Задачі з курсу «Диференціальні форми»

1 Комбінаторика скінченних лінійно впорядкованих множин

1.1 Позначення

Для множини $\mathbf{X}$ нехай

- $\Sigma(\mathbf{X})$ — це група перестановок множини $\mathbf{X}$, тобто бієкцій $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$;
- $\mathrm{Fin}_k(\mathbf{X})$ — множина всіх k-елементних підмножин в $\mathbf{X}$;
- $\mathrm{Fin}(\mathbf{X})$ — множина всіх скінченних підмножин в $\mathbf{X}$;
- $|\mathbf{X}|$ — потужність множини $\mathbf{X}$ (число її елементів, якщо $\mathbf{X}$ скінченна).

Зауважимо, що k-й декартовий степінь $\mathbf{X}^k = \underbrace{\mathbf{X} \times \cdots \times \mathbf{X}}_{k}$ можна розглядати як множину всіх функцій $[k] \to \mathbf{X}$. Елементи множини $\mathbf{X}^k$ також називатимемо *k-послідовностями*.

Буде зручно вважати, що $\mathbf{X}^0$ складається з одного елемента — *порожньої послідовності* $()$.

Відмітимо, що для довільних $k, l \geq 1$ визначена природна бінарна операція *об'єднання послідовностей*:

$$\vec{\cup}\colon \mathbf{X}^k \times \mathbf{X}^l \to \mathbf{X}^{k+l}, \qquad (a_1, \dots, a_k) \,\vec{\cup}\, (b_1, \dots, b_l) := (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l).$$

Задача 1.1.1. Показати, що відображення $\vec{\cup}$ є бієкцією.

Задача 1.1.2. Перевірити асоціативність операції об'єднання, тобто, що для довільних $A \in \mathbf{X}^k$, $B \in \mathbf{X}^l$, $C \in \mathbf{X}^m$

$$(A \,\vec{\cup}\, B) \,\vec{\cup}\, C = A \,\vec{\cup}\, (B \,\vec{\cup}\, C) \in A^{k+l+m}.$$

Незважаючи на «тривіальність» цієї операції, вона буде корисною в подальшому.

Нас цікавитиме випадок, коли $\mathbf{X}$ є скінченною лінійно впорядкованою множиною. Якщо $n = |\mathbf{X}|$ — це число її елементів, то вона ізоморфна (як лінійно впорядкована множина) множині чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Тому для $n \geq 1$ буде зручно ввести спрощені позначення:

$$[n] := \{1, \dots, n\}, \qquad \Sigma([n]) := \Sigma(n), \qquad \mathrm{Fin}_k([n]) := \mathrm{Fin}_k(n).$$

1.2 Перестановки

Нехай $\sigma \in \Sigma(n)$ — перестановка множини $[n]$, тобто бієкція

$$\sigma\colon [n] \to [n].$$

Її зручно записувати у вигляді $(2 \times n)$-матриці виду:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in \Sigma(n)$$

Нехай $a < b \in [n]$. Тоді бієкція $\tau_{a,b} \in \Sigma(n)$, яка переставляє a і b і залишає нерухомими всі інші елементи з $[n]$ називається *транспозицією.* Таким чином,

$$\tau_{a,b}(i) = \begin{cases} b, & i = a, \\ a, & i = b, \\ i, & i \neq a, b. \end{cases}$$

Якщо $b = a + 1$, то транспозиція $\tau_{a,a+1}$ називатиметься *елементарною.*

Нехай $\sigma \in \Sigma(n)$ — перестановка. Пара $i, j \in [n]$ називається *інверсією (для σ)*, якщо $i < j$ але $\sigma(i) > \sigma(j)$. Іншими словами, σ переставляє i та j в протилежному порядку.

Число інверсій перестановки σ позначатимемо $\mathrm{inv}(\sigma)$, а парність цього числа називатимемо *знаком* перестановки σ і позначатимемо через $\mathrm{sgn}\sigma$. Більш точно,

$$\mathrm{sgn}\sigma := (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \in \{\pm 1\}.$$

Приклад 1.2.1. Наприклад, розглянемо перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \Sigma(6)$$

тобто $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 7$, $\sigma(3) = 1$ і т.д.

Тоді σ має 9 інверсій,

$$(1,3), \quad (1,5), \quad (2,3), \quad (2,4), \quad (2,5), \quad (2,6), \quad (2,7), \quad (4,5), \quad (4,7)$$

а отже її знак $\mathrm{sgn}\sigma = -1$.

Для подальшого корисно зрозуміти що відбувається з перестановкою, коли до неї застосовують транспозицію справа або зліва. Наприклад, розглянемо такі композиції σ з $\tau_{1,2}$. Тоді

$$\alpha := \sigma \circ \tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \tau_{1,2} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.2.2. Довести такі твердженння про властивості транспозицій.

1.2.2.1. Показати, що кожна транспозиція $\tau_{a,b}$ є добутком *непарного числа* елементарних транспозицій.

1.2.2.2. Показати, що кожна перестановка $\sigma \in \Sigma(n)$ є композицією скінченного числа транспозицій, а отже композицією навіть елементарних транспозицій.

1.2.2.3. Нехай $a < b \in [n]$. Обчислити число інверсій $\mathrm{inv}(\tau_{a,b})$ транспозиції $\tau_{a,b}$. Пересвідчитись, що це число завжди є непарним.

Задача 1.2.3. Довести такі твердженння.

1.2.3.1. Нехай $\sigma \in \Sigma(n)$ — деяка перестановка і $\tau_{a,b} \in \Sigma(n)$ — транспозиція з $a < b$. Припустимо, що (a, b) *не утворює інверсію в* σ, тобто $\sigma(a) < \sigma(b)$. Розглянемо перестановку $\xi = \sigma \circ \tau_{a,b}$. Знайти зв'язок між числами інверсі $\mathrm{inv}(\xi)$ та $\mathrm{inv}(\sigma)$. Показати, що ці числа завжди мають різну парність.

1.2.3.2. Довести, що для кожної перестановки $\sigma \in \Sigma(n)$ число її інверсій, а отже і знаки, тотожні з відповідними числами оберненої перестановки σ^{-1}, тобто

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma^{-1}), \qquad \mathrm{sgn}\sigma = \mathrm{sgn}\sigma^{-1}.$$

1.2.3.3. Нехай $\sigma = \tau_{a_1,b_1} \circ \cdots \circ \tau_{a_k,b_k}$ — який-небудь розклад перестановки $\sigma \in \Sigma(n)$ в добуток k транспозицій. Показати, $\mathrm{sgn}\sigma = k \bmod 2$. Іншими словами, парність числа транспозицій які породжують σ тотожна з парністю числа інфервій в σ.

1.3 Впорядковані послідовності

Для $k, n \geq 1$ нехай

$$\mathrm{ord}\colon [n]^k \to [n]^k,$$

відображення яка ставить у відповідність кожній k-послідовності $A = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, цю ж послідовність $\mathrm{ord}(A)$ впорядковану за зростанням.

Наприклад, $\mathrm{ord}(3, 4, 1, 6, 1) = (1, 1, 3, 4, 6)$.

Задача 1.3.1. Показати, що $\mathrm{ord} \circ \mathrm{ord} = \mathrm{ord}$, тобто ord є «ретракцію» на свій образ.

Позначимо через

$$\mathrm{Mon}_k(n) := \mathrm{ord}([n]^k) \subset [n]^k$$

образ відображення ord. Зрозуміло, що $\mathrm{Mon}_k(n)$ складається з таких послідовностей $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [n]^k$, що

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n.$$

Еквівалентно, можна розглядати як множину *неспадних* функцій $\phi\colon [k] \to [n]$, тобто

$$1 \leq \phi(1) \leq \phi(2) \leq \cdots \leq \phi(k) \leq n.$$

1.4 Вкладення $\mathrm{Fin}_k(n) \subset \mathrm{Mon}_n(k)$

Зауважимо, що кожну k-елементну підмножину $A \subset [n]$, тобто елемент $A \in \mathrm{Fin}_k(n)$ можна впорядкувати за зростанням. Це дає ототожнення $\mathrm{Fin}_k(n)$ з підмножиною в $\mathrm{Mon}_k(n)$, яка складається із *строго зростаючих* функцій $\phi\colon [k] \to [n]$, тобто

$$1 \leq \phi(1) < \phi(2) < \cdots < \phi(k) \leq n.$$

Еквівалентно, $\mathrm{Fin}_k(n)$ складається з таких послідовностей $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [n]^k$, що

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n.$$

Таким чином ми маємо такі вкладення

$$\mathrm{Fin}_k(n) \ \subset\ \mathrm{Mon}_k(n) \ \subset\ [n]^k$$

1.5 Знак послідовності

Визначимо функцію

$$\mathrm{sgn}\colon [n]^k \to \{-1, 0, 1\},$$

яка називатиметься *знаком послідовності* за таким правилом. Нехай $B \in [n]^k$.

