1. Задачі по курсу «Диференціальні форми»

1.1. Когомології де Рама.

Задача 1.1.1. Обчислити когомології де Рама $H^*_{dR}(U)$ та когомології де Рама з компактними носіями $H^{c,*}_{dR}(U)$ таких відкритих множин U:
1.1.1.1. $\mathbb{R}$;

1.1.1.2. $(0,1) \cup (1,2)$;

1.1.1.3. об'єднання скінченного числа попарно неперетинних інтервалів.

Задача 1.1.2. Нехай U – відкрита підмножина в $\mathbb{R}^n$, яка складається з k компонент лінійної зв'язності. Обчислити нульову групу когомологій де Рама $H^0_{dR}(U)$.

Задача 1.1.3. Довести, що має для довільних модулів A_i, $i \in J$, та B над комутативним кільцем Λ має місце ізоморфізм:

$$\Big(\bigoplus_{i\in J} A_i\Big) \otimes B \cong \bigoplus_{i\in J}(A_i \otimes B)$$

Задача 1.1.4. Нехай M – гладкий многовид. Довести, що існує канонічний ізоморфізм наступних модулів над $\mathcal{C}^\infty(U)$:

- простір C^∞ функцій $\alpha : TM \to \mathbb{R}$, які є лінійними на дотичних просторах T_xM до M в усіх точках $x \in M$;
- простір C^∞ перерізів $s : M \to T^*M$ кодотичного розшарування, тобто диференціальних 1-форм на M.

1.2. **Розбиття одиниці.**

Задача 1.2.1. Нехай $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція, визначена за формулою

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Показати, що α є функцією класу $\mathcal{C}^\infty$.

Задача 1.2.2. Використовуючи попередню функцію для кожних 4-х чисел $a < b < c < d$ побудувати C^∞ функцію $\delta\colon \mathbb{R} \to [0;+1]$, яка має такі властивості

(1) $\alpha = 0$ на $(-\infty; a] \cup [d; +\infty)$;
(2) $\alpha = 1$ на $[b, c]$.

Нехай M — топологічний простір. Сім'я підмножин $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ в M називається *локально скінченною*, якщо у кожної точки $x \in M$ існує окіл V, який перетинає лише скінченне число елементів з $\mathcal{U}$.

Задача 1.2.3. Покажіть, що для довільної локально скінченної сім'ї замкнених множин $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$, кожна точка $x \in M$ належить лише скінченному числу елементів з $\mathcal{U}$.

Задача 1.2.4. Покажіть, що для довільної локально скінченної сім'ї замкнених множин $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ її об'єднання $U = \bigcup\limits_{i\in\Lambda} U_i$ є замкненою множиною.

Нехай $\mu\colon M \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Носієм μ називається замикання множини тих точок в M, в яких μ приймає ненульові значення, тобто наступна множина:

$$\operatorname{supp}(\mu) := \overline{\mu^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)} = \overline{\{x \in M \mid \mu(x) \neq 0\}} = M \setminus \operatorname{Int}\left(\mu^{-1}(0)\right).$$

Задача 1.2.5. Знайти носії наступних функцій на прямій

$$f(x) = x^3, \qquad f(x) = cos(x), \qquad f(x) = -6x, \qquad f(x) = 0.$$

Задача 1.2.6. Покажіть, що для довільного ненульового многочлена $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ його носій тотожний з $\mathbb{R}$.

Задача 1.2.7. Покажіть, що для довільного ненульового многочлена $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ від n зміних його носій тотожний з $\mathbb{R}$.

Задача 1.2.8. (*) Нехай $U \subset \mathbb{C}$ — відкрита зв'язна підмножина в комплексній площині і $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфна функція. Припустимо, що f не є тотожним нулем. Покажіть, що носії її дійсної та уявної частини тотожні з U, тобто

$$\operatorname{supp}(Re(f)) = \operatorname{supp}(Im(f)) = U.$$

Задача 1.2.9. Покажіть, що якщо $f\colon M \to \mathbb{R}$ — не є тотожним нулем, то $\operatorname{supp}(f)$ є замкненою множиною з непорожньою внутрішністю.

