal{A}(f)$ і нехай $f \stackrel{\Phi_t}{\sim} f \circ p$ і $f \stackrel{\Psi_t}{\sim} f \circ q$ — деякі Σ -гомотопії. Тоді $p \circ q$ і $p^{-1} \in \mathcal{A}(f)$. Дійсно,

$$f \stackrel{\Psi_t}{\sim} f \circ q \stackrel{\Phi_t \circ q}{\sim} f \circ p \circ q \quad \text{і} \quad f = f \circ p \circ p^{-1} \stackrel{\Phi_{1-t} \circ p^{-1}}{\sim} f \circ p^{-1}.$$

Таким чином, $\mathcal{A}(f)$ є групою.

Якщо $p \stackrel{H_t}{\sim} p_1$ — ізотопія, то гомотопія $f \stackrel{\Phi_t \circ H_t}{\sim} f \circ p_1 \in \Sigma$ -гомотопією. Отже, $\mathcal{A}(f)$ складається з повних класів ізотопії.

Нарешті, якщо $f \stackrel{\Psi_t}{\sim} g$ — Σ -гомотопія, то $g \stackrel{\Psi_t}{\sim} f \stackrel{\Phi_t}{\sim} f \circ p \stackrel{\Psi_{1-t} \circ p}{\sim} g \circ p$. Тому $p \in \mathcal{A}(g)$, тобто $\mathcal{A}(f) \subset \mathcal{A}(g)$. Аналогічно, $\mathcal{A}(g) \subset \mathcal{A}(f)$. $\square$

Розглянемо наступні три типи «елементарних дифеоморфізмів» і покажемо, що вони зберігають деякі функції Морса спеціального виду.

Скручування Дена. Нехай $\gamma \subset M$ — двостороння орієнтована проста замкнута крива. Тоді можна визначити дифеоморфізм t_γ визначений в деякому околі γ , як показано на Рис. 9.4.1a). Цей дифеоморфізм (та обернений до нього) називають *скручуванням Дена*, див. [23, 66].

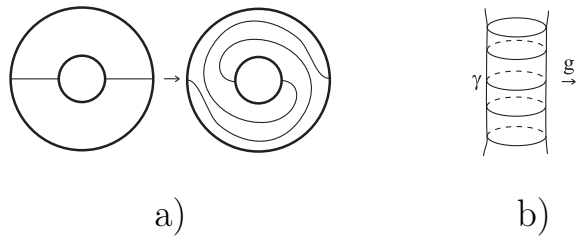


Рис. 9.4.1: Скручування Дена

Означення 9.4.3. Нехай γ — двостороння проста замкнута крива в $M \setminus \partial M$. Скажемо, що γ є *f -допустимою*, якщо f є Σ -гомотопним до відображення Морса g такого, що γ є зв'язною компонентою деякої регулярної множини рівня відображення g .

Лема 9.4.4. Нехай $\gamma \subset \text{Int} M$ — f -допустима крива. Тоді скручування Дена t_γ уздовж γ є f -допустимим.

Доведення. Нехай $f \stackrel{F}{\sim} g$ — така Σ -гомотопія, що γ є зв'язною компонентою деякої регулярної множини рівня відображення g . Тому існує регулярний окіл γ дифеоморфний до $S^1 \times I$, так що при цьому дифеоморфізмі функція g є проєкцією на I , див. Рис. 9.4.1b). Очевидно, що існує скручування Дена t_γ уздовж γ , яке лишає інваріантним кожне коло виду $S^1 \times \{t\}$. Ці кола є лініями рівня g , а тому t_γ зберігає функцію g , тобто $g = g \circ t_\gamma$. Це означає, що t_γ є g -допустимим, а тому згідно (1) леми 9.4.2 t_γ є також f -допустимим. $\square$

Граничні зсуви. Нехай $A = S^1 \times [0, 1]$ — кільце і C_0, C_1 — зв'язні компоненти

межі ∂A . Розділимо C_1 на чотири дуги однакової довжини $l_1, \dots, l_4$ так, щоб l_1 була протилежною до l_3 , а l_2 до l_4 . Ототожнимо протилежні точки l_1 та l_3 . Тоді фактор простір є стрічною Мьобіуса $M\ddot{o}$ з діркою, межа якої $C'_1 = l_2 \cup l_4$.

Нехай $\tau : A \rightarrow A$ — «напів-скручування» Дена уздовж C_1 , яке міняє місцями l_1 з l_3 , l_2 з l_4 та є тотожним в деякому околі C_0 . Тоді τ індукує деякий дифеоморфізм $\nu : M\ddot{o} \rightarrow M\ddot{o}$, що «повертає C'_1 на кут π і є нерухомим на C_0 », див. Рис. 9.4.1а).

Припустимо, що $M\ddot{o}$ є вкладеним в M так, що C_1 відображається на деяку компоненту C межі ∂M . Тоді ν продовжується тотожним відображенням на всю поверхню M . Цей дифеоморфізм називається *граничним зсувом C уздовж $M\ddot{o}$* .

Відмітимо, що наш опис граничних зсувів відрізняється від опису даного в [55, 138]. Перевага представленого опису в симетричності ν . Тепер легко бачити, що існує така функція Морса $f : M\ddot{o} \rightarrow [0, 1]$, яка має єдину критичну точку індексу 1, причому $f^{-1}(0) = C_0$ і $f^{-1}(1) = C'_1$. Її критична лінія рівня та КР-граф зображені на Рис. 9.4.1б).

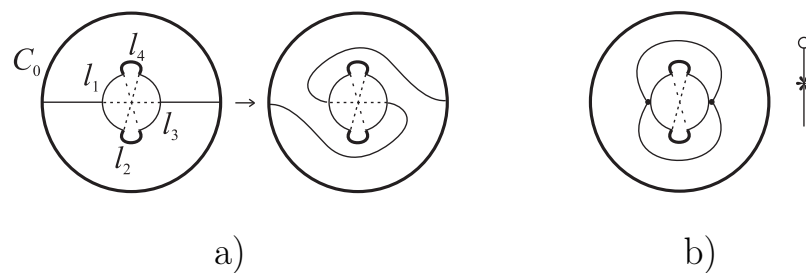


Рис. 9.4.1: Граничний зсув

Наступна лема очевидна.

Лема 9.4.5. *Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення Морса неорієнтовної поверхні M . Припустимо, що КР-граф f має таке ребро e , що одна з його вершин, v_1 , має степінь 2, а інша, v_2 , відповідає деякій компоненті зв'язності C межі ∂M , див. Рис. 9.4.1б). Нехай N — окіл e , що не містить інших вершин графу*

Γ_f крім ∂e . Тоді $M\ddot{o} = f^{*-1}(N) \subset M$ є стрічкою М'юбіуса з діркою і існує такий граничний зсув $\nu : M \rightarrow M$ компоненти $C = f^{*-1}(v_2)$ уздовж $M\ddot{o}$, що $f \circ \nu = f$. $\square$

Y-дифеоморфізми. Цей тип дифеоморфізмів був вперше розглянутий W. B. R. Liskorish [65]. В [55, 138] автори використовують термін *crosscap slide*. Слідуючи [12] нагадаємо його означення через дволистне орієнтовне накриття.

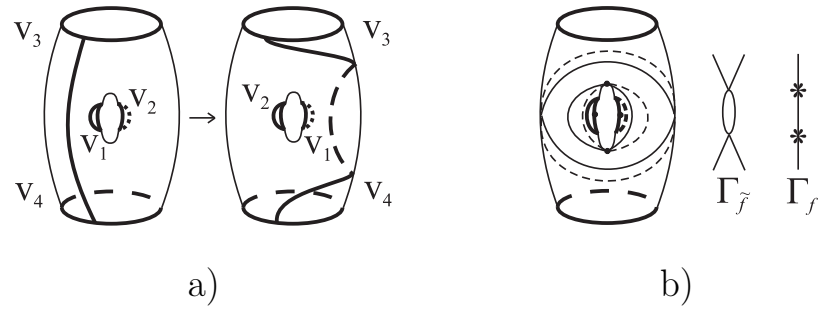
Нехай K — пляшка Клейна з двома дірками $p : T \rightarrow K$ і — її орієнтовне дволистне накриття, де T — тор з чотирма дірками. Вважатимемо, що T вкладений в $\mathbb{R}^3$ так, що він є симетричним відносно початку координат, тобто інваріантний відносно інволюції $\xi(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, див. Рис. 9.4.1а).

Нехай $V_1, \dots, V_4$ — компоненти зв'язності ∂T занумеровані так, щоб $\xi(V_1) = V_2$ і $\xi(V_3) = V_4$. Тоді існує дифеоморфізм $\tilde{y} : T \rightarrow T$, який є нерухомим біля $V_3 \cup V_4$, співпадає з ξ біля $V_1 \cup V_2$ і $\tilde{y} \circ \xi = \xi \circ \tilde{y}$. Таким чином, y можна описати як «обертання» T відносно осі z на кут π з фіксованим граничним компонентами V_3 та V_4 . На Рис. 9.4.1а) зображено дугу на T та її образ при $\tilde{y}$. Так як $\tilde{y}$ комутує з ξ , то він індукує деякий дифеоморфізм $K = T/\xi$ нерухомий в околі ∂K .

Припустимо, що $K \subset M$ вкладена в поверхню M . Тоді y продовжується тожним відображенням до дифеоморфізму всієї поверхні M . Такий дифеоморфізм M називатиметься *Y-дифеоморфізмом* з носієм в K .

