УДК 517.9

С.И. Максименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОМПОНЕНТЫ ПРОСТРАНСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ МОРСА

1. Введение. В данной работе мы рассматриваем вопрос о компонентах линейной связности пространства отображений Морса замкнутой ориентированной поверхности M в окружность S^1.

Определение 1. *Пусть P^1 — одномерное гладкое многообразие, W — произвольное гладкое многообразие, $f : W \to P^1$ — гладкое отображение класса C^∞. Это отображение называется отображением Морса, если:*

1) оно имеет только конечное число критических точек;

2) эти точки невырождены и лежат во внутренности W;

3) образ каждой компоненты края M есть некоторая точка в P^1.

Множество всех отображений Морса образует подпространство $\mathcal{M} = \mathcal{M}(W, P)$ в пространстве $C^\infty(W, P)$.

Пусть $f, g : W \to P$ — две точки пространства $\mathcal{M}$. Нас интересует вопрос: принадлежат ли они одной компоненте линейной связности этого пространства? Или, по-другому, существует ли гомотопия, соединяющая эти отображения и состоящая исключительно из отображений Морса?

Определение 2. *Отображение $H : W \times I \to P$ называется Σ-гомотопией, если для каждого $t \in [0,1]$ отображение $H_t = H(*, t) : W \to [0,1]$ является отображением Морса.*

Факт Σ-гомотопности отображений мы будем обозначать так: $f \sim_\Sigma g$.

Определение 3. *Пусть $c_k(f)$ — число критических точек f индекса k. Скажем, что f и g имеют одинаковый* критический тип, *если для всех $k = 0 \ldots \dim W$ имеют место равенства $c_k(f) = c_k(g)$. Класс эквивалентности f будем обозначать $\Sigma(f)$.*

Имеет место

Предложение 1. *Если $f \sim_\Sigma g$, то $\Sigma(f) = \Sigma(g)$.*

Это утверждение локальное и вытекает из устойчивости невырожденных критических точек.

Таким образом, для Σ-гомотопности отображений необходимо, чтобы они были гомотопны и имели одинаковый критический тип.

Основным результатом данной работы является доказательство того, что в случае, когда W — замкнутая ориентированная поверхность, а P — окружность, эти два условия достаточны:

Теорема 1. *Пусть M — замкнутая ориентированная поверхность. Два отображения Морса $f, g : M \to S^1$ принадлежат одной компоненте пространства $\mathcal{M}(M^2, S^1)$ тогда и только тогда, когда они гомотопны и имеют одинаковый критический тип.*

Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и для функций Морса. Совсем недавно В.В. Шарко [1] и независимо от него С.В. Матвеев [2] доказали следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть $\mu = (M^2; V_0, V_1)$ — кобордизм, где M — произвольная компактная (ориентируемая или нет) поверхность с краем $\partial M = V_0 \cup V_1$. Две функции Морса $f, g : \mu \to \mathbb{R}$ принадлежат одной компоненте пространства $\mathcal{M}(M^2, \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый критический тип. При этом, если f совпадает с g на некоторых компонентах V_0 и V_1, то Σ-гомотопию, соединяющую f и g, можно выбрать гомотопией относительно этих компонент.*

В доказательстве теоремы 1 мы используем теорему 2