Алгебраїчна топологія

Сергій Максименко

23 грудня 2022 р.

План

1. Гомотопії, деформації, ретракції, деформаційні ретракції, гомотопічні еквівалентності.
2. Фундаментальна група.
3. Обчислення фундаментальної групи кола.
4. Накриваючі відображення. Властивість підняття гомотопій. Класифікація накриваючих відображень. Існування універсального накриваючого простору.
5. Вищі гомотопічні групи. Точна послідовність гомотопічних груп пари просторів.
6. Копредставлення груп. Теорема Зейферта - ван Кампена. Обчислення фундаментальної групи компактних поверхонь та кліткових комплексів. Реалізація скінченнопредставлених груп як фундаментальних груп.
7. Сипліціальні комплекси і поліедри. Барицентричні підрозбиття. Групи симпліціальних гомологій. Геометрична реалізація симпліціального комплекса.
8. Групи сингулярних гомологій. Точна послідовність труп гомологій для пар. Властивість вирізання. Послідовність Майера-Вьєторіса.
9. Обчислення груп гомологій компактних поверхонь та деяких найпростіших кліткових комплексів.
10. Число Лефшеця неперервного відображення. Теореми про нерухомі точки.

1. Гомотопії

Скрізь нижче $I = [0;1]$ – це одиниичний відрізок.

Неперервне відображення $H : X \times [0;1] \to Y$ називається *гомотопією*.

Топологічний простір X називається стягуваним в точку $a \in X$, якщо тотожне відображення id_X гомотопне постійному відображенню $c_a : X \to \{a\}$ в точку a.

Неперервне відображення $f : X \to Y$ називається *гомотопічною еквівалентністю* якщо існує відображення $g : Y \to X$ таке, що $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ і $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[rr, "\simeq\mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "g"] & & Y \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\simeq\mathrm{id}_X"] & & X \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\simeq\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "\simeq\mathrm{id}_Y"] & X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Задача 1.1. Довести, що на просторі неперервних відображень $C(X, Y)$ відношення гомотопності є відношенням еквівалентності

Задача 1.2. Нехай $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$ – неперервні відображення. Показати, що якщо $f \simeq f'$ і $g \simeq g'$, то $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Задача 1.3. Довести, що топологічні простори і класи гомотопії відображень між ними утворюють категорію, позначимо її $\mathcal{HT}$.

Задача 1.4. Показати, що гомотопічна еквівалентість між топологічними просторами – це те ж саме, що ізоморфізм в категорії $\mathcal{HT}$.

Задача 1.5. Нехай $\mathcal{T}$ – категорія топологічних просторів і їх неперервних відображень. Довести, що відповідність $F : \mathcal{T} \to \mathcal{HT}$, яка тотожна та об'єктах, тобто кожному топологічному простору $X \in \mathcal{T}$ ставить у відповідність його ж, а кожному морфізму (неперервному відображенню) $f : X \to Y$ ставить у відповідність його клас гомотопії $[f]$ (морфізм між X і Y в $\mathcal{HT}$) є коваріантним функтором.

Нехай $f : A \to B$ – неперервне відображення. Для кожного топологічного простору X розглянемо два відображення:

$$f^* : [X, A] \to [X, B], \qquad f^*(\phi) = f \circ \phi : X \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{f} B,$$
$$f_* : [B, X] \to [A, X], \qquad f_*(\psi) = \psi \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} X.$$

Задача 1.6. Довести, що наступні умови еквівалентні

1.6.1. $f : A \to B$ – гомотопічна еквівалентність;

1.6.2. для кожного топологічного простору X обидва відображення f^* і f_* – біекції.

Задача 1.7. Показати, що задача 1.6 носить «категорний» характер в наступному сенсі. Нехай $\mathcal{C}$ – довільна категорія і $f : A \to B$ – морфізм в $\mathcal{C}$. Для кожного об'єкту $X \in Ob(\mathcal{C})$ розглянемо два "відображення" (будемо припускати, що в $\mathcal{C}$ морфізми є множинами):

$$f^* : Mor(X, A) \to Mor(X, B), \qquad f^*(\phi) = f \circ \phi : X \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{f} B,$$
$$f_* : Mor(B, X) \to Mor(A, X), \qquad f_*(\psi) = \psi \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} X.$$

Показати, що наступні умови еквівалентні

1.7.1. $f : A \to B$ – ізоморфізм в $\mathcal{C}$;

1.7.2. для кожного об'єкту $X \in Ob(\mathcal{C})$ обидва відображення f^* і f_* – біекції.

Задача 1.8. Показати, що множина $E[X]$ класів гомотопії гомотопічних еквівалентностей $X \to X$ утворює групу. В категорії $\mathcal{HT}$ група $E[X]$ тотожна з $Aut(X)$ – групою автоморфізмів (ізоморфізмів на себе) об'єкта X.

Задача 1.9. Нехай $I = [0, 1]$. Обчислити групу $E[I]$.

Задача 1.10. Показати, що кожен гомеоморфізм $f : X \to Y$ є гомотопічною еквівалентністю.

Задача 1.11. Нехай $H(X)$ – група гомеоморфізмів X. Показати, що відображення $q : H(X) \to E[X]$, яке ставить у відповідність $f \in H(X)$ його клас гомотопії $[f]$ як гомотопічної еквівалентності, є гомоморфізмом. Як описати ядро q.

Задача 1.12. Нехай $H(X)$ – група гомеоморфізмів X. Нехай $I = [0, 1]$. Обчислити групу $E[I]$.

Задача 1.13. Показати, що кожен стягуваний топологічний простір є лінійно зв'язним.

Задача 1.14. Нехай X – топологічний простір. Довести, що наступні умови є еквівалентними:

1.14.1. X стягуваний в деяку точку $a \in X$;

1.14.2. X стягуваний в кожну свою точку;

1.14.3. існує ретракція $r : CX \to X \times 0$ конуса CX над X на його основу $X \times 0$;

1.14.4. для кожного топологічного простору Y будь-які два відображення $f, g : Y \to X$ гомотопні;

1.14.5. X гомотопічно еквівалентний точці.

Задача 1.15. Довести, що $\mathbb{R}^n$ є стягуваним.

Задача 1.16. Довести, що кожна опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$ є стягуваною.

Задача 1.17. Підмножина $K \subset \mathbb{R}^n$ називається *зірчатою* відносно точки $a \in K$, якщо для кожної точки $b \in K$ відрізок $[a, b] = \{ta + (i-1)b\}_{t \in [0;1]} \subset K$. Довести, що кожна підмножина K в $\mathbb{R}^n$ зірчата відносно деякої своєї точки $a \in K$ є стягуваною в точку a.

Нехай $A \subset X$ – підмножина топологічного простору X і $H : X \times [0; 1] \to X$ – гомотопія. Тоді H називається

1) *деформацією X на A* якщо

а) $H_0 = \mathrm{id}_X$;
б) $H_t(A) \subset A$ для всіх $t \in [0;1]$;
в) $H_1(X) \subset A$

2) *деформаційною ретракцією* X *на* A, якщо
а) $H_0 = \mathrm{id}_X$;
б) $H_1(X) \subset A$ і індуковане відображення $H_1 : X \to A$ є ретракцією, тобто $H_1(a) = a$ для всіх $a \in A$.

Якщо ж додатково
в) H_t нерухоме на A для всіх $t \in A$,

то H називається *сильною деформаційною ретракцією* X *на* A. В свою чергу A називається *(сильним) деформаційним ретрактом* X.

Задача 1.18. Довести, що якщо існує деформація X на A, то відображення вкладення $i : A \subset X$ є гомотопічною еквівалентністю.

Задача 1.19. Довести, що якщо існує (сильна) деформаційна ретракція X на A, то відображення вкладення $i : A \subset X$ є гомотопічною еквівалентністю.

Задача 1.20. Показати, що кожна сильна деформаційна ретракція є одночасно деформацією і деформаційною ретракцією.

2. Компактно відкриті топології

Нехай X, Y – топологічні простори. Для кожної *компактної* підмножини $K \subset X$ і *відкритої* $V \subset Y$ розглянемо наступну підмножину в просторі $C(X,Y)$ всіх неперервних відображень:

$$[K,V] := \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset V\}.$$

Тоді сім'я таких множин

$$\alpha := \big\{[K,V] \mid K \subset X - \text{ компактна}, V \subset Y - \text{ відкрита}\big\}$$

породжує (тобто є передбазою) деякої топології на $C(X,Y)$. Ця топологія називається *компактно відкритою*.

Скажемо, що топологічний простір є *компактним*, якщо кожне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття.

Топологічний простір називатимемо *локально компактним*, якщо в кожній його точці x існує локальна база з компактних околів, тобто для кожної відкритого околу U точки x існує компактна підмножина $K \subset U$ така, що $x \in Int(K) \subset K \subset U$.

Зауважимо, що тут *не вимагаєтьса(!)*, щоб локально компактний простір був хаусдорфовим.

Скрізь нижче всі простори відображень $C(X,Y)$ наділені компактно відкритими топологіями.

Задача 2.1. Нехай K – компактна підмножина локально компактного простру X і $\{U_i\}_{i=1}^n$ – скінченне покриття K. Тоді існує скінчене число компактних підмножин $K_1,\dots,K_n$ таких, що $K_i \subset U_i$ для всіх $i = 1,\dots,n$ і $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$.

Задача 2.2. Нехай $A \subset B \subset X$ – компактні і $U \subset V \subset Y$ – відкриті. Показати, що

$$[A,U] \subset [A,V], \qquad [B,U] \subset [A,U], \qquad [B,U] \subset [A,V].$$

Задача 2.3. Нехай $A, B \subset X$ – компактні і $U, V \subset Y$ – відкриті. Показати, що

$$[A,U] \cap [B,V] \ \subset\ [A \cup B, U \cup V].$$

Навести приклад, коли це включення строге.

Задача 2.4. Нехай $V \subset Y$ – підмножина. Тоді $C(X,V)$ можна розглядати як підмножину в $C(X,Y)$. Припустимо, що V – відкрита в Y. Чи правда, що тоді $C(X,V)$ є відкритою в $C(X,Y)$? Довести це твердження, або навести контрприклад.

Задача 2.5. Нехай $U \subset V$ – відкриті підмножини в Y такі, що $\overline{U} \subset V$. Довести, що для довільних компактних підмножини $K \subset X$ маємо, що $\overline{[K,U]} \subset [K,V]$.

Задача 2.6. Показати, що якщо X задовольняє аксіому T_i для деякого $i \in \{0,1,2,3\}$, то $C(X,Y)$ також T_i-простір для довільного Y.

Задача 2.7. Показати, що для довільних неперервних відображень

$$F : X \to Y, \qquad G : Y \to Z$$

відображення

$$\begin{aligned} G_* &: C(X,Y) \to C(X,Z), & G_*(f) &= G \circ f, \\ F^* &: C(Y,Z) \to C(X,Z), & F^*(g) &= g \circ F, \end{aligned}$$

є неперервними в компактно відкритих топологіях.

Задача 2.8. Показати, що якщо Y – локально компактний, то відображення композиції відображень

$$\mu : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z), \qquad \mu(f,g) = g \circ f$$

є неперервним.

Задача 2.9. Нехай $A \subset X$ – замкнена підмножина. Довести, що відображення обмеження $r_A : C(X,Y) \to C(A,Y)$, $r_A(h) = h|_A$, є неперервним.

Задача 2.10. Нехай $\{A_i\}_{i=1\ldots,n}$ – скінченне замкнене покриття X. Визначимо відображення

$$r : C(X,Y) \to \prod_{i=1}^{n} C(A_i,Y), \qquad r(f) = (f|_{A_1}, \ldots, f|_{A_n})$$

Довести, що воно є гомеоморфізмом на свій образ.

Задача 2.11. Для точки $y \in Y$ нехай $c_y : X \to Y$ – постійне відображення в точку y. Показати, відображення $c : Y \to C(X,Y)$, $c(y) = c_y$, є неперервним.

Задача 2.12. Для точки $x \in X$ нехай $e_x : C(X,Y) \to Y$ – відображення обчислення в точці x, тобто $e_x(f) = f(x)$. Довести, що e_x є неперервним.

Задача 2.13. Показати, що якщо X – локально компактний, то відображення $e : C(X,Y) \times X \to Y$, $e(f,x) = f(x)$, є неперервним.

Експоненційний закон. Для множин X, Y позначимо через $Map(X,Y)$ множину всіх відображень $f : X \to Y$.

Показати, що для довільних трьох непорожніх множин X, Y, Z маємо відображення

$$E = E_{X,Y,Z} : Map(X \times Y, Z) \to Map(X, Map(Y,Z)), \qquad E(F)(x)(y) = F(x,y).$$

Задача 2.14. Показати, що $E_{X,Y,Z}$ – бієкція, обернена до якої задається правилом

$$E^{-1} : Map(X, Map(Y,Z)) \to Map(X \times Y, Z), \qquad E^{-1}(f)(x,y) = f(x)(y).$$

Задача 2.15. Нехай X, Y, Z – топологічні простори. Довести такі твердження.

2.15.1. Якщо $F : X \times Y \to Z$ – неперервне, то $E(F) : X \to C(Y,Z)$, $E(F)(x)(y) = F(x,y)$, також неперервне. Іншими словами, $E\big(C(X \times Y, Z)\big) \subset C(X, C(Y,Z))$.

2.15.2. Індуковане відображення $E : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$ – неперервне.

2.15.3. Якщо Y – локально компактний, то $E\big(C(X \times Y, Z)\big) = C(X, C(Y,Z))$, тобто попереднє відображення з 2.15.2 є неперервною бієкцією.

2.15.4. Якщо X – T_3-простір і Y – локально компактний, то відображення з 2.15.2 є гомеоморфізмом.

Якщо позначити $C(X,Y)$ через X^Y, то задача говорить про те, що якщо X – T_3-простір і Y – локально компактний, то має місце гомеоморфізм:

$$Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X.$$

Звідси назва *експоненційний закон*.

3. Фундаментальна група

Простори шляхів. Нехай X – топологічний простір і $I=[0;1]$. *Шляхом в X* називається довільне неперервне відображення $\gamma : I \to X$. При цьому $\gamma(0)$ називається *початком*, а $\gamma(1)$ – *кінцем* шляху γ. Також кажуть, що γ – це *шлях в X з точки $\gamma(0)$ в точку $\gamma(1)$*.

Якщо $\gamma(0)=\gamma(1)$, то γ називається *петлею в точці* $\gamma(0)$.

Таким чином множина всіх шляхів в X, це просто $C(I,X)$. Для двох точок x,y позначимо через $\mathcal{P}(X,x,y)$ – множину шляхів з x в y, а через $\Omega(X,x)=\mathcal{P}(X,x,x)$ множину петель в точці x.

Наділимо $C(I,X)$ компактно відкритою топологією, а кожен підпростір $\mathcal{P}(X,x,y)$ – відповідною індукованою топологією.

Два шляхи $\gamma,\delta \in C(I,X)$ називаються *компоновними*, якщо $\gamma(1)=\delta(0)$. Тоді для пари компоновних шляхів γ,δ визначено їх добуток $\gamma\delta : I \to X$ за формулою

$$(\gamma\delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0;\frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1), & t\in[\frac{1}{2};1]. \end{cases}$$

Цей шлях є шляхом з точки $\gamma(0)$ в точку $\delta(1)$.

Задача 3.1. Довести, що для довільних трьох точок $x,y,z\in X$ відображення композиції шляхів

$$\mu : \mathcal{P}(X,x,y)\times\mathcal{P}(X,y,z) \to \mathcal{P}(X,x,z), \qquad \mu(\gamma,\delta)=\gamma\delta \tag{3.1}$$

є неперервним.

Зокрема, для кожної точки $x\in X$ маємо неперервне відображення

$$\mu : \Omega(X,x)\times\Omega(X,x)\to\Omega(X,x), \qquad \mu(\gamma,\delta)=\gamma\delta.$$

Задача 3.2. Показати, що операція добутку петель на $\Omega(X,x)$ взагалі кажучи не задає групової структури.