Відмітимо, що існує така функція Морса $\tilde{f} : T \rightarrow \mathbb{R}$ з чотирма критичними точками, що $\tilde{f} \circ \tilde{y} = \tilde{f}$, див. Рис. 9.4.1а), на якому зображені лінії рівня $\tilde{f}$. Тоді $\tilde{f}$ індукує таку єдину функцію Морса $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ з двома критичними точками, що $f \circ y = f$. КР-графи $\Gamma_{\tilde{f}}$ та Γ_f функцій $\tilde{f}$ та f зображені на Рис. 9.4.1b).

Лема 9.4.6. *Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення Морса на неорієнтовній поверхні M . Припустимо, що КР-граф відображення f має вершину v степеня 2. Нехай N — окіл v в Γ_f , що не містить інших вершин. Тоді $K =$*

Рис. 9.4.1: Y -дифеоморфізм

$f^{*-1}(N) \subset M$ є пляшкою Клейна з двома дірками і існує такий Y -дифеоморфізм $y : M \rightarrow M$ з носієм в K , що $f \circ y = f$. $\square$

Твірні $\mathcal{M}(M)$ для канонічного відображення Морса. Нехай $f : M \rightarrow P$ — відображення Морса. Позначимо через $\mathcal{M}_f(M)$ підгрупу в $\mathcal{M}(M)$, що складається з дифеоморфізмів які лишають інваріантними множини f -додатних та f -від'ємних компонент ∂M . Очевидно, що $\mathcal{A}(f) \subset \mathcal{M}_f(M)$.

Лема 9.4.7. Нехай $f : M \rightarrow P$ — канонічне відображення Морса. У випадку $P = S^1$ припустимо також, що M є орієнтовною. Тоді існує така система твірних для $\mathcal{M}_f(M)$, що має наступні властивості.

- (i) Якщо $P = \mathbb{R}$, то всі ці твірні є f -допустимими, тобто $\mathcal{A}(f) = \mathcal{M}_f(M)$, а тому теорема 9.1.3 виконується для цього випадку.
- (ii) Якщо ж $P = S^1$ (і M є орієнтовною), то всі твірні крім однієї є f -допустимими.

Зауваження 9.4.8. Нагадаємо, що ми не доводитимемо теорему 9.1.3 (новим методом) для випадку коли M є неорієнтовною, а $P = S^1$.

Доведення. Нехай f — канонічне відображення Морса. Ми побудуємо таку систему твірних для $\mathcal{M}(M)$, описану в теоремах 1.5.1 та 1.5.2, що f -допустимість її елементів є майже очевидною.

Спочатку припустимо, що M є орієнтовною і вкладена в $\mathbb{R}^3$ так, як показано

на Рис. 9.3.1А). Тоді канонічне відображення Морса f є просто проекцією на вертикальну пряму.

(1) Нехай $\mathcal{D}(M)$ — дифеоморфізм M , що є симетрією відносно площини листка. Тоді $\mathcal{D}(M)$ змінює орієнтацію M і зберігає f , тобто $f = f \circ \mathcal{D}(M)$. Зокрема, $\mathcal{D}(M)$ є f -допустимим.

(2) Порівнюючи Рис. 9.3.1А) та 1.5.1, бачимо, що α_i та γ_i є регулярними компонентами ліній рівня f , а тому відповідні скручування Денас t_{α_i} та t_{γ_i} є f -допустимими. f -допустимість скручувань Дена t_{β_i} , t_{δ_i} та t_{ϵ_i} проілюстрована на Рис. 9.4.1.

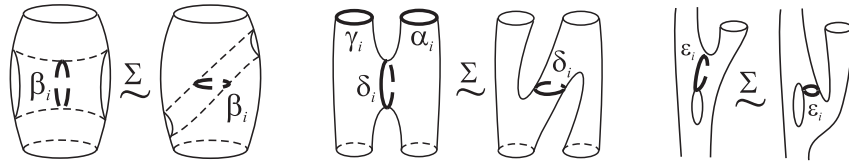


Рис. 9.4.1: f -допустимість конфігурації $\mathcal{C}$

(3) Нехай V_i та V_j — дві f -додатні компоненти ∂M . Тоді $f \in \Sigma$ -гомотопним до відображення Морса f_1 , КР-граф Γ_{f_1} якого містить підграф Γ_1 , зображений на Рис. 9.4.2а). Нехай σ_{ij} — проста заскнута крива, що відповідає точці $s \in \Gamma_1$. Тоді існує дифеоморфізм b_{ij} поверхні M_1 , якщо міняє місцями V_i та V_j , зберігає f_1 , а його квадрат b_{ij}^2 є скручуванням Дена уздовж σ_{ij} . Тоді b_{ij} та σ_{ij} є f -допустимими.

Нехай V_i — f -додатна, а V_j — f -від'ємна компоненти ∂M . У цьому випадку будь-який дифеоморфізм b_{ij} , що переставляє V_i та V_j не є f -допустимим, так як він не лишає множини f -додатних та f -від'ємних граничних компонент. Покажемо, що в цьому випадку його квадрат $b_{ij}^2 = t_{\sigma_{ij}}$ все ж таки є f -допустимим. Розглянемо два випадки.

(а) Припустимо, що f має хоча б одну критичну точку індексу 0 або 2, або хоча б одну компоненту межі ∂M відмінну від V_i та V_j . Тоді $f \in \Sigma$ -гомотопним відображення Морса f_1 , КР-граф Γ_{f_2} якого містить підграф Γ_2 зображений на

Рис. 9.4.2b). Нехай σ_{ij} — проста замкнута крива, що відповідає точці $s \in \Gamma_2$. Тоді очевидно, що $\sigma_{ij} \in f$ -допустимою.

(b) В протилежному випадку f не має локальних екстремумів і $\partial M = V_1 \cup V_2$. Нехай σ_{12} — проста замкнута крива, що перетинає кожну криву γ_i , але не перетинає жодної з кривих конфігурації $\mathcal{C}$ і розбиває M на дві компоненти M_1 та M_2 такі, що M_1 є диском з двома дірками V_1 та V_2 , див. Рис. 9.4.2c).

Покажемо, що σ_{12} не є f -допустимою. В протилежному випадку обмеження f на M_2 повинно було б мати екстремуми, які можуть прийматись лише на граничних компонентах відмінних від V_1 та V_2 , або в критичних точках індексів 0 та 2. Таких граничних компонент та критичних точок немає на M_2 .

Але добре відомо, що скручування Дена $t_{\sigma_{12}}$ є добутком скручувань Денас уздовж кривих конфігурації $\mathcal{C}$ за виключенням кривої γ_i . Тому скручування Дена $t_{\sigma_{12}} \in f$ -допустимим.

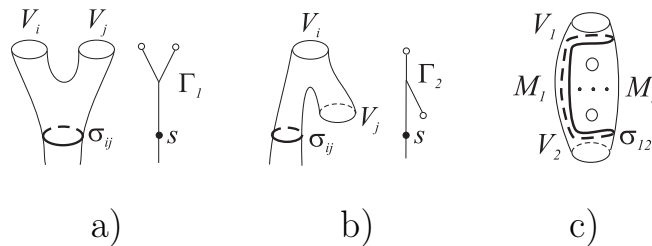


Рис. 9.4.2: f -допустимість b_{ij} та σ_{ij}

Нехай тепер M є неорієнтовною роду g (див Рис. 1.5.1) і $f : M \rightarrow P$ — канонічна функція Морса, така як на Рис. 9.3.1A).

(1) Для випадку $g \geq 2$ ми зараз визначимо допустимий Y -дифеоморфізм. Якщо g є непарним, то Γ_f обов'язково має вершину v степеня 2. В протилежному випадку $f \in \Sigma$ -гомотопною до функції Морса f_1 , у якої КР-граф має таку вершину, див. граф d) на Рис. 9.3.1A). Тоді за лемою 9.4.6, існує такий Y -дифеоморфізм y , що $f = f \circ y$ або $f_1 = f_1 \circ y$ в другому випадку. Тому $y \in f$ -допустимим.

Визначення твірних типів (2) та (3), а також доведення їх f -допустимості,

аналогічні до орієнтовного випадку. Потрібно лише перевірити f -допустимість кривих β_0 та δ_0 для $g = 2r \geq 2$.

Нехай N — окіл вершини v , який не містить інших вершин графа Γ_f . Тоді $K = f^{*-1}(N) \subset M$ є пляшкою Клейна з двома дірками. Нехай $p : T \rightarrow K$ — орієнтовне дволистне накриття, де T — тор з чотирма дірками. Можна вважати, що функція $\tilde{f} = f \circ p : T \rightarrow \mathbb{R}$ співпадає з функцією, визначеною в §9.4, див. Рис. 9.4.1. Так як β_0 та δ_0 двосторонні, то прообраз $\tilde{\beta}_0 = p^{-1}(\beta_0)$ та $\tilde{\delta}_0 = p^{-1}(\delta_0)$ кожної з них в T складається з пари диз'юнктних простих замкнутих кривих, див. Рис. 9.4.3а).

На Рис. 9.4.3б) показано, що $\tilde{\beta}_0$ є регулярною лінією рівня функції $\tilde{f}$, а також проілюстровано симетричну Σ -гомотопію $\tilde{f}$, нерухому біля ∂T , яка робить $\tilde{\delta}_0$ регулярною лінією рівня. Тому $\tilde{\beta}_0$ та $\tilde{\delta}_0$ є $\tilde{f}$ -допустимими, а значить β_0 та δ_0 є f -допустимими.