- Якщо в B всі елементи різні, тобто $\mathrm{ord}(B) \in \mathrm{Fin}_k(n)$, то нехай $\mathrm{sgn}(B) = \pm 1$ — знак перестановки (парність числа транспозицій), яка робить з B послідовність $\mathrm{ord}(B)$.
- Якщо ж в B деякі елементи повторюються, то покладемо $\mathrm{sgn}(B) = 0$.

Іншими словами, sgn розширює поняття знаку перестановки на довільні послідовності символів.

Задача 1.5.1. (Принцип Діріхле) Показати, що при $k > n$ функціія sgn є тотожним нулем, тобто приймає лише нульове значення.

Задача 1.5.2. (Антикомутативність) Нехай $A \in [k]^n$ і $B \in [l]^n$ для деяких $k, l \geq 0$. Тоді

$$\mathrm{sgn}(A \vec{\cup} B) = (-1)^{kl} \mathrm{sgn}(B \vec{\cup} A).$$

Задача 1.5.3. (Асоціативність) Нехай $A \in \mathrm{Mon}_n(k)$, $B \in \mathrm{Mon}_n(l)$ і $C \in \mathrm{Mon}_n(m)$ — три неспадних послідовності для деяких $k, l, m \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(A \vec{\cup} B \vec{\cup} C) &= \mathrm{sgn}(A \vec{\cup} B) \cdot \mathrm{sgn}\big(\mathrm{ord}(A \vec{\cup} B) \vec{\cup} C\big) \\ &= \mathrm{sgn}\big(A \vec{\cup} \mathrm{ord}(B \vec{\cup} C)\big) \cdot \mathrm{sgn}(B \vec{\cup} C). \end{aligned}$$

Іншими словами, щоб впорядкувати $A \vec{\cup} B \vec{\cup} C$ за зростанням, можна спочатку впорядкувати тільки $A \vec{\cup} B$, а потім вже переставляти елементи цієї множини з C. Можна також діяти навпаки: спочатку впорядкувати тільки $B \vec{\cup} C$, а потім вже переставляти елементи цієї множини з A.

Нехай $A \in \mathrm{Fin}_k(n)$ — впорядкована за зростанням k-елементна підмножина в $[n]$. Позначимо через

$$\widehat{A} := \mathrm{ord}([n] \setminus A)$$

впорядкування її доповнення в $[n]$. Нехай також, $A \vec{\cup} \widehat{A}$ — об'єднання цих послідовностей і $\varepsilon_A = \mathrm{sgn}(A \vec{\cup} \widehat{A})$ — його знак.

Наприклад, якщо $n = 7$ і $A = (1, 3, 6)$, то $\widehat{A} = (2, 4, 5, 7)$,

$$\varepsilon_A := \mathrm{sgn}(A \vec{\cup} \widehat{A}) = \mathrm{sgn}(1, 3, 6, 2, 4, 5, 7) = (-1)^4 = +1.$$

Задача 1.5.4. Довести такі твердження.

1.5.4.1. Показати, що відображення

$$*_k\colon \mathrm{Fin}_k(n) \to \mathrm{Fin}_{n-k}(n), \qquad A \mapsto \widehat{A}$$

є бієкцією. Нагадаємо про домовленість, що $[n]^0$ — це одноелементна множина, яка складається з порожньої послідовності $()$.

1.5.4.2. Показати, що $*_{n-k} = \big(*_k\big)^{-1}$, тобто відображення $*_{n-k}$ і $*_k$ є взаємооберненими. Зокрема, якщо $n = 2k$, то $*_k\colon \mathrm{Fin}_k(n) \to \mathrm{Fin}_k(n)$ є інволюцією.

1.5.4.3. Показати, що $\varepsilon_A := \mathrm{sgn}(A \vec{\cup} \widehat{A}) \neq 0$ для кожного $A \in \mathrm{Fin}_k(n)$.

2 Полілінійні функції

2.1 Базові властивості

Нехай V — векторний простір над полем $\mathbb{F}$, $k \geq 1$ і

$$\omega\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{F}$$

— деяка функція. Вона називається

- *k-формою*, $k \geq 0$, якщо вона полілінійна (лінійна по кожному аргументу), тобто

$$\omega(v_1, \ldots, av_i + a'v'_i, \ldots, v_k) = a\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots v_k) + a'\omega(v_1, \ldots, v'_i, \ldots v_k)$$

  для довільних $v_i \in V$ і $a, a' \in \mathbb{F}$.
  Зауважимо, що 1-форми, тобто лінійні функції, також називають *лінійними* формами, а 2-форми — *квардатичними* формами.
- *симетричною*, якщо для довільних $v_1, \ldots, v_k \in V$ та кожного $i = 1, \ldots, k$

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) = \omega(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k).$$

- *кососиметричною*, якщо для довільних $v_1, \ldots, v_k \in V$ та кожного $i = 1, \ldots, k$

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k).$$

За означенням, вважатимемо, що при $k = 1$ всі функції $\omega\colon V \to \mathbb{F}$ є симетричними і кососиметричними одночасно.

Позначимо через $\mathrm{Poly}^k(V)$ множину всіх k-форм на V, а через $\mathrm{Sym}^k(V)$ та $\mathrm{Asym}^k(V)$ відповідно множини всіх симетричних та кососиметричних k-форм на V.

Нехай $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ — деяка послідовність з n векторів з V і $A = (i_1, \ldots, i_k) \in [n]^k$. Тоді через v_A ми позначатимемо послідовність

$$v_A := (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in V^k.$$

Задача 2.1.1. Нехай $\alpha \in \mathrm{Poly}^k(V)$. Довести, що наступні умови еквівалентні:

1. α комосиметрична, тобто змінює знак при перестановці сусідніх векторів;
2. α змінює знак при перестановці *довільної* пари аргументів, тобто

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k);$$

3. для довільних $w, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \in V$

$$\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{w, w}_{=}, v_{i+2}, \ldots, v_k) = 0,$$

   тобто α дорівнює нулю на кожній k-послідовності, у якій деякі два *сусідні* вектори тотожні між собою;
4. для довільних $w, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_k \in V$

$$\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_k) = 0,$$

   тобто α дорівнює нулю на кожній k-послідовності, у яких деякі два вектори тотожні між собою;

5. для довільних $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ і $A = (i_1, \ldots, i_k) \in [k]^k$

$$\alpha(v) = \operatorname{sgn} A \cdot \alpha(v_A)$$

тобто

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sgn} A \cdot \alpha(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}).$$

Задача 2.1.2. Нехай V — довільний векторний простір над полем $\mathbb{F}$, $k \geq 1$, і $\operatorname{Form}^k(V)$ — одна з множин $\operatorname{Poly}^k(V)$, $\operatorname{Sym}^k(V)$ або $\operatorname{Asym}^k(V)$. Довести такі твердження.

2.1.2.1. Нехай $\alpha, \beta \in \operatorname{Form}^k(V)$ і $t \in \mathbb{F}$. Тоді відображення $\alpha + \beta, t\alpha \colon V^k \to \mathbb{F}$ визначені за формулами

$$(\alpha + \beta)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(v_1, \ldots, v_k) + \beta(v_1, \ldots, v_k),$$
$$(t\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = t \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_k),$$

також належать до $\operatorname{Form}^k(V)$. Іншими словами, $\operatorname{Poly}^k(V)$, $\operatorname{Sym}^k(V)$, $\operatorname{Asym}^k(V)$ є векторними просторами над полем $\mathbb{F}$ відносно вказаних операцій.

2.1.2.2. Нехай W — інший векторний простір над $\mathbb{F}$, і $L \colon V \to W$ — лінійне відображення. Показати, що для кожної k-форми $\alpha \in \operatorname{Form}^k(W)$ відображення

$$L^*(\alpha) \colon V^k \to \mathbb{F}, \qquad L^*(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(Lv_1, \ldots, Lv_k),$$

належить до $\operatorname{Form}^k(V)$. Більш того, відповідність $\alpha \mapsto L^*(\alpha)$ є лінійним відображенням $L^* \colon \operatorname{Form}^k(W) \to \operatorname{Form}^k(V)$.

2.1.2.3. Довести, що $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{\operatorname{Form}^k(V)}$, тобто тотожний ізоморфізм L індукує тотожний ізоморфізм $\operatorname{Form}^k(V)$.

2.1.2.4. Показати, що якщо $K \colon U \to V$ і $L \colon V \to W$ — лінійні оператори між векторними просторами, то

$$(L \circ K)^* = K^* \circ L^*,$$

2.1.2.5. Показати, що відповідність $V \Rightarrow \operatorname{Form}^k(V)$ є контраваріантним функтором на категорії векторних просторів над $\mathbb{F}$.

