УДК 517.9

*С.І. Максименко* (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ $m$-ФУНКЦІЙ НА ПОВЕРХНЯХ

**1. Вступ.** В даній роботі ми розглядаємо питання про еквівалентність $m$-функцій на поверхнях. Нехай $f, g : M \to \mathbb{R}$ — дві $m$-функції на поверхні $M$. Скажемо, що вони *еквівалентні*, якщо існують такі дифеоморфізми $h : M \to M$ і $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причому $\varphi$ зберігає орієнтацію, що має місце комутативна діаграма:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Викладений в роботі підхід є узагальненням на $m$-функції роботи В.В. Шарко про еквівалентність звичайних функцій Морса [1]. Класифікація $m$-функцій на 3-вимірних многовидах проведена в [3].

## 2. Означення та допоміжні результати

**Означення 1.** Нехай $W$ — довільний $n$-многовид з краєм. Гладка функція $f : W \to \mathbb{R}$ називається $m$-функцією на $W$, якщо виконуються такі умови:

1. Функція $f$ не має критичних точок на краї $\partial W$.
2. Може мати критичні точки у внутрішності $W$.
3. Обмеження $f$ на краї $\partial W$ є функцією Морса.

$m$-функції були введені в роботах А. Янковського та Р. Рубінштейна [2].

Критичними точками $m$-функції називаються критичні точки функцій $f|_{\mathrm{int}\, W}$ та $f|_{\partial W}$.

Для таких точок можна ввести поняття індексу. Якщо $x$ —

критична точка, яка лежить в $\operatorname{int} W$, то її індекс означається стандартним чином. Нехай $x \in \partial M$ є критичною точкою функції $f|_{\partial M}$. Тоді її індекс — це пара чисел $(\lambda, \varepsilon)$, де $\lambda$ — індекс точки $x$ як критичної точки функції $f|_{\partial M}$, а $\varepsilon = +1$, якщо вектор $\operatorname{grad}_x f$ направлений зовні $M$, і $\varepsilon = -1$, якщо $\operatorname{grad}_x f$ направлений всередину $M$.

Таким чином, у $m$-функцій на поверхнях існують критичні точки 7 індексів: 3 типи у внутрішності і 4 на краї.

Класифікація, отримана в цій роботі, базується на вивченні структури околу критичного рівня $m$-функції.

**3. Елементарні частинки.** Нехай $f : W \to \mathbb{R}$ — $m$-функція на поверхні $W$, $x$ — деяка її критична точка, і $N_x$ — регулярний окіл цієї точки на критичному рівні $f^{-1}f(x)$.

Тоді виникає 3 випадки залежно від структури $N_x$:

1) $N_x$ складається з чотирьох сегментів $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ з однією спільною точкою $x$. Це критична точка індексу 1, яка лежить у внутрішності $W$;

2) $N_x$ — це два сегменти $b_1$, $b_2$ з однією спільною точкою $x$. Така ситуація має місце для критичних точок індексів $(0,1)$, $(1,-1)$, що лежать на $\partial W$;

3) $N_x$ є точкою і співпадає з $x$, тобто $x$ є ізольованою на критичному рівні. Тоді індекс $x$ може бути рівний 0 чи 2, якщо $x \in \operatorname{int} W$, та $(0,1)$ чи $(1,-1)$, якщо $x \in \partial W$.

Нехай $V$ — такий регулярний окіл точки $x$ вже на всій поверхні, що $N_x = V \cap f^{-1}f(x)$. Тоді неважко бачити, що для кожної компоненти $U$ з $V \setminus N_x$ множина $\overline{U} \cap N_x$ складається не більше ніж з двох ребер $N_x$. Нехай $V_- = V \cap f^{-1}(-\infty, f(x)]$ $V_+ = V \cap f^{-1}[f(x), +\infty)$. Очевидно, $N_x = \overline{V_-} \cap \overline{V_+}$.

Крім того, кожне ребро $N_x$ належить замиканню єдиної компоненти з $V_-$ і єдиної компоненти з $V_+$.