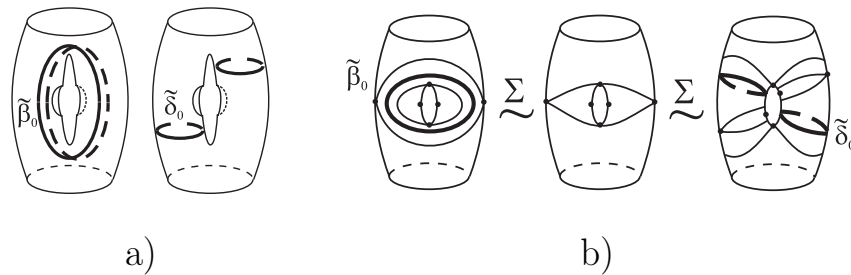


Рис. 9.4.3: f -допустимість β_0 та δ_0

(4) Залишається побудувати f -допустимі граничні зсуви ν_i та ω_i . Нехай V_i — зв'язна компонента межі ∂M і $z_i \in \Gamma_f$ — відповідна o -вершина.

Спочатку примусимо, що g є непарним, а тому Γ_f має єдину вершину x степеня 2. Тоді f є Σ -гомотопним до такої функції Морса f_1 , що z_i та x будуть вершинами одного ребра, див. Рис. 9.4.4. Тому за лемою 9.4.5 існує граничний зсув ν_i компоненти V_i , що зберігає f_1 , а значить $\nu_i \in f$ -допустимим.

Якщо рід g є парним, то Γ_f має дві вершини x_1 та x_2 степеня 2. Як і в попередньому випадку, визначимо f -допустимий граничний зсув ν_i для V_i та

x_1 , а також ω_i для V_i та x_2 .

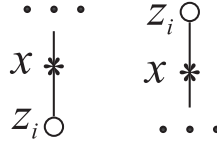


Рис. 9.4.4

Нехай тепер $P = S^1$, $c \in S^1$ — таке регулярне значення f , для $\alpha_1 = f^{-1}(c)$ обмеження f на $M \setminus \alpha_1$ є канонічною функцією Морса в $S^1 \setminus c$.

Припустимо, що M є орієнтовною. Визначимо конфігурацію кривих $\mathcal{C}$, асоційовану з f , як показано на Рис. 9.4.5, де f — є «проекцією» на β_1 . Аналогічно до попереднього випадку означимо дифеоморфізм $\mathcal{D}(M)$, скручування Дена уздовж кривих конфігурації $\mathcal{C}$, та «транспозиції» компонент межі b_{ij} . Як і в випадку $P = \mathbb{R}$ можна показати, що всі ці дифеоморфізми є допустимими, за виключенням скручування Дена уздовж β_1 , так як f та $f \circ t_{\beta_1}$ не є навіть гомотопними.

Відмітимо, що коли M є неорієнтовною, то поверхня $M \setminus \alpha_1$ може бути орієнтовною або неорієнтовною. Цей випадок ми не розглядаємо, див. зауваження 9.4.8. □

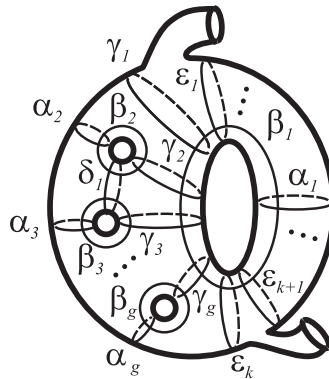


Рис. 9.4.5: Конфігурація $\mathcal{C}$ для неорієнтовної поверхні M та $P = S^1$

Твірні групи Тореллі. Нехай $f : M \rightarrow S^1$ — відображення Морса і $\mathcal{T}(M)$ —

група Тореллі поверхні M , див. §1.5. Згідно теореми 1.5.3 $\mathcal{T}(M)$ має два типи твірних. Наступна теорема описує f -допустимі твірні групи $\mathcal{T}(M)$.

Теорема 9.4.9. (i) Нехай $\gamma \subset M$ — проста замкнута крива і t_γ — скручування Дена уздовж γ . Тоді $t_\gamma \in f$ -допустимим тоді і лише тоді, коли обмеження $f|_\gamma$ є гомотопним нулю. Якщо γ розбиває M , то $f|_\gamma$ завжди є гомотопним нулю, а тому кожен дифеоморфізм типу (а) теореми 1.5.3 (породжений скручуваннями Дена уздовж розбиваючих кривих) є f -допустимим.

(ii) Кожен дифеоморфізм типу (b) теореми 1.5.3 є f -допустимим.

Доведення. (i) Нехай $\gamma \subset M$ — проста замкнута крива і t_γ — скручування Дена уздовж γ .

Необхідність. Припустимо, що $t_\gamma \in f$ -допустимим. Тоді f та $f \circ t_\gamma$ є гомотопними. Ми покажемо, що $\deg f|_\gamma = 0$. Можна вважати, що існує таке регулярне значення c для f , що $\alpha = f^{-1}(c)$ є простою замкнутою кривою. Позначимо $\alpha' = t_\gamma(\alpha)$.

Так як f та $f \circ t_\gamma$ гомотопні, то $[\alpha'] = [\alpha]$ в $H_1(M, \partial M)$, тобто t_γ залишає нерухомим клас гомологій $[\alpha]$. Тому з формули (9.10), що описує дію скручувань Дена на $H_1(M, \partial M)$ отримуємо, що

$$[\alpha] = t_\gamma([\alpha]) = \omega([\gamma], [\alpha]) \cdot [\gamma] + [\alpha] = \deg f|_\gamma \cdot [\gamma] + [\alpha],$$

а тому $\deg f|_\gamma = 0$.

Достатність. Припустимо, що $f|_\gamma$ є гомотопним нулю. Тоді за лемою 9.2.1 f є Σ -гомотопним до такого відображення Морса g , що $g^{-1}(c) \cap \gamma = \emptyset$ для деякого регулярного значення c відображення g . Застосуємо конструкцію з §9.2. Розрізавши M уздовж $g^{-1}(c)$, ми отримаємо поверхню $\tilde{M} = \tilde{M}(g, c)$, функцію Морса $\tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$, і просту замкнуту криву $\tau \subset \tilde{M}$, що відповідає γ . За випадком $P = \mathbb{R}$ теореми 9.1.3, $t_\tau \in \tilde{g}$ -допустимою. Тому $t_\gamma \in g$ -допустимим, отже і f -допустимим.

(ii) Нехай $f : M \rightarrow S^1$ — відображення Морса, $\gamma_1, \gamma_2 \subset M$ — диз'юнктні гомологічні орієнтовані прості замкнуті криві і $t = t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2}^{-1}$ — добуток відповідних скручувань Дена. Потрібно довести, що $t \in f$ -допустимим.

Так як криві є гомологічними, то обмеження f на них є гомотопними. Якщо ці обмеження гомотопні нулю, то за випадком (i) теореми $t \in f$ -допустимим.

Припустимо, що $f|_{\gamma_1} \not\sim 0$. За лемою 9.2.1 можна також вважати, що γ_i трансверсально перетинає кожну лінію рівня g . Тоді твердження (ii) теореми 9.4.9 безпосередньо випливає з наступної леми:

Лема 9.4.10. *Нехай $f : M \rightarrow S^1$ — відображення Морса, γ_1, γ_2 — дві гомологічні орієнтовані прості замкнуті криві в M і $t = t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2}^{-1}$. Припустимо, що кожна з кривих γ_i трансверсально перетинає лінії рівня f . Тоді $f \stackrel{\Sigma}{\sim} f \circ t$.*

Доведення. Нехай $X \subset M$ — замикання однієї із зв'язних компонент множини $M \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ обмеженої кривими γ_1 та γ_2 . Так як γ_k , $k = 1, 2$, трансверсально перетинають лінії рівня g , то існує таке вкладення ϕ_k цилінра $S^1 \times [-2, 2]$ на деякий окіл N_k кривої γ_k , що

$$\phi_k(S^1 \times \{0\}) = \gamma_k, \quad \phi_k(S^1 \times [0, 2]) \subset X, \quad (9.4)$$

а наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times [-2, 2] & \xrightarrow{\phi_k} & N_k \subset M \\ p_1 \downarrow & & \downarrow g \\ S^1 & \xrightarrow{\sigma} & S^1 \end{array} \quad (9.5)$$

В цій діаграмі p_1 є проекцією на першу координату, а σ — накриваюче відображення степеня $d = \deg f|_{\gamma_1} = \deg f|_{\gamma_2}$ визначене за формулою $\sigma(z) = z^d$. Таким чином

$$g \circ \phi_k(z, t) = z^d. \quad (9.6)$$

Можна також вважати, що $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Для кожної пари $a, b \in [-2, 2]$ покладемо

$$N_k^{[a, b]} = \phi_k(S^1 \times [a, b]).$$

Нехай $\mu : [-2, 2] \rightarrow [0, 1]$ — така C^∞ функція, що $\mu[-2, -1] = 0$ і $\mu[1, 2] = 1$. Тоді скручування Дена t_{γ_k} уздовж γ_k можна визначити так, щоб $t = t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2}^{-1}$ задавалось наступною формулою:

$$t(z, t) = \begin{cases} x, & x \in M \setminus (N_1 \cup N_2) \\ (ze^{2\pi i \mu(s)}, s), & x = \phi_k(z, s) \in N_k, k = 1, 2. \end{cases} \quad (9.7)$$

Тепер Σ -гомотопію $G : M \times [0, 1] \rightarrow S^1$ між g та $g \circ t$ можна визначити за формулою:

$$G(x, t) = \begin{cases} g(x) e^{2\pi i dt}, & x \in X \setminus (N_1^{[0,1]} \cup N_2^{[0,1]}), \\ g \circ \phi_k(ze^{2\pi i \mu(s) \cdot t}, s), & x = \phi_k(z, s) \in N_k, k = 1, 2. \\ g(x), & x \in M \setminus (X \cup N_1^{[-1,0]} \cup N_2^{[-1,0]}). \end{cases}$$

Геометричний зміст цієї формули полягає в наступному: відображення G «прокручує» d разів частину X між кривими γ_1 і γ_2 «уздовж кола S^1 » залишаючи доповнення $M \setminus X$ нерухомим.