Нехай $\operatorname{char}(\mathbb{F})$ — характеристика поля $\mathbb{F}$, тобто найменше натуральне число $p \geq 2$, для якого $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p} = 0$. Якщо такого числа не існує, наприклад, коли $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, то вважають, що $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$.

Задача 2.1.3. Показати, що якщо $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > 0$, то вона є простим числом.

Задача 2.1.4. Показати, що якщо $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$ то k-форма на V є симетричною тоді і лише тоді, коли вона кососиметрична. Іншими словами $\operatorname{Sym}^k(V) = \operatorname{Asym}^k(V)$ якщо $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$.

2.2 Полілінійні функції в скінченновимірних просторах

В наступних задачах вважатимемо, що $\dim V = n$, і нехай $e = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ — деякий базис в V. Як і вище, для послідовності $A = (i_1, \ldots, i_k) \in [n]^k$ буде зручно позначати

$$e_A := (e_1, \ldots, e_k).$$

Зокрема, якщо α — k-форма, то вираз $\alpha(e_A)$ означатиме $\alpha(e_1, \dots, e_k)$.

Для $i = 1, \dots, n$ нехай

$$dx_i \colon V \to \mathbb{F}, \qquad dx_i\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right) = a_i,$$

— лінійна функція, яка є проєкцією на i-ту координату в цьому базисі. Для кожної послідовності $A = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in [n]^k$, визначимо функцію

$$\boldsymbol{\alpha}_A \colon V^k \to \mathbb{F}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_A(v_1, \dots, v_k) = dx_{i_1}(v_1) \cdot dx_{i_2}(v_2) \cdots dx_{i_k}(v_k).$$

Іншими словами, це добуток i_1-ї координати першого вектора v_1, i_2-ї координати другого вектора v_2 і т.д.

Задача 2.2.1. Довести такі твердження.

2.2.1.1. Нехай $\alpha \in \mathrm{Poly}^k(V)$ — довільна k-форма. Показати, що тоді

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n a_{i_1,i_2,\dots,i_k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{A=(i_1,i_2,\dots,i_k)\in[n]^k} a_A \cdot \alpha(e_A),$$

для єдиних $a_{i_1,i_2,\dots,i_k} = a_A \in \mathbb{F}$, де $A = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ пробігає множину $[n]^k$ всіх послідовностей з k елементів з $[n]$. Іншими словами, α *однозначно визначається своїми значеннями на k-послідовностях базисних векторів*.

2.2.1.2. Показати, що

$$\boldsymbol{\alpha}_A(e_A) := \boldsymbol{\alpha}_A(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = 1, \qquad \boldsymbol{\alpha}_A(e_B) := \boldsymbol{\alpha}_A(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) = 0,$$

для будь-якої іншої послідовності $B = (j_1, j_2, \dots, j_k) \in [n]^k$ відмінної від A.

2.2.1.3. Вивести з попередніх пунктів, що функції $\{\boldsymbol{\alpha}_A\}_{A\in[n]^k}$, де A пробігає множину $[n]^k$, утворюють базис $\mathrm{Poly}^k(V)$. Яка розмірність цього простору над $\mathbb{F}$?

Задача 2.2.2. Довести такі твердження про симетричні форми.

2.2.2.1. Нехай $\alpha \in \mathrm{Sym}^k(V)$ — довільна симетрична k-форма. Показати, що тоді

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k\le n} a_{i_1,i_2,\dots,i_k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{A=(i_1,i_2,\dots,i_k)\in\mathrm{Mon}_k(n)} a_A \cdot \alpha(e_A),$$

для єдиних $a_{i_1,i_2,\dots,i_k} \in \mathbb{F}$ таких, що $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathrm{Mon}_k(n)$. Іншими словами α однозначно визначається своїми значеннями на k-послідовностях базисних векторів $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$, у яких індекси не спадають.

2.2.2.2. Для кожної неспадної k-послідовності $A \in \mathrm{Mon}_k(n)$ визначимо наступну k-форму

$$\boldsymbol{\beta}_A \colon V^k \to \mathbb{F}, \qquad \boldsymbol{\beta}_A = \sum_{\sigma\in\Sigma(A)} \boldsymbol{\alpha}_{\sigma(A)},$$

де $\boldsymbol{\alpha}_B$, для $B = (i_1, \dots, i_k)$, визначена в задачі 2.2.1.2 як добуток $\prod_{j=1}^k dx_{i_j}$. Перевірити такі властивості.

(а) Нехай $B \in [n]^k$ і $\mathrm{ord}(B)$ — впорядкування цієї послідовності за зростанням. Тоді

$$\boldsymbol{\beta}_A(e_B) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mathrm{ord}(B) = A, \\ 0, & \text{якщо } \mathrm{ord}(B) \neq A. \end{cases}$$

(б) Форми $\{\boldsymbol{\beta}_A\}_{A \in \mathrm{Mon}_k(n)}$, де A пробігає множину $\mathrm{Mon}_k(n)$, утворюють базис $\mathrm{Sym}^k(V)$.

(в) Яка розмірність простору $\mathrm{Sym}^k(V)$ над $\mathbb{F}$? Чи можна отримати рекурсивні формули для її обчислення?

Нагадаємо, що ми ототожнили множину $\mathrm{Fin}_k(n)$ всіх підмножин $[n]$ з підмножиною в $\mathrm{Mon}_k(n) \subset [n]^k$, що складається із строго зростаючих послідовностей.

Задача 2.2.3. Довести такі твердження про кососиметричні форми.

2.2.3.1. Нехай $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(V)$ — довільна кососиметрична k-форма. Показати, що тоді

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\substack{A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset [n], \\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n}} a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{A \in \mathrm{Fin}_k(n)} a_A \cdot \alpha(e_A),$$

для єдиних $a_{i_1, i_2, \dots, i_k} = a_A \in \mathbb{F}$ таких, де $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ пробігає множину всіх k-елементних підмножин в $[n]$.

2.2.3.2. Для кожного $A \in \mathrm{Mon}_k(n)$ визначимо наступну k-форму

$$dx_A \colon V^k \to \mathbb{F}, \qquad dx_A = \sum_{\sigma \in \Sigma(A)} \mathrm{sgn}(\sigma) \boldsymbol{\alpha}_{\sigma(A)},$$

де $\boldsymbol{\alpha}_A$, для $A = (i_1, \dots, i_k)$, визначена в задачі 2.2.1.2 як добуток $\prod_{j=1}^{k} dx_{i_j}$, а $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ — знак перестановки σ.

Перевірити такі властивості.

(а) Нехай $B \in [n]^k$ і $\mathrm{ord}(B)$ — впорядкування цієї k-послідовності за зростанням і $\mathrm{sgn}(B)$ — знак відповідної перестановки. Тоді

$$dx_A(e_B) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(B), & \text{якщо } \mathrm{ord}(B) = A, \\ 0, & \text{якщо } \mathrm{ord}(B) \neq A. \end{cases}$$

(б) Форми $\{dx_A\}_{A \in \mathrm{Fin}_k(n)}$, де A пробігає множину $\mathrm{Fin}_k(n)$, утворюють базис $\mathrm{Asym}^k(V)$. Яка розмірність цього простору над $\mathbb{F}$?

Задача 2.2.4. Нехай $k \ge 1$ і $\alpha \colon V^{k+1} \to \mathbb{F}$ — така полілінійна k-форма, що для кожного $v \in V$ форма $\alpha_v \colon V^k \to \mathbb{F}$, $\alpha_v(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v, v_1, \dots, v_k)$, отримана підстановкою v в перший аргумент, є кососиметричною. Визначимо функцію $\omega \colon V^{k+1} \to \mathbb{F}$ за формулою,

$$\begin{aligned} \omega(v, v_1, \dots, v_k) := \alpha(v, v_1, \dots, v_k) - \alpha(v_1, v, v_2, \dots, v_k) + \cdots \\ + (-1)^i \alpha(v_1, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_k) + \cdots + (-1)^{k+1} \alpha(v_1, \dots, v_k, v). \end{aligned}$$

Показати, що $\omega \in \mathrm{Asym}^{k+1}(V)$.

Відмітимо, що для $k = 1, 2$ форма ω задається такими формулами:

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &:= \alpha(u, v) - \alpha(v, u), & k = 1, \\ \omega(u, v, w) &:= \alpha(u, v, w) - \alpha(v, u, w) + \alpha(v, w, u), & k = 2. \end{aligned}$$

3 Нормальні форми кососиметричних форм

Нехай знову $\dim V = \mathbb{F}^n$ і $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(\mathbb{F}^n)$. Нас цікавитиме таке питання: знайти лінійний ізоморфізм $L\colon V \to V$ такий, щоб $L^*(\alpha)$ мала «якомога простіший вигляд». Такі «найпростіші вигляди» різних об'єктів (функцій, операторів, та ін.) називають *канонічними* або *нормальними формами* таких об'єктів. Наприклад, Жорданова нормальна форма матриці (лінійного оператора) часто є «простішою за інші» через велику кількість нулів. В загальному випадку важко сформулювати що означає той гіпотетично «простіший вигляд». Наступні задачі ілюструють існування *нормальними формами* для 1-, 2- та n-форм на $\mathbb{F}^n$.