Звідси випливає, що $V_-$ та $V_+$ задають розбиття ребер $N_x$ на групи, в кожній з яких не більше ніж 2 елементи. Це можна виразити інакше, сказавши, що $V_-$ і $V_+$ визначають на ребрах $N_x$ дві інволюції. Інволюцію, яку задає $V_-$, позначимо $\tau$, а інволюцію, що визначається $V_+$, назвемо $\nu$.

Нехай $e$ — ребро $N_x$, і $U_-$ — така компонента $V_-$, що $e \subset \overline{U_-}$. Якщо знайдеться ще одне ребро $e' \subset N_x \cup \overline{U_-}$, відмінне від $e$, то покладемо $\tau(e) = e'$. Якщо ж ні, то нехай $\tau(e) = e$.

Зрозуміло, що тоді виконується співвідношення $\tau \circ \tau(e) = e$. Отже, $\tau$ є інволюцією.

Аналогічно задається $\nu$-інволюція.

Якщо $N_x$ не має ребер, або одна з множин $V_-$ чи $V_+$ порожня, то вважатимемо, що відповідні інволюції тривіальні, тобто являють собою тотожні відображення.

Залежно від індексу критичної точки можуть виникати різні співвідношення між інволюціями.

Таким чином, кожна критична точка $m$-функції визначає певний граф з парою інволюцій на його ребрах та деякими співвідношеннями між ними. Такий граф ми називатимемо *елементарною частинкою*. Виникає 7 типів елементарних частинок.

**1.** Елементарна частинка типу *cross*. Відповідає критичній точці індексу 1. Це дерево складене з чотирьох ребер з однією спільною точкою. Співвідношення між інволюціями наступні:

$$\tau^2 = \nu^2 = \mathrm{id}, \qquad \tau(e) \neq e \neq \nu(e).$$

**2, 3.** Елементарні частинки типів $(\tau, bay)$ і $(\nu, bay)$ відповідають критичним точкам індексів $(0, 1)$ та $(1, -1)$. Граф кожної з них представляє собою дерево, складене з двох ребер зі спільною точкою. Ці частинки відрізняються інволюціями: на першій з них $(\tau, bay)$ інволюція $\tau$ переставляє ребра місцями, а інволюція $\nu$ є тотожнім відображенням. На другій елементарній частинці $(\nu, bay)$ — навпаки: нетривіальною є $\nu$, а тривіальною $\tau$. Окіл кожної з цих критичних точок нагадує затоку (англ. *bay*).

**4–7.** Елементарні частинки типів $(\tau, int)$, $(\nu, int)$, $(\tau, cape)$ та $(\nu, cape)$ відповідають критичним точкам індексів 0, 2, $(1, 1)$ та $(0, -1)$. Їх графи представляють собою точки. Обидві інволюції тривіальні. Позначення обрано наступним чином. У даних критичних точок обов'язково або докритичний, або післякритичний рівень є порожнім, а інший ні. Якщо непорожнім є докритичний рівень, то в позначення входить літера $\tau$, якщо ж непорожнім є післякритичний рівень, то входить $\nu$. Якщо точка належить внутрішності $W$, то в її назву входить $int$, якщо ж краю, то $cape$ (англ. *мис*).

**4. Атоми.** За регулярними околами критичних точок $m$-функції на критичному рівні можна відновити весь критичний рівень. Цьому процесу відповідає певне ототожнення ребер елементарних частинок відповідних критичних точок.

Для елементарної частинки $E$ через $w(E)$ позначимо множину її ребер. Нехай $\mathcal{E} = \{E_i\}$ — довільна сім'я елементарних частинок. Покладемо $w(\mathcal{E}) = \cup_i w(E_i)$. Зауважимо, що оскільки на кожній елементарній частинці з $\mathcal{E}$ задано інволюції, то можна вважати, що ми маємо дві інволюції на всій сім'ї $\mathcal{E}$.

**Означення 2.** *Атомом* називається пара $(\mathcal{E}, \sigma)$, де $\mathcal{E}$ — сім'я елементарних частинок, а $\sigma : w(\mathcal{E}) \to w(\mathcal{E})$ — таке відображеня, що $\sigma^2 = \mathrm{id} w(\mathcal{E})$.