Задача 3.3. Нехай

$$\mathcal{P} = \{(\gamma,\delta) \mid \gamma,\delta\in C(I,X), \gamma(1)=\delta(0)\} \subset C(I,X)\times C(I,X)$$

– підмножина, яка складається з пар компоновних шляхів. Тоді маємо коректно визначене відображення $\mu : \mathcal{P}\to C(I,X)$, $\mu(\gamma,\delta)=\gamma\delta$. Довести, що μ є гомеоморфізмом, див. задачі 2.9 і 2.10.

Скажемо, що два шляхи $\gamma,\delta \in \mathcal{P}(X,x,y)$ *гомотопні*, якщо існує гомотопія $H : I\times[0;1]\to X$ така, що $H_0=\gamma$, $H_1=\delta$, $H_t\in\mathcal{P}(X,x,y)$ для всіх $t\in[0;1]$.

Задача 3.4. Показати, що відношення гомотопності $\simeq$ шляхів між x і y є відношенням еквівалентності на $\mathcal{P}(X,x,y)$.

Клас еківалентності шляху $\gamma\in\mathcal{P}(X,x,y)$ позначається через $[\gamma]$.

Позначимо через $\Pi_1(X,x,y) := \mathcal{P}(X,x,y)/_{\simeq}$ множину класів гомотопії шляхів.

Зокрема для $x=y$ множина класів гомотопії петель в точці x:

$$\pi_1(X,x) := \Pi_1(X,x,x) = \mathcal{P}(X,x,x)/_{\simeq} = \Omega(X,x)/_{\simeq}$$

фундаментальною групою простору X в точці x.

Задача 3.5. Визначимо відображення (індуковане (3.1))

$$\mu : \Pi_1(X, x, y) \times \Pi_1(X, y, z) \to \Pi_1(X, x, z), \qquad \mu([\gamma], [\delta]) = [\gamma\delta].$$

Довести, що це відображення коректно визначене, тобто, що клас $[\gamma\delta]$ не залежить від вибору конкретних представників класів γ і δ.

Зокрема, маємо операцію композиції класів гомотопії шляхів в $\pi_1(X, x)$ за правилом:

$$\pi_1(X, x) \times \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x), \qquad [\gamma][\delta] := [\gamma\delta]$$

де $\gamma, \delta \in \Omega(X, x)$. Наступні задачі показують, що так визначений добуток задає структуру групи на $\pi_1(X, x)$.

Задача 3.6. Нехай $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x)$ — три петлі. Виписати добутки $(\alpha\beta)\gamma$ і $\alpha(\beta\gamma)$. Показати, що існує кусково лінійний гомеоморфізм, $\phi : [0; 1] \to [0; 1]$ такий, що $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ і

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \circ \phi.$$

Вивести звідси, що петлі $(\alpha\beta)\gamma$ і $\alpha(\beta\gamma)$ гомотопні. Іншими словами,

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma]),$$

а отже *операція множення класів гомотопії петель в* $\pi_1(X, x)$ *є асоціативною*, тобто $\pi_1(X, x)$ є напівгрупою.

Підказка, ϕ – кусково-лінійний гомеоморфізм, такий, що

$$\phi([0; \tfrac{1}{4}]) = [0; \tfrac{1}{2}], \qquad \phi([\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]) = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}], \qquad \phi([\tfrac{1}{2}, 1) = [\tfrac{3}{4}, 1].$$

Задача 3.7. Нехай $\epsilon : I \to \{x\} \subset X$ – постійна петля в точку x. Нехай $\alpha \in \Omega(X, x)$ – довільна петля. Показати, що існує кусково лінійна функція, $\phi : [0; 1] \to [0; 1]$ така, що $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ і

$$\alpha\epsilon = \alpha \circ \phi.$$

Вивести звідси, що петлі $\alpha\epsilon$ і α гомотопні. Іншими словами,

$$[\alpha][\epsilon] = [\alpha],$$

а отже *клас гомотопії* $[\epsilon]$ *постійної петлі є одиничним елементом* $\pi_1(X, x)$. Зокрема, $\pi_1(X, x)$ є моноїдом.

Задача 3.8. Нехай $\alpha \in \Omega(X, x)$ – довільна петля і $\beta : I \to X$ – петля, визначена за формулою $\beta(t) = \alpha(1-t)$. Показати, що існує кусково лінійна функція, $\phi : [0; 1] \to [0; 1]$ така, що $\phi(0) = \phi(1) = 0$ і $\alpha\beta = \alpha \circ \phi$. Вивести звідси, що петлі $\alpha\beta$ і ϵ гомотопні. Іншими словами,

$$[\alpha][\beta] = [\epsilon],$$

а отже *клас гомотопії* $[\beta]$ *є оберненим до класу* $[\alpha]$ *в* $\pi_1(X, x)$. Зокрема, $\pi_1(X, x)$ є групою.

Задача 3.9. Більш загально, довести наступні твердження:

3.9.1. Показати, що множення класів гомотопії компоновних шляхів є асоціативним, тобто якщо $\alpha \in \mathcal{P}(X, x, y)$, $\beta \in \mathcal{P}(X, y, z)$, $\gamma \in \mathcal{P}(X, z, u)$, то $[\alpha\beta][\gamma] = [\alpha][\beta\gamma] \in \mathcal{P}(x, u,)$.

3.9.2. Для довільної точки $x \in X$ клас гомотопії постійного відображення $\epsilon_x : I \to \{x\} \subset X$ є правою і лівою одиницею, тобто для довільних шляхів $\alpha \in \mathcal{P}(X, x, y)$ і $\beta \in \mathcal{P}(X, z, x)$ маємо, що $[\epsilon_x\alpha] = [\alpha]$ і $[\beta\epsilon_x] = [\beta]$.

3.9.3. Для кожного шляху $\alpha \in \mathcal{P}(X, x, y)$, шлях $\beta \in \mathcal{P}(X, y, x)$ визначений за формулою $\beta(t) = \alpha(1 - t)$ має властивість, що $\alpha[\beta] = [\epsilon_x]$ і $[\beta\alpha] = [\epsilon_y]$, тобто $[\beta]$ є оберненим до $[\alpha]$ і також позначатиметься через $[\alpha]^{-1}$.

Зокрема, ці твердження означають, що множина $\Pi_1(X) := \sqcup_{x,y \in X}\Pi_1(X, x, y)$ є групоїдом.

Задача 3.10. Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення і $f_\# : \Omega(X, x) \to \Omega(Y, f(x))$ індуковане відображення, визначене за формулою $f_\#(\gamma) = f \circ \gamma$:

$$f_\#(\gamma) = f \circ \gamma : (I, \partial I) \xrightarrow{\gamma} (X, x) \xrightarrow{f} (Y, f(x)).$$

Довести наступні твердження.

3.10.1. Показати, що $f_\#$ відображає гомотопні петлі в гомотопні, а отже індукує відображення $f_\# : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$, $f_\#([\gamma]) = [f \circ \gamma]$.

3.10.2. Довести, що відображення $f_{\#}$ є гомоморфізмом фундаментальних груп.

3.10.3. Довести, що якщо f – гомомотопічна еквівалентність пар $f : (X, x) \to (Y, f(x))$, зокрема, гомеоморфізм, то $f_{\#}$ – ізоморфізм груп.

3.10.4. Показати, що якщо $f : (X, x) \to (Y, y)$ і $g : (Y, y) \to (Z, z)$ – два відображення пар, то

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, z).$$

3.10.5. Розглянемо категорію $\mathcal{T}_*$ топологічних просторів з відміченою точкою (X, x) та неперервних відображень між ними, які переводять відмічені точки в відмічені. Поставимо у відповідність кожному (X, x) фундаментальну групу $\pi_1(X, x)$, а неперервному відображенню $f : (X, x) \to (Y, y)$ – гомоморфізм $f_{\#} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$. Довести, що ця відповідність є функтором з $\mathcal{T}_*$ в категорію груп і їх гомоморфізмів.

Задача 3.11. Нехай $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, y)$.

3.11.1. Показати, що відображення $\gamma_{\#} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ визначене за формулою $\gamma_{\#}(\alpha) = [\gamma\alpha\gamma^{-1}]$ є ізоморфізмом груп.

3.11.2. Довести, що ізоморфізм $\gamma_{\#}$ залежить тільки від класу гомотопії $[\gamma] \in \Pi_1(X, x, y)$, а отже ми маємо відображення

$$\phi : \Pi_1(X, x, y) \times \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y), \qquad \phi([\gamma], [\alpha]) = [\gamma][\alpha][\gamma]^{-1}.$$

3.11.3. Показати, що для довільного шляху $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, y)$ відображення

$$\gamma_* : \pi_1(X, x) \to \Pi_1(X, x, y), \qquad \gamma_*([\alpha]) = [\alpha\gamma],$$
$$\gamma_* : \pi_1(X, y) \to \Pi_1(X, x, y), \qquad \gamma^*([\beta]) = [\gamma\beta]$$

є бієкціями.

3.11.4. Показати, що якщо $\pi_1(X, x)$ комутативна, то для довільних шляхів $\gamma, \delta \in \mathcal{P}(X, x, y)$ ізоморфізми $\gamma_{\#}, \delta_{\#} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ тотожні.

3.11.5. Зокрема, якщо $\gamma \in \pi_1(X, x)$ то попереднє відображення

$$\phi : \pi_1(X, x) \times \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x), \qquad \phi([\gamma], [\alpha]) = [\gamma][\alpha][\gamma]^{-1}.$$

є спряженням в групі $\pi_1(X, x)$. Довести, що в цій ситуації ϕ це дія групи $\pi_1(X, x)$ на собі $\pi_1(X, x)$. Яка це дія права чи ліва?

Задача 3.12. Нехай G – топологічна група з одиницею e і $\mu : G \times G \to G$ – відображення множення, яке позначатимемо через $\cdot$, тобто $\mu(g, h) = g \cdot h$. Тоді виникає відображення поточкового множення петель:

$$\nu : \Omega(G, e) \times \Omega(G, e) \to \Omega(G, e), \qquad \nu(\alpha, \beta)(t) = \mu(\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$$

Зручно буде позначати $\nu(\alpha, \beta)$ через $\alpha \cdot \beta$.

3.12.1. Показати, що ν індукує відображення на класах гомотопії

$$\hat{\nu} : \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e), \qquad \hat{\nu}([\alpha][\beta]) = [\nu(\alpha, \beta)] = [\alpha \cdot \beta].$$

Тобто можна визначити множення $\cdot$ класів гомотопії петель в одиниці:

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \cdot \beta].$$

3.12.2. Показати, що операція множення петель $\cdot$ перетворює $\pi_1(G, e)$ в групу. Описати нейтральний елемент і обернений до петлі α.
Таким чином маємо дві операції множення класів гомотопії петель: $[\alpha][\beta]$ – індуване композицією і $[\alpha] \cdot [\beta]$ – індуковане поточковим множенням в групі.

3.12.3. Довести, що для довільних петель $\alpha\beta \in \Omega(G, e)$, $[\alpha][\beta] = [\alpha] \cdot [\beta] \in \pi_1(G, e)$. Іншими словами, звичайна композиція петель і їх поточкое множення дають одну і ту ж структуру групи на $\pi_1(G, e)$.

3.12.4. Довести, що $\pi_1(G, g)$ – комутативна для всіх $g \in G$.

Задача 3.13. Нехай G – топологічний моноїд з одиницею e і множенням $\mu : G \times G \to G$, тобто множення асоціативне, але не всі елементи мають обернені. Тоді, як і в задачі 3.12, все одно визначене відображення множення петель:

$$\nu : \Omega(G, e) \times \Omega(G, e) \to \Omega(G, e), \qquad \nu(\alpha, \beta)(t) = \mu(\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$$

яке також позначатиметься через $\cdot$. Довести, що тоді всі твердження задачі 3.12 мають місце: тобто, що множення петель індукує множення класів гомотопії, яке співпадає із звичайним множенням в $\pi_1(G,e)$. Більш того, група $\pi_1(G,e)$ є комутативною.

4. Поліедри

Нехай X – топологічний простір, $Y \subset \mathbb{R}^n$ і $f, g : X \to Y$ – неперервні відображення. Гомотопію $H : X\times[0;1] \to \mathbb{R}^n$ між f та g як відображеннями в $\mathbb{R}^n$ визначену за формулою $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, $(x,t) \in X \times [0;1]$, називатимемо опуклою гомотопією. Якщо $H(X\times[0;1]) \subset Y$, то будемо говорити, що $f, g : X \to Y$ – опукло гомотопні (як відображення в Y.

4.A. Лінійно незалежні системи точок в $\mathbb{R}^m$. Скінченна підмножина точок

$$\alpha = \{a_0, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^m$$

називається лінійно незалежною відносно точки a_0 (ЛНЗ), якщо лінійно незалежними є вектори

$$\overline{a_0a_1},\ \overline{a_0a_2},\ \ldots,\ \overline{a_0a_k}.$$

В протилежному випадку, ця система точок називається лінійно залежною (ЛЗ) (відносно точки a_0).

Задача 4.1. Якщо α є ЛНЗ (ЛЗ) відносно точки a_0, то вона є ЛНЗ (ЛЗ) відносно будь-якої іншої точки $a_i \in \alpha$.

Множина $\alpha = \{a_0, \ldots, a_k\}$ називатиметься ЛНЗ (ЛЗ), якщо вона є такою відносно деякої (а отже будь-якої) своєї точки. Через

$$|\alpha| := |a_0, \ldots, a_k| = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} t_i a_i \mid t_i \in [0;1], \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \Big\}$$

позначатимемо опуклу оболонку цієї системи точок. Наступні множини

$$\mathrm{Int}\,(|\alpha|) = \{(t_0, \ldots, t_k) \mid t_i > 0, i = 0, 1, \ldots, k\}, \qquad \partial|\alpha| = |\alpha| \setminus \mathrm{Int}\,(|\alpha|)\,.$$

називають, відповідно внутрішністю і межею опуклої множини $|\alpha|$.

Якщо $\alpha = \{a_0, \ldots, a_k\}$ – ЛНЗ система точок, то $|\alpha|$ також називатиметься симплексом (породженим вершинами $a_0, \ldots, a_k$). В цій ситуації для кожної (можливо порожньої) підмножини $\beta \subset \alpha$ симплекс $|\beta|$ називається гранню $|\alpha|$. Якщо $\beta = \varnothing$, то $|\beta| = \varnothing$. Грань $|\beta|$ називається власною, якщо $|\beta|$ відмінна від $\varnothing$ і $|\alpha|$. Зокрема, точки a_i – називають вершинами, а симплекси $|a_i, a_j|$, породжені парами вершин, – ребрами. Число k – кількість вершин в $|\alpha|$ мінус 1, називають розмірністю симплекса $|\alpha|$ і позначають $\dim|\alpha|$.

Задача 4.2. Нехай $\alpha = \{a_0, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^m$ – скінченна множина. Перевірити такі твердження:

4.2.1. Якщо $a \in \mathbb{R}^m$ – точка, тобто 0-симплекс, то $\{a\} = |a| = \mathrm{Int}\,(|a|)$ і $\partial|a| = \varnothing$.

4.2.2. $|\alpha|$ і $\partial|\alpha|$ є замкненими підмножинами $\mathbb{R}^m$;

4.2.3. $\mathrm{Int}\,(|\alpha|)$ є опуклою підмножиною в $\mathbb{R}^m$;

4.2.4. Показати, що внутрішність і межа $|\alpha|$ як опуклої множини можуть відрізнятись від внутрішності і межі $|\alpha|$ як підмножини в $\mathbb{R}^m$.

Задача 4.3. Нехай $\alpha = \{a_0, \ldots, a_k\}$ – ЛНЗ множина в $\mathbb{R}^m$. Довести такі твердження.

4.3.1. Для кожної точки $x \in |\alpha|$ існують *єдині* числа $t_i \in [0;1]$, $i = 0, \ldots, k$, такі, що $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$ і $x = \sum\limits_{i=0}^{k} t_i a_i$. Ці числа називають барицентричними координатами точки $x \in |\alpha|$, а саму точку тоді можна записати у вигляді $x = (t_0, \ldots, t_k)$.

4.3.2. Будь-яка непорожня підмножина $\beta \subset \alpha$ також є ЛНЗ.