Задача 1.2.10. Доведіть, що для довільних невід'ємних неперервних функцій $\alpha, \beta\colon M \to [0; +\infty)$,

$$\operatorname{supp}(\alpha + \beta) = \operatorname{supp}(\alpha) \cup \operatorname{supp}(\beta).$$

Задача 1.2.11. Доведіть, що для довільних неперервних функцій $\alpha, \beta\colon M \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{supp}(\alpha\beta) = \operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta).$$

Задача 1.2.12. Нехай $\{\mu_i\colon M \to \mathbb{R}\}_{i\in\Lambda}$ — сім'я неперервних функцій. Припустимо, що сім'я їх носіїв $\{\operatorname{supp}(\mu_i)\}_{i\in\Lambda}$ є локально скінченною. Довести такі твердження:

(1) Для кожної точки $x \in M$ лише скінченне число значень $\mu_i(x)$, $i \in \Lambda$, відмінне від нуля. Зокрема, коректно визначена функція

$$\mu\colon M \to \mathbb{R}, \qquad \mu(x) = \sum_{i\in\Lambda} \mu_i(x).$$

(2) Показати, що μ є неперервною.

Розбиття одиниці на M — це сім'я неперервних функцій $\{\mu_i\colon M \to [0;1]\}_{i\in\Lambda}$ які задовольняють наступні умови

(P1) сім'я носіїв $\{\mathrm{supp}(\mu_i)\}_{i\in\Lambda}$ є локально скінченною;
(P2) сім'я внутрішностей їх носіїв $\{\mathrm{Int}\,(\mathrm{supp}(\mu_i))\}_{i\in\Lambda}$ утворює покриття M;
(P3) для кожної точки $x \in M$, $\sum_{i\in\Lambda} \mu_i(x) = 1$.

Задача 1.2.13. Нехай $\{\mu_i\colon M \to [0;+\infty)\}_{i\in\Lambda}$ сім'я неперервних невід'ємних функцій, які задовольняють умови (P1) та (P2). Нехай також $\mu\colon \mathbb{R} \to [0;+\infty)$, $\mu(x) = \sum_{i\in\Lambda} \mu_i(x)$ — їх поточкова сума. Показати, що

(1) $\mu(x) > 0$ для кожної точки $x \in M$;
(2) сім'я фукцій $\nu_i\colon M \to [0;1]$, $\nu_i(x) = \mu_i(x)/\mu(x)$, є розбиттям одиниці.

1.3. **Орієнтовні многовиди.** Зафіксуємо деяке k таке, що $1 \leq k \leq \infty$. Для спрощення викладу, скрізь нижче вважатимемо, що всі многовиди і атласи на них належать класу $\mathcal{C}^k$. Так само, слово *узгоджені* по відношенню до карт чи атласів означатиме $\mathcal{C}^k$ *узгоджені.*

Нехай $u = (U, \phi)$ та $v = (V, \psi)$ — $(\mathcal{C}^k)$ узгоджені карти на многовиді M такі, що $U \cap V \neq \varnothing$, тобто відображення переходу $\psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to \psi(V)$ є $\mathcal{C}^k$ дифеоморфізмом. Визначимо фукцію $\varepsilon_{u,v}\colon U \cap V \to \{\pm 1\}$, яка ставить у відповідність точці $x \in U \cap V$ знак якобіана дифеоморфізма $\psi \circ \phi^{-1}$ в точці $\phi(x)$, тобто

$$\varepsilon_{u,v}(x) = \operatorname{sign}|J_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})|.$$

Задача 1.3.1. Показати, що $\varepsilon_{u,v}(x) = \varepsilon_{v,u}(x)$ для всіх $x \in U \cap V$.

Скажемо, що (U, ϕ) та (V, ψ) *орієнтовано* $(\mathcal{C}^k)$ *узгоджені*, якщо

- або $U \cap V = \varnothing$;
- або $U \cap V \neq \varnothing$ і $\varepsilon_{u,v} \equiv 1$, тобто $|J_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})| > 0$ для всіх $x \in U \cap V$.

Орієнтований атлас на многовиді M — це $\mathcal{C}^k$ атлас α, $k \geq 1$, у якого всі карти є попарно орієнтовано угодженими.

Карта (U, ϕ) на M називається *орієнтовано узгодженою* з орієнтованим атласом α, якщо вона орієнтовано узгоджена з усіма картами атласу α. Іншими словами, $\alpha \cup \{(U, \phi)\}$ також є орієнтованим атласом.

Два орієнтовані атласи α, β на M називаються *орієнтовано узгодженими*, якщо $\alpha \cup \beta$ є орієнтованим атласом, тобто їх карти є попарно орієнтовано узгодженими.