Зрозуміло, що $\sigma$ задає розбиття деяких ребер з $w(\mathcal{E})$ на пари. Для кожного ребра $e \in w(\mathcal{E})$, для якого $\sigma(e) \neq e$, ми можемо ототожнити кінці ребер $e$ та $\sigma(e)$. В результаті отримаємо граф $\Gamma$, який можна інтерпретувати як критичний рівень деякої $m$-функції.

Відмітимо, що докритичний рівень $m$-функції складається з сегментів та кіл. При наближенні до критичного рівня, в околах критичних точок, ці сегменти та кола задають інволюції $\tau$. Аналогічна ситуація має місце і для післякритичних рівнів. Там виникають $\nu$-інволюції.

Виявляється що і навпаки, за допомогою інволюцій, заданих на критичних рівнях в околах критичних точок, можна відновити кола та сегменти, що утворюють докритичні та післякритичні рівні.

**Означення 3.** Послідовність орієнтованих ребер $a_1, a_2, \ldots, a_n$

графа Г називається *$\tau$-впорядкованою* (*$\nu$-впорядкованою*), якщо початок $x_i$ ребра $a_{i+1}$ співпадає з кінцем $a_i$ і для інволюції $\tau$ ($\nu$), заданої в околі точки $x_i$, має місце співвідношення $\tau(a_i) = a_{i+1}$ ($\nu(a_i) = a_{i+1}$).

**Означення 4.** $\tau$-впорядкована ($\nu$-впорядкована) послідовність називається *$\tau$-циклом* (*$\nu$-циклом*), якщо вона складається з попарно різних ребер, і кінець $a_n$ співпадає з початком $a_1$.

Відмітимо, що інволюції визначені в околах не всіх точок графа. Якщо ребро нерухоме відносно $\sigma$, то в околі його висячої вершини інволюції не визначені. Отже, $\tau$- та $\nu$-послідовності можуть обриватись. Множина $\tau$- ($\nu$)-впорядкованих послідовностей частково впорядкована, особливу роль в ній грають максимальні елементи. Ми називатимемо їх *$\tau$- ($\nu$)-маршрутами*. Вони існують внаслідок скінченності графа Г.

Ці маршрути та цикли відповідають компонентам докритичного та післякритичного рівнів $m$-функції. Але компоненти рівнів ними не вичерпуються.

Наприклад, у випадку критичної точки індексу 0, яка лежить в $\mathrm{int}W$, післякритичний рівень складається з одного кола, яке поки що не підпадає під наше означення $\nu$-циклів. Так само докритичний рівень критичної точки індексу $(1,1)$ складається з ізольованого сегменту, який природно назвати (з точки зору нашої термінології) $\tau$-маршрутом.

Отже, додатково вважатимемо, що кожна елементарна частинка, яка є точкою, визначає додатковий цикл, або маршрут. Перша літера її типу — $\tau$ чи $\nu$ дає назву маршруту або циклу. Якщо друга частина назви типу *int*, то частинка визначає цикл, якщо ж *cape*, то маршрут.

Нехай $A$ — атом. Через $A_\tau$ та $A^\nu$ позначимо множину його $\tau$- і $\nu$-циклів та маршрутів.

Якщо на кожному циклі і маршруті вибрати орієнтацію, то атом буде називатись *орієнтованим*.

**Означення 5.** Нехай $E$ та $E'$ — дві елементарні частинки. Відображення $\phi : E \to E'$ між їх графами називається *ізоморфіз-*

*мом*, якщо ці частинки мають однаковий тип, $\phi$ є ізоморфізмом графів і виконуються співвідношення $\phi \circ \tau = \tau' \circ \phi$ та $\phi \circ \nu = \nu' \circ \phi$.