4.3.3. Нехай $\beta = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_l}\} \subset \alpha$ – підмножина, $x \in |\beta| \subset |\alpha|$ точка і $(s_{i_0}, \dots, s_{i_l})$ та $(t_0, \dots, t_k)$ – барицентричні координати точки x відносно β і α. Тобто $x = \sum\limits_{j=0}^{l} s_{i_j} a_{i_j} = \sum\limits_{j=0}^{k} t_j a_j$. Тоді

$$t_i = \begin{cases} s_i, & a_i \in \beta, \\ 0, & a_i \notin \beta. \end{cases}$$

4.3.4. Довести, що наступні умови еквівалентні
(а) α є максимальною;
(б) $m = k + 1$;
(в) $\mathrm{Int}\,(|\alpha|)$ є відкритою в $\mathbb{R}^m$;
(г) $\mathrm{Int}\,(|\alpha|)$ тотожна з внутрішністю $|\alpha|$ як підмножини в $\mathbb{R}^m$;
(д) $\partial|\alpha|$ тотожна з межею $|\alpha|$ як підмножини в $\mathbb{R}^m$;

4.3.5. Симплекс $|\alpha|$ не можна представити як об'єднання скінченного числа симплексів меншої розмірності.

4.3.6. Нехай $|\beta|$ – деяка грань $|\alpha|$, $B \subset |\beta|$ – скінченна ЛНЗ підмножина і $b \in |\alpha| \setminus |\beta|$ довільна точка, що не належить грані $|\beta|$. Тоді множина $B \cup \{b\}$ є ЛНЗ.

Задача 4.4. Нехай $\alpha = \{a_0, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^m$ – ЛНЗ множина і $f : \alpha \to \mathbb{R}^n$ – довільне відображення. Визначимо відображення $\widehat{f} : |\alpha| \to \mathbb{R}^n$ за формулою

$$\widehat{f}\Big(\sum_{i=0}^{k} t_i a_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} t_i f(a_i).$$

Називатимемо $\widehat{f}$ – лінійним продовженням f. Довести такі твердження.

4.4.1. $\widehat{f}$ коректно визначене неперервне відображення.

4.4.2. Існує афінне відображення $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = Ax + b$, для деякої матриці A та вектора $b \in \mathbb{R}^n$, таке, що $\widehat{f} = F|_{|\alpha|}$.

4.4.3. Довести, що α – максимальна ЛНЗ система, тоді і тільки тоді, коли такі A та b – єдині.

4.B. Метричні співвідношення в симплексі.

Задача 4.5. Нехай ABC – трикутник на площині.

4.5.1. Показати, що $AX \le \max\{AB, AC\}$ для кожної точки $X \in BC$.

4.5.2. Нехай AM – медіана і $O \in AM$ – точка перетину медіан трикутника ABC. Тоді $AO = 2OM$.

Задача 4.6. Нехай $\alpha = \{a_0, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^m$ – ЛНЗ множина.

4.6.1. Показати, що $\|x - y\| \le \max\limits_{i,j=0,\dots,k} \|a_i - a_j\|$ для всіх $x, y \in |\alpha|$, а отже

$$\mathrm{diam}(|\alpha|) := \sup_{x,y \in |\alpha|} \|x - y\| = \max_{i,j=0,\dots,k} \|a_i - a_j\|,$$

тобто, що діаметр симплекса дорівнює довжині його найбільшого ребра.

Підказка. 1) Довести твердження задачі для $\dim|\alpha| = 0, 1, 2$.

2) Якщо x, y належать деякій власній грані $|\beta|$ симплекса $|\alpha|$, то можна замінити $|\alpha|$ на $|\beta|$.

3) Нехай x', y' – кінці відрізка, що є перетином прямої xy і $|\alpha|$. Тоді $x', y' \in \partial|\alpha|$ і $\|x - y\| \le \|x' - y'\|$. Тому можна замінити пару x, y на x', y' і вважати, що $x, y \in \partial|\alpha|$. Для визначеності, нехай $x \in |a_0, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}|$, $y \in |a_0, \dots, a_{k-2}, a_k|$.

Припустимо, що твердження доведене для всіх симплексів розмірності $< k$. Можна також вважати, що вершина $a_0 \in |\alpha|$ відмінна від обох точок x, y. Нехай $b_x, b_y \in |a_1, \dots, a_k|$ – відповідно точки перетину променів a_0x та a_0y з $(l-1)$-гранню $|a_1, \dots, a_k|$. Тоді відрізок $[x; y]$ міститься в симплексі $|a_0, b_x, b_y|$. Більш того, за випадком $k = 2$,

$$\|x - y\| \le \max\{\|b_x - a_0\|, \|b_y - a_0\|, \|b_x - b_y\|\},$$

причому кожна пара (b_x, a_0), (b_y, a_0), (b_x, b_y) лежить в деякій $(k-1)$-грані $|\beta|$. Тому можна замінити пару відрізок $[x; y]$ на найдовше ребро симплекса $|a_0, b_x, b_y|$. Тепер, за індукцією, існує ребро $|a_i, a_j| \subset |\beta|$ таке, що $\|x-y\| \leq \|a_i - a_j\|$.

4.6.2. Довести, що $\|x - a_0\| \leq \max\limits_{i=1,\dots,k} \|a_i - a_0\|$ для кожної точки $x \in |\alpha|$.

Підказка. Довжину $\|x - a_0\|$ можна збільшити замінивши x на точку перетину променя a_0x з гранню $|a_1, \dots, a_k|$ і також вважати, що x відмінна від кожної з вершин симплекса $|\alpha|$. Для $k = 0, 1$ твердження задачі очевидне, а для $k = 2$ – міститься в задачі 4.5.1. Припустимо, що твердження доведене для $k-1$. Нехай x' – точка перетину грані $|a_2, \dots, a_k|$ з променем a_1x. Тоді за випадком $k = 2$ для трикутника a_0a_1x' маємо, що $\|a_0 - x\| \leq \max\{\|a_0 - x'\|, \|a_0 - a_1\|\}$. Якщо $\|a_0 - x\| \leq \|a_0 - a_1\|$ – твердження доведене. Якщо ж $\|a_0 - x\| \leq \|a_0 - x'\|$, то можна замінити x на x'. Зауважимо, що x' належить $(k-2)$-грані $|a_2, \dots, a_k|$ $(k-1)$-симплекса $|a_0, a_2, \dots, a_k|$. Тоді за випадком $k-1$, $\|x' - a_0\| \leq \max\limits_{i=2,\dots,k} \|a_i - a_0\|$.

4.6.3. Нехай $\beta = \{a_1, \dots, a_k\}$, $x_\alpha = \frac{1}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} a_i$ – центр мас симплекса $|\alpha|$, $x_\beta = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ – центр мас симплекса $|\beta|$. Показати, що

$$x_\alpha = \tfrac{1}{k+1} a_0 + \tfrac{k}{k+1} x_\beta.$$

Зокрема, (див. також задачу 4.5.2), x_α належить відрізку $[a_0, x_\beta]$,

$$\|x_\alpha - a_0\| = \tfrac{k}{k+1}\|x_\beta - a_0\|, \qquad \|x_\alpha - x_\beta\| = \tfrac{1}{k+1}\|x_\beta - a_0\|.$$

4.6.4. Вивести з 4.6.2 і 4.6.3, що

$$\|x_\alpha - x\| \leq \tfrac{k}{k+1}\operatorname{diam}(|\alpha|)$$

для кожної точки $x \in |\alpha|$.

4.6.5. Нехай $|\gamma|$ і $|\delta|$ – дві грані $|\alpha|$ такі, що $|\gamma| \supset |\delta|$, і x_γ, x_δ – їх центри мас. Довести, що

$$\|x_\gamma - x_\delta\| \leq \tfrac{k}{k+1}\operatorname{diam}(|\alpha|).$$

4.C. Узгоджені симплекси. Нехай $|\alpha|, |\beta| \subset \mathbb{R}^m$ – два симплекси. Скажемо, що вони *узгоджені*, якщо перетин $|\alpha| \cap |\beta|$ є спільною гранню обох цих симплексів. Зокрема, якщо $|\alpha| \cap |\beta| = \varnothing$, то $|\alpha|$ і $|\beta|$) узгоджені, бо той перетин є порожньою гранню.

Задача 4.7. Довести такі твердження.

4.7.1. Якщо $|\alpha|$ і $|\beta|$ – узгоджені симплекси, $|\alpha'|$ – грань $|\alpha|$, а $|\beta'|$ – грань $|\beta|$, то $|\alpha'|$ і $|\beta'|$ також узгоджені.

4.7.2. Для кожного симплекса його грані є попарно узгодженими.

4.D. Триангуляції. Локально скінченна сім'я $\Sigma = \{|\alpha_i|\}_{i\in\Lambda}$ попарно узгоджених симплексів називається *триангуляцією*. Об'єднання симплексів

$$|\Sigma| := \bigcup_{i\in\Lambda} |\alpha_i|$$

називають *носієм* Σ. Іноді буде зручно розглядати сім'ю відповідних ЛНЗ множин, що породжують ці симплекси:

$$\langle\Sigma\rangle = \{\alpha_i\}_{i\in\Lambda},$$

яку ми називатимемо *системою твірних* триангуляції Σ.

Зауважимо, що різні триангуляції можуть мати тотожні носії. Підмножина $K \subset \mathbb{R}^m$ називається *поліедром*, якщо вона тотожна з носієм деякої триангуляції. В цій ситуації також говорять, що *Σ є триангуляцією (поліедра) K*.

Нехай $\Sigma = \{|\alpha_i|\}_{i\in\Lambda}$ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$. Для $k \geq 0$ позначимо через $\Sigma^{(k)}$ сім'ю всіх граней розмірності $\leq k$ всіх симплексів триангуляції Σ і називатимемо її *k-скелетом* Σ.

Задача 4.8. Нехай $\Sigma = \{|\alpha_i|\}_{i\in\Lambda}$ – триангуляція

4.8.1. Довести, що її носій $|\Sigma|$ триангуляції є замкненою множиною.

4.8.2. Показати, що довільна підсім'я $\Sigma' \subset \Sigma$ є триангуляцією. Зокрема k-скелет триангуляції також є триангуляцією.

4.8.3. Нехай
- $\overline{\Sigma}$ – сім'я всіх граней всіх симплексів з Σ;
- Σ_0 – підсім'я в Σ, яка складається симплексів, які не є власними гранями інших симплексів з Σ;
- Σ' – довільна підсім'я в $\overline{\Sigma}$ така, що $\Sigma_0 \subset \Sigma' \subset \overline{\Sigma}$.

Показати, що Σ_0, Σ' та $\bar{\Sigma}$ – є триангуляціями поліедра $|\Sigma|$, тобто $|\Sigma_0| = |\Sigma'| = |\bar{\Sigma}| = |\Sigma|$.

Триангуляцію $\bar{\Sigma}$ зручно називати повною, а також повненням триангуляції Σ. Не втрачаючи загальності надалі розглядатимемо тільки повні триангуляції.

Задача 4.9. Нехай $\Sigma = \{|\alpha|\}$ – сім'я, що складається з одного симплекса. Показати, що Σ – триангуляція, $\Sigma_0 = \Sigma$, $\overline{\Sigma}$ – складається з усіх граней $|\alpha|$ і $|\Sigma| = |\alpha|$. Зокрема, кожен симплекс є поліедром.

Надалі буде зручно позначати через $2^{|\alpha|}$ повну триангуляцію симплекса $|\alpha|$, яка складається з усіх його граней.

Нехай Σ, Σ' – дві повні триангуляції. Скажемо, що Σ' є підрозбиттям триангуляції Σ', і писатимемо $\Sigma' \prec \Sigma$, якщо
- $|\Sigma'| = |\Sigma|$;
- кожен симплекс $|\alpha| \in \Sigma$ є об'єднанням деяких симплексів з Σ'.

Задача 4.10. Показати, що відношення $\prec$ «бути підрозбиттям» для триангуляцій є транзитивним, тобто з $\Sigma'' \prec \Sigma'$ і $\Sigma' \prec \Sigma$ випливає, що $\Sigma'' \prec \Sigma$.

4.E. Розмірність поліедра. Нехай Σ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$. Розмірністю триангуляції Σ називають число
$$\dim \Sigma := \sup_{|\alpha| \in \Sigma} \dim |\alpha|.$$

Задача 4.11. Нехай Σ, Σ' – дві триангуляції в $\mathbb{R}^m$, такі, що $|\Sigma| = |\Sigma'|$. Показати, що $\dim \Sigma = \dim \Sigma'$, (див. задачу 4.3.5).

Розмірністю поліедра назвемо розмірність деякої його триангуляції. Іншими словами, покладемо, $\dim |\Sigma| := \dim \Sigma = \sup\limits_{|\alpha| \in \Sigma} \dim |\alpha|$. Згідно задачі 4.11 це число не залежить від триангуляції поліедра $|\Sigma|$.

4.F. Барицентричне підрозбиття симплекса. Нехай $|\alpha| \subset \mathbb{R}^m$ – симплекс. Прапором граней симплекса $|\alpha|$ назвемо довільну строго спадну послідовність його непорожніх граней:
$$\sigma : |\beta_0| \supset |\beta_1| \supset \cdots \supset |\beta_l|. \tag{4.1}$$
Множину всіх прапорів граней симплекса $|\alpha|$ позначатимемо через $\mathsf{fl}(\alpha)$.

Припустимо, що у внутрішності кожної грані $|\beta|$ симплекса $|\alpha|$ вибрано деяку точку $x_{|\beta|} \in \operatorname{Int}(|\beta|)$. Цю відповідність можна розглядати як відображення $\xi : 2^{\alpha} \setminus \{\varnothing\} \to |\alpha|$, $\xi(|\beta|) = x_{\beta}$, таке, що $\xi(|\beta|) \in \operatorname{Int}(|\beta|)$. Кожне таке відображення називатимемо відображенням вибору (внутрішньої точки). Тоді кожному прапору граней $\sigma \in \mathsf{fl}(\alpha)$ можна поставити у відповідність множину $\xi(\sigma) = \{x_{|\beta_0|} \dots, x_{|\beta_l|}\} \subset |\alpha| \subset \mathbb{R}^m$.

Задача 4.12. Нехай $\xi : 2^{\alpha} \setminus \{\varnothing\} \to |\alpha|$ – довільне відображення вибору внутрішньої точки. Перевірити такі твердження.

4.12.1. Якщо a – вершина $|\alpha|$, то $\xi(\{a\}) = a$.

4.12.2. Для кожного прапора $\sigma \in \mathsf{fl}(\alpha)$, множина $\xi(\sigma)$ є ЛНЗ (див. задачу 4.3.6).

4.12.3. Для довільних прапорів $\sigma, \sigma' \in \mathsf{fl}(\alpha)$, симплекси $|\xi(\sigma)|$ та $|\xi(\sigma')|$ є узгодженими.

4.12.4. $|\alpha| = \bigcup\limits_{\sigma\in\mathsf{fl}(\alpha)} |\xi(\sigma)|$.

Таким чином сім'я $b(\alpha,\xi) := \{|\xi(\sigma)|\}_{\sigma\in\mathsf{fl}(\alpha)}$ утворює триангуляцію, яка є підрозбиттям стандартної триангуляції 2^α симплекса $|\alpha|$. Ми називатимемо її барицентричним підрозбиттям $|\alpha|$ (що відповідає відображенню вибору внутрішньої точки $\xi : 2^\alpha \setminus \{\varnothing\} \to |\alpha|$).

Зауважимо, що процедуру барицентричного підрозбиття можна застосувати до вже побудованого барицентричного підрозбиття $b(\alpha,\xi)$ і т.д. Скажемо, що триангуляція симплекса Σ є k-кратним барицентричним підрозбиттям $|\alpha|$, якщо існує послідовність підрозбиттів $\Sigma_k \prec \Sigma_{k-1} \prec \cdots \prec \Sigma_0$, така, що Σ_j є барицентричним підрозбиттям Σ_{j-1} (відносно деякої функції вибору) для всіх $j = 1,\ldots,k$.

Визначимо ще одне відображення вибору внутрішньої точки $\xi_c : 2^\alpha \setminus \{\varnothing\} \to |\alpha|$ за формулою: якщо $|\beta| = |b_0,\ldots,b_l| \in 2^\alpha$ – симплекс, то

$$\xi_c(|\beta|) = \tfrac{1}{l+1}\sum_{i=0}^{l} b_l = (\tfrac{1}{l+1},\ldots,\tfrac{1}{l+1})$$

є *«центром мас» симплекса* $|\beta|$. Таке відображення ξ_c та відповідне барицентричне підрозбиття $b(|\alpha|,\xi_c)$ симплекса $|\alpha|$ називатимуться канонічними. Канонічне барицентричне підрозбиття $|\alpha|$ позначатимемо через $b_c|\alpha|$; а j-кратне барицентричне підрозбиття, яке є послідовністю канонічних барицентричних підрозбиттів позначатимемо через $b_c^j|\alpha|$ і теж називатимемо j-кратним канонічним барицентричним підрозбиттям.