Орієнтовний многовид — це многовид, гладка структура яка має який-небудь орієнтований атлас.

Орієнтований многовид — це пара (M, α), де M — це многовид, а α — орієнтований $\mathcal{C}^k$ атлас на M.

Задача 1.3.2. Побудувати орієнтований атлас на колі

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Задача 1.3.3. Побудувати орієнтований атлас на 2-сфері

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Задача 1.3.4. Нехай $U \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита множина і $\alpha_U = \{(U, \mathrm{id}_U)\}$ — канонічний атлас, що складається з однієї карти, яка задається тотожним вкладенням U в $\mathbb{R}^n$. Показати, що α_U є орієнтованим.

Наступні задачі показують, що кожну карту узгоджену з орієнтованим атласом можна певним чином «підправити» і зробити орієнтовано узгодженою з цим атласом.

Отже, нехай α — орієнтований атлас на M і $u = (U, \phi)$ — карта на M із значенням в $\mathbb{R}^n$? яка є узгодженою з атласом α, але не обов'язково орієнтовано узгодженою.

Задача 1.3.5. Нехай $x \in U$ — довільна точка і $v = (V, \psi)$ і $v' = (V', \psi) \in \alpha$ — довільні карти, які також містять точку x, тобто $x \in U \cap V \cap V'$. Показати, що знаки Якобіанів переходу від u до v та v' в точці $\phi(x)$ тотожні:

$$\varepsilon_{u,v}(x) = \varepsilon_{u,v'}(x).$$

Іншими словами, знак $\varepsilon_{u,v}(x)$ не залежить карти $v = (V, \psi) \in \alpha$, яка містить точку x. Тому коректно визначена інша функція

$$\varepsilon_{u,\alpha}\colon U \to \{\pm 1\}, \qquad \varepsilon_{u,\alpha}(x) := \varepsilon_{u,v}(x),$$

де $v = (V, \psi) \in \alpha$ — довільна карта з атласу α, яка містить точку x.

Задача 1.3.6. Довести такі твердження.

(1) Показати, що функція $\varepsilon_{u,\alpha}\colon U \to \{\pm 1\}$ є локально постійною. Зокрема, вона приймає постійні значення на компонентах зв'язності $U \cap V$.

(2) (Інше формулювання попередньої задачі) Показати, що функція $\varepsilon_{u,\alpha}\colon U \to \{\pm 1\}$ є неперервною в дискретну топологію $\{\pm 1\}$.

(3) Розглянемо такі підмножини в U:

$$U_+ = \{x \in U \mid \varepsilon_{u,\alpha}(x) = 1\}, \qquad\qquad U_- = \{x \in U \mid \varepsilon_{u,\alpha}(x) = -1\}.$$

Покажіть, що U_+ та U_- є відкрито-замкненими і $U = U_+ \sqcup U_-$.

(4) Нехай $\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — дифеоморфізм, визначений за формулою

$$\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Розглянемо такі два відображення

$$\phi_+ = \phi|_{U_+}\colon U_+ \to \mathbb{R}^n, \qquad \phi_- = \xi \circ \phi|_{U_-}\colon U_- \to \mathbb{R}^n.$$

Показати, що карти (U_+, ϕ_+) та (U_-, ϕ_-) орієнтовано узгоджені з α, тобто отриманий атлас

$$\beta = \alpha \cup \{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$$

також є *орієнтованим* атласом.

Наступні задачі показують, що для зв'язного орієнтованого многовиду відношення *бути орієнтовано узгодженими* на множині всіх орієнтованих атласів є відношенням еквівалентності, причому завжди існує рівно два класи еквівалентності.

Задача 1.3.7. Нехай M — орієнтовний многовид, α, β — деякі орієнтовані атласи на M і $x \in M$ — точка. Нехай також $u = (U, \phi), u' = (U', \phi') \in \alpha$ і $v = (V, \psi), v' = (V', \psi') \in \beta$ — карти, що містять точку x, тобто $x \in U \cap U' \cap V \cap V'$. Довести, що

$$\varepsilon_{u,v}(x) = \varepsilon_{u',v'}(x),$$

тобто знак Якобіану відображення переходу з u до v в точці $\phi(x)$ тотожний із знаком Якобіану відображення переходу з u' до v' в точці $\phi'(x)$.