**Означення 6.** Нехай $A = (\mathcal{E}, \sigma)$ та $A' = (\mathcal{E}', \sigma')$ — два атоми. Відображення між графами $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ називається ізоморфізмом атомів, якщо:

1. Для кожної елементарної частинки $E \in \mathcal{E}$, образ її графа $F(E)$ співпадає з графом деякої частинки $E' \in \mathcal{E}'$.
2. Індуковане відображення між елементарними частинками $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ є бієктивним.
3. Індуковане відображення $E \to E'$ є ізоморфізмом для кожної частинки $E \in \mathcal{E}$.
4. Виконується співвідношення $F \circ \sigma = \sigma' \circ F$.

Відмітимо також, що умова 3 означає, що $F \circ \tau = \tau' \circ F$ і $F \circ \nu = \nu' \circ F$. Звідси випливає, що $F$ переводить цикли в цикли, маршрути в маршрути і зберігає їх тип ($\tau$ чи $\nu$).

Ізоморфізм між орієнтованими атомами — це ізоморфізм між атомами, який зберігає орієнтацію всіх відповідних циклів та маршрутів.

За кожною $m$-функцією на 2-кобордизмі з кутами, у якої тільки один критичний рівень, можна побудувати атом.

**Теорема 1.** *Нехай $f$ і $g$ — дві $m$-функції на 2-кобордизмі $W$ з кутами, у яких тільки один критичний рівень. Вони еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні атоми ізоморфні.*

**5. Молекули.** Нехай $f$ — $m$-функція на кобордизмі з кутами. Знаючи атом критичного рівня цієї функції, за теоремою 1 ми можемо відновити її околи цього рівня. Для того, щоб відновити функцію на всій поверхні за її критичними рівнями, потрібно певним чином склеїти краї околів критичних рівнів, тобто некритичні рівні. Останні є системами $\tau$- й $\nu$-циклів та маршрутів відповідних атомів.

Потрібно встановити відображення множини $\nu$-циклів та маршрутів кожного рівня, у об'єднання $\tau$-циклів та маршрутів всіх вищих рівнів, яке переводить цикли в цикли, а маршрути в маршрути.

**Означення 7.** *Молекулою* називається пара $M = (\mathcal{A}, \phi)$, де $\mathcal{A} = \{ A_i, o_i \,|\, i = 1 ... n \}$ — сім'я орієнтованих атомів, $o_i$ — орієнтація атому $A_i$, а $\phi = \{\phi_i\}$ — сім'я відображень

$$\phi_i : (A_i)^\nu \to \bigcup_{k>i} (A_k)_\tau,$$

що зберігають тип послідовності (тобто цикли переводяться у цикли, а маршрути у маршрути), причому для всіх $\omega \in (A_i)^\nu$ $\phi_i(-\omega) = -\phi_i(\omega)$.

**Означення 8.** Нехай $M = (\mathcal{A}, \phi)$, $M' = (\mathcal{A}', \phi')$ — дві молекули. Ізоморфізм між молекулами — це пара $(F, \mu)$, де $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — бієкція між множинами їх атомів, а $\mu = \{\mu_i\}$ — така система ізоморфізмів $\mu_i : A_i \to F(A_i)$ між відповідними орієнтованими парами атомів, що $\mu\phi = \phi'\mu$.

Остання умова означає наступне: якщо $\omega \in (A_i)^\nu$ і $\phi_i(\omega) \in$ $\in (A_k)_\tau$, то $\mu_k \circ \phi_i(\omega) = \phi'_k \circ \mu_i(\omega)$.

**Теорема 2.** *Дві m-функції на поверхні еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх молекули ізоморфні.*

Автор вдячний В.В. Шарко за постановку задачі та зацікавленість до даної роботи.

1. *Sharko V.V.* Classification of Morse functions on surfaces // An Int. Summer Conf. at Chelyabinsk Univ. low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996, August, 19–25. — P. 10–13.

2. *Jankowski A., Rubinsztein R.* Functions with nondegenerate critical points on manifolds with boundary // Comm. Math. — 1972. — XVI. — P. 99–112.

3. *Пришляк А.О.* Эквивалентность $m$-функций на 3-мерных многообразиях // Доп. НАН України (в печати).