Задача 4.13. Нехай $|\alpha|$ – k-симплекс в $\mathbb{R}^m$.

4.13.1. Довести, що для кожного симплекса $|\beta|$ j-кратного канонічного барицентричного підрозбиття $b_c^j|\alpha|$ має місце оцінка

$$\operatorname{diam}(|\beta|) \le \left(\tfrac{k}{k+1}\right)^j \operatorname{diam}(|\alpha|),\ j \ge 0,$$

див. задачу 4.6.5. Зокрема

$$\lim_{j\to\infty}\ \sup_{\beta\in b_c^j|\alpha|} \operatorname{diam}(|\beta|) = 0.$$

4.13.2. Побудувати нескінченну послідовність триангуляцій $\{\Sigma_j\}_{j\ge0}$ симплекса $|\alpha|$, таку, що
- $\Sigma_0 = 2^\alpha$,
- Σ_{j+1} є деяким барицентричним підрозбиттям Σ_j для всіх $j \ge 0$,
- для кожного $j \ge 0$ існує симплекс $\beta_j \in \Sigma_j$, такий, що $\lim\limits_{j\to\infty} \operatorname{diam}(|\beta_j|) > 0$.

4.G. Барицентричне підрозбиття поліедра. Нехай $\Sigma = \{|\alpha_i|\}_{i\in\Lambda}$ – деяка повна триангуляція. Позначимо через $\mathsf{fl}(\Sigma) = \bigcup\limits_{i\in\Lambda} \mathsf{fl}(\alpha_i)$ – сукупність усіх прапорів граней всіх симплексів з Σ.

У внутрішності кожної грані $|\beta|$ кожного симплекса $|\alpha_i|$ виберемо точку x_β. Цей вибір можна розглядати як відображення $\xi : \Sigma \to |\Sigma|$, таке, що $\xi(|\beta|) := x_\beta \in \operatorname{Int}(|\beta|)$. Такі відображення також називатимемо відображенням вибору внутрішньої точки. Тоді кожному прапору граней $\sigma : (|\beta_0| \supset |\beta_1| \supset \cdots \supset |\beta_l|) \in \mathsf{fl}(\Sigma)$ можна поставити у відповідність множину $\xi(\sigma) = \{x_{\beta_0}, x_{\beta_1}\ldots, x_{\beta_l}\} \subset |\Sigma| \subset \mathbb{R}^m$.

Задача 4.14. Довести, що $\{|\xi(\sigma)|\}_{\sigma\in\mathsf{fl}(\alpha)}$ є триангуляцією поліедра $|\Sigma|$, яку ми називатимемо барицентричним підрозбиттям $|\Sigma|$ і позначатимемо через $b(\Sigma,\xi)$. Іншими словами потрібно перевірити, що

4.14.1. для довільних прапорів $\sigma,\sigma' \in \mathsf{fl}(\Sigma)$, симплекси $|\xi(\sigma)|$ та $|\xi(\sigma')|$ є узгодженими;

4.14.2. $|\Sigma| = \bigcup\limits_{\sigma\in\mathsf{fl}(\Sigma)} |\xi(\sigma)|$.

Задача 4.15. Нехай $b(\Sigma,\xi)$ і $b(\Sigma,\xi')$ – два барицентричних підрозбиття триангуляції Σ в $\mathbb{R}^m$, що відповідають різним функціям вибору внутрішньої точки $\xi,\xi' : \Sigma \to |\Sigma|$. Для спрощення позначатимемо $\xi(\beta) = x_\beta$ і

$\xi(\beta) = x'_\beta$. Визначимо відображення $H : |\Sigma| \times [0;1] \to \mathbb{R}^m$ за таким правилом. Нехай $|\beta|$ – симплекс в $b(\Sigma, \xi)$ породжений вершинами $(x_{\beta_0}, \dots, x_{\beta_k})$, тоді для кожної точки $y = (t_0, \dots, t_k) = \sum\limits_{i=0}^{k} t_i x_{\beta_i}$,

$$H(y,t) = t\sum_{i=0}^{k} t_i x'_{\beta_i} + (1-t)\sum_{i=0}^{k} t_i x_{\beta_i} = \sum_{i=0}^{k} t_i\big(t x_{\beta_i} + (1-t)x'_{\beta_i}\big).$$

Довести, що

4.15.1. H – це ізотопія $|\Sigma|$, тобто, H – неперервне, $H_t(|\Sigma|) = |\Sigma|$, а відображення $H_t : |\Sigma| \to |\Sigma|$ є гомеоморфізмом для всіх $t \in [0;1]$;

4.15.2. для кожного $t \in [0;1]$ сім'я симплексів $\xi_t := \{H_t(|\beta|)\}_{\beta \in \mathsf{fl}(\Sigma)}$ є барицентричним підрозбиттям поліедра $|\Sigma|$;

4.15.3. $\xi_0 = \xi$ і $\xi_1 = \xi'$.

Іншими словами, H – це ізотопія між барицентричними підрозбиттями ξ і ξ'. Зокрема, **довільні два барицентричних підрозбиття однієї триангуляції ізотопні**.

4.H. Зірки симплексів. Нехай Σ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$ і $|\alpha| \in \Sigma$ деякий її симплекс. Замкненою зіркою $\overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\alpha)$ симплекса $|\alpha|$ називають об'єднання всіх симплексів з Σ, які містять $|\alpha|$:

$$\overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\alpha) := \bigcup_{|\alpha| \subset |\beta|} |\beta|.$$

Відкритою зіркою $\mathrm{st}_\Sigma(\alpha)$ симплекса $|\alpha|$ називають об'єднання внутрішностей всіх симплексів з Σ, які містять $|\alpha|$:

$$\mathrm{st}_\Sigma(\alpha) := \bigcup_{|\alpha| \subset |\beta|} \mathrm{Int}\,(|\beta|)\,.$$

Якщо триангуляція зафіксована, то зірки можуть також позначатись через $\overline{\mathrm{st}}(\alpha)$ і $\mathrm{st}(\alpha)$ відповідно.

Задача 4.16. Нехай a – вершина триангуляції Σ. Довести такі твердження.

4.16.1. Відкрита зірка $\mathrm{st}(a)$ вершини a є відкритим околом a в $|\Sigma|$.

4.16.2. Нехай D_a – об'єднання всіх симплексів з Σ, які не містять a. Довести, що $\mathrm{st}(a) = |\Sigma| \setminus D_a$.

4.16.3. Замкнена зірка $\overline{\mathrm{st}}(a)$ вершини a є замиканням її відкритої зірки $\mathrm{st}(a)$.

Задача 4.17. Нехай $a_0, \dots, a_k$ – деякі вершини в Σ. Показати, що наступні умови еквівалентні:

(1) Σ містить симплекс $\alpha = (a_0, \dots, a_k)$;

(2) $\bigcap\limits_{i=0}^{k} \mathrm{st}(a_i) \neq \varnothing$;

(3) $\bigcap\limits_{i=0}^{k} \overline{\mathrm{st}}(a_i) \neq \varnothing$;

Довести, що за виконання (будь-якої з) цих умов мають місце такі включення:

$$\mathrm{Int}\,(|\alpha|) \subset \mathrm{st}(\alpha) = \bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{st}(a_i), \qquad |\alpha| \subset \overline{\mathrm{st}}(\alpha) = \bigcap_{i=0}^{k} \overline{\mathrm{st}}(a_i).$$

Задача 4.18. Нехай $|\alpha|$ – симплекс триангуляції Σ. Довести такі твердження.

4.18.1. Відкрита зірка $\mathrm{st}(\alpha)$ симплекса є відкритим околом його внутрішності $\mathrm{Int}\,(|\alpha|)$ в $|\Sigma|$.

4.18.2. Нехай D_α – об'єднання всіх симплексів з Σ, які не містять α. Довести, що $\mathrm{st}(a) = |\Sigma| \setminus D_\alpha$.

4.18.3. Замкнена зірка $\overline{\mathrm{st}}(\alpha)$ є замиканням відкритої зірки $\mathrm{st}(\alpha)$.

4.I. З'єднання тріангуляцій. Нехай $\alpha = \{a_0, \dots, a_k\}$ – ЛНЗ система точок в $\mathbb{R}^m$, $\beta \subset \alpha$ – підмножина і $\gamma = \alpha \setminus \beta$ – її доповнення. Тоді грані $|\beta|$ і $|\gamma|$ симплекса $|\alpha|$ називаються протилежними.

Задача 4.19. Нехай $|\beta|$ і $|\gamma|$ – непорожні протилежні грані симплекса $|\alpha|$. Довести такі твердження.

4.19.1. Нехай $x \neq x' \in |\beta|$ – дві різні точки і $y, y' \in |\gamma|$ дві довільні (можливо тотожні між собою) точки. Показати, що внутрішності відрізків $|x, y|$ і $|x', y'|$ не перетинаються.

4.19.2. Для довільної точки $u \in |\alpha| \setminus (|\beta| \cup |\gamma|)$ існують єдині точки $x \in |\beta|$ і $y \in |\gamma|$ такі, що u належить внутрішності відрізка $|x, y|$.

Нехай Σ і Λ – дві скінченні тріангуляції в $\mathbb{R}^m$. Сім'я опуклих множин

$$\Sigma{*}\Lambda := \{|\alpha \cup \beta| \ : \ |\alpha| \in \Sigma, |\beta| \in \Lambda\}$$

називається з'єднанням тріангуляцій Σ і Λ. Якщо $\Sigma{*}\Lambda$ є тріангуляцією, тобто

- для кожної пари симплексів $|\alpha| \in \Sigma$ і $|\beta| \in \Lambda$ множина $\alpha \cup \beta$ є ЛНЗ;
- для кожних симплексів $|\alpha|, |\alpha'| \in \Sigma$ і $|\beta|, |\beta'| \in \Lambda$ симплекси $|\alpha \cup \beta|$ і $|\alpha' \cup \beta'|$ – узгоджені;

то $\Sigma{*}\Lambda$ називатиметься регулярним з'єднанням Σ і Λ (англійський термін «join»).

Якщо $\Sigma = \{x\}$ – одна точка, то регулярне з'єднання $x{*}\Lambda$ називається конусом над тріангуляцією Λ. При цьому точку x називають вершиною конуса, а Λ (та її носій $|\Lambda|$) – основою конуса.

Задача 4.20. Навести приклад тріангуляцій для яких з'єднання не є регулярним.

Задача 4.21. Нехай $|\alpha|$ – симплекс і $|\beta|$ і $|\gamma|$ – його протилежні грані. Довести, що стандартна тріангуляція 2^α симплекса α є регулярним з'єднанням $2^\beta{*}2^\gamma$.

Задача 4.22. Нехай Σ і Λ – дві скінченні тріангуляції в $\mathbb{R}^{m+1+n}$, причому $\Sigma \subset \mathbb{R}^m \times 0^{n+1}$, а $\Lambda \subset 0^{m+1} \times \mathbb{R}^n$. Показати, що $\Sigma{*}\Lambda$ є тріангуляцією в $\mathbb{R}^{m+1+n}$.

Задача 4.23. Нехай Σ і Λ – дві скінченні тріангуляції в $\mathbb{R}^m$, такі, що їх з'єднання є регулярним. Довести такі твердженння.

4.23.1. Для довільних точок $x \in |\Sigma|$ і $y \in |\Lambda|$ відрізок $|x, y| \subset |\Sigma{*}\Lambda|$;

4.23.2. Нехай $x, x' \in |\Sigma|$ і $y, y' \in |\Lambda|$ такі точки, що або $x \neq x'$, або $y \neq y'$. Тоді внутрішності відрізків $|x, y|$ і $|x', y'|$ не перетинаються.

4.23.3. $\Sigma{*}\Lambda = \bigcup\limits_{x \in |\Lambda|} x{*}\Lambda = \bigcup\limits_{y \in |\Sigma|} \Sigma{*}y$.

4.23.4. Для довільних точок $x, y \in |\Sigma|$ носії конусів

$$|x{*}\Lambda| \cap |y{*}\Lambda| = |\Lambda|,$$

тобто носії конусів над Λ з вершинами в цих точках перетинаються тільки по основах цих конусів.

Задача 4.24. Нехай Σ – тріангуляція, $|\alpha| \in \Sigma$ – симплекс, $\mathrm{St}_\alpha = \{|\beta| \in \Sigma \mid |\alpha| \subset |\beta|\}$ – сім'я симплексів з Σ які містять $|\alpha|$. Зокрема, St_α є тріангуляцією $\overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\alpha)$, тобто $|\mathrm{St}_\alpha| = \overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\alpha)$. Позначимо через

$$B_\alpha := \{|\beta \setminus \alpha| \ : \ |\alpha| \subset |\beta|\}$$

– сім'ю протилежних до $|\alpha|$ граней симплесків, які містять α. Довести, що St_α є регулярним з'єднанням $B_\alpha{*}\alpha$.

4.J. Симпліціальні та зіркові відображення. В цьому параграфі вважатимемо, що Σ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$, а Λ – триангуляція в $\mathbb{R}^n$.

Відображення $f : \Sigma^{(0)} \to \Lambda^{(0)}$ між множинами їх вершин поліедрів $|\Sigma|$ і $|\Lambda|$ називається сипліціальним, якщо для кожного симплекса $|a_0, \ldots, a_k| \in \Sigma$ носій $|f(a_0), \ldots, f(a_k)|$ множини образів цих точок: є симплексом в Λ.

Неперервне відображення $\widehat{f} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ називається зірковим, якщо для кожної вершини $a \in |\Sigma|$ існує (не обов'язково єдина) вершина $b \in |\Lambda|$ така, що

$$\widehat{f}(\overline{\mathrm{st}}_\Sigma(a)) \subset \overline{\mathrm{st}}_\Lambda(b).$$

Нехай $\widehat{f} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – зіркове відображення. Для кожної вершини $a \in |\Sigma|$ зафіксуємо вершину $b \in |\Lambda|$ таку, що $\widehat{f}(\overline{\mathrm{st}}_\Sigma(a)) \subset \overline{\mathrm{st}}_\Lambda(b)$, і визначимо відображення (між вершинами триангуляцій) $g : K \to L$, $g(a) = b$. Воно називатиметься симпліціальним наближенням $\widehat{f}$.

Задача 4.25. Довести наступні твердження.

4.25.1. Композиція симпліціальних відображень є симпліціальним. Тотожне відображення множини вершин триангуляції – є також симпліціальним. Отже, **триангуляції та симпліціальні відображення їх вершин утворюють категорію, SMP.**

4.25.2. Композиція зіркових відображень є зірковим. Тотожне відображення множини вершин триангуляції – є також зірковим. Отже, **триангуляції та їх зіркові відображення утворюють категорію $STAR$.**

4.25.3. Нехай $\widehat{f} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ і $\widehat{f}' : |\Lambda| \to |\Theta|$ – зіркові відображення і $g : \Sigma \to \Lambda$ і $g' : \Lambda \to \Theta$ – їх довільні симпліціальні апроксимації. Показати, що композиція симпліціальних апроксимацій $g' \circ g : \Sigma \to \Theta$ є симпліціальною апроксимацією $\widehat{f}' \circ \widehat{f}$.

Задача 4.26. Нехай $g : \Sigma^{(0)} \to \Lambda^{(0)}$ – симпліціальне відображення. Визначимо відображення $\widehat{g} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ за такою формулою: якщо $x \in |\Sigma|$ належить симплексу $|a_0, \ldots, a_k| \in \Sigma$, і $x = \sum_{t=0}^{k} t_i a_i$, для єдиних $t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$, то $\widehat{g}(x) = \sum_{t=0}^{k} t_i g(a_i)$. Називатимемо $\widehat{g}$ лінійним продовженням симпліціального відображення g. Довести такі твердження.

4.26.1. $\widehat{g}$ коректно визначене (тобто його образ міститься в $|\Lambda|$) і є неперервним.