Іншими словами, цей знак не залежить від вибору карт $u \in \alpha$ і $v \in \beta$, що містять x, а тому коректно визначена функція

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}\colon M \to \{\pm 1\}, \qquad \varepsilon_{\alpha,\beta}(x) := \varepsilon_{u,v}(x),$$

де $u = (U, \phi) \in \alpha$ і $v = (V, \psi) \in \beta$ — довільні карти, які містять точку x, тобто $x \in U \cap V$.

Задача 1.3.8. Покажіть, що $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ приймає постійні значення на компонентах зв'язності M. Еквівалентно, доведіть, що $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ є неперервною в дискретну топологію $\{\pm 1\}$.

Зокрема, припустимо, що M — зв'язний. Тоді $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ приймає постійне значення 1 або -1 на всьому M.

Скажемо, що орієнтовані атласи α і β на зв'язному многовиді M *індукують однакову орієнтацію*, або *однаково орієнтовані* якщо $\varepsilon_{\alpha,\beta} = 1$ і *протилежні орієнтації* (або *протиледно орієнтовані*), якщо $\varepsilon_{\alpha,\beta} = -1$.

Задача 1.3.9. Нехай M — зв'язний орієнтовний многовид. Показати, що відношення *індукувати однакову орієнтацію* є відношенням еквівалентності на множині всіх орієнтованих атласів на M. Довести, також, що завжди існує рівно два класи еквівалентності.

1.4. **Характеризація орієнтовності многовиду в термінах існування скрізь відмінної від нуля диференціальної форми максимальної розмірності.** Дамо ще одне означення орієнтовності в термінах диференціальних форм. Це буде підготовкою до введення поняття інтеграла від диференціальної форми.

Нехай $\omega\colon \oplus_k TM \to \mathbb{R}$ — диференціальна k-форма на многовиді M і $x \in M$ — точка. Скажемо, що $\omega(x) = 0$, якщо $\omega|_{\oplus_k T_x M} = 0$, тобто для довільних k векторів $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ з дотичного простору в точці x маємо, що $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Тоді *носієм* форми ω називається множина

$$\operatorname{supp}(\omega) := \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}}.$$

Задача 1.4.1. Нехай $\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ — диференціальна n-форма, визначена на відкритій підмножині $U \subset \mathbb{R}^n$. Показати, що $\operatorname{supp}(\omega) = \operatorname{supp}(f)$.

Задача 1.4.2. Нехай α — диференціальна k-форма, а β — диференціальна l-форма на M для деяких k, l. Покажіть, що

$$\operatorname{supp}(\alpha \wedge \beta) \subset \operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta), \qquad \operatorname{supp}(d\alpha) \subset \operatorname{supp}(\alpha).$$

Зокрема, для довільної функції $f\colon M \to \mathbb{R}$ маємо, що $\operatorname{supp}(f\alpha) \subset \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(\alpha)$.

Нехай ω — диференціальна k-форма на многовиді M і (U, ϕ) — деяка карта на M із значеннями в $\mathbb{R}^n$. Тоді локальним зображенням ω відносно цієї карти називається k-форма $(\phi^{-1})^*(\omega)$ на відкритій підмножині $\phi(U)$ в $\mathbb{R}^n$. Зокрема,

$$(\phi^{-1})^*(\omega) = \sum_{A \subset [n], |A| = k} f_A(x) dx_A,$$

для деяких гладких функцій $f_A\colon \phi(U) \to \mathbb{R}$.

Більш того, якщо ω — це n-форма, то

$$(\phi^{-1})^*(\omega) = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

для деякої гладкої функції $f\colon \phi(U) \to \mathbb{R}$. В цьому випадку фукцію f називатимемо *коефіцієнтом* n-форми ω в карті (U, ϕ).

Якщо (V, ψ) — інша локальна карта $\mathcal{C}^k$-узгоджена з (U, ϕ). Тоді ми маємо такі дві n-форми

$$\begin{aligned} (\phi^{-1})^*(\omega) &= f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \text{ на } \phi(U \cap V), \\ (\psi^{-1})^*(\omega) &= g(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \text{ на } \psi(U \cap V) \end{aligned} \tag{1}$$

Нехай $h = (h_1, \dots, h_n) = \psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ — відображення переходу між цими картами. Тоді

$$\begin{aligned} f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (\phi^{-1})^*(\omega) = \\ &= (\psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})^*(\omega) = (\psi \circ \phi^{-1})^* \circ (\psi^{-1})^*(\omega) = \\ &= h^* \circ (\psi^{-1})^*(\omega) = g(h(x))dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_n = \\ &= g(h(x)) J_{\phi(x)}(h) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Звідси

$$f(x) = g(h(x)) J_{\phi(x)}(h). \tag{2}$$

Задача 1.4.3. Покажіть, що якщо $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $g(h(x)) = 0$. Зокрема, $\operatorname{supp}(g) = h(\operatorname{supp}(f))$.