Перевіримо, що G дійсно є Σ -гомотопією між g та $g \circ t$. Зрозуміло, що $G_0 = g$. Більш того, з (9.4) та (9.5) випливає, що ϕ_1 зберігає орієнтацію $S^1 \times [-2, 2]$, а ϕ_2 — змінює її. Тому з (9.7) ми отримуємо, що $G_1 = g \circ t_{\gamma_1} \circ t_{\gamma_2}^{-1}$.

Очевидно також, що з неперервності G випливатиме її гладкість. Щоб встановити неперервність G потрібно перевірити, що друга формула співпадає з першою на $N_1^{[1,2]} \cup N_2^{[1,2]}$ і з третьою на $N_1^{[-2,-1]} \cup N_2^{[-2,-1]}$.

Нехай $x = \phi_k(z, s) \in N_k^{[1,2]}$ для $k = 1, 2$. Тоді $\mu(s) = 1$, а тому ми отримуємо з (9.6), що

$$g \circ \phi_k(ze^{2\pi i \mu(s) \cdot t}, s) = z^d e^{2\pi i dt} = g(x) e^{2\pi i dt}.$$

Нехай тепер $x = \phi_k(z, s) \in N_k^{[-2,-1]}$ для $k = 1, 2$. Тоді $\mu(s) = 0$, а тому

$$g \circ \phi_i(ze^{2\pi i \mu(s) \cdot t}, s) = g \circ \phi_i(z, s) = g(x).$$

Відмітимо, що для кожної точки $x \in M$ існує окіл на якому відображення G_t відмінне від g на дифеоморфізм або кола S^1 або M . Тому G_t є функції Морса для всіх $t \in [0, 1]$, а отже G є Σ -гомотопією. $\square$

Теорему 9.4.9 доведено. □

9.5 Симплектична група

Для доведення леми 9.6.1 нам буде потрібен опис твірних симплектичної групи $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ та стабілізаторів відносно дії цієї групи на $\mathbb{Z}^{2g}$.

Нехай $\mathbb{Z}^{2g}$ — вільний $\mathbb{Z}$ -модуль з базисом

$$\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \quad (9.8)$$

I — одинична $g \times g$ -матриця і e_{ij} — $g \times g$ -матриця, у якій елемент (i, j) , що стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця, дорівнює 1, а всі інші елементи рівні нулю.

Нехай також ω — косо-симетрична 2-форма, матриця якої в базисі (9.8) має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Таким чином, $\omega(\alpha_i, \beta_i) = 1$ і $\omega(\alpha_i, \alpha_j) = \omega(\beta_i, \beta_j) = \omega(\alpha_i, \beta_j) = 0$ для $i, j = 1, \dots, g$. Групу всіх лінійних автоморфізмів $\mathbb{Z}^{2g}$, що зберігають форму ω позначатимемо через $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ і називатимемо *симплектичною*.

Трансвекції. Нехай $\gamma \in \mathbb{Z}^{2g}$. Тоді наступний автоморфізм t_γ групи $\mathbb{Z}^{2g}$, визначений за формулою:

$$t_\gamma(x) = \omega(\gamma, x) \cdot \gamma + x, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^{2g}, \quad (9.10)$$

називатиметься *трансвекцією* уздовж γ . Легко бачити, що $t_\gamma \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ і

$$t_\gamma^{-1}(x) = -\omega(\gamma, x) \cdot \gamma + x, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^{2g}.$$

Визначимо наступні елементи групи $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= t_{\alpha_i} \circ t_{\alpha_j} \circ t_{\alpha_i + \alpha_j}^{-1}, & \eta_{ij} &= t_{\beta_i} \circ t_{\beta_j} \circ t_{\beta_i + \beta_j}^{-1}, \\ \nu_{ij} &= t_{\alpha_i} \circ t_{\beta_j} \circ t_{\alpha_i + \beta_j}^{-1}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Лема 9.5.1. Для $i \neq j = 1 \dots g$ мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} t_{\alpha_i} &= \left\| \frac{I}{0} \middle| \frac{e_{ii}}{I} \right\|, \quad t_{\beta_i} = \left\| \frac{I}{-e_{ii}} \middle| \frac{0}{I} \right\|, \quad t_{\alpha_i + \beta_j} = \left\| \frac{I - e_{ij}}{-e_{jj}} \middle| \frac{e_{ii}}{I + e_{ji}} \right\|, \\ t_{\alpha_i + \alpha_j} &= \left\| \frac{I}{0} \middle| \frac{e_{ii} + e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}}{I} \right\|, \\ t_{\beta_i + \beta_j} &= \left\| \frac{I}{-e_{ii} - e_{jj} - e_{ij} - e_{ji}} \middle| \frac{0}{I} \right\|, \\ \mu_{ij} &= \left\| \frac{I}{0} \middle| \frac{-e_{ij} - e_{ji}}{I} \right\|, \quad \eta_{ij} = \left\| \frac{I}{e_{ij} + e_{ji}} \middle| \frac{0}{I} \right\| \\ \nu_{ij} &= \left\| \frac{I + e_{ij}}{0} \middle| \frac{0}{I - e_{ji}} \right\|. \end{aligned}$$

Більш того, матриці t_{α_i} , t_{β_i} , μ_{ij} , η_{ij} та ν_{ij} , ($i \neq j = 1 \dots g$) породжують $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

Доведення. Лема доводиться прямими обчисленнями. Твердження про те, що вказані матриці породжують $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, легко випливає з [168, Розділ 2, §2.2.] або [11]. $\square$

Для $x \in \mathbb{Z}^{2g}$ позначимо через $T(x)$ підгрупу в $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, породжену такими трансвекціями уздовж елементів $\mathbb{Z}^{2g}$, які є ω -ортогональними до x , тобто

$$T(x) = \langle t_\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}^{2g}, \omega(\gamma, x) = 0 \rangle. \quad (9.12)$$

Нехай $\mathcal{S}(x)$ — стабілізатор x відносно дії групи $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, тобто

$$\mathcal{S}(x) = \{h \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}) \mid h(x) = x\}.$$

З (9.10) легко випливає, що $T(x) \subset \mathcal{S}(x)$.

Твердження 9.5.2. [72]. $T(\alpha_1) = \mathcal{S}(\alpha_1)$. Більш того, ця група породжується наступними матрицями:

$$t_{\alpha_i}, \quad t_{\beta_i}, \quad \mu_{ij}, \quad \eta_{ij}, \quad \nu_{ij},$$

$$\text{за виключенням } t_{\beta_1}, \quad \eta_{1i} = \eta_{i1} \text{ та } \nu_{i1}, \quad (i \neq j = 1, \dots, g). \quad (9.13)$$

9.6 Доведення теореми 9.1.3

Нехай $f, g : M \rightarrow P$ — два відображення Морса, що мають однаковий критичний тип $K(f) = K(g)$. Потрібно довести, що $f \stackrel{\Sigma}{\sim} g$.

Можна вважати, що у випадку $P = S^1$ гомоморфізм груп гомологій $f_* = g_* : H_1(M) \rightarrow H_1(S^1)$ є сюр'єктивним. Дійсно, нехай $p : \tilde{P} \rightarrow S^1$ — накриваюче відображення кола, що відповідає підгрупі $f_*(H_1(M)) \subset H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$ і $\tilde{f}, \tilde{g} : M \rightarrow \tilde{P}$ — деякі підняття f та g відповідно. Тоді $\tilde{f}$ та $\tilde{g}$ є відображеннями Морса, причому $f \stackrel{\Sigma}{\sim} g$ тоді і лише тоді, коли $\tilde{f} \stackrel{\Sigma}{\sim} \tilde{g}$, див. [161].

Отже нехай $f_* = g_*$ — сюр'єктивний гомоморфізм. Тоді згідно твердження 9.3.2 можна вважати, що f і g є канонічними відображеннями Морса, а згідно леми 9.3.1 — що $g = f \circ h$ для деякого дифеоморфізму $h \in \mathcal{D}(M)$. Залишається довести, що h є f -допустимим. Розглянемо три випадки.

- 1) Якщо $P = \mathbb{R}$, то f -допустимість h випливає з твердження (і) леми 9.4.7.
- 2) Нехай $P = S^1$ і M є орієнтовною поверхнею. У цьому випадку всі криві конфігурації $\mathcal{C}$ за виключенням кривої t_{β_1} є f -допустимими. Для доведення f -допустимості h використаємо умову, що f та $f \circ h$ є гомотопними відображеннями $M \rightarrow S^1$.

Лема 9.6.1. *Нехай M — орієнтовна поверхня і h_1 — дифеоморфізм M , породжений скручуваннями Дена уздовж кривих конфігурації $\mathcal{C}$ і такий, що f та $f \circ h_1$ є гомотопними. Тоді існує f -допустимий дифеоморфізм c , породжений скручуваннями Дена уздовж кривих конфігурації $\mathcal{C}$ за виключенням скручування t_{β_1} , і такий, що дифеоморфізм $t = c^{-1} \circ h_1$ належить до $\mathcal{T}(M)$.*

Доведення. Припустимо, що $h \in \mathcal{PM}(M)$ породжується дифеоморфізмами з $\{t_l : l \in \mathcal{C}\}$, а відображення f та $f \circ h$ є гомотопним. Потрібно довести, що h в дійсності породжується дифеоморфізмами з $\{t_l : l \in \mathcal{C} \setminus \beta_1\}$.