3.1 1-форми

Задача 3.1.1. Нехай $\alpha \in \mathrm{Asym}^1(\mathbb{F}^n)$ — кососиметрична 1-форма, тобто лінійна функція $\alpha\colon V \to \mathbb{F}$. Показати, що якщо α не є тотожним нулем, то існує такий лінійний ізоморфізм $L\colon V \to V$, що $L^*(\alpha)\colon V \to \mathbb{F}$ задається формулою

$$L^*(\alpha)(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1.$$

3.2 n-форми

Розглянемо інший крайній випадок. Нехай $I = (1, 2, \dots, n)$. Тоді n-форма з задачі 2.2.3.2:

$$dx_I\colon V^n \to \mathbb{F}, \qquad dx_I = \sum_{\sigma \in \Sigma(I)} \mathrm{sgn}(\sigma)\boldsymbol{\alpha}_{\sigma(I)},$$

називається *визначником* і позначатиметься через $\det$.

Задача 3.2.1. Показати, що при $\dim V = n = 2$, 2-форма

$$\det\colon V \times V \to \mathbb{F},$$

задається формулою:

$$\det\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Задача 3.2.2. Довести, що існує *єдина* полілінійна n-форма

$$\alpha\colon \underbrace{\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n}_{n} \to \mathbb{F}$$

від n векторів в $\mathbb{F}^n$, яка задовольняє такій умові нормування:

- нехай $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (одиниця на i-му місці) — i-й базисний вектор в $\mathbb{R}^n$, тоді

$$\alpha(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Вивести з цього, що $\alpha(v_1, \dots, v_n)$ дорівнює визначникові складеному із координат-стовпців цих векторів.

Описати множину всіх кососиметричних n-форм α, які не обов'язково задовольняють умову нормування.

Задача 3.2.3. Довести, що $\dim \operatorname{Asym}^n(\mathbb{F}^n) = 1$ і що $\det \in \operatorname{Asym}^n(\mathbb{F}^n)$ можна вибрати в якості єдиного базисного вектора.

Задача 3.2.4. Нехай $\lambda\colon V \to V$ — лінійне відображення і L — його матриця. Показати, що індуковане відображення $L^*\colon \operatorname{Asym}^n(\mathbb{F}^n) \to \operatorname{Asym}^n(\mathbb{F}^n)$ є множенням на $\det(L)$, тобто

$$L^*(\alpha) = \det(L) \cdot \alpha.$$

Задача 3.2.5. Вивести з попередньої задачі, що для довільних $n \times n$ матриць A та B,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

3.3 2-форми

Нехай $\alpha \in \operatorname{Asym}^2(\mathbb{F}^n)$, тобто $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{F}$ — кососиметрична білінійна форма. Тоді її зручно задавати матрицею $\Omega = (\alpha(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$ яка складається із значень α на парах базисних векторів.

Базис $\langle e_1, f_1, e_2, f_2, \dots e_k, f_k, g_1, \dots, g_l \rangle$ в V називатиметься *симплектичним для форми* α, якщо

$$\alpha(e_i, f_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad \alpha(e_i, e_j) = \alpha(f_i, f_j) = \alpha(e_i, g_j) = \alpha(f_i, g_j) = 0$$

Іншими словами, матриця α в цьому базисі має вигляд

$$J_{2k,l} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

тобто у неї k блоків $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, l нулів в кінці головної діагоналі, і всі інші елементи Ω також нулі.

Задача 3.3.1. (Лінійна теорема Дарбу) Кожна кососиметрична 2-форма $\alpha \in \operatorname{Asym}^n(\mathbb{F}^2)$ має симплектичний базис.

Іншими словами, існує такий лінійний ізоморфізм $L\colon V \to V$, що матриця $L^*(\alpha)\colon V \to \mathbb{F}$ має вигляд (1).

Еквівалентно, якщо A — матриця α і L — матриця цього ізоморфізму, то $J_{k,l} = L^t \Omega L$.

Зауважимо, що задача пошуку найпростішого вигляду матриці *кососиметричної 2-форми* відрізняється від задачі пошуку найпростішого вигляду матриці *кососиметричного оператора* $A\colon V \to V$. Відмінність полягає в тому, матриці 2-форм та матриці лінійних операторів по-різному поводять себе при замінах базисів: матриці 2-форм замінюються на $L^t A L$, в той час як матриці лінійних операторів замінюються на $L^{-1} A L$. Це дуже суттєва відмінність.

Задача 3.3.2. Нехай

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

— кососиметрична 2×2 матриця. Знайти таку невироджену матрицю L, що

$$L^t A L = J_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3.3.3. Нехай

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

— кососиметрична 3×3 матриця, для деяких a, b, c, причому $a \neq 0$. Знайти таку невироджену матрицю L, що

$$L^t A L = J_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 3.3.4. Нехай

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

— кососиметрична 4×4 матриця, для деяких a, b, c, d, e, f. Знайти таку невироджену матрицю L, що

$$L^t A L = J_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

якщо A вироджена і

$$L^t A L = J_{4,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

якщо A невироджена.

Задача 3.3.5. Доведіть, що для кожної кососиметричної 2-форми $\alpha \in \mathrm{Asym}^n(\mathbb{F}^2)$ ранг її матриці завжди парний.

Задача 3.3.6. Нехай A — кососиметрична $n \times n$ матриця. Покажіть, що якщо n непарне, то A — вироджена.

3.4 Зовнішнє множення кососиметричних форм

Нехай $k, l \geq 1$ і $A = \{i_1, i_2, \dots, i_{k+l}\} \in [n]^{k+l}$ — послідовність з $k+l$ елементів з $[n]$. Буде зручно ввести такі позначення:

$$_k[A] := \{i_1, \dots, i_k\} \in [n]^k, \qquad [A]_l := \{i_{k+1}, \dots, i_{k+l}\} \in [n]^l$$

і називати їх, відповідно, *k-лівою* та *l-правою* частинами A.

Навпаки, якщо $A = \{i_1, \dots, i_k\} \in [n]^k$ і $B = \{j_1, \dots, j_l\} \in [n]^l$, то позначатимемо через

$$A \overrightarrow{\cup} B := \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l\} \in [n]^{k+l}$$

об'єднання цих послідовностей.

Задача 3.4.1. Перевірте, що відповідність

$$[k] \times [l] \to [k+l], \qquad (A, B) \mapsto A \overrightarrow{\cup} B,$$

є бієкцією, обернена до якої задається правилом:

$$[k+l] \to [k] \times [l], \qquad A \mapsto ({}_k[A], [A]_l).$$

Нехай V — (не обов'язково скінченно вимірний) векторний простір над полем $\mathbb{F}$. Нехай далі $v = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$ послідовність з k векторів з V і $\sigma \in \Sigma(k)$ — перестановка множини $[k]$. Тоді через $\sigma(v)$ позначатимемо послідовність

$$\sigma(v) := (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

отриману з v перестановкою її елементів у відповідності з σ.

Припустимо, що $\chi(\mathbb{F}) = 0$. Нехай $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(V)$ і $\beta \in \mathrm{Asym}^l(V)$ — дві кососиметричні форми на V. Визначимо відображення

$$\begin{gathered} \alpha \wedge \beta \colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k+l} \to \mathbb{R}, \\ (\alpha \wedge \beta)(v) := \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in \Sigma(k+l)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \alpha({}_k[\sigma(v)]) \cdot \beta([\sigma(v)]_l). \end{gathered} \tag{2}$$

Воно називається *зовнішнім добутком* α і β.