Задача 1.4.4. Нехай $u = (U, \phi)$ і $v = (V, \psi)$ — дві узгоджені карти на M із значеннями в $\mathbb{R}^n$. Нехай також ω — диференціальна n-форма на M і $f\colon \phi(U) \to \mathbb{R}$ та $g\colon \psi(V) \to \mathbb{R}$ — коефіцієнти цієї форми в картах u та v відповідно, див. (1). Припустимо, що ω задовольняє одну з наступних умов:

(1) в кожній компоненті зв'язності W перетину $U \cap V$ існує точка $q \in W$ така, що значення $f(\phi(q))$ і $g(\psi(q))$ ненульові і мають однаковий знак;

(2) обидві функції f та g скрізь строго додатні, або строго від'ємні.

Показати, що кожної з цих умов випливає, що карти u та v орієнтовано узгоджені.

(Зауважте, що (2)⇒(1) і скористайтесь формулою (2).)

Наша мета довести таке твердження:

Задача 1.4.5. Нехай M — диференційовний многовид, всі компоненти зв'язності якого мають однакову розмірність n. Доведіть, що наступні умови еквівалентні:

(1) M — орієнтовний многовид;

(2) на M існує скрізь відмінна від нуля диференціальна n-форма ω, тобто $\omega(x) \neq 0$ для всіх $x \in M$.

Доведення цієї задачі розіб'ємо на декілька кроків. Імплікація (1)⇒(2) міститься в наступній задачі. Вона дозволяє по заданому орієнтованому атласу за допомогою розбиття одиниці побудувати скрізь ненульову диференціальну n-форму.

Задача 1.4.6. Нехай також $\alpha = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Lambda}$ — орієнтований локально скінченний атлас на M і $\{\mu_i\colon M \to [0;1]\}_{i\in\Lambda}$ — розбиття одиниці підпорядковане α.

1) Покажіть, що для кожного i маємо $\mathcal{C}^k$ функцію $\mu_i \circ \phi_i\colon \phi_i(U_i) \to [0;1]$. Зокрема, ми отримуємо таку диференціальну n-форму

$$\gamma_i(x) := (\mu_i \circ \phi_i^{-1}(x)) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

на $\phi_i(U_i)$, а також диференціальну n-форму

$$\omega_i = \phi_i^*(\gamma_i)$$

на M з носієм в U_i, отриману перенесенням γ_i за допомогою ϕ_i. Покладемо

$$\omega := \sum_{i\in\Lambda} \omega_i = \sum_{i\in\Lambda} \phi_i^*(\gamma_i) = \sum_{i\in\Lambda} \phi_i^*\big(\mu_i \circ \phi_i^{-1}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n\big)$$

2) Покажіть, що ω є коректно визначеною диференціальною n-формою на M і $\omega(x) \neq 0$ для всіх $x \in M$.

Доведемо обернену імплікацію.

Задача 1.4.7. Нехай M — многовид всі компоненти зв'язності якого мають однакову розмірність n і α — довільний $\mathcal{C}^k$ атлас на M. Припустимо, що існує диференціальна n-форма ω на M така, що для кожної карти $(U, \phi) \in \alpha$, локальне зображення ω в цій карті

$$(\phi^{-1})^*(\omega) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

має строго додатний коефіцієнт, тобто $f > 0$ на всьому $\phi(U)$. Доведіть, що тоді α є орієнтованим атласом.

Нехай $x \in M$ — довільна точка і $(U, \phi), (V, \psi) \in \alpha$ — дві карти, що містять x.

Задача 1.4.8. Нехай M — многовид всі компоненти зв'язності якого мають однакову розмірність n і α — довільний $\mathcal{C}^k$ атлас на M. Припустимо, що ω — скрізь відмінна від нуля диференціальна n-форма на M. Покажіть, що можна тоді підправити відображення карт так, щоб локальне зображення ω в кожній карті мало б додатний коефіцієнт. Виведіть звідси, що тоді отриманий атлас є орієнтовним.