Нагадаємо, що $H_1(M, \partial M)$ є вільним модулем, породженим класами гомо-

логій кривих $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$. Більш того, матриця форми перетинів ω в цьому базисі має вигляд (9.9). Так як h_* зберігає форму ω , то $h_* \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

Відмітимо, що $h_*[\alpha_1] = [\alpha_1]$, тобто h_* належить до стабілізатора $\mathcal{S}([\alpha_1])$ класу α_1 в $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

Нехай t_γ — скручування Дена уздовж γ . Тоді дія t_γ на $H_1(M, \partial M)$ задається формулою:

$$(t_\gamma)_*(x) = \omega([\gamma], x) \cdot [\gamma] + x, \quad \forall x \in H_1(M). \quad (9.14)$$

Таким чином, це відображення є трансвекцією уздовж $[\gamma]$, див. формулу (9.10).

Зокрема добутки трансвекцій $\mu_{ij}, \eta_{ij}, \nu_{ij}$ визначені за формулою (9.11) можна реалізувати як добутки скручувань Дена. Тепер з теореми 9.4.9 випливає, що всі ці дифеоморфізми за виключенням $\eta_{1i} = \eta_{i1}$ та $\nu_{i1} \in f$ -допустимими.

З іншого боку, згідно твердження 9.5.2, h_* породжений лінійними ізоморфізмами $t_{\alpha_i}, t_{\beta_i}, \mu_{ij}, \eta_{ij}, \nu_{ij}$, за виключенням $t_{\beta_1}, \eta_{1i} = \eta_{i1}$ та ν_{i1} , де $i \neq j = 1, \dots, g$.

Тому існує f -допустимий дифеоморфізм c поверхні M , який індукує такий само ізоморфізм групи H , що і h_* , а тому $t = c^{-1} \circ h$ належить до $\mathcal{T}(M)$. $\square$

Тепер можемо завершити доведення теореми. Очевидно, що h можна представити як добуток $p \circ h_1$, де h_1 зберігає орієнтацію M і породжується скручуваннями Дена уздовж кривих конфігурації $\mathcal{C}$, а p породжується тими дифеоморфізмами b_{ij} , які належать до $\mathcal{M}_f(M)$. Зокрема, $p \in f$ -допустимим, тобто $f \stackrel{\Sigma}{\sim} f \circ p$, а значить $f \circ h \stackrel{\Sigma}{\sim} f \circ h_1$. Тому можна вважати, що $h = h_1$, причому f та $f \circ h$ є гомотопними відображеннями.

Тоді згідно леми 9.6.1 $h_1 = c \circ t$, де c породжений скручуваннями Дена уздовж кривих конфігурації $\mathcal{C}$ за виключенням кривої t_{β_1} , а t належить групі Тореллі $\mathcal{T}(M)$. За твердженням (ii) леми 9.4.7 c також є f -допустимим, а згідно леми 9.6.1 f -допустимим є t .

3) Знову нехай $P = S^1$ і M є довільною компактною (можливо неорієнтовною) поверхнею. Покажемо, що доведення з [161] узагальнюється на випадок

неорієнтовних поверхонь.

Нехай $f, g : M \rightarrow S^1$ — два відображення Морса однакового критичного типу, c — їх спільне регулярне значення, $\alpha = f^{-1}(c)$ і $\beta = g^{-1}(c)$. Так як гомоморфізм $f_* = g_* : H_1(M) \rightarrow H_1(S^1)$ є сюр'єктивним, то за лемою 9.2.2, можна вважати α та β простими замкнутими кривими.

Розріжемо M уздовж α і позначимо отриману поверхню через $\tilde{M}$. Нехай також $p : \tilde{M} \rightarrow M$ — фактор-відображення, $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$ — відповідна функція Морса, індукована f , $B_0 = \tilde{f}^{-1}(0)$, $B_1 = \tilde{f}^{-1}(1)$ і $B = B_0 \cup B_1$ (див. §9.2).

Лема 9.6.2. *Якщо $\alpha = \beta$, то $f \stackrel{\Sigma}{\sim} g$.*

Доведення. Можна вважати, що $f = g$ в деякому околі α . Тоді g також індукує функцію Морса $\tilde{g} : M \rightarrow [0, 1]$, яка співпадає з $\tilde{f}$ біля B і $K(\tilde{f}) = K(\tilde{g})$. За випадком $M = \mathbb{R}$ існує Σ -гомотопія $\tilde{f} \stackrel{\Sigma}{\sim} \tilde{g}$ відносно деякого околу B . Ця гомотопія індукує Σ -гомотопію між f та g відносно деякого околу α . $\square$

Припустимо, що $\alpha \neq \beta$. Так як f та g є гомотопними, то обмеження $f|_\beta$ є гомотопним нулю. Тому за лемою 9.2.1 можна також вважати, що $\alpha \cap \beta = \emptyset$. У цьому випадку $\tilde{\gamma} = p^{-1}(\beta)$ розділяє $\tilde{M}$ між B_0 та B_1 . Тоді легко побудувати функцію Морса $\tilde{f}_1 : \tilde{M} \rightarrow [0, 1]$, яка співпадає з $\tilde{f}$ біля $B_0 \cup B_1$, має критичний тип $\tilde{f}$, і задовольняє умову $f_1^{-1}(\frac{1}{2}) = \tilde{\gamma}$. Тоді $\tilde{f}_1$ індукує відображення Морса $f_1 : M \rightarrow S^1$, яке співпадає з $\tilde{f}$ в околі α , причому $f_1^{-1}(p(\frac{1}{2})) = \beta$. Таким чином α та β є лініями рівня f_1 . Тепер з леми 9.6.2 отримуємо, що $f \stackrel{\Sigma}{\sim} f_1 \stackrel{\Sigma}{\sim} g$. $\square$

9.7 Висновки

В цьому розділі дається нове доведення класифікації компонент зв'язності простору функцій Морса локально постійних на межі з компактних поверхонь в пряму та коло, а також функцій Морса з орієнтовних поверхонь в коло, обмеження яких на кожен компоненту межі є або постійним, або накриваючим.

Розділ 10 ВИСНОВКИ

В даній дисертаційній роботі вивчалось відображення зсуву уздовж орбіт векторного поля та його застосування до опису гомотопічного типу деяких нескінченно вимірних просторів. Зокрема,

- (a) описано структуру множини функцій періоду для неперервних потоків на компактних многовидах;
- (b) для широкого класу векторних полів на компактних многовидах доведено стягуваність компонент зв'язності груп дифеоморфізмів, що лишають інваріантними орбіти таких полів;
- (c) для широкого класу гладких функцій на компактних многовидах зі значеннями в числовій прямій або колі встановлено гомотопічну еквівалентність правих та право-лівих стабілізаторів, а також відповідних правих та право-лівих орбіт;
- (d) для широкого класу гладких функцій з ізольованими критичними точками на компактних поверхнях описано гомотопічні типи правих стабілізаторів та орбіт;
- (e) отримано нове доведення класифікації компонент зв'язності простору відображень Морса з компактних поверхонь в пряму та коло;
- (f) отримано класифікацію компонент простору відображень Морса з орієнтовної поверхні в коло, обмеження яких на межу є або постійним, або накриваючим.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] *Abe Kōjun*. On the homotopy types of the groups of equivariant diffeomorphisms / Kōjun Abe // *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* — 1980. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 601–626.
- [2] *Abe Kōjun*. On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G -manifolds with codimension one orbit / Kōjun Abe, Kazuhiko Fukui // *Topology*. — 2001. — Vol. 40, no. 6. — Pp. 1325–1337.
- [3] *Abe Kōjun*. On the first homology of automorphism groups of manifolds with geometric structures / Kōjun Abe, Kazuhiko Fukui // *Cent. Eur. J. Math.* — 2005. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 516–528 (electronic).
- [4] *Alexander J. W.* On the deformation of n -cell / J. W. Alexander // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* — 1923. — Vol. 9, no. 12. — Pp. 406–407.
- [5] *Álvarez López Jesús A.* Transversality and Lefschetz numbers for foliation maps / Jesús A. Álvarez López, Yuri A. Kordyukov // *J. Fixed Point Theory Appl.* — 2008. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 273–305.
- [6] *Asano Kouhei*. Homeomorphisms of prism manifolds / Kouhei Asano // *Yokohama Math. J.* — 1978. — Vol. 26, no. 1. — Pp. 19–25.
- [7] *Banyaga Augustin*. On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms / Augustin Banyaga // *Topology*. — 1977. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 279–283.

- [8] *Bernstein Holly*. Foliation-preserving maps between solvmanifolds / Holly Bernstein, Dave Witte Morris // *Geom. Dedicata*. — 2003. — Vol. 102. — Pp. 91–107.
- [9] *Birman Joan S*. Mapping class groups and their relationship to braid groups / Joan S. Birman // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1969. — Vol. 22. — Pp. 213–238.
- [10] *Birman Joan S*. On braid groups / Joan S. Birman // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1969. — Vol. 22. — Pp. 41–72.
- [11] *Birman Joan S*. On Siegel’s modular group / Joan S. Birman // *Math. Ann.* — 1971. — Vol. 191. — Pp. 59–68.
- [12] *Birman Joan S*. On the homeotopy group of a non-orientable surface / Joan S. Birman, D. R. J. Chillingworth // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1972. — Vol. 71. — Pp. 437–448.
- [13] *Birman J. S*. One-sided Heegaard splittings and homeotopy groups of some 3-manifolds / J. S. Birman, J. H. Rubinstein // *Proc. London Math. Soc. (3)*. — 1984. — Vol. 49, no. 3. — Pp. 517–536.
- [14] *Boileau M*. Scindements de Heegaard des variétés de Seifert elliptiques et euclidiennes / M. Boileau, J.-P. Otal // *J. London Math. Soc. (2)*. — 2001. — Vol. 63, no. 2. — Pp. 501–512.
- [15] *Bonahon Francis*. Difféotopies des espaces lenticulaires / Francis Bonahon // *Topology*. — 1983. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 305–314.
- [16] *Bott Raoul*. On a topological obstruction to integrability / Raoul Bott // *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., 1968)*. — Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1970. — Pp. 127–131.