Наприклад, якщо $\alpha, \beta \in \mathrm{Asym}^1(V)$, то

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1).$$

Якщо $\alpha \in \mathrm{Asym}^1(V)$ і $\beta \in \mathrm{Asym}^2(V)$, то

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2}\Big(&\alpha(v_1)\beta(v_2, v_3) - \alpha(v_1)\beta(v_3, v_2) \\ &- \alpha(v_2)\beta(v_1, v_3) + \alpha(v_1)\beta(v_3, v_1) \\ &+ \alpha(v_3)\beta(v_1, v_2) - \alpha(v_3)\beta(v_2, v_1)\Big) \\ = {}& \alpha(v_1)\beta(v_2, v_3) + \alpha(v_2)\beta(v_3, v_1) + \alpha(v_3)\beta(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Задача 3.4.2. Показати, що для довільних $\alpha \in \mathrm{Asym}^2(V)$, $\beta \in \mathrm{Asym}^2(V)$ і $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V^4$ маємо, що

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge\beta)(v_1,v_2,v_3,v_4) &= \alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4) + \alpha(v_1,v_3)\beta(v_4,v_2) + \alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)\\ &\quad + \alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4) + \alpha(v_2,v_4)\beta(v_3,v_1) + \alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2).\end{aligned}$$

Задача 3.4.3. Показати, що для довільних $\alpha \in \mathrm{Asym}^1(V)$, $\beta \in \mathrm{Asym}^k(V)$ і $(v_0, \dots v_k) \in V^{k+1}$ маємо, що

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge\beta)(v_0,\dots,v_k) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\alpha(v_i)\beta(v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k) =\\ &= \alpha(v_0)\beta(v_1,\dots,v_k) - \alpha(v_1)\beta(v_0,v_2,\dots,v_k)+\\ &\quad + \alpha(v_2)\beta(v_0,v_1,v_3,\dots,v_k) + \dots + (-1)^k\alpha(v_k)\beta(v_0,\dots,v_{k-1}).\end{aligned}$$

Наступна задача дозволяє дати означення зовнішнього добутку форм, яке не вимагає ділення (в полі $\mathbb{F}$) на добуток факторіалів $k!\,l!$ як в формулі (2).

Спочатку нагадаємо, що $\mathrm{Fin}_k(k+l)$ — позначає множину всіх k-елементних підмножин в $[k+l]$ впорядкованих за зростанням. Для кожної такої множини $A \in \mathrm{Fin}_k(k+l)$ ми позначили через $\widehat{A} := \mathrm{ord}([k+l] \setminus A)$ її доповнення в $[k+l]$, а через $\varepsilon_A := \mathrm{sgn}(A \overrightarrow{\cup} \widehat{A})$ — знак перестановки $A \overrightarrow{\cup} \widehat{A}$ множини $[k+l]$.

Задача 3.4.4. Нехай $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(V)$ і $\beta \in \mathrm{Asym}^l(V)$ — дві кососиметричні форми на V. Показати, що формула (2) для зовнішнього добутку $\alpha\wedge\beta$ може бути спрощена до наступного вигляду:

$$(\alpha\wedge\beta)(v) := \sum_{A\in\mathrm{Fin}_k(k+l)} \varepsilon_A\,\alpha(A)\,\beta(\widehat{A}).$$

Означення 3.4.5. *Нехай V — (можливо нескінченно вимірний) векторний простір над полем $\mathbb{F}$ довільної характеристики, і $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(V)$ і $\beta \in \mathrm{Asym}^l(V)$ — дві кососиметричні форми на V. Тоді* зовнішнім добутком *α і β називається відображення $\alpha\wedge\beta\colon V^{k+l} \to \mathbb{F}$ визначене за формулою із задачі 3.4.4:*

$$(\alpha\wedge\beta)(v) := \sum_{A\in\mathrm{Fin}_k(k+l)} \varepsilon_A\,\alpha(A)\,\beta(\widehat{A}). \tag{3}$$

Задача 3.4.6. Довести, такі твердження.

3.4.6.1. Перевірити, що для довільних форм $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(V)$ і $\beta \in \mathrm{Asym}^l(V)$ відображення $\alpha\wedge\beta\colon V^{k+l} \to \mathbb{F}$ визначене за формулою (3) дійсно належить до $\mathrm{Asym}^{k+l}(V)$, тобто є кососиметричною $(k+l)$-формою на V.

3.4.6.2. Показати, що індуковане відображення

$$\wedge\colon \mathrm{Asym}^k(V)\times\mathrm{Asym}^l(V) \to \mathrm{Asym}^k(V), \qquad (\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta,$$

є білінійним. Його називають *зовнішнім множенням*.

3.4.6.3. Довести, що зовнішнє множення є асоціативним, тобто для довільних $\alpha \in \mathrm{Asym}^k(V)$, $\beta \in \mathrm{Asym}^l(V)$, $\gamma \in \mathrm{Asym}^m(V)$, має місце тотожність

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma.$$

Задача 3.4.7. Показати, що $\alpha \wedge \alpha = 0$ для кожної 1-форми $\alpha \colon V \to \mathbb{F}$.

Задача 3.4.8. (Лема Адамара для кососиметричних форм) Нехай $V = \mathbb{F}^n$ — скінченно вимірний простір над $\mathbb{F}$, $\alpha \colon V \to \mathbb{F}$ — 1-форма і $\beta \in \mathrm{Asym}^k(\mathbb{F}^n)$ — k-форма для деякого $k \geq 1$. Довести еквівалентність таких тверджень

1. $\alpha \wedge \beta = 0$;
2. $\beta = \alpha \wedge \omega$ для деякої $(k-1)$-форми $\omega \in \mathrm{Asym}^{k-1}(\mathbb{F}^n)$.

Іншими словами β «ділиться» на α.

4 Диференціальні форми на відкритих множинах в $\mathbb{R}^n$

Питання розглянуті в лекції 1.

1. Означення диференціальної форми в $\mathbb{R}^n$.
2. Диференціал диференціальної форми в $\mathbb{R}^n$ та його властивості.
3. Комплекс де Рама, когомології де Рама.

Задача 4.0.1. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина і $\Lambda = \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$ — простір гладких функцій на U, або 0-форм на U. Яка розмірність вільного модуля

$$\Omega^i(U) = \Lambda\big[\{dx_A\}_{A\subset\{1,\dots,n\},|A|=i}\big]$$

над кільцем Λ?

Задача 4.0.2. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина. Довести, що для довільних диференціальних форм $\alpha \in \Omega^p(U)$, $\beta \in \Omega^q(U)$ виконані тотожності

4.0.2.1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha|\,|\beta|}\beta \wedge \alpha$.

4.0.2.2. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge d\beta$.

4.0.2.3. $d(d(\alpha)) \equiv 0$.

4.0.2.4. Показати, що тотожність $d^1 \circ d^0(f) \equiv 0$ для гладкої функції f еквівалентна тому, що $f''_{x_ix_j} \equiv f''_{x_jx_i}$ для всіх пар індексів i, j.

Задача 4.0.3. Обчислити когомології де Рама $H^*_{dR}(U)$ таких відкритих множин $U \subset \mathbb{R}$:

4.0.3.1. $\mathbb{R}$;

4.0.3.2. $(0,1) \cup (1,2)$;

4.0.3.3. об'єднання скінченного числа попарно неперетинних інтервалів.

Задача 4.0.4. Нехай $f : U \to \mathbb{R}$ — C^1 функція на відкритій множині $U \subset \mathbb{R}^n$. Припустимо, що $f'_{x_i} \equiv 0$ для всіх i, тобто $df \equiv 0$. Чи правда, що f — постійна на U?

Описати ядро диференціала

$$d = d^0\colon \Omega^0(U) \to \Omega^1(U), \qquad df \equiv d^0 f := f'_{x_1}dx_1 + \cdots f'_{x_n}dx_n,$$

тобто дати відповідь на питання з яких саме функцій складається $\ker(d^0)$?

Обчислити групу нульових когомологій де Рама

$$H^0_{dR}(U) := \frac{\ker(d^0\colon \Omega^0(U) \to \Omega^1(U))}{\operatorname{im}(d^{-1}\colon \Omega^{-1}(U) \to \Omega^0(U))}.$$

Який геометричний (чи топологічний) зміст цієї групи Ви бачите?

5 Диференціальні форми на многовидах

5.1 Фактор-простори

Нехай M — топологічний простір, $\alpha = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ — відкрите покритття M. Для кожного $i \in \Lambda$ нехай $\phi_i\colon U_i \subset M$ — природне вкладення. Нехай далі $U = \bigsqcup_{i\in\Lambda} U_i$ — диз'юнктне об'єднання елементів покриття і $p = \bigsqcup_{i\in\Lambda} : U \to M$ — відображення визначене за формулою $p(x) = \phi_i(x)$, якщо $x \in U_i$.

Задача 5.1.1. Показати, що p є факторним відображенням, тобто підмножина $A \subset M$ — відкрита тоді і лише тоді, коли $p^{-1}(A)$ відкрита в U.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на U індуковане p, тобто $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $p(x) = p(y)$. Іншими словами, $x \in U_a$ та $y \in U_b$, то $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли вони представляють одну і ту ж точку в M.

Задача 5.1.2. Покажіть, що тоді коректно визначене відображення $\hat{p}\colon U/_{\sim} \to M$, яке ставить у відповідність класу $[x]$ точки $x \in U$, образ $p(x)$. Зокрема, має місце комутативна діаграма

$$
\begin{tikzcd}
U = \bigsqcup\limits_{i\in\Lambda} U_i \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\
& U/_{\sim} \arrow[ur, "\hat{p}", "\cong"'] &
\end{tikzcd}
$$

де π — канонічна проєкція.