4.26.2. $\widehat{g}$ є зірковим відображенням.

4.26.3. Відповідність $\mathcal{L} : g \mapsto \widehat{g}$ є функтором з категорії SMP симпліціальних відображень в категорію $STAR$ зіркових відображень.

Задача 4.27. Нехай $\widehat{f} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – зіркове відображення і $g : \Sigma^{(0)} \to \Lambda^{(0)}$ деяке його симпліціальне наближення. Довести такі твердження.

4.27.1. g є симпліціальним відображенням $g : \Sigma^{(0)} \to \Lambda^{(0)}$.

4.27.2. Нехай $\widehat{g} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – відповідне лінійне продовження g. Показати, що для довільного симплекса $|\alpha| = |a_0, \ldots, a_k| \in \Sigma$ мають місце включення:

$$\widehat{f}(\alpha) \subset \widehat{f}(\overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\alpha)) = \widehat{f}\left(\bigcap_{i=0}^{k} \overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\alpha)\right) \subset \bigcap_{i=0}^{k} \overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\widehat{g}(a_i)) = \overline{\mathrm{st}}_\Sigma(\widehat{g}(\alpha)) = B_{\widehat{g}(\alpha)} * \widehat{g}(\alpha) = \bigcup_{y \in |B_{\widehat{g}(\alpha)}|} y * \widehat{g}(\alpha),$$

де $B_{\widehat{g}(\alpha)}$ – сім'я протилежних до $\widehat{g}(|\alpha|)$ граней симплесків, які містять $|\alpha|$. (Див. задачі 4.17, 4.24, 4.23.3.)

4.27.3. Нехай $|\alpha| \in \Sigma$ – симплекс і $x \in |\alpha|$ – точка. Показати, що існує така точка $y \in |B_{\widehat{g}(\alpha)}|$, що $\widehat{f}(x) \in y * \widehat{g}(\alpha)$, а $\widehat{g}(x)$ належить основі $\widehat{g}(|\alpha|)$. Зокрема, відрізок $|\widehat{f}(x), \widehat{g}(x)|$ лежить в Λ.

4.27.4. Нехай

$$\widehat{H} : |\Sigma| \times [0;1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{H}(x,t) = t\widehat{f}(x) + (1-t)\widehat{g}(x),$$

– опукла гомотопія між $\widehat{f}$ і $\widehat{g}$. Показати, що образ $\widehat{H}$ міститься в $|\Lambda|$, тобто $\widehat{H}$ – це гомотопія між $\widehat{f}$ і лінійним продовженням $\widehat{g}$ його симпліціального наближення g.

4.27.5. Нехай $g_0, g_1 : K \to L$ – довільні симпліціальні наближення $\widehat{f}$, а $\widehat{g}_0, \widehat{g}_1 : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – їх лінійні продовження. Розглянемо опуклу гомотопію

$$\widehat{H} : |\Sigma| \times [0;1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{H}(x,t) = t\widehat{g}_0(x) + (1-t)\widehat{g}_1(x),$$

між $\widehat{g}_0$ і $\widehat{g}_1$. Довести, що образ $\widehat{H}$ міститься в $|\Lambda|$, тобто $\widehat{g}_0$ і $\widehat{g}_1$ опукло гомотопні.

Таким чином, **якщо $\widehat{f}$ – зіркове відображення, а $\widehat{g}_0$ і $\widehat{g}_1$ – лінійні продовження будь-яких його симпліціальних наближень $\widehat{f}$, то всі три відображення $\widehat{f}$, $\widehat{g}_0$ і $\widehat{g}_1$ попарно опукло гомотопні**.

Задача 4.28. Нехай Σ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$, $b\Sigma$ – її барицентричне підрозбиття, що відповідає деякому відображенню $\xi : \Sigma \to |\Sigma|$ вибору внутрішньої точки. Для симплекса $|\beta| \in \Sigma$ позначимо $x_\beta := \xi(\beta)$.

4.28.1. Показати, що замкнена зірка $\overline{\mathrm{st}}_{b\Sigma}(x_\beta)$ в $b\Sigma$ складається з симплексів виду

$$\{x_{\alpha_0}, \dots, x_\beta, \dots, x_{\alpha_k}\},$$

які містять x_β, де $\alpha_0 \supset \dots \supset \beta \supset \dots \supset \alpha_k$ – довільний прапор граней Σ, що проходить через β.

4.28.2. Довести, що $\mathrm{st}_{b\Sigma}(x_\beta) \subset \mathrm{st}_{\Sigma}(a)$ тоді тільки тоді, коли $a \in \beta$.

4.28.3. Показати, що тотожне відображення $\mathrm{id} : |b\Sigma| \to |\Sigma|$ є зірковим.

Нехай $\xi(\Sigma) = \{x_\beta \mid \beta \in \Sigma\}$ – множина вершин барицентричного підрозбиття $b(\Sigma, \xi)$ триангуляції Σ. Відображення $\phi : \xi(\Sigma) \to \Sigma^{(0)}$ між множинами вершин $b(\Sigma, \xi)$ і Σ називатимемо відображенням вибору вершини, якщо $\phi(x_\beta)$ є вершиною β для всіх симплексів $\beta \in \Sigma$.

Задача 4.29. Нехай $\phi : \xi(\Sigma) \to \Sigma^{(0)}$ довільне відображення вибору вершини. Довести такі твердження.

4.29.1. ϕ – симпліціальне.

4.29.2. Довести, що симпліціальні наближення тотожного відображення $\mathrm{id} : |b(\Sigma, \xi)| \to |\Sigma|$ це теж саме, що відображення вибору вершини.

4.29.3. Лінійне продовження $\widehat{\phi} : |b(\Sigma, \xi)| \to |\Sigma|$ є зірковим. Лінійні продовження будь-яких двох відображень вибору опукло гомотопні, див. задачу 4.27.

Задача 4.30. Нехай $\widehat{f} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – неперервне відображення. Показати, існує таке u-кратне (для деякого $u \geq 1$) барицентричне підрозбиття Σ_u триангуляції Σ, що відображення $\widehat{f} : |\Sigma_u| = |\Sigma| \to |\Lambda|$ є зірковим. Зокрема, $\widehat{f}$ гомотопне неперервному продовженню $\widehat{g}$ його симпліціального наближення $g : (|\Sigma_u|)^{(0)} \to \Lambda^{(0)}$.
Підказка. Розгляньте кратні канонічні барицентричні підрозбиття Σ і використайте оцінки з задачі 4.13.

5. Групи симпліціальних гомологій

5.A. Симпліціальний комплекс. Наша наступна мета – виділити «комбінаторну» інформацію, яка задає поліедр і дослідити її алгебраїчні властивості. Зокрема, визначити групи гомологій відповідних комбінаторних структур.

Симпліціальний комплекс – це пара (K, Σ), де K – довільна множина, а Σ – сім'я скінченних підмножин в K, з такими властивостями:

- $K = \bigcup\limits_{\alpha \in \Sigma} \alpha$,
- Σ замкнена відносно взяття підмножин, тобто якщо $\alpha \in \Sigma$ і $\beta \subset \alpha$, то $\beta \in \Sigma$.

Сім'ю Σ називають симпліціальною структурою на K. Елементи Σ називають симплексами. Число елементів в $\alpha \in \Sigma$ позначатимемо через $\#(\alpha)$. Розмірністю симплекса $\alpha \in \Sigma$ називають число $\dim(\alpha) = \#(\alpha) - 1$, а розмірністю K – число

$$\dim(K) := \sup_{\alpha \in \Sigma} \dim(\alpha).$$

Симплекси розмірності m також називають m-симплексами. Таким чином, m-симплекс складається з $m+1$ елемента.

Зауважимо, що множина Σ частково впорядкована за включенням $\subset$.

Наступна задача встановлює зв'язок між триангуляціями і симпліціальними комплексами. Зокрема, всі конструкції над триангуляціями будуть нижче перенесені на симпліціальні комплекси.

Задача 5.1. Нехай $\Sigma = \{|\alpha_i|\}_{i\in J}$ – повна триангуляція в $\mathbb{R}^m$, $\langle\Sigma\rangle = \{\alpha_i\}_{i\in J}$ – її система твірних, і $\Sigma^{(0)}$ – множина її вершин. Показати, що пара $(\Sigma^{(0)}, \langle\Sigma\rangle)$ є симпліціальним комплексом.

Задача 5.2. Нехай K – довільна множина і Σ – довільна сім'я скінченних підмножин K така, що $K = \bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} \alpha$. Нехай також $\bar\Sigma = \{\beta \mid \beta \in 2^\alpha, \alpha\in\Sigma\}$ – сукупність всіх підмножин всіх елементів з Σ. Показати, що $(K, \bar\Sigma)$ – симпліціальний комплекс, (порівняйте з задачею 4.8.3).

Задача 5.2 дозволяє задавати симпліціальні комплекси меншим числом симплексів.

Більш загально, нехай K – множина і Σ – довільна сім'я скінченних підмножин K така, що $K = \bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} \alpha$. Тоді пару (K,Σ) будемо також називати симпліціальним комплексом, ототожнюючи її з $(K,\bar\Sigma)$, де $\bar\Sigma = \{\beta \mid \beta\in 2^\alpha, \alpha\in\Sigma\}$. При цьому зручно також говорити, що симпліціальний комплекс (K,Σ) (або просто K) є об'єднанням симплексів з Σ.

Для кожного $i = 0,1,2,\dots$ позначимо через $\Sigma^{(i)} = \{\alpha\in\Sigma \mid \dim\alpha = i\}$ підсім'ю в Σ, що складається з симплексів розмірності i.

Задача 5.3. Показати, що $\dim(\varnothing) = -1$, і якщо $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$, то $\dim(\alpha) = n$.

Задача 5.4. Показати, що якщо $\dim\Sigma < \infty$, то кожен симплекс лежить в деякому максимальному елементі частково впорядкованої множини $(\Sigma, \subset)$. Зокрема, (K,Σ) однозначно визначається лише максимальними елементами $(\Sigma,\subset)$.

Нехай $L\subset K$ – підмножина, і Λ – симпліціальна структура на L. Тоді (L,Λ) називається (симпліціальним) підкомплексом в K, якщо $\Lambda\subset\Sigma$, тобто Λ – це підсім'я в Σ також замкнена відносно взяття підмножин.

Задача 5.5. Показати, що для кожного $m\geq 0$ пара $K^{(m)} := (K, \bigcup\limits_{i=0}^{m} \Sigma^{(i)})$ є підкомплексом в K. Він називається m-тим скелетом (K,Σ).

Задача 5.6. Показати, що існує природна бієкція між K і $\Sigma^{(0)}$.

Нехай (K,Σ), (L,Λ) – симпліціальні підкомплекси. Відображення $f : K\to L$ називається симпліціальним, якщо $f(\alpha)\in\Lambda$ для кожного $\alpha\in K$.

Згідно задачі 5.6 симпліціальні відображення можна також розглядати як відображення $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ між множинами вершин.

Задача 5.7. Нехай $K\subset L$ – підмножина, і Σ – деяка симпліціальна структура на K. Довести, що наступні умови еквівалентні:

(1) (K,Σ) підмкомплекс в (L,Λ);
(2) відображення вкладення $j : K\subset L$ є симпліціальним.

5.B. Ланцюговий комплекс симпліціального комплекса.

Нехай (K,Σ) – симпліціальний комплекс і G – комутативна група. Для кожного $m\in\mathbb{Z}$ позначимо через

$$C_m(K,G) := G[\Sigma^{(m)}]$$

вільний модуль породжений симплексами розмірності m. Він називається групою m-вимірних ланцюгів (або m-ланцюгів) симпліціального комплекса K з коефіцієнтами в G.

Таким чином, $C_m(K,G)$ складається із скінченних формальних лінійних комбінацій симплексів розмірності m з коефіцієнтами в групі G. Зауважимо, що $C_m(K,G) = 0$ для $m<0$ і $m>\dim(K)$, але буде зручно вважати, що ці нульові модулі також є визначеними.

Нехай $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \Sigma$ – симплекс розмірності m. Скінченна послідовність $\beta = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ точок з α така, що $m \le k$ і всі точки з α присутні в β називатиметься (допустимим) записом α. Зрозуміло, що якщо $m < k$, то в β деякі символи повторюються. В подальшому, буде необхідно задавати симплекси їх допустимими записами.

Частковий порядок $<$ на K назвемо узгодженим (з симпліціальною структурою Σ), якщо для кожного симплекса $\alpha \in \Sigma$ його вершини попарно порівнювані відносно $<$. Зокрема, вершини α можна лінійно впорядкувати і тоді α матиме єдиний допустимий запис $(x_0, x_1, \dots, x_m)$, у якому точки лінійно впорядковані, тобто

$$x_0 < x_1 < \dots < x_m.$$

Такий запис α називатимемо *канонічним*.

Задача 5.8. Нехай $f : (K, \Sigma) \to (L, \Lambda)$ – симпліціальне відображення між симпліціальними комплексами. Припустимо, що на L зафіксовано частковий порядок $<$ узгоджений з симпліціальною структурою Λ. Тоді існує частковий порядок на K узгоджений з симпліціальною структурою Σ, такий, що f є монотонним, тобто якщо $x \le y$, то $f(x) \le f(y)$.

Підказка. Для кожної вершини $y \in L$ її прообраз $f^{-1}(y)$ є диз'юнктним об'єднанням деяких симплексів. На кожному з цих симплексів зафіксуйте довільний лінійний порядок, що дає деякий частковий порядок на множині пар вершин $(x, y) \in K^2$, таких, що $f(x) = f(y)$. Якщо ж $(x, y) \in K^2$ така пара, що $f(x) < f(y)$, тобто $f(x) \ne f(y)$ і ці точки порівнювані, то покладемо $x < y$. Залишається перевірити, що $<$ є узгодженим з симпліціальною структурою Σ.

Зафіксуємо на K узгоджений частковий порядок $<$ і нехай $\alpha \in \Sigma$ – m-симплекс і $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ – канонічний запис α. За означенням, α є (базисним) елементом $C_m(K, G)$, і тому його канонічний запис можна вважати іншим позначенням для α, як елемента $C_m(K, G)$.

Якщо $\beta = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ – інший допустимий запис α, то вважатимемо, що це також елемент $C_m(K, G)$, який дорівнює $\beta := \mathrm{sgn}(\beta)\alpha$, де $\mathrm{sgn}(\beta) \in \{-1, 0, 1\}$ визначене наступним чином.

- Якщо $m < k$, то вважатимемо, що $\mathrm{sgn}(\beta) := 0$.
- Якщо ж $m = k$, то β є перестановкою елементів з α і тоді $\mathrm{sgn}(\beta) := \pm 1$ – це знак цієї перестановки (тобто парність числа транспозицій сусідніх елементів, які породжують дану перестановку).

Задача 5.9. Нехай (K, Σ) – симпліціальний комплекс. Перевірити наступні властивості.

5.9.1. Нехай (a, b, c) – 2-симплекс в K, а отже елемент в $C_2(K, G)$. Тоді в $C_2(K, G)$ мають місце такі тотожності: $(a, b, c) = -(b, a, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$ і $(a, b, b, c) = 0$.

5.9.2. Нехай (a, b) – 1-симплекс в K, а отже елемент в $C_1(K, G)$. Тоді в $C_1(K, G)$ мають місце такі тотожності: $(a, b) = -(b, a)$, $(a, a, b) = 0$, $(a, b, a, b, b) = 0$.

5.9.3. Нехай (a, b, c) – 2-симплекс в K, а отже елемент в $C_2(K, G)$. Тоді в $C_2(K, G)$ мають місце такі тотожності: $(a, b, c) = -(b, a, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$ і $(a, b, b, c) = 0$.

5.9.4. Нехай $\beta = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ – допустимий запис деякого симплекса і

$$\gamma = (x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$$

– деяка підпослідовність з β (тобто деякі символи з β записані в тому ж порядку, що і в β). Довести, що γ є допустимим записом деякого симплекса в K.

Нехай $\beta = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ – допустимий запис деякого симплекса і $i \in \{0, \dots, k\}$. Тоді через

$$(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots x_k)$$

буде зручно позначати послідовність β в якій x_i видалено, тобто

$$(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots x_k) := (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_k) = \beta \setminus \{x_i\}.$$

5.C. Граничні гомоморфізми. Для допустимого запису $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in C_m(K, G)$ деякого симплекса α з $m \geq 1$, визначимо елемент $\partial\alpha \in C_{m-1}(K, G)$ за такою формулою

$$\partial(x_0, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (x_0, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k).$$

Він називається границею симплекса α. Зокрема, якщо $\dim(\alpha) = 0$, тобто $\alpha = (x_0)$, то вважатимемо, що $\partial\alpha = 0 \in C_{-1}(K, G) = 0$.

Задача 5.10. Довести наступні твердження.

5.10.1. $\partial(a, b) = b - a$.

5.10.2. $\partial(a, b, c) = (b, c) - (a, c) + (a, b) = (a, b) + (b, c) + (c, a)$

5.10.3. Нехай $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ – симплекс, заданий канонічним записом і

$$\beta = (x_1, x_0, x_2, \dots, x_m)$$

– його допустимий запис, отриманий транспозицією x_0 та x_1. Зокрема, $\beta = -\alpha$. Показати, що

$$\partial\alpha = -\partial\beta.$$

5.10.4. Довести, що для довільного симплекса $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_m)$, заданого канонічним записом і довільного допустимого запису $\beta = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, $(m \leq k)$, цього симплекса маємо, що

$$\partial\beta = \operatorname{sgn}(\beta)\partial\alpha.$$

Зокрема, $\partial\beta = 0$, якщо деякі вершини в β повторюються, наприклад, це завжди так, коли $m < k$.

5.10.5. Показати, що для кожного $m \in \mathbb{Z}$ операція ∂ продовжується єдиним чином до G-лінійного відображення $\partial_m : C_m(K, G) \to C_{m-1}(K, G)$ за такою формулою:

$$\partial_m\Big(\sum_j g_j \alpha_j\Big) := \sum_j g_j \partial\alpha_j.$$

Зокрема, що це відображення не залежить від допустимого запису симплексів α_j.

5.10.6. Перевірити, що

$$\partial\partial(a, b) = 0, \qquad \partial\partial(a, b, c) = 0, \qquad \partial\partial(a, b, c, d) = 0.$$

5.10.7. Довести, що для довільного m-симплекса α, $\partial\partial\alpha = 0$;

5.10.8. Показати, що $\partial_m \circ \partial_{m+1} : C_{m+1}(K, G) \to C_{m-1}(K, G)$ – це нульовий гомоморфізм.

5.10.9. Довести, що умова $\partial_m \circ \partial_{m+1} = 0$ еквівалентна тому, що $\operatorname{img}(\partial_{m+1}) \subset \ker(\partial_m)$.

Введемо до розгляду такі підгрупи в $C_m(K, G)$:

- $B_m(K, G) = \operatorname{img}(\partial_{m+1})$, вона називається групою границь;
- $Z_m(K, G) = \ker(\partial_m)$, вона називається групою циклів.

За задачею 5.10.9 умова $\partial_{m+1} \circ \partial_m$ означає, що $B_m(K, G) \subset Z_m(K, G)$.
Фактор група

$$H_m(K, G) := Z_m(K, G)/B_m(K, G)$$

групи циклів по групі границь називається групою m-х гомологій K з коефіцієнтами в G.

Задача 5.11. Виписати ланцюгові комплекси і обчислити групи гомологій таких симпліціальних комплексів.

5.11.1. Нехай Δ^m - симплекс розмірності m, $m = 0, 1, 2, 3$. Показати прямими обчисленнями, що

$$H_i(\Delta^m, G) = \begin{cases} G, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

5.11.2. Нехай K – скінченна множина, тобто скінченний 0-вимірний комплекс, який складається з n точок. Показати прямими обчисленнями, що

$$H_i(K,G) = \begin{cases} G^n, & i=0, \\ 0, & i\neq 0. \end{cases}$$

5.11.3. Нехай $T=\partial\Delta^2$ – межа 2-симплекса (трикутник без внутрішності – «геометрична реалізація» кола). Показати, що

$$H_i(T,G) = \begin{cases} G, & i=0, \\ G, & i=1, \\ 0, & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

5.11.4. Більш загально, нехай (K,Σ) – n-кутник без внутрішності, тобто ще одна «геометрична реалізація» кола. Тобто $K=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ складається з n точок, а Σ є об'єднаннями симплексів

$$(a_1a_2),\ (a_2a_3),\ \ldots,\ (a_{n-1},a_n),\ (a_n,a_1).$$

Показати, що

$$H_i(T,G) = \begin{cases} G, & i=0, \\ G, & i=1, \\ 0, & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

5.11.5. Нехай $T=\partial\Delta^3$ – межа 3-симплекса (трикутна піраміда без внутрішності – «геометрична реалізація» 2-сфери). Показати, що

$$H_i(T,G) = \begin{cases} G, & i=0, \\ 0, & i=1, \\ G, & i=2, \\ 0, & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

5.D. З'єднання симпліціальних комплексів. Нехай (K,Σ) і (L,Λ) – симпліціальні комплекси, такі, що множини їх вершин не перетинаються. З'єднанням K та L називається наступний симпліціальний комплекс:

$$K{*}L = \bigl\{K\sqcup L, \{\alpha\sqcup\beta \mid \alpha\in\Sigma, \beta\in\Lambda\}\bigr\},$$

тобто

- вершини $K{*}L$ – це диз'юнктне об'єднання $K\sqcup L$ вершин K та L;
- симплекси $K{*}L$ – це попарні об'єднання симплексів $\alpha\sqcup\beta$, де $\alpha\in\Sigma$, $\beta\in\Lambda$.

Зокрема, якщо $\{c\}$ – точка, то з'єднання $c{*}K$ називається конусом над K. При цьому $\{c\}$ називають вершиною, а K – основою конуса $c{*}K$.

Задача 5.12. Нехай (K,Σ) та (L,Λ) – симпліціальні комплекси. Тоді для довільних симплексів $\alpha\in C_k(\Sigma)$ і $\beta\in C_l(\Lambda)$ коректно визначений симплекс $\alpha{*}\beta\in C_{k+l}(K{*}L)$.

5.12.1. Показати, що для всіх $k,l\in\mathbb{Z}$ існує коректно визначене білінійне відображення

$$*: C_k(K)\times C_l(L)\to C_{k+l}(K*L), \qquad *\Bigl(\sum_i g_i\alpha_i, \sum_j h_j\beta\Bigr) = \sum_{i,j} g_ih_j\,\alpha_i{*}\beta_j.$$

5.12.2. Довести, що для довільних ланцюгів $\alpha\in C_k(K)$ і $\beta\in C_l(L)$ виконується тотожність

$$\partial(\alpha*\beta) = (\partial\alpha)*\beta - (-1)^{\dim\alpha}\alpha*\partial\beta.$$

Задача 5.13. Нехай (K,Σ) – симпліціальний комплекс з фіксованим лінійним порядком на множині вершин, $\{c\}$ – точка, і $c{*}K$ – конус над K.

5.13.1. Показати, що для кожного $i\in\mathbb{Z}$ коректно визначене наступне G-лінійне відображення

$$\sigma_i: C_i(K)\to C_{i+1}(c{*}K), \qquad \sigma\Bigl(\sum_j g_j\alpha_j\Bigr) = \sum_j g_j\, c{*}\alpha_j.$$

5.13.2. Довести, що $\partial_{i+1}(\sigma_i(\alpha)) = \alpha - \sigma_{i+1}(\partial_i \alpha)$ для всіх $\alpha \in C_i(K)$.

5.13.3. Показати, що симпліціальне відображення вкладення $\gamma : K \to c{*}K$, $\gamma(a_i) = a_i$, індукує нульові гомоморфізми груп гомологій $\gamma_i : H_i(K) \to H_i(c{*}K)$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$.

5.E. Циліндр над симплексом. Нехай $A = [a_0, a_1]$ і $B = [b_0, b_1]$ – два відрізки. Тоді прямокутник $A \times B$ не має якоїсь «канонічної» триангуляції. Але провівши діагональ, наприклад, $(a_0, b1)$, ми отримаємо триангуляцію $A \times B$, яка складається з двох 2-симплексів (a_0, b_0, b_1) і (a_0, a_1, b_1).

Більш загально, нехай $\alpha = (a_0, \dots, a_k)$ – k-симплекс з фіксованим лінійним порядком вершин. Циліндром над α називається симпліціальний комплекс $\alpha \times I$, визначений наступним чином. Вершини $\alpha \times I$ – це декартовий добуток множин $(a_0, \dots, a_k) \times \{0, 1\}$. Множини $\alpha \times 0$ та $\alpha \times 1$ називаються, відповідно, *нижньою* та *верхньою* гранями $\alpha \times I$. Зручно також позначати $(a_i, 0) = a_i^0$, $(a_i, 1) = a_i^1$. Тоді $\alpha \times I$ є об'єднанням таких $(k+1)$-симплексів:

$$
\begin{aligned}
&\bigl(a_0^0,\ a_0^1,\ a_1^1,\ \dots,\ a_k^1\bigr),\\
&\bigl(a_0^0,\ a_1^0,\ a_1^1,\ a_2^1,\ \dots,\ a_k^1\bigr),\\
&\dots\\
&\bigl(a_0^0,\ a_1^0,\ \dots,\ a_i^0,\ a_i^1,\ a_{i+1}^1,\ \dots,\ a_k^1\bigr),\\
&\dots\\
&\bigl(a_0^0,\ a_1^0,\ \dots\ a_k^0,\ a_k^1\bigr).
\end{aligned}
$$

Якщо для кожної пари i, j такої, що $0 \le i \le j \le k$ ввести позначення

$$A_{i,j}^l = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_j) \times l = \bigl(a_i^l, a_{i+1}^l, \dots, a_j^l\bigr), \quad l = 0, 1.$$

то ці симплекси можна записати ще й у вигляді з'єднань:

$$A_{0,0}^0 {*} A_{0,k}^1,\ A_{0,1}^0 {*} A_{1,k}^1,\ \dots,\ A_{0,i}^0 {*} A_{i,k}^1,\ \dots,\ A_{0,k}^0 {*} A_{k,k}^1.$$

Таким чином, циліндр $\alpha \times I$ над симплексом α – це пара $(\alpha \times \{0, 1\}, \Sigma)$, де Σ – складається з підмножин множин виду $A_{0,i}^0 {*} A_{i,k}^1$, $i = 0, \dots, k$.

Задача 5.14. Довести такі твердження.

5.14.1. Показати, що відображення

$$\xi_0, \xi_1 : \alpha \to \alpha \times \{0, 1\}, \qquad \xi_0(a_i) = (a_i, 0), \qquad \xi_1(a_i) = (a_i, 1),$$

є симпліціальними вкладеннями. Образи $\xi_0(\alpha)$ та $\xi_1(\alpha)$ називатимуться відповідно нижньою та верхньою гранями $\alpha \times I$.

5.14.2. Нехай $\delta = (a_{i_0}, \dots, a_{i_l})$ – довільна грань α подана в канонічному записі, тобто $i_0 < i_1 < \dots < i_l$. Показати, що тотожне вкладення $\gamma : \delta \times \{0, 1\} \to \alpha \times \{0, 1\}$, $\gamma(a_i, j) = (a_i, j)$, є симпліціальним вкладенням.

Задача 5.15. Визначимо наступний елемент $q(\alpha) \in C_{k+1}(\alpha \times I)$:

$$
\begin{aligned}
q(\alpha) &:= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i A_{0,i}^0 {*} A_{i,k}^1 = \\
&= A_{0,0}^0 {*} A_{0,k}^1 - A_{0,1}^0 {*} A_{1,k}^1 + \dots + (-1)^i A_{0,i}^0 {*} A_{i,k}^1 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Тоді для кожної грані $\delta \in C_l(\alpha)$, поданої в канонічному записі, можна аналогічним чином визначити елемент $q(\delta) \in C_{l+1}(\delta \times I)$.

5.15.1. Нехай a_i – вершина α. Показати, що

$$q(a_i) = \bigl(a_i^0, a_i^1\bigr) = A_{i,i}^0 {*} A_{i,i}^1.$$

5.15.2. Нехай (a_i, a_j) – ребро α, $i < j$. Показати, що
$$q(a_i, a_j) = (a_i^0, a_i^1, a_j^1) - (a_i^0, a_j^0, a_j^1).$$

5.15.3. Нехай (a_r, a_s, a_t) – 2-грань α, $r < s < p$. Показати, що
$$q(a_r, a_s, a_t) = (a_r^0, a_r^1, a_s^1, a_t^1) - (a_r^0, a_s^0, a_s^1, a_t^1) + (a_r^0, a_s^0, a_t^0, a_t^1).$$

5.15.4. Показати, що відповідність $\delta \mapsto q(\delta)$ продовжується до єдиного лінійного відображення
$$q_l : C_l(\alpha) \to C_{l+1}(\alpha \times I), \qquad q_l\Big(\sum_j g_j \delta_j\Big) = \sum_j g_j q(\delta_j).$$

5.15.5. Перевірити, що $\partial_1 q_0(a_i) = b_1 - a_1$.

5.15.6. Обчислити $\partial_2 q_1(a_i, a_j)$ і показати, що
$$\partial_2 q_1(a_i, a_j) = (b_i, b_j) - (a_i, a_j) - \big((a_j, b_j) - (a_i, b_i)\big) = (b_i, b_j) - (a_i, a_j) - q_0\partial_1(a_i, a_j).$$

5.15.7. Довести, що для довільного симплекса $\delta \in C_l(\Delta^k)$
$$\partial q_l(\delta) = \xi_1(\delta) - \xi_0(\delta) - q_{l-1}(\partial\delta).$$

5.15.8. Показати, що для всіх $\delta \in C_l(\Delta^k)$ виконується тотожність:
$$\xi_1(\delta) - \xi_0(\delta) = \partial q_l(\delta) + q_{l-1}(\partial\delta).$$

5.F. Циліндр над симпліціальним комплексом. Нехай (K, Σ) – симпліціальний комплекс з фіксованим узгодженим порядком на множині вершин. Циліндром над K називається наступний симпліціальний комплекс
$$K \times I = \Big(K \times \{0,1\}, \{\delta \times I \mid \delta \in \Sigma\}\Big)$$
тобто його вершини – це декартовий добуток $K \times \{0,1\}$ (дві диз'юнктні копії K), а сам $K \times I$ є об'єднанням циліндрів над симплексами K.

Задача 5.16. Довести, що $K \times I$ дійсно є симпліціальним комплексом.

Як і вище, для вершини $a \in K$ зручно позначати $(a, 0) = a^0$ і $(a, 1) = a^1$.

Визначимо відображення $\xi_0, \xi_1 : K \to K \times \{0,1\}$ за формулами: $\xi_0(a) = (a, 0)$, $\xi_1(a) = (a, 1)$ для всіх вершин $a \in K$. Ці відображення називатимуться відображеннями нижньої та верхньої основи відповідно.

Якщо (L, Λ) – ще один симпліціальний комплекс, то кожне симпліціальне відображення $H : K \times \{0,1\} \to L$ називається комбінаторною гомотопією.

Задача 5.17. Нехай (K, Σ), (L, Λ) – симпліціальні комплекси з узгодженими частковими порядками на відповідних множинах вершин. Довести наступні твердження.

5.17.1. Нехай $f : K \to L$ – неспадне симпліціальне відображення, тобто для довільних вершин $a \le b \in K$ маємо, що $f(a) \le f(b) \in L$. Показати, що f індукує симпліціальне відображення $f \times I : K \times \{0,1\} \to L \times \{0,1\}$. Довести, що якщо f – вкладення (або сюр'єктивне), то $f \times I$ також вкладення (сюр'єктивне). Зокрема, якщо K – підкомплекс в L, то $K \times I$ є підкомплесом в $L \times I$.

5.17.2. Показати, що для кожного симплекса $\alpha \in K$, його циліндр $\alpha \times I$ є підкомплексом в $K \times I$.

5.17.3. Показати, що відображення верхньої та нижньої основ $\xi_0, \xi_1 : K \to K \times \{0,1\}$ є ін'єктивними симпліціальними відображеннями. Їх образи (підкомплекси в $K \times I$) називають нижньою та верхньою основами циліндра $K \times I$.