- [17] *Camacho César*. Orbit preserving diffeomorphisms and the stability of Lie group actions and singular foliations / César Camacho, Alcides Lins Neto // Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976). — Berlin: Springer, 1977. — Pp. 82–103. Lecture Notes in Math., Vol. 597.
- [18] *Cerf Jean*. Topologie de certains espaces de plongements / Jean Cerf // *Bull. Soc. Math. France*. — 1961. — Vol. 89. — Pp. 227–380.
- [19] *Cerf Jean*. Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$) / Jean Cerf. Lecture Notes in Mathematics, No. 53. — Berlin: Springer-Verlag, 1968. — Pp. xii+133.
- [20] *Chacon R. V.* Change of velocity in flows / R. V. Chacon // *J. Math. Mech.* — 1966. — Vol. 16. — Pp. 417–431.
- [21] *Conley C.* Isolated invariant sets and isolating blocks / C. Conley, R. Easton // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1971. — Vol. 158. — Pp. 35–61.
- [22] *Dancer E. N.* Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities. II / E. N. Dancer // *J. Reine Angew. Math.* — 1987. — Vol. 382. — Pp. 145–164.
- [23] *Dehn M.* Die Gruppe der Abbildungsklassen / M. Dehn // *Acta Mathematica*. — 1938. — Vol. 69. — Pp. 135–206.
- [24] *Douady Adrien*. Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires / Adrien Douady // Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 1. — Paris: Secrétariat mathématique, 1961/1962. — P. 11.
- [25] *Dress Andreas*. Newman's theorems on transformation groups / Andreas Dress // *Topology*. — 1969. — Vol. 8. — Pp. 203–207.

- [26] *Earle C. J.* The diffeomorphism group of a compact Riemann surface / C. J. Earle, J. Eells // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1967. — Vol. 73. — Pp. 557–559.
- [27] *Earle C. J.* Teichmüller theory for surfaces with boundary / C. J. Earle, A. Schatz // *J. Differential Geometry.* — 1970. — Vol. 4. — Pp. 169–185.
- [28] *Edwards Robert.* Foliations with all leaves compact / Robert Edwards, Kenneth Millett, Dennis Sullivan // *Topology.* — 1977. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 13–32.
- [29] *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies / D. B. A. Epstein // *Acta Math.* — 1966. — Vol. 115. — Pp. 83–107.
- [30] *Epstein D. B. A.* The simplicity of certain groups of homeomorphisms / D. B. A. Epstein // *Compositio Math.* — 1970. — Vol. 22. — Pp. 165–173.
- [31] *Epstein D. B. A.* Periodic flows on three-manifolds / D. B. A. Epstein // *Ann. of Math. (2).* — 1972. — Vol. 95. — Pp. 66–82.
- [32] *Epstein D. B. A.* Foliations with all leaves compact / D. B. A. Epstein // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* — 1976. — Vol. 26, no. 1. — Pp. viii, 265–282.
- [33] *Epstein D. B. A.* A counterexample to the periodic orbit conjecture in codimension 3 / D. B. A. Epstein, E. Vogt // *Ann. of Math. (2).* — 1978. — Vol. 108, no. 3. — Pp. 539–552.
- [34] *Etnyre John.* Contact topology and hydrodynamics. I. Beltrami fields and the Seifert conjecture / John Etnyre, Robert Ghrist // *Nonlinearity.* — 2000. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 441–458.
- [35] *Frerick Leonhard.* Extension operators for spaces of infinite differentiable Whitney jets / Leonhard Frerick // *J. Reine Angew. Math.* — 2007. — Vol. 602. — Pp. 123–154.

- [36] *Fukui Kazuhiko*. On commutators of foliation preserving Lipschitz homeomorphisms / Kazuhiko Fukui, Hideki Imanishi // *J. Math. Kyoto Univ.* — 2001. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 507–515.
- [37] *Gabai David*. The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $\text{Isom}(M^3) \simeq \text{Diff}(M^3)$ / David Gabai // *J. Differential Geom.* — 2001. — Vol. 58, no. 1. — Pp. 113–149.
- [38] *Gervais Sylvain*. Presentation and central extensions of mapping class groups / Sylvain Gervais // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1996. — Vol. 348, no. 8. — Pp. 3097–3132.
- [39] *Glaeser Georges*. Fonctions composées différentiables / Georges Glaeser // *Ann. of Math. (2)*. — 1963. — Vol. 77. — Pp. 193–209.
- [40] *Gramain André*. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte / André Gramain // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1973. — Vol. 6. — Pp. 53–66.
- [41] *Haefliger A.* Feuilletages sur les variétés ouvertes / A. Haefliger // *Topology*. — 1970. — Vol. 9. — Pp. 183–194.
- [42] *Haefliger André*. Homotopy and integrability / André Haefliger // *Manifolds—Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School)*. — Berlin: Springer, 1971. — *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 197. — Pp. 133–163.
- [43] *Hart David*. On the smoothness of generators / David Hart // *Topology*. — 1983. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 357–363.
- [44] *Hatcher A.* A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface / A. Hatcher, W. Thurston // *Topology*. — 1980. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 221–237.

- [45] *Hatcher Allen E.* A proof of the Smale conjecture, $\text{Diff}(S^3) \simeq \text{O}(4)$ / Allen E. Hatcher // *Ann. of Math. (2)*. — 1983. — Vol. 117, no. 3. — Pp. 553–607.
- [46] *Hirsch M. W.* Invariant manifolds / M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583. — Berlin: Springer-Verlag, 1977. — Pp. ii+149.
- [47] *Hoffman David.* Continuous actions of compact Lie groups on Riemannian manifolds / David Hoffman, L. N. Mann // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 60. — Pp. 343–348.
- [48] *Hopf Eberhard.* Ergodentheorie / Eberhard Hopf. — Berlin: Chelsea Publishing Co., 1937.
- [49] *Hörmander Lars.* On the division of distributions by polynomials / Lars Hörmander // *Ark. Mat.* — 1958. — Vol. 3. — Pp. 555–568.
- [50] *Huffman W. Cary.* Polynomial invariants of finite linear groups of degree two / W. Cary Huffman // *Canad. J. Math.* — 1980. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 317–330.
- [51] *Ikegami Kazuichi.* Cobordism group of Morse functions on manifolds / Kazuichi Ikegami // *Hiroshima Math. J.* — 2004. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 211–230.
- [52] *Ikegami Kazuichi.* Cobordism group of Morse functions on surfaces / Kazuichi Ikegami, Osamu Saeki // *J. Math. Soc. Japan.* — 2003. — Vol. 55, no. 4. — Pp. 1081–1094.
- [53] *Johnson Dennis L.* Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology / Dennis L. Johnson // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1979. — Vol. 75, no. 1. — Pp. 119–125.
- [54] *Kalmár Boldizsár.* Cobordism group of Morse functions on unoriented

- surfaces / Boldizsár Kalmár // *Kyushu J. Math.* — 2005. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 351–363.
- [55] *Korkmaz Mustafa*. Mapping class groups of nonorientable surfaces / Mustafa Korkmaz // *Geom. Dedicata*. — 2002. — Vol. 89. — Pp. 109–133.
- [56] *Kowada Masasi*. The orbit-preserving transformation groups associated with a measurable flow / Masasi Kowada // *J. Math. Soc. Japan*. — 1972. — Vol. 24. — Pp. 355–373.
- [57] *Kronrod A. S.* On functions of two variables / A. S. Kronrod // *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*. — 1950. — Vol. 5, no. 1(35). — Pp. 24–134.
- [58] *Kudryavtseva E. A.* Realization of smooth functions on surfaces as height functions / E. A. Kudryavtseva // *Mat. Sb.* — 1999. — Vol. 190, no. 3. — Pp. 29–88.
- [59] *Kulinich E. V.* On topologically equivalent Morse functions on surfaces / E. V. Kulinich // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 1998. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 59–64.
- [60] *Kuratowski K.* Topology. Vol. II / K. Kuratowski. New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor. — New York: Academic Press, 1968. — Pp. xiv+608.
- [61] *Lazarov Connor*. Obstructions to foliation preserving Lie group actions / Connor Lazarov, Herbert Shulman // *Topology*. — 1979. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 255–256.
- [62] *Lazarov Connor*. Obstructions to foliation-preserving vector fields / Connor Lazarov, Herbert Shulman // *J. Pure Appl. Algebra*. — 1982. — Vol. 24, no. 2. — Pp. 171–178.