Задача 5.1.3. Доведіть, що $\hat{p}\colon U/_{\sim} \to M$ є гомеоморфізмом.

5.2 Векторні розшарування

Нехай M — топологічний простір і $\alpha = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ — відкрите покриття M. Припустимо також, що для кожного $i \in \Lambda$ задано *гомеоморфізм* $\phi_i\colon U_i \to X_i$ на деякий топологічний простір X_i. Пару $\alpha_i := (U_i, \phi_i)$ називатимемо ϕ_i *картою* на M, а сукупність всіх пар $\alpha = \{(U_i, \phi_i\}_{i\in\Lambda}$ — *атласом.*

Для $i, j \in \Lambda$ буде зручно позначати через $X_{i,j} := \phi_i(U_i \cap U_j)$ образ перетину відкритих множин $U_i \cap U_j$ в X_i під дією ϕ_i.

Задача 5.2.1. Показати, що відображення

$$\tau_{i,j} = \phi_j \circ \phi_j^{-1}\colon \phi_i(U_i \cap U_j) \equiv X_{i,j} \to X_{j,i} \equiv \phi_j(U_i \cap U_j)$$

є гомеоморфізмом. Воно називатиметься *відображенням переходу між картами* α_i *та* α_j.

Довести також, що $\tau_{i,j}$ задовольняють такі умови:

1. $\tau_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i\times V}$ для всіх $i \in \Lambda$;
2. $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}^{-1}$ для всіх $i, j \in \Lambda$;
3. $\tau_{j,k} \circ \tau_{i,j} = \tau_{i,k}$ на $X_{i,j} \cap X_{i,k} = \phi_i\bigl(U_i \cap U_j \cap U_k\bigr)$ для всіх $i, j, k \in \Lambda$.

Нехай далі V — топологічний векторний простір над полем F (наприклад $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, гільбертів простір l^2 тощо),

$$Q := \bigsqcup_{i\in\Lambda} X_i \times V$$

диз'юнктне об'єднання добутків X_i на V і

$$\psi\colon Q \to M, \qquad \psi(x, u) = \phi_i^{-1}(x) \text{ для } x \in X_i.$$

Припустимо, що для кожної пари $i, j \in \Lambda$ такої, що $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ визначено *неперервне відображення*

$$\sigma_{i,j} = X_{i,j} \times V \to X_{j,i} \times V$$

такий, що для всіх $(x,v) \in X_{i,j} \times V$

$$\sigma_{i,j}(x,v) = \bigl(\tau_{i,j}(x), J_{i,j}(x)v\bigr)$$

де $J_{i,j}(x)\colon V \to V$ — деякий лінійний ізоморфізм, який залежить від $x \in X_{i,j}$, причому виконані такі тотожності

(J1) $J_{i,i}(x) = \mathrm{id}_V$ для всіх $i \in \Lambda$ та $x \in X_i$;
(J2) $J_{i,j}(x) = J_{j,i}^{-1}(\tau_{i,j}(x))$ для всіх $i,j \in \Lambda$ та $x \in X_{i,j}$;
(J3) $J_{j,k}(\tau_{i,j}(x))J_{i,j}(x) = J_{i,k}(x)$ для всіх $i,j,k \in \Lambda$ та $x \in X_{i,j} \cap X_{i,k} = \phi_i\bigl(U_i \cap U_j \cap U_k\bigr)$.

Задача 5.2.2. Перевірити, що ці умови на $J_{i,j}(x)$ означають, що

1. $\sigma_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i \times V}$ для всіх $i \in \Lambda$;
2. $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}^{-1}$ для всіх $i,j \in \Lambda$;
3. $\sigma_{j,k} \circ \sigma_{i,j} = \sigma_{i,k}$ на $X_{i,j} \cap X_{i,k}$ для всіх $i,j,k \in \Lambda$.

Виведіть звідси, що $\sigma_{i,j}$ є *гомеоморфізмом*.

Нехай $GL(V)$ — група всіх лінійних ізоморфізмів V. Тоді ми маємо такі дані:

- атлас $\alpha = \{(U_i, \phi_i\colon U_i \to X_i)\}_{i\in\Lambda}$ на M;
- для кожної пари $i,j \in \Lambda$ відображення $J_{i,j}\colon X_{i,j} = \phi_i(U_i \cap U_j) \to GL(V)$, які задовольняють тотожності (J1), (J2), (J3), і при цьому кожне $\sigma_{i,j}$ є неперервним.

Визначимо наступне відношення $\sim$ на Q. Якщо $(x,u) \in X_i \times V$ і $(y,v) \in X_j \times V$, то

$$(x,u) \sim (y,v) \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (y,v) = \sigma_{i,j}(x,v).$$

Задача 5.2.3. Довести, що $\sim$ є відношенням еквівалентності на Q.

Клас еквівалентності елемента $(x,u) \in Q$ позначатимемо через $[x,u]$. Нехай $E = Q/_\sim$ — множина класів еквівалентності $\sim$ і $\pi\colon Q \to E$ — фактор-відображення, тобто

$$\pi(x,u) = [x,u].$$

Задамо на E факторну топологію по відношенню до π, тобто підмножина $A \subset E$ відкрита тоді і лише тоді, коли $\pi^{-1}(A)$ є відкритою в Q.

Задача 5.2.4. Показати, що для довільних $(x,u),(y,v) \in Q$ з того, що $(x,u) \sim (y,v)$ виплиає, що $\psi(x,u) = \psi(y,v)$. Вивести звідси, що існує єдине відображення $p\colon E \to M$ таке, що $\psi = p \circ \pi$, тобто має місце така комутативна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
Q = \bigsqcup\limits_{i\in\Lambda} X_i \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & E = Q/_\sim \arrow[d, "p"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Наступна задача показує, що для кожної точки $y \in M$ її прообраз $p^{-1}(y) \subset E$ має структуру векторного простору ізоморфного V.

Задача 5.2.5. Нехай $y \in U_i$ для деякого $i \in \Lambda$ і $x = \phi_i(y) \in X_i$.

5.2.5.1. Довести, що наступне відображення є бієкцією:

$$\pi_x = \pi|_{x\times V}\colon x \times V \to p^{-1}(y), \qquad \pi_x(x,u) = \pi(x,u) = [x,u]. \tag{4}$$

5.2.5.2. Визначимо на $p^{-1}(y)$ операції додавання та множення на елементи поля F за таким правилом: якщо $u, v \in V$ і $f \in F$, то

$$[x,u] + [x,v] := [x, u+v], \qquad\qquad f[x,u] := [x, fu].$$

Іншими словами, перенесемо на $p^{-1}(y)$ структуру векторного простору з V за допомогою бієкції π_x. Показати, що тоді $p^{-1}(y)$ стає векторним простором над F, причому відображення π_x є ізоморфізмом векторних просторів.

5.2.5.3. Покажіть, що якщо $y \in U_i \cap U_j$ для деяких $i, j \in \Lambda$, $x = \phi_i(y) \in X_{i,j} \subset X_i$, $x' = \phi_j(y) \in X_{j,i} \subset X_i$, то має місце комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
x \times V \arrow[rr, "\sigma_{i,j}\colon\, (x,u) \mapsto (x', J_{i,j}(x)u)"] \arrow[dr, "\pi_x"'] & & x' \times V \arrow[dl, "\pi_{x'}"] \\
& \pi^{-1}(y) &
\end{tikzcd}$$

Виведіть звідси, що якщо $u, v, u', v' \in V$ та $f \in F$ такі, що $[x,u] = [x', u'], [x,v] = [x', v'] \in p^{-1}(y)$, то

$$[x, u+v] = [x', u'+v'], \qquad\qquad [x, fu] = [x', fu'].$$

Зробіть висновок, що структура векторного простору на $p^{-1}(y)$ не залежить від множини $U_i \in \alpha$, яка містить точку y.

Класс еквівалентності $p^{-1}(x)$ точки $x \in M$ також познатимемо через E_x. Розглянемо приклади.

5.3 Сума Уітні векторних розшарувань

5.4 Полілінійні форми на векторному розшаруванні

Нехай $p\colon E \to M$ — векторне розшарування і W — деякий лінійний простір. Відображення $\omega\colon E \to W$ називається 1-*формою із значеннями в* W, якщо для кожної точки $x \in M$ обмеження

$$\omega|_{E_x}\colon E_x = p^{-1}(x) \to W$$

є лінійним.

Більш загально, відображення $\omega\colon \oplus_k E \to W$ називається *(симетричною, кососиметричною) k-формою із значеннями в* W, якщо для кожної точки $x \in M$ обмеження на її шар

$$\omega|_{\oplus_k E_x}\colon\ \oplus_k E_x \to W$$

є полілінійним (симетричним, кососиметричним по всіх аргументах).

Задача 5.4.1. Нехай $k \geq 1$ і $\alpha \oplus_{k+1} E \to W$ — така $(k+1)$-форма, що для кожного $x \in M$ і $v \in E_x$ форма

$$\alpha_v\colon\ \oplus_{k+1} E \to W, \qquad \alpha_v(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v, v_1, \dots, v_k),\ v_1, \dots, v_k \in E_x,$$

отримана підстановкою v в перший аргумент, є кососиметричною. Визначимо відображення $\omega\colon \oplus_{k+1} E \to W$ за формулою,

$$\omega(v, v_1, \dots, v_k) := \alpha(v, v_1, \dots, v_k) - \alpha(v_1, v, v_2, \dots, v_k) + \cdots \\ + (-1)^i \alpha(v_1, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_k) + \cdots + (-1)^{k+1}\alpha(v_1, \dots, v_k, v).$$

для всіх $v, v_1, \dots, v_k \in E_y$, $y \in M$.

Відмітимо, що для $k = 1, 2$ форма ω задається такими формулами:

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &:= \alpha(u, v) - \alpha(v, u), && k = 1, \\ \omega(u, v, w) &:= \alpha(u, v, w) - \alpha(v, u, w) + \alpha(v, w, u), && k = 2. \end{aligned}$$

5.5 Многовид, як «фактор-простір атласу»

Нехай M — многовид і $\alpha = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ — атлас на M. Тобто $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ — це відкрите покриття M, а кожне $\phi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ — відкрите вкладення, тобто гомеоморфізм на деяку відкриту підмножину $\phi_i(U_i)$ в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $Q = \bigsqcup\limits_{i\in\Lambda} \phi_i(U_i)$ — диз'юнктне об'єднання цих відкритих підмножин $\mathbb{R}^n$, і $\sim$ — відношення еквівалентності визначене наступним чином:

- Якщо $x \in \phi_i(U_i)$ і $y \in \phi_j(U_j)$, то $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$, $y \in \phi_j(U_i \cap U_j)$ і $y = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(x)$.

Іншими словами, $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $\phi_i^{-1}(x) = \phi_j^{-1}(y) \in M$, тобто коли ці точки представляють одну у ту ж точку на M.

Наділимо $Q/_\sim$ індукованою фактор-топологією.

Нехай також $\Psi = \bigsqcup\limits_{i\in\Lambda} \phi_i^{-1}\colon Q \to M$ — відображення, що складаєтся з обернених до ϕ_i відображень. Тобто, якщо $x \in \phi_i(U_i)$, то $\Psi(x) = \phi_i^{-1}(x)$. Зокрема, Ψ гомеоморфно відображає $\phi_i(U_i)$ на U оберненим гомеоморфізмом ϕ_i^{-1}.

Задача 5.5.1. Покажіть, що $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $\Psi(x) = \Psi(y)$. Зокрема, Ψ індукує неперервне відображення $\hat{\Psi}\colon Q/_\sim \to M$, яке робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{tikzcd} Q = \bigsqcup\limits_{i\in\Lambda} \phi_i(U_i) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\ & Q/_\sim \arrow[ur, "\hat{\Psi}", "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

де π — канонічна проєкція.

Задача 5.5.2. Покажіть, що $\hat{\Psi}$ є гомеоморфізмом.

Задача 5.5.3. Покажіть, що якщо $f\colon M \to \mathbb{R}$ — довільна функція, то $f \circ \Psi|_{U_i}\colon U_i \to \mathbb{R}$ — є локальним зображенням f в карті (U_i, ϕ_i).

Таким чином, кожен многовид є фактор-простором диз'юнктного об'єднання образів своїх карт, відносно склейки, яка задається відображеннями переходу між відповідними картами. Більш того, фактор-відображення Ψ «містить в собі локальні представлення кожної функції на M у всіх картах атласу α».

Така точка зору є зручною, для опису різних розшарувань асоційованих з цим многовидом.

5.6 Дотичне розшарування до многовиду

Нехай $x \in M$ і (U, ϕ) — карта на M така, що $x \in U$. Нехай $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, — $\mathcal{C}^1$-крива, що проходить через точку x, тобто $\gamma(0) = x$, а відображення $\phi \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ належить класу $\mathcal{C}^1$. Тоді вектор $(\phi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n$ називається *дотичний вектором до x відносно карти (U, ϕ)*.

Скажемо, що дві $\mathcal{C}^1$ криві $\gamma, \delta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, що проходять через точку x *еквівалентні в цій точці відносно карти (U, ϕ)*, якщо вони мають однаковий дотичний вектор в цій точці відносно даної карти, тобто $(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \delta)'(0) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 5.6.1. Показати, що якщо карти (U, ϕ) та (V, ψ) — $\mathcal{C}^1$-узгоджені і $x \in U \cap V$, то γ і δ еквівалентні відносно (U, ϕ) тоді і лише тоді, коли вони еквівалентні відносно (V, ψ), тобто рівність $(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \delta)'(0)$ еквівалентна рівності $(\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \delta)'(0)$.

Звідси випливає такий наслідок:

Задача 5.6.2. Якщо α — $\mathcal{C}^1$-атлас на M, то γ і δ еквівалентні відносно деякої карти $(U, \phi) \in \alpha$ тоді і лише тоді, коли вони еквівалентні відносно будь-якої іншої карти $(V, \psi) \in \alpha$, яка містить x.

Якщо умови зієї задачі виконані, то говоритимемо, що γ *і* δ γ *і* δ *еквівалентні в точці x відносно атласу α*.

Означення 5.6.3. *Нехай α — фіксований $\mathcal{C}^k$ атлас на M і $x \in M$. Класи еквівалентності $\mathcal{C}^1$-кривих в точці $x \in M$ (відносно атласу α) називаються* дотичними векторами *в цій точці.*

Сукупність всіх дотичних векторів в точці x позначається через T_xM і називається дотичним простором в точці x *(відносно атласу α).*

Диз'юнктне об'єднання $TM := \bigsqcup\limits_{x \in M} T_xM$ всіх дотичних просторів по всіх точках $x \in M$ називається дотичним розшаруванням M *(відносно атласу α). При цьому відображення $p\colon TM \to M$, $p(T_xM) = x$, яке переводить весь дотичний простір T_xM в точці x в цю точку, теж часто називають* дотичним розшаруванням M.

Надалі з контексту завжди буде зрозуміло йде мова про TM чи p. Якщо атлас фіксований, то ми не будем про нього згадувати говорячи про дотичні вектори.

Задача 5.6.4. Нехай $x \in M$ і $(U, \phi) \in \alpha$ — карта, що місить x. Показати, що відповідність $\gamma \mapsto (\phi \circ \gamma)'(0)$, яка співставляє $\mathcal{C}^1$ кривій $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ в точці x вектор $(\phi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n$, індукує *бієкцію*

$$\hat{\phi}_x\colon T_xM \to \mathbb{R}^n, \qquad \hat{\phi}_x([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0).$$

Це дозволяє ввести на T_xM структуру векторного простору над $\mathbb{R}$, відносно якої $\hat{\phi}_x$ є ізоморфізмом. А саме, визначимо операції додавання $+_\phi$ та множення на скаляр $\cdot_\phi$ на T_xM наступним чином

$$v \ +_\phi \ w := \hat{\phi}_x^{-1}\big(\hat{\phi}_x(v) + \hat{\phi}_x(w)\big), \qquad\qquad t \ \cdot_\phi \ v := \hat{\phi}_x^{-1}\big(t\hat{\phi}_x(v)\big),$$

для всіх $v, w \in T_xM$ та $t \in \mathbb{R}$.

З іншого боку, наступна задача показує, що ця структура векторного простору на TxM не залежить від конкретної карти $(U, \phi) \in \alpha$, хоча ототожнення $\hat{\phi}_x\colon T_xM \to \mathbb{R}^n$ суттєво залежить від ϕ.

Задача 5.6.5. Показати, що для довільних карт $(U,\phi),(V,\psi) \in \alpha$ таких, що $x \in U \cap V$, відображення

$$\hat{\psi}_x \circ (\hat{\phi}_x)^{-1} \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{(\hat{\phi}_x)^{-1}} T_xM \xrightarrow{\hat{\psi}_x} \mathbb{R}^n$$

є лінійним ізоморфізмом, який задається матрицею Якобі відображення $\psi^{-1}\phi$ в точці $\phi(x)$.

Вивести звідси, що для всіх $v, w \in T_xM$ та $t \in \mathbb{R}$

$$v \ +_\phi \ w \ = \ v \ +_\psi \ w, \qquad\qquad t \ \cdot_\phi \ v \ = \ t \ \cdot_\psi \ v.$$

Іншими словами, структура векторного простору на T_xM не залежить від конкретної карти $(U,\phi) \in \alpha$.

Зауважимо, що дотичні вектори визначаються класами еквівалентності кривих в деякій точці. Наша наступна мета — оцінити близькість дотичних векторів в близьких точках. Іншими словами, ми хочемо ввести на TM якусь «природну топологію» яка враховувала б близькість кривих, що визначають дотичні ввектори.

Відмітимо, що кожна карта (U,ϕ) дає ототожнення $\hat{\phi}_x \colon T_xM \to \mathbb{R}^n$ *одночасно для всіх точок* $x \in U$. А тому, досить природно шукати таку топологію на TM, щоб для кожної карти (U,ϕ) бієкція

$$\bigsqcup_{x\in U} T_xM \to U \times \mathbb{R}^n, \qquad T_xM \ni v \longmapsto \hat{\phi}_x(v) \in \mathbb{R}^n$$

було гомеоморфізмом. Виявляється що це можна зробити, але потрібно «відображати в протилежну сторону», тобто представити TM як певний фактор-простір.

Нехай $\alpha = \{(U_i,\phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ — $\mathcal{C}^k$ атлас на M, $k \geq 1$ і

$$Q = \bigsqcup_{i\in\Lambda} \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

і $\sim$ — відношення еквівалентності визначене наступним чином:

- Якщо $(x,u) \in \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ і $(y,v) \in \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^n$, то $(x,u) \sim (y,v)$ тоді і лише тоді, коли $x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$, $y \in \phi_j(U_i \cap U_j)$ і

$$y = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), \qquad v = J_x(\phi_j \circ \phi_i^{-1})u,$$

де $J_x(\phi_j \circ \phi_i^{-1})$ — матриця Якобі відображення $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ переходу між цими картами в точці x. Наділимо $Q/_\sim$ індукованою фактор-топологією.

Нехай також $\Psi \colon Q \to TM = \bigsqcup_{x\in M} T_xM$ — відображення, яке ставить у відповідність парі $(x,u) \in \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ дотичний вектор в точці $\phi_i^{-1}(x) \in U_i$, що визначається кривою $\gamma \colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U_i$, $\gamma(t) = \phi_i^{-1}\big(x + tu\big)$.

Задача 5.6.6. Покажіть, що $(x,u) \sim (y,v)$ тоді і лише тоді, коли $\Psi(x,u) = \Psi(y,v)$. Зокрема, Ψ індукує неперервне відображення $\hat{\Psi} \colon Q/_\sim \to TM$, яке робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{tikzcd}
Q = \bigsqcup_{i\in\Lambda} \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \\
& Q/_\sim \arrow[ur, "\hat{\Psi}", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

де π — канонічна проєкція.

Задача 5.6.7. Покажіть, що $\hat{\Psi}$ є бієкцією.

Ця бієкція дозволяє ввести на TM топологію, відносно якої $\hat{\Psi}$ буде гомеоморфізмом.

5.7 Атласи з єдиної карти

Нехай M — відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$ і $\phi\colon M \subset \mathbb{R}^n$ — відображення включення. Тоді M має $\mathcal{C}^\infty$ атлас $\alpha = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$, який складається з однієї карти, що задається ϕ. Відповідна гладка структура на M називається *канонічною*.

Задача 5.7.1. Показати, що дотичне розшарування TM є тривіальним. А саме, в попередніх позначеннях

5.7.1.1. $Q = M \times \mathbb{R}^n$;

5.7.1.2. відношення еквівалентності $\sim$ на Q тотожне з рівністю, тобто $(x, u) \sim (y, v)$ тоді і лише тоді, коли $x = y$ і $u = v$;

5.7.1.3. відображення $\Psi\colon Q = M \times \mathbb{R}^n \to TM = Q/_\sim = Q$ є бієкцією, а отже і гомеоморфізмом

Означення 5.7.2. *Нехай M — многовид класу $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, і $p\colon TM \to M$ — його дотичне розшарування. Відображення $\Phi\colon M \times \mathbb{R}^n \to TM \cong M \times \mathbb{R}^n$ називається* тривіалізацією *дотичного розшарування, якщо*

1. $\Phi(T_x M) = x \times \mathbb{R}^n$ для всіх $x \in M$, тобто має місце комутативна діаграма:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & M \times \mathbb{R} \arrow[dl, "(x,v)\mapsto x"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

2. Φ лінійне на з*є гомеоморфізмом;*

Многовид, у якого дотичне розшарування тривіальне називається *паралелізовним.*

5.8 Паралелізовні многовиди

Многовид, у якого дотичне розшарування тривіальне називається *паралелізовним.* Тоді кожен *ізоморфізм розшарувань* $\Phi\colon TM \cong M \times \mathbb{R}^n$ називається *тривіалізацією* TM.

Задача 5.8.1.

5.9 Диференціал відображення в паралелізовний многовид

Нехай D — паралелізовний многовид і $\Phi\colon TD \cong D \times \mathbb{R}^n$ деяка тривіалізація його дотичного розшарування TD яка належить класу $\mathcal{C}^k$.

Позначимо через $p\colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $p(x, v) = v$, проєкцію на другу координату («в дотичні вектори»).

Нехай далі M — $\mathcal{C}^{k+1}$-многовид, $k \geq 1$ і $f\colon M \to D$ — $\mathcal{C}^{k+1}$-відображення. Тоді наступна композиція дотичного відображення Tf, тривіалізації Φ та проєкції p:

$$df\colon TM \xrightarrow{Tf} TD \xrightarrow{\Phi} D \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$$

називається *диференціалом* f (відносно тривіалізації Φ) і позначається через df.

Задача 5.9.1. 5.9.1.1. Покажіть, що df є відображенням класу $\mathcal{C}^k$.

5.9.1.2. Покажіть, що для кожної точки $x \in M$ обмеження $df|_{T_xM}\colon T_xM \to \mathbb{R}^n$ є лінійним відображенням.

Зокрема, якщо D — відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$, то ми маємо «канонічну» тривіалізацію із задачі 5.7.1.

Задача 5.9.2. Нехай $M \subset \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — відкриті підмножина, і $f\colon M \to D$ — $\mathcal{C}^k$-відображення, $k \geq 1$.

5.9.2.1. Показати, що в цій ситуації $df\colon TM \equiv M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ задається формулою:

$$df(x, v) = J(f, x)v,$$

де $x \in M$, $J(f, x)$ — матриця Якобі f в точці x і $v \in \mathbb{R}^m$.

5.9.2.2. Зокрема, при $k = 1$, $df\colon TM \equiv M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ визначається так:

$$df(x, v_1, \dots, v_m) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x)v_i,$$

де $x \in M$, і $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$.

5.9.2.3. Перевірте, що обмеження df на кожен дотичний простір T_xM є лінійним.

Нехай G — група Лі. Тоді її дотичне розшарування є тривіальним і існує канонічний ізоморфізм $TG \to G \times T_eG$ дотичного розхшарування до G на добуток G і алгебри Лі T_eG цієї групи, тобто дотичного простору в одиниці e.

Тому для кожного диференційовного відображення $f\colon M \to G$ визначений його диференціал $df\colon TM \to T_eG$ із значеннями в алгебрі Лі групи G.

5.10 Кратні суми Уітні дотичного розшарування до многовиду

Нехай знову M — многовид і $\alpha = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ — $\mathcal{C}^k$-атлас на M. Нам буде потрібна конструкція кратної суми Уітні $\bigoplus\limits_m TM$ дотичного розшарування многовиду TM.

Нехай $m \geq 1$ і $Q = \bigsqcup\limits_{i\in\Lambda} \phi_i(U_i) \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m}$, а $\sim$ — відношення еквівалентності визначене наступним чином: якщо

$$(x, u_1, \dots, u_m) \in \phi_i(U_i) \times (\mathbb{R}^n)^m \qquad \text{і} \qquad (y, v_1, \dots, v_m) \in \phi_j(U_j) \times (\mathbb{R}^n)^m,$$

то $(x, u_1, \dots, u_m) \sim (y, v_1, \dots, v_m)$ тоді і лише тоді, коли

- $x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$
- $y \in \phi_j(U_i \cap U_j)$
- $y = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(x)$
- $v_k = J_x(\phi_j \circ \phi_i^{-1})u_k$ для всіх $k = 1, \dots, m$.

Фактор-простір $Q/_\sim$ наділений індукованою фактор-топологією називається *m-кратною сумою Уітні дотичного розшарування* TM і позначається $\bigoplus\limits_m TM := Q/_\sim$.

Задача 5.10.1. Довести такі твердженння.

5.10.1.1. Відображення $p\colon Q \to M$, $p(x, v_1, \dots, v_m) = x$, є векторним розшаруванням.