1. Можна вважати, що всі карти атласу є зв'язними. Нехай $(U_i, \phi_i) \in \alpha$ довільна карта. Тоді локлаьне зображення ω в цій карті має вигляд

$$(\phi_i^{-1})^*(\omega) = f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

де $f_i \colon \phi_i(U_i) \to \mathbb{R} - \mathcal{C}^k$ функція, скрізь відімінна від нуля. Оскільки U_i, а отже і $\phi_i(U_i)$ є зв'язними, f_i має один і той же знак на всьому $\phi_i(U_i)$.

Якщо $f_i < 0$, то замінимо карту (U_i, ϕ_i) на $(U_i, \xi \circ \phi_i)$. Тоді в цій карті

$$(\xi \circ \phi_i^{-1})^*(\omega) = -f_i(-x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

тобто коефіцієнт Тоді

Покажіть, що тоді на існує скрізь відмінна від нуля диференціальна n-форма ω, Показати, що існує диференціальна n-форма ω на M, така, що для кожної карти $(U, \phi) \in \alpha$, у локального зображення ω

$$(\phi^{-1})^*(\omega) = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

відносно цієї карти, функція f є строго додатною.

Опишемо деякі конструкції пов'язані з орієнтовними многовидами.

1.5. **Орієнтовані многовиди.**

1.6. **Прямі добутки орієнтовних многовидів.**

Задача 1.6.1. Нехай M і N — многовиди.

(1) Показати, що для довільних карт $\phi \colon U \to \mathbb{R}^m$ і $\psi \colon V \to \mathbb{R}^n$ на M і N, відповідно, відображення

$$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \qquad \phi \times \psi(x,y)(\phi(x), \psi(y))$$

є картою на $M \times N$.

(2) Довести, що якщо α і β — C^k атласи на M і N відповідно, то сім'я карт $\alpha \times \beta$ на $M \times N$

$$\alpha \times \beta = \{(U \times V, \phi \times \psi) \mid (U, \phi) \in \alpha, (V, \psi) \in \beta\}$$

є C^k атласом на $M \times N$.

(3) Показати, що якщо (M, α) і (N, β) — орієнтовані C^k многовиди, то $(M \times N, \alpha \times \beta)$ також є орієнтованим C^k многовидом.

1.7. **Інтеграл від диференціальної форми.** Нехай $\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ — диференціальна n-форма в $\mathbb{R}^n$, яка має компактний носій, тобто $\mathrm{supp}(f)$ є компактним. Визначимо інтеграл від ω за формулою:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1 \cdots dx_n = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n} f(x)dx_1 \cdots dx_n,$$

де в правій частині стоїть звичайний інтеграл Рімана.

Нехай тепер M — компактний n-вимірний многовид, $\alpha = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \Lambda}$ — деякий скінченний атлас на M і $\{\mu_i \colon M \to [0;1]\}_{i \in \Lambda}$ — розбиття одиниці підпорядковане цьому атласу, причому носії $\mathrm{supp}(\mu_i)$ є компактними.

Нехай далі ω — n-форма на M. Тоді для кожного $i \in \Lambda$ визначена n-форма в $\mathbb{R}^n$ з компактним носієм:

$$(\phi_i^{-1})^*(\mu_i\omega) = f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

де $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — деяка функція, яка має компактний носій. Зокрема, визначено інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\phi_i^{-1})^*(\mu_i\omega)$.

Припустимо, що α є орієнтованим атласом. Визначимо інтеграл від ω по M (відносно атласу α) за формулою:

$$\int\limits_M \omega := \sum_{i\in\Lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\phi_i^{-1})^*(\mu_i\omega).$$

Задача 1.7.1. Нехай $\beta = \{(V_j, \psi_j)\}_{j\in\Theta}$ довільний скінченний орієнтований атлас на M і $\{\nu_j\colon M \to [0;1]\}_{j\in\Theta}$ — розбиття одиниці підпорядковане β, причому носії $\operatorname{supp}(\nu_i)$ також є компактними. Довести, що для довільної n-форми на M

$$\sum_{i\in\Lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\phi_i^{-1})^*(\mu_i\omega) = \pm \sum_{j\in\Theta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\psi_j^{-1})^*(\nu_i\omega),$$

де потрібно вибирати знак $+$, якщо атласи α і β оірєнтовано узгоджені і знак $-$, якщо ці атласи задають протилежнуораєнтацію.