5.17.4. Для кожного k-симплекса $\alpha \in K$, в задачі 5.15 визначено елемент $q(\alpha) \in C_{k+1}(K)$. Довести, що відповідність $\alpha \mapsto q(\alpha)$ продовжується до G-лінійного відображення $q_k : C_k(K) \to C_{k+1}(K \times I)$.

5.17.5. Показати, що відображення $q_k : C_k(K) \to C_{k+1}(K \times I)$ задовольняє таку тотожність:
$$\xi_1(\delta) - \xi_0(\delta) = q_{k-1}(\partial_k \delta) + \partial_{k+1}(q_k(\delta)) \tag{5.1}$$
для всіх $\delta \in C_k(K)$.

5.17.6. Вивести з попередньої задачі, що індуковані гомоморфізми $(\xi_0)_i, (\xi_1)_i : H_i(K) \to H_i(K \times I)$ відповідних груп гомологій тотожні: $(\xi_0)_i = (\xi_1)_i$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$. **Підказка.** Переконайтесь, що якщо в (5.1) елемент δ є циклом, то права частина цієї тотожності є границею, тобто елементи зліва належать одному класам гомологій.

5.17.7. Інваріантність гомоморфізмів груп гомологій відносно «комбінаторних гомотопій». Нехай $f : K \times \{0,1\} \to L$ – комбінаторна гомотопія. Показати, що індуковані гомоморфізми груп гомологій

$$(f \circ \xi_0)_*, (f \circ \xi_1)_* : H_*(K) \to H_*(L)$$

тотожні: $(f \circ \xi_0)_* = (f \circ \xi_1)_*$.

5.G. Добуток симпліціальних комплексів. Нехай (K, Σ) та (L, Λ) – симпліціальні комплекси. Зафіксуємо також лінійні порядки на їх вершинах. Тоді їх добутком $K \times L$ називається симпліціальний комплекс, множиною вершин якого є декартовий добуток $K \times L$ вершин K та L, а симплекси визначаються наступним чином.

Нехай $\alpha = (a_0, \dots, a_k) \in \Sigma$ та $\beta = (b_0, \dots, b_l) \in \Lambda$ – канонічні записи деяких симплексів з K та L. Для кожної неспадної підмножини індексів $\eta = \{0 \le i_0 \le i_1 \le \dots \le i_l \le k\}$ визначимо наступну підмножину $K \times L$:

$$\alpha *_\eta \beta := \left\{ \begin{array}{l} (a_0, b_0),\ (a_1, b_0),\ \dots,\ (a_{i_0}, b_0), \\ (a_{i_0}, b_1),\ (a_{i_0+1}, b_1),\ \dots,\ (a_{i_1}, b_1), \\ (a_{i_1}, b_2),\ (a_{i_1+1}, b_2),\ \dots,\ (a_{i_2}, b_2), \\ \dots \\ (a_{i_l}, b_l),\ (a_{i_l+1}, b_l),\ \dots,\ (a_k, b_l) \end{array} \right\}$$

Використовуючи попередні позначення $A_{i,j} = (a_i, \dots, a_j)$ можемо записати ці симлекси наступним чином:

$$\alpha *_\eta \beta := \left\{ A^{b_0}_{0,i_0} * A^{b_1}_{i_0,i_1} * \dots * A^{b_{l-1}}_{i_{l-1},i_l} * A^{b_l}_{i_l,k} \right\}$$

Зауважимо, що η можна розглядати як функцію $\eta : \{1, \dots, l\} \to \{1, \dots, k\}$, $\eta(j) = i_j$. Позначатимемо множину таких функцій через $(k)^{(l)}$. Нехай

$$\Theta = \{\gamma \subset \alpha *_\eta \beta \mid \alpha \in \Sigma, \beta \in \Lambda, \eta \in (\dim \alpha)^{(\dim \beta)}\}.$$

сукупність всіх підмножин множин виду $\alpha *_\eta \beta$.

Тоді сипліціальний комплекс $(K \times L, \Theta)$ називається добутком K та L.

5.H. Барицентричне підрозбиття симпліціального комплексу. Нехай (K, Σ) – симпліціальний комплекс. Наша мета побудувати по ньому новий симпліціальний комплекс $(bK, b\Sigma)$, який називається *барицентричним підрозбиттям* (K, Σ).

Геометрично, він будується наступним чином. Почнемо з $K^{(0)} = K$. Далі, у внутрішності кожного 1-симплекса (ребра) α вибираємо точку, назвемо її «центром» α. Вона розбиває α на два симплекси і ми «замінюємо» α на ці два симплекси. Фактично ми замінили α на конус над його межею. Аналогічно, у внутрішності кожного 2-симплекса (трикутника) α також вибираємо точку (назвемо її «центром» грані α) і заміняємо α на конус над його межею, яка вже розбита на попередньому кроці. І так далі по індукції. Отриманий симпліціальний комплекс називають *барицентричним підрозбиттям* (K, Σ) і позначатиметься через $(bK, b\Sigma)$.

За побудовою, маємо бієкцію між симплексами в K і вершинами bK (центрами відповідних граней). Більш того, неважко бачити, що кожен симплекс в $b\Sigma$ – це множина центрів граней з K, причому ці грані впорядковані за включенням. Тому bK можна ототожнити з Σ, а $b\Sigma$ – із скінченними спадаючими послідовностями симплексів з Σ.

Дамо строге означення.

Барицентричним підрозбиттям симпліціального комплексу (K,Σ) називається пара $(bK,b\Sigma)$, де $bK=\Sigma$, а
$$b\Sigma = \big\{(\alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \cdots \supset \alpha_k) \mid \alpha_i \in \Sigma\big\}.$$
множина всіх сінченних спадних послідовностей симплексів.

Зауважимо, що для кожного симплекса $(\alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \cdots \supset \alpha_k) \in b\Sigma$ його вершини (як симплекси в K) природним чином лінійно впорядковані по включенню. А саме, нехай $\alpha,\beta \in bK = \Sigma$. Скажемо, що $\alpha < \beta$ тоді і лише тоді, коли $\alpha \supset \beta$.

Скрізь нижче вважатимемо, що на bK зафіксовано саме цей частковий порядок.

Задача 5.18. Перевірити наступні властивості барицентричних підрозбиттів.

5.18.1. Частковий порядок $\supset$ по включенню для симплексів з Σ (як вершин bK) є узгодженим з симпліціальною структурою bK (тобто всі вершини в одному симплексі є попарно порівнюваними).

5.18.2. $(bK,b\Sigma)$ є симпліціальним комплексом.

5.18.3. Нехай $f:K\to L$ – симпліціальне відображення симпліціальних комплексів. Тоді відображення $bf: bK \to bL$, $bf(\alpha)=f(\alpha)$, є симпліціальним.

Нехай $\alpha = (a_0,\dots,a_k) \in \Sigma = bK$ – k-симплекс. Позначимо через $\alpha!$ множину всіх впорядкувань (перестановок) α. Наприклад,
$$(a)! = \{a\}, \qquad (a,b)! = \{ab, ba\}, \qquad (a,b,c)! = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}.$$

Для перестановки його вершин $\xi = (a_{i_0}, a_{i_1},\dots,a_{i_k}) \in \alpha!$ зручно позначати через $[\xi]$ наступну спадну послідовність симплексів в K, тобто симплекс в bK:
$$\begin{aligned}[\xi] &= \big((a_{i_0}, a_{i_1},\dots,a_{i_k}) \supset (a_{i_1},\dots,a_{i_k}) \supset \cdots \supset (a_{i_j},\dots,a_{i_k}) \supset \cdots \supset (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}) \supset (a_k)\big) \\ &= \big(A_{0,k}, A_{1,k},\dots,A_{k,k}\big).\end{aligned}$$

Для кожного k-симплекса β в bK і $l \geq 0$ позначимо через $G[\beta,l]$ підмодуль в $C_l(bK)$, породжений спадаючими послідовностями довжини $l+1$ граней β, тобто l-симплексами в bK, що складаються з граней β.

Задача 5.19. Нехай $f: C_*(bK) \to C_*(bK)$ – ланцюгове відображення, таке, що для кожного симплекса $\gamma = (\beta_0 \supset \cdots \supset \beta_k)$ його образ $f_k(\gamma) \in G[\beta_0,k]$. Визначимо відображення
$$F: C_*(bK\times I) \to C_*(bK)$$
за таким правилом: якщо $\delta = (A\times 0)*(B\times 1)$ – симплекс в $bK\times I$, де $A=(\alpha_0\supset\cdots\supset\alpha_k)$ і $B=(\beta_0\supset\cdots\supset\beta_l)$ симплекси в bK такі, що $\alpha_k \supset \beta_0$, то
$$F(\delta) = (A\times 0)*(B\times 1) = A*f(B).$$
Довести, що F – ланцюгове, тобто комутує з диференціалами ∂. Вивести звідси, що f – індукує тотожний ізоморфізм груп гомологій $f: H_*(bK) \to H_*(bK)$.

5.I. Гомології барицентричного підрозбиття. Відображення $\phi: bK \equiv \Sigma \to K$, яке задовольняє таку умову: $\phi(\alpha) \in \alpha$ для всіх $\alpha \in \Sigma$, називатиметься відображенням вибору (вершини). Іншими словами, воно ставить у відповідність кожному симплексу $\alpha\in\Sigma$ якунебудь його вершину.

Теорема 5.1. *Нехай $\phi: bK \equiv \Sigma \to K$ довільне відображення вибору, тобто $\phi(\alpha)\in\alpha$ для всіх $\alpha\in\Sigma$. Тоді ϕ є симпліціальним відображенням $(bK,b\Sigma)\to(K,\Sigma)$ і індукує ізоморфізм груп гомологій (з коефіцієнтами в довільній фіксованій абелевій групі G):*
$$\phi_i : H_i(bK) \cong H_i(K), \quad i\in\mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Доведення складається з наступних кроків.

Задача 5.20. Нехай $\phi : bK \equiv \Sigma \to K$ – відображення вибору. Перевірити наступні властивості відображень вибору.

5.20.1. Показати, що кожне відображення вибору є симпліціальним.

5.20.2. Нехай $\psi : bK \equiv \Sigma \to K$ довільне інше відображення вибору. Визначимо відображення вершин циліндра $f : bK \times I = bK \times \{0, 1\} \to K$ за формулою $f(a, 0) = \phi(a)$ і $f(a, 1) = \psi(a)$. Показати, що f є симпліціальним. Вивести з задачі 5.17.7, що індуковані гомоморфізми груп гомологій

$$\phi_*, \psi_* : H_*(bK) \to H_*(K)$$

тотожні між собою. **Таким чином гомоморфізми (5.2) не залежать від конкретного відображення вибору**.

5.20.3. Показати, що $\phi(a) = a$ для кожної вершини $a \in K$ розглядуваної як 0-симплекс з $\Sigma = bK$.

5.20.4. Нехай $\alpha = (a, b)$ – 1-симплекс в K. Показати, що лише один з симплексів

$$\phi\big((a, b) \supset (b)\big) = \big(\phi(a, b), \phi(b)\big), \qquad \phi\big((a, b) \supset (a)\big) = \big(\phi(a, b), \phi(a)\big),$$

є невиродженим, тобто складається з різних вершин a та b.

5.20.5. Нехай $\alpha = (a, b, c)$ – 2-симплекс в K. Показати, що рівно один з симплексів

$$\begin{aligned}
&\phi\big((a, b, c) \supset (a, b) \supset (a)\big), && \phi\big((a, b, c) \supset (a, b) \supset (b)\big),\\
&\phi\big((a, b, c) \supset (a, c) \supset (a)\big), && \phi\big((a, b, c) \supset (a, c) \supset (c)\big),\\
&\phi\big((a, b, c) \supset (b, c) \supset (b)\big), && \phi\big((a, b, c) \supset (b, c) \supset (c)\big)
\end{aligned}$$

є невиродженим, тобто складається з різних вершин a, b, c.

5.20.6. **Лема Шпернера.** Довести, що для кожного k-симплекса $\alpha = (a_0, \dots, a_k) \in \Sigma = bK$ існує єдина перестановка вершин $\xi = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in \alpha!$ така, що для всіх $j = 0, \dots, k$,

$$\phi(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_k}) = a_j,$$

Зокрема, $\phi(\xi) = \alpha$, і образ $\phi([\xi])$ симплекса $[\xi]$ є невиродженим. Довести, що для всіх інших перестановок $\eta \in \alpha!$ таких, що $\eta \neq \xi$, ϕ «склеює» деякі вершини $[\eta]$, тобто $\phi([\eta])$ є виродженим симплексом.

Згідно задачі 5.20.1, ϕ є симпліціальним відображення, а тому воно індукує морфізм $\phi_* : C_*(bK) \to C_*(K)$ відповідних ланцюгових комплексів:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{i+1}(bK) \arrow[r, "\partial_{i+1}"] \arrow[d, "\phi_{i+1}"] & C_i(bK) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "\phi_i"] & C_{i-1}(bK) \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "\phi_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{i+1}(K) \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & C_i(K) \arrow[r, "\partial_i"] & C_{i-1}(K) \arrow[r, "\partial_{i-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Наступний крок - показати, що існує такий морфізм $\mathbf{s}_* : C_*(K) \to C_*(bK)$, такий, що $\phi_* \circ \mathbf{s}_* = \mathrm{id}_{C_*(K)}$, а гомоморфізми груп гомологій

$$\mathbf{s}_* : H_*(K) \to H_*(bK), \qquad \phi_* : H_*(bK) \to H_*(K)$$

є взаємно оберненими ізоморфізмами.

Задача 5.21. Нехай $\phi : bK \to K$ – відображення вибору. Для кожного $i < 0$ нехай $\mathbf{s}_i : C_i(K) \to C_i(bK)$ – єдине нульове відображення нульових груп. В наступних задачах визначимо $\mathbf{s}_i$ для $i \geq 0$.

5.21.1. Показати, що існує єдине G-лінійне відображення $\mathbf{s}_0 : C_0(K) \to C_0(bK)$, таке, що $\mathbf{s}_0(a) = (a)$ для всіх вершин $a \in K$ (розглядуваних як базисні елементи $C_0(K)$). Довести, що $\phi_0 \circ \mathbf{s}_0 : C_0(K) \to C_0(K)$ є тотожним ізоморфізмом $\mathrm{id}_{C_0(K)}$.

5.21.2. Для кожного орієнтованого 1-симплекса $\alpha = (a, b) \in C_1(\Sigma)$ визначимо наступний елемент $\mathbf{s}_1(\alpha) \in C_1(bK)$ за правилом:

$$\mathbf{s}_1(\alpha) = \alpha * (\mathbf{s}_0 \partial(\alpha)).$$

Більш детально,

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1(\alpha) &= \alpha * (\mathbf{s}_0\partial(\alpha)) = (a,b) * (\mathbf{s}_0(b-a)) = \\ &= (a,b) * (\mathbf{s}_0(b) - \mathbf{s}_0(a)) = (a,b) * ((b) - (a)) = \\ &= \big((a,b) \supset (b)\big) - \big((a,b) \supset (a)\big) = [a,b] - [b,a] \,.\end{aligned}$$

Показати, що відповідність $\alpha \mapsto \mathbf{s}_1(\alpha)$ продовжується до єдиного G-лінійного відображення $\mathbf{s}_1 : C_1(K) \to C_1(bK)$, такого, що

$$\phi_1 \circ \mathbf{s}_1 = \mathrm{id}_{C_1(K)} : C_1(K) \to C_1(K), \partial_1 \circ \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 \circ \partial_1 : C_1(K) \to C_0(bK).$$

5.21.3. Для кожного орієнтованого 2-симплекса $\alpha = (a,b,c) \in C_2(\Sigma)$ визначимо наступний елемент $\mathbf{s}_2(\alpha) \in C_2(bK)$ за правилом:

$$\mathbf{s}_2(\alpha) = \alpha * (\mathbf{s}_1\partial(\alpha)).$$

Більш детально,

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_2(\alpha) &= \alpha * (\mathbf{s}_1\partial(\alpha)) = (a,b,c) * (\mathbf{s}_1(bc - ac + ab)) = \\ &= (a,b,c) * \big([b,c] - [c,b] - [a,c] + [c,a] + [a,b] - [b,a]\big) = \\ &= [a,b,c] - [a,c,b] - [b,a,c] + [b,c,a] + [c,a,b] - [c,b,a] = \sum_{\sigma \in \alpha!} \mathrm{sgn}(\sigma)\,[\sigma] \,.\end{aligned}$$

Показати, що відповідність $\alpha \mapsto \mathbf{s}_1(\alpha)$ продовжується до єдиного G-лінійного відображення $\mathbf{s}_1 : C_1(K) \to C_1(bK)$, такого, що

$$\phi_1 \circ \mathbf{s}_1 = \mathrm{id}_{C_1(K)} : C_1(K) \to C_1(K),$$
$$\partial_1 \circ \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 \circ \partial_1 : C_1(K) \to C_0(bK).$$

5.21.4. Припустимо, що для всіх $j < i$ ми вже визначили G-лінійні відображення $\mathbf{s}_j : C_j(K) \to C_j(bK)$, такі, що

$$\phi_j \circ \mathbf{s}_j = \mathrm{id}_{C_j(K)} : C_j(K) \to C_j(K),$$
$$\partial_j \circ \mathbf{s}_j = \mathbf{s}_{j-1} \circ \partial_j : C_j(K) \to C_{j-1}(bK).$$

Для кожного орієнтованого 2-симплекса $\alpha \in C_i(K)$ визначимо наступний елемент $\mathbf{s}_i(\alpha) \in C_i(bK)$ за правилом:

$$\mathbf{s}_i(\alpha) = \alpha * (\mathbf{s}_{i-1}\partial(\alpha)).$$

Показати, що

$$\mathbf{s}_i(\alpha) = \sum_{\sigma \in \alpha!} \mathrm{sgn}(\sigma)\,[\sigma] \,,$$

і ця відповідність $\alpha \mapsto \mathbf{s}_i(\alpha)$ продовжується до єдиного G-лінійного відображення $\mathbf{s}_i : C_i(K) \to C_i(bK)$, такого, що

$$\phi_i \circ \mathbf{s}_i = \mathrm{id}_{C_i(K)} : C_i(K) \to C_i(K),$$
$$\partial_i \circ \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-1} \circ \partial_i : C_i(K) \to C_{i-1}(bK).$$

5.21.5. Вивести з попередніх задач, що відображення $\{\mathbf{s}_i : C_i(K) \to C_i(bK)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ визначають ланцюгове відображення $\mathbf{s}_* : C_*(K) \to C_*(bK)$ таке, що $\phi_* \circ \mathbf{s}_* = \mathrm{id}_{C_*(K)}$. Зокрема, відповідний гомоморфізм груп гомологій є тотожним ізоморфізмом:

$$\phi_* \circ \mathbf{s}_* = \mathrm{id}_{H_*(K)} : H_*(K) \to H_*(K).$$

5.21.6. Нехай $\delta = (\alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \cdots \supset \alpha_k)$ спадна послідовність симплексів в K, тобто симплекс в bK і $\gamma = \phi(\delta) := \big(\phi(\alpha_0), \ldots, \phi(\alpha_k)\big)$ – її образ під дією ϕ. Зокрема, γ – симплекс в K. Показати, що

$$\mathbf{s}_k \circ \phi_k(\delta) = \sum_{\sigma \in \phi(\delta)!} \mathrm{sgn}(\sigma)\,[\sigma] \,.$$

5.21.7. Довести, що $\mathbf{s}_k \circ \phi_k(\delta) \in G[\alpha_0, k]$ для кожного $\delta = (\alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \cdots \supset \alpha_k)$. Вивести з задачі 5.19, що $\mathbf{s}_* \circ \phi_*$ ланцюгово гомотопне тотожному відображенню $\mathrm{id}_{C_i(bK)}$. Зокрема, відповідний гомоморфізм груп гомологій є тотожним ізоморфізмом:

$$\mathbf{s}_* \circ \phi_* = \mathrm{id}_{H_*(bK)} : H_*(bK) \to H_*(bK).$$

Для $i \geq 0$ нехай $b^i K$ – i-кратне барицентричне підрозбиття симпліціального комплекса. Тоді для кожного $i \geq 0$ ми маємо «канонічний» ізоморфізм

$$\phi^{i+1,i} : H_*(b^{i+1}K) \to H_*(b^i K),$$

який задається довільним відображенням вибору вершини. Для довільної пари $i > j \geq 0$ визначимо ізоморфізм

$$\phi^{i,j} : H_*(b^i K) \to H_*(b^j K),$$

як композицію

$$\phi^{i,j} : H_*(b^i K) \xrightarrow{\phi^{i,i-1}} H_*(b^{i-1}K) \xrightarrow{\phi^{i-1,i-2}} \cdots \xrightarrow{\phi^{j+1,j}} H_*(b^j K).$$

Нехай також $\phi^{i,i} = \mathrm{id}_{H_*(b^i K)}$ – тотожний ізоморфізм і $\phi^{i,j} = (\phi^{i,j})^{-1}$ для $i < j$.

Задача 5.22. Показати, що для довільних $i, j, k \geq 0$ має місце тотожність $\phi^{j,k} \circ \phi^{i,j} = \phi^{i,k}$.

Задача 5.23. Нехай $s : C_*(K) \to C_*(bK)$ та $\xi^j : C_*(K) \to C_*(K \times I)$, $j = 0, 1$, ланцюгові відображення визначені вище. Зауважимо також, що $K \times I$ має аналогічне ланцюгове відображення

$$s : C_*(K \times I) \to C_*(b(K \times I)).$$

Для $j = 0, 1$ визначимо симпліціальне відображення

$$b\xi^j : bK \to b(K \times I), \qquad b\xi^j(\alpha_0 \supset \cdots \supset \alpha_k) = (\alpha_0 \supset \cdots \supset \alpha_k) \times j.$$

5.23.1. Довести, що для $j = 0, 1$ має місце наступна комутативна діаграма ланцюгових комплексів:

$$\begin{tikzcd} C_*(K) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\xi^j"'] & C_*(bK) \arrow[d, "b\xi^j"] \\ C_*(K \times I) \arrow[r, "s"] & C_*(b(K \times I)) \end{tikzcd}$$

5.23.2. Показати, що відображення $b\xi^0 \circ s$ і $b\xi^1 \circ s$ – ланцюгово гомотопні. Зокрема, гомоморфізми $b\xi^1 \circ s = b\xi^1 \circ s : H_*(K) \to H_*(bK \times I)$ тотожні між собою. Вивести звідси, що гомоморфізми $b\xi^1 = b\xi^1 : H_*(bK) \to H_*(bK \times I)$ також тотожні між собою. **Підказка.** Див. задачу 5.17.5

5.23.3. Нехай $H : b^u(K \times I) \to L$ – симпліціальне відображення. Довести, що гомоморфізми $H \circ b\xi^0 = H \circ b\xi^1 : H_*(bK) \to H_*(L)$ тотожні між собою.

5.23.4. Узагальнити попередні три задачі на випадок u-кратних барицентричних розбиттів.

5.J. Гомології поліедрів. Нехай Σ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$. Згідно задачі 5.1 їй відповідає симпліціальний комплекс $(\Sigma^{(0)}, \langle\Sigma\rangle)$. Групами ланцюгів, циклів, границь і гомологій триангуляції Σ називатимуться відповідні групи симпліціального комплексу $(\Sigma^{(0)}, \langle\Sigma\rangle)$. Вони позначатимуться через $C_*(\Sigma)$, $Z_*(\Sigma)$, $B_*(\Sigma)$, $H_*(\Sigma)$ відповідно.

Наша мета, показати, що групи гомологій триангуляції залежать тільки від її носія.

Задача 5.24. Нехай Σ – триангуляція в $\mathbb{R}^m$ і Σ_i, $i = 0, 1$, – барицентричне підрозбиття Σ, що відповідає деякій функції вибору внутрішньої точки $\xi : \Sigma \to |\Sigma|$.

5.24.1. Показати, що відображення між вершинами симпліціальних комплексів

$$h : (\Sigma_0)^{(0)} \to (\Sigma_1)^{(0)}, \qquad h(\xi_0(\beta)) = \xi_1(\beta),$$

для всіх $\beta \in \Sigma$ є симпліціальним ізоморфізмом. Зокрема, h індукує ізоморфізм між гомологіями

$$h_* : H_*(\Sigma_0) \to H_*(\Sigma_1).$$

5.24.2. Нехай $u \geq 1$ і Σ_0 і Σ_1 – u-кратні барицентричні підрозбиття Σ. Побудувати аналогічний симпліціальний ізоморфізм $h : (\Sigma_0)^{(0)} \to (\Sigma_1)^{(0)}$. Він також індукує ізоморфізм груп між гомологіями

$$h_* : H_*(\Sigma_0) \to H_*(\Sigma_1).$$

Таким чином всі барицентричні підрозбиття триангуляції мають однакову комбінаторну структуру.

Задача 5.25. Нехай $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – зіркове відображення між триангуляціями і $g^0, g^1 : \Sigma^{(0)} \to \Lambda^{(0)}$ – два довільні симпліціальні наближення f. Визначимо відображення $H : \Sigma^{(0)} \times \{0,1\} \to \Lambda^{(0)}$, $H(a,j) = g^j(a)$, для всіх вершин $a \in \Sigma^{(0)}$ і $j = 0,1$. Показати, що H є симпліціальним відображенням $\Sigma \times I \to \Lambda$ (комбінаторною гомотопією), а тому гомоморфізми $g^0_* = g^1_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$ тотожні між собою.

Таким чином кожному зірковому відображенню $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ носіїв триангуляцій відповідає гомоморфізм груп гомологій $H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$, індукований довільним симпліціальним наближенням f. Ми позначатимемо цей гомоморфізм через $f^{st}_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$.

Задача 5.26. Нехай $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ і $g : |\Lambda| \to |\Theta|$ – зіркові відображення між деякими триангуляціями. Показати, що гомоморфізми

$$(g \circ f)^{st}_* = g^{st}_* \circ f^{st}_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Theta)$$

тотожні між собою.

Задача 5.27. Нехай Σ_u – довільне u-кратне барицентричне підрозбиття Σ. Показати, що тотожне відображення $\mathrm{id}_{|\Sigma|} : |\Sigma_u| \to |\Sigma|$ є зірковим, і кожне його симпліціальне наближення $g : \Sigma^{(0)}_u \to \Sigma^{(0)}$ індукує ізоморфізм $g^{st}_* = \phi^{u,0} : H_*(\Sigma_u) \to H_*(\Sigma)$. **Підказка.** Розкладіть $\mathrm{id}_{|\Sigma|}$ в композицію тотожних відображень між послідовними барицентричними підрозбиттями: $|\Sigma_u| \xrightarrow{\mathrm{id}_u} |\Sigma_{u-1}| \xrightarrow{\mathrm{id}_{u-1}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} |\Sigma_1| \xrightarrow{\mathrm{id}_1} |\Sigma|$. Нехай ψ_i – симпліціальне наближення тотожного відображення $\mathrm{id}_i : |\Sigma_i| \to |\Sigma_{i-1}|$, яка, згідно задачі 4.29.2, є відображенням вибору. Тоді $\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_u$, так само як і g, є симпліцальним наближенням $\mathrm{id}_{|\Sigma|}$. Тому гомоморфізм $g_* : H_*(\Sigma_u) \to H_*(\Sigma)$ тотожний з ізоморфізмом індукованим композицією $\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_u$, тобто з $\phi^{u,0}$.

Задача 5.28. Нехай $\widehat{f} : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – зіркове відображення, $\widehat{f}_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$ – відповідний гомоморфізм гомологій, Σ_u – довільне u-кратне барицентричне підрозбиття Σ, і $\mathrm{id}_{|\Sigma|} : |\Sigma_u| \to |\Sigma|$ – тотожне відображення. Показати, що тоді $\widehat{f} = \widehat{f} \circ \mathrm{id}_{|\Sigma|} : |\Sigma_u| \to |\Lambda|$ є зірковим і (кожне його симпліціальне наближення) індукує гомоморфізм $\widehat{f}_* \circ \phi^{u,0} : H_*(\Sigma_u) \to H_*(\Lambda)$.

Задача 5.29. Нехай $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – неперервне відображення поліедрів. Припустимо, що для $i = 0,1$ існує u_i-кратне барицентричне підрозбиття Σ_{u_i} триангуляції Σ і v_i-кратне барицентричне підрозбиття Λ_{v_i} триангуляції Σ такі, що f є зірковим як відображення $f : |\Sigma_{u_i}| \to |\Lambda_{v_i}|$. Нехай $(f^i)^{st}_* : H_*(\Sigma_{u_i}) \to H_*(\Lambda_{v_i})$ – відповідний гомоморфізм індукований (довільним симпліціальним наближенням f). Показати, що має місце комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Sigma_{u_0}) \arrow[r, "(f^0)^{st}_*"] \arrow[d, "\phi^{u_0,u_1}"', "\cong"] & H_*(\Lambda_{v_0}) \arrow[d, "\cong"', "\phi^{v_0,v_1}"] \\
H_*(\Sigma_{u_1}) \arrow[r, "(f^1)^{st}_*"] & H_*(\Lambda_{v_1})
\end{tikzcd}$$

Підказка. Нехай $u_1 < u_0$ і $v_1 < v_0$. Тоді тотожні відображення $\mathrm{id}_{|\Sigma|} : |\Sigma_{u_0}| \to |\Sigma_{u_1}|$ і $\mathrm{id}_{|\Lambda|} : |\Lambda_{v_0}| \to |\Lambda_{v_1}|$ є зірковими. Зокрема, має місце комутативна діаграма зіркових відображень:

$$\begin{tikzcd}
|\Sigma_{u_0}| \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{|\Sigma|}"', "\cong"] \arrow[dr, "f"] & |\Lambda_{v_0}| \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{id}_{|\Lambda|}"] \\
|\Sigma_{u_1}| \arrow[r, "f"] & |\Lambda_{v_1}|
\end{tikzcd}$$

яка індукує діаграму з задачі. Випадки інших нерівностей між u_1 і u_0 та між v_1 і v_0 аналогічні.

Задача 5.30. Нехай $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – неперервне відображення поліедрів. Припустимо, що існують $u, v \geq 0$ такі, що $\widehat{f}$ є зірковим як відображення $\widehat{f} : |\Sigma_u| \to |\Lambda_v|$ з деякого u-кратного барицентричного підрозбиття Σ в деяке v-кратне барицентричне підрозбиття Λ. Показати, що гомоморфізм

$$f_* : H_*(\Sigma) \xrightarrow{\phi^{0,u}} H_*(|\Sigma_u|) \xrightarrow{f^{st}_*} H_*(|\Lambda_v|) \xrightarrow{\phi^{v,0}} H_*(\Lambda)$$

не залежить від u, v і конкретних барицентричних підрозбиттів Σ_u і Λ_v.

Таким чином, кожне неперервне відображення $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ між поліедрами індукує коректно визначений гомоморфізм $f_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$.

Задача 5.31. Нехай $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ і $g : |\Lambda| \to |\Theta|$ – неперервні відображення між поліедрами. Довести, що гомоморфізми $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Theta)$ тотожні між собою.

Задача 5.32. Показати, що тотожне відображення $\mathrm{id}_{|\Sigma|} : |\Sigma| \to |\Sigma|$ індукує тотожний ізоморфізм $\mathrm{id}_{H_*(\Sigma)} : H_*(\Sigma) \to H_*(\Sigma)$.

Задача 5.33. Нехай $\hat{f} : \Sigma \to \Lambda$ – симпліціальне відображення, $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ його лінійне продовження. Показати, що гомоморфізми $f_* = \hat{f}_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$ тотожні між собою.

Задача 5.34. Нехай $f^0, f^1 : |\Sigma| \to |\Lambda|$ – гомотопні відображення між поліедрами. Довести, що гомоморфізми $f^0_* = f^1_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$ тотожні між собою.

Задача 5.35. Довести, що гомотопічна еквівалентність між поліедрами $f : |\Sigma| \to |\Lambda|$ індукує ізоморфізм груп гомологій $f_* : H_*(\Sigma) \to H_*(\Lambda)$.

Задача 5.36. Нехай Σ' – довільне підрозбиття триангуляції Σ. Довести, що тотожне відображення $\mathrm{id} : |\Sigma| \to |\Sigma|$ індукує ізоморфізм відповідних груп гомологій $\mathrm{id}_* : H_*(\Sigma') \to H_*(\Lambda)$.

Предметний покажчик