- [63] *Lech Jacek*. On the perfectness of $C^{\infty,s}$ -diffeomorphism groups on a foliated manifold / Jacek Lech // *Opuscula Math.* — 2008. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 313–324.
- [64] *Lech Jacek*. Groups of $C^{r,s}$ -diffeomorphisms related to a foliation / Jacek Lech, Tomasz Rybicki // *Geometry and topology of manifolds.* — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2007. — Vol. 76 of *Banach Center Publ.* — Pp. 437–450.
- [65] *Lickorish W. B. R.* Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds / W. B. R. Lickorish // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1963. — Vol. 59. — Pp. 307–317.
- [66] *Lickorish W. B. R.* A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold / W. B. R. Lickorish // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1964. — Vol. 60. — Pp. 769–778.
- [67] *Ling Wensor*. Factorizable groups of homeomorphisms / Wensor Ling // *Compositio Math.* — 1984. — Vol. 51, no. 1. — Pp. 41–50.
- [68] *Lychak D. P.* Morse functions and flows on nonorientable surfaces / D. P. Lychak, A. O. Prishlyak // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2009. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 251–258.
- [69] *Maksymenko S.* Smooth shifts along flows / S. Maksymenko // Тези доповідей 4-ї міжнародної конференції з геометрії і топології, (м. Черкаси). — 2001. — Pp. 59–60.
- [70] *Maksymenko Sergiy*. Smooth shifts along trajectories of flows / Sergiy Maksymenko // *Topology Appl.* — 2003. — Vol. 130, no. 2. — Pp. 183–204.
- [71] *Maksymenko S.* Homotopy types of orbits of Morse functions of surfaces / S. Maksymenko // Тези доповідей міжнародної конференції “Geometric

- topology: infinite-dimensional topology, absolute extensors, applications”, (м. Львів). — 2004. — P. 37.
- [72] *Maksymenko Sergey*. Path-components of Morse mappings spaces of surfaces / Sergey Maksymenko // *Comment. Math. Helv.* — 2005. — Vol. 80, no. 3. — Pp. 655–690.
- [73] *Maksymenko Sergey*. Consecutive shifts along orbits of vector fields / Sergey Maksymenko // *Foliations 2005*. — World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006. — Pp. 327–340.
- [74] *Maksymenko Sergiy*. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2006. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 241–285.
- [75] *Maksymenko Sergiy*. Stabilizers and orbits of smooth functions / Sergiy Maksymenko // *Bull. Sci. Math.* — 2006. — Vol. 130, no. 4. — Pp. 279–311.
- [76] *Maksymenko S.* Diffeomorphisms preserving orbits of Hamiltonian vector fields on surfaces / S. Maksymenko // Тези доповідей міжнародної конференції “Боголюбівські читання” присвяченої 90-річчю з дня народження Ю. О. Митропольського, (м. Київ). — 2007. — P. 33.
- [77] *Maksymenko S.* Functions with isolates singularities of surfaces / S. Maksymenko // Тези доповідей міжнародної конференції “Analysis & Topology”, (м. Львів). — 2008. — Pp. 39–40.
- [78] *Maksymenko Sergiy*. Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Travaux Mathématiques*. — 2008. — Vol. 18. — Pp. 39–44.
- [79] *Maksymenko S.* Jets of orbit preserving diffeomorphisms for singularities of

- vector fields / S. Maksymenko // Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі - 2008”, (м. Одеса). — 2008. — Рр. 187–188.
- [80] *Maksymenko Sergiy*. Connected components of partition preserving diffeomorphisms / Sergiy Maksymenko // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2009. — Vol. 15, no. 3. — Рр. 264–279.
- [81] *Maksymenko S.* Path components of certain diffeomorphism groups with respect to distinct Whitney topologies / S. Maksymenko // Тези доповідей міжнародної конференції “Infinite dimensional analysis and topology”, (м. Львів). — 2009. — Р. 91.
- [82] *Maksymenko S.* Path components of certain diffeomorphism groups with respect to distinct Whitney topologies / S. Maksymenko // Book of abstracts of Conference on Algebraic Topology CAT'09, (Warszawa, Poland). — 2009. — Рр. 20–21.
- [83] *Maksymenko S.* Path components of certain groups of orbit preserving diffeomorphisms / S. Maksymenko // Тезисы докладов Международной конференции “Геометрия и топология в целом”, посвященной 90-летию со дня рождения А.В.Погорелова, (г. Харьков). — 2009. — Рр. 61–62.
- [84] *Maksymenko Sergiy*. Reparametrization of vector fields and their shift maps / Sergiy Maksymenko // Геометрія, топологія та їх застосування, *Праці Інституту математики НАН України*. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 489–498.
- [85] *Maksymenko Sergiy*. ∞ -jets of diffeomorphisms preserving orbits of vector fields / Sergiy Maksymenko // *Cent. Eur. J. Math.* — 2009. — Vol. 7, no. 2. — Рр. 272–298.
- [86] *Maksymenko Sergiy*. Deformations of circle-valued Morse functions on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Укр. мат. журн.* — 2010. — Т. 62, № 10. — С. 1360–1366.

- [87] *Maksymenko Sergiy*. Functions on surfaces and incompressible subsurfaces / Sergiy Maksymenko // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 167–182.
- [88] *Maksymenko Sergiy*. Functions with isolated singularities on surfaces / Sergiy Maksymenko // *Геометрія та топологія функцій на многовидах. Праці Інституту математики НАН України*. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 7–66.
- [89] *Maksymenko Sergiy*. Kernel of a map of a shift along the orbits of continuous flows / Sergiy Maksymenko // *Укр. мат. журн.* — 2010. — Т. 62, № 5. — С. 651–659.
- [90] *Maksymenko Sergiy*. Period functions for C^0 and C^1 flows / Sergiy Maksymenko // *Укр. мат. журн.* — 2010. — Т. 62, № 7. — С. 954–967.
- [91] *Maksymenko S. I.* Symmetries of degenerate center singularities of plane vector fields / S. I. Maksymenko // *Нелінійні коливання*. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 507–526.
- [92] *Maksymenko S. I.* Symmetries of center singularities of plane vector fields / S. I. Maksymenko // *Нелінійні коливання*. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 177–205.
- [93] *Margalef Roig Juan*. Differential topology / Juan Margalef Roig, Enrique Outerele Domínguez. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1992. — Vol. 173 of *North-Holland Mathematics Studies*. — Pp. xvi+603. — With a preface by Peter W. Michor.
- [94] *Mather John N.* The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms / John N. Mather // *Topology*. — 1971. — Vol. 10. — Pp. 297–298.

- [95] *Mather John N.* Commutators of diffeomorphisms / John N. Mather // *Comment. Math. Helv.* — 1974. — Vol. 49. — Pp. 512–528.
- [96] *Mather John N.* Simplicity of certain groups of diffeomorphisms / John N. Mather // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 271–273.
- [97] *Mather John N.* Commutators of diffeomorphisms. II / John N. Mather // *Comment. Math. Helv.* — 1975. — Vol. 50. — Pp. 33–40.
- [98] *Mather John N.* Foliations and local homology of groups of diffeomorphisms / John N. Mather // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 2. — Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975. — Pp. 35–37.
- [99] *Mather John N.* Loops and foliations / John N. Mather // Manifolds—Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973). — Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1975. — Pp. 175–180.
- [100] *Mather John N.* Differentiable invariants / John N. Mather // *Topology.* — 1977. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 145–155.
- [101] *Mather John N.* Commutators of diffeomorphisms. III. A group which is not perfect / John N. Mather // *Comment. Math. Helv.* — 1985. — Vol. 60, no. 1. — Pp. 122–124.
- [102] *McCullough Darryl.* Isometries of elliptic 3-manifolds / Darryl McCullough // *J. London Math. Soc. (2).* — 2002. — Vol. 65, no. 1. — Pp. 167–182.
- [103] *Mess G.* The Torelli group for genus 2 and 3 surfaces / G. Mess // *Topology.* — 1992. — Vol. 34. — Pp. 775–790.
- [104] *Mitjagin B. S.* Approximate dimension and bases in nuclear spaces / B. S. Mitjagin // *Uspehi Mat. Nauk.* — 1961. — Vol. 16, no. 4 (100). — Pp. 63–132.

- [105] *Montgomery Deane*. Pointwise periodic homeomorphisms / Deane Montgomery // *Amer. J. Math.* — 1937. — Vol. 59, no. 1. — Pp. 118–120.
- [106] *Montgomery D.* Singular points of a compact transformation group / D. Montgomery, H. Samelson, L. Zippin // *Ann. of Math. (2)*. — 1956. — Vol. 63. — Pp. 1–9.
- [107] *Müller Thomas*. Beispiel einer periodischen instabilen holomorphen Strömung / Thomas Müller // *Enseign. Math. (2)*. — 1979. — Vol. 25, no. 3-4. — Pp. 309–312 (1980).
- [108] *Newman M. H. A.* A theorem on periodic transformations of spaces / M. H. A. Newman // *Quart. J. Math., Oxford Ser.* — 1931. — Vol. 2. — Pp. 1–8.
- [109] *Ornstein D. S.* Continuous speed changes for flows / D. S. Ornstein, M. Smorodinsky // *Israel J. Math.* — 1978. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 161–168.
- [110] *Palais Richard S.* Natural operations on differential forms / Richard S. Palais // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1959. — Vol. 92. — Pp. 125–141.
- [111] *Parry William*. Cocycles and velocity changes / William Parry // *J. London Math. Soc. (2)*. — 1972. — Vol. 5. — Pp. 511–516.
- [112] *Phillips Anthony*. Foliations on open manifolds. I / Anthony Phillips // *Comment. Math. Helv.* — 1968. — Vol. 43. — Pp. 204–211.
- [113] *Phillips Anthony*. Foliations on open manifolds. II / Anthony Phillips // *Comment. Math. Helv.* — 1969. — Vol. 44. — Pp. 367–370.
- [114] *Poénaru Valentin*. Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications C^∞ / Valentin Poénaru // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1970. — no. 38. — Pp. 93–124.

- [115] *Polulyakh E. O.* On conjugate pseudo-harmonic functions / E. O. Polulyakh // Геометрія, топологія та їх застосування, *Праці Інституту математики НАН України*. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 505–517.
- [116] *Polulyakh E.* On the pseudo-harmonic functions defined on a disk / E. Polulyakh, I. Yurchuk. *Праці Інституту математики НАН України*. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — Р. 151.
- [117] *Powell Jerome.* Two theorems on the mapping class group of a surface / Jerome Powell // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1978. — Vol. 68, no. 3. — Pp. 347–350.
- [118] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface / A. O. Prishlyak // *Topology Appl.* — 2002. — Vol. 119, no. 3. — Pp. 257–267.
- [119] *Reeb Georges.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées / Georges Reeb. *Actualités Sci. Ind.*, no. 1183. — Hermann & Cie., Paris, 1952. — P. no book paging given. — Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.
- [120] *Reeb Georges.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées / Georges Reeb. *Actualités Sci. Ind.*, no. 1183. — Hermann & Cie., Paris, 1952. — P. no book paging given. — Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.
- [121] *Rubinstein J. H.* One-sided Heegaard splittings of 3-manifolds / J. H. Rubinstein // *Pacific J. Math.* — 1978. — Vol. 76, no. 1. — Pp. 185–200.
- [122] *Rubinstein J. H.* On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles / J. H. Rubinstein // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1979. — Vol. 251. — Pp. 129–137.

- [123] *Rybicki Tomasz*. The identity component of the leaf preserving diffeomorphism group is perfect / Tomasz Rybicki // *Monatsh. Math.* — 1995. — Vol. 120, no. 3-4. — Pp. 289–305.
- [124] *Rybicki Tomasz*. Homology of the group of leaf preserving homeomorphisms / Tomasz Rybicki // *Demonstratio Math.* — 1996. — Vol. 29, no. 2. — Pp. 459–464.
- [125] *Rybicki Tomasz*. Isomorphisms between leaf preserving diffeomorphism groups / Tomasz Rybicki // *Soochow J. Math.* — 1996. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 525–542.
- [126] *Rybicki Tomasz*. On commutators of equivariant homeomorphisms / Tomasz Rybicki // *Topology Appl.* — 2007. — Vol. 154, no. 8. — Pp. 1561–1564.
- [127] *Saito Kyoji*. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen / Kyoji Saito // *Invent. Math.* — 1971. — Vol. 14. — Pp. 123–142.
- [128] *Schwarz Gerald W.* Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group / Gerald W. Schwarz // *Topology.* — 1975. — Vol. 14. — Pp. 63–68.
- [129] *Seeley R. T.* Extension of C^∞ functions defined in a half space / R. T. Seeley // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1964. — Vol. 15. — Pp. 625–626.
- [130] *Sergeraert Francis*. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications / Francis Sergeraert // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1972. — Vol. 5. — Pp. 599–660.
- [131] *Sharko V. V.* Classification of Morse functions on surfaces / V. V. Sharko // *Low-Dimensional Topology and Combinatorial Group Theory.* — 1996. — Pp. 19–25.
- [132] *Sharko V. V.* Morse functions on noncompact surfaces / V. V. Sharko //

- Ukrainian Mathematics Congress—2001 (Ukrainian). — Kiev: Natsional. Akad. Nauk Ukraini Inst. Mat., 2003. — Pp. 91–102.
- [133] *Sharko V. V.* About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold / V. V. Sharko // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2006. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 389–396.
- [134] *Smale Stephen.* Diffeomorphisms of the 2-sphere / Stephen Smale // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1959. — Vol. 10. — Pp. 621–626.
- [135] *Smith P. A.* Transformations of finite period. III. Newman's theorem / P. A. Smith // *Ann. of Math. (2)*. — 1941. — Vol. 42. — Pp. 446–458.
- [136] *Sullivan Dennis.* A counterexample to the periodic orbit conjecture / Dennis Sullivan // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1976. — Vol. 46. — Pp. 5–14.
- [137] *Sullivan Dennis.* A new flow / Dennis Sullivan // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 82, no. 2. — Pp. 331–332.
- [138] *Szepietowski Błażej.* Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces / Błażej Szepietowski // *Collect. Math.* — 2004. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 253–260.
- [139] *Takens Floris.* Normal forms for certain singularities of vectorfields / Floris Takens // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. — 1973. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 163–195. — Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1972).
- [140] *Thurston William.* Foliations and groups of diffeomorphisms / William Thurston // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 304–307.

- [141] *Thurston William*. The theory of foliations of codimension greater than one / William Thurston // *Comment. Math. Helv.* — 1974. — Vol. 49. — Pp. 214–231.
- [142] *Totoki Haruo*. Time changes of flows / Haruo Totoki // *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A.* — 1966. — Vol. 20. — Pp. 27–55.
- [143] *Vogt Elmar*. A periodic flow with infinite Epstein hierarchy / Elmar Vogt // *Manuscripta Math.* — 1977. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 403–412.
- [144] *Whitney Hassler*. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets / Hassler Whitney // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1934. — Vol. 36, no. 1. — Pp. 63–89.
- [145] *Whitney Hassler*. Differentiable even functions / Hassler Whitney // *Duke Math. J.* — 1943. — Vol. 10. — Pp. 159–160.
- [146] *Wood John W.* Foliations on 3-manifolds / John W. Wood // *Ann. of Math.* (2). — 1969. — Vol. 89. — Pp. 336–358.
- [147] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. — Москва: Наука, 1975. — С. 240.
- [148] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — Москва: Едиториал УРСС, 2003. — С. 416.
- [149] *Арнольд В. И.* Особенности дифференцируемых отображений, I / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — Москва: Наука, 1982. — С. 304. — Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.
- [150] *Болсинов А. В.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. — Москва: Наука, 1997. — С. 352.

- [151] *Вейль Герман*. Классические группы. Их инварианты и представления / Герман Вейль. — Москва: Гос. изд. иностр. лит., 1947. — Р. 408.
- [152] *Власенко И. Ю.* Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий / И. Ю. Власенко, С. И. Максименко, Е. А. Полулях. Праці Інституту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 363.
- [153] *Голубицкий М.* Устойчивые отображения и их особенности / М. Голубицкий, В. Гийемин. — Москва: Мир, 1977. — С. 296.
- [154] *Кадубовський О. А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях / О. А. Кадубовський // *Укр. мат. журн.* — 2006. — Т. 58, № 3. — С. 343–351.
- [155] *Кочергин А. В.* Замена времени в потоках и перемешивание / А. В. Кочергин // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1973. — Т. 37:6. — С. 1275–1298.
- [156] *Кудрявцева Е. А.* Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты / Е. А. Кудрявцева // *Мат. сборник.* — 1999. — Т. 190, № 3. — С. 29–88.
- [157] *Кудрявцева Е. А.* Оснащенные функции Морса на поверхностях / Е. А. Кудрявцева, Д. А. Перимяков // *Мат. сборник.* — 2010. — Т. 201, № 4. — С. 33–98.
- [158] *Личак Д. П.* Послойная эквивалентность гладких функций на поверхностях с изолированными критическими точками / Д. П. Личак // *Геометрія, топологія та їх застосування, Праці Інституту математики НАН України.* — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 426–439.
- [159] *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применения в физике / Г. Я. Любарский. — Москва: ГИТТЛ, 1958. — С. 356.

- [160] Максименко С. И. Еквівалентність m -функцій на поверхнях / С. И. Максименко // Некоторые проблемы современной математики. *Праці Інституту математики НАН України*. — 1998. — Т. 25. — С. 128–134.
- [161] Максименко С. И. Компоненты пространств отображений Морса / С. И. Максименко // Некоторые проблемы современной математики. *Праці Інституту математики НАН України*. — 1998. — Т. 25. — С. 135–153.
- [162] Максименко С. И. Классификация m -функций на поверхностях / С. И. Максименко // *Укр. мат. журн.* — 1999. — Т. 51, № 8. — С. 1129–1135.
- [163] Максименко С. Сечения действий групп Ли и теорема М. Ньюмана / С. Максименко // *Фундаментальная математика сегодня*. К десятилетию НМУ. — Москва: НМУ, МЦНМО, 2003. — С. 246–258.
- [164] Максименко С. Стабілізатори та орбіти гладких функцій відносно правої та право-лівої дій / С. Максименко // Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі - 2005”, (м. Одеса). — 2005. — Рр. 72–73.
- [165] Максименко С. Гамільтонові векторні поля однорідних многочленів двох змінних / С. Максименко // Проблеми топології та суміжні питання, *Праці Інституту математики НАН України*. — 2006. — Т. 3, № 3. — С. 269–308.
- [166] Максименко С. Функції з однорідними особливостями на поверхнях / С. Максименко // *Доповіді НАН України*. — 2009. — Т. 8. — С. 20–23.
- [167] Новиков С. П. Топология слоений / С. П. Новиков // *Труды Московского мат. общества*. — 1965. — Т. 14. — С. 248–278.
- [168] О’Мира О. Лекции о симплектических группах / О. О’Мира. — Москва: Мир, 1979. — С. 166.

- [169] *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А. А. Ошемков // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, *Тр. МИАН.* — 1994. — Т. 205. — С. 131–140.
- [170] *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем / Ж Палис, В ди Мелу. — Москва: Мир, 1986. — С. 301.
- [171] *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности / А. З. Петров. — Москва: Наука, 1966. — С. 496.
- [172] *Пришляк А. О.* Сопряженность функций Морса на поверхностях со значениями в прямой и окружности / А. О. Пришляк // *Укр. мат. журн.* — 2000. — Т. 52, № 10. — С. 1421–1425.
- [173] *Хирш М.* Дифференциальная топология / М. Хирш. — Москва: Мир, 1979. — С. 280.
- [174] *Шарко В. В.* Функции на поверхностях, I / В. В. Шарко // *Некоторые проблемы современной математики. Праці Інституту математики НАН України.* — Киев: Ин-т. математики НАН України, 1998. — Т. 25. — С. 408–434.
- [175] *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В. В. Шарко // *Укр. мат. журн.* — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 687–700.
- [176] *Юрчук І.* Топологічна класифікація функцій з класу $F(D^2)$ / І. Юрчук // Проблеми топології та суміжні питання, *Праці Інституту математики НАН України.* — 2006. — Т. 3, № 3. — С. 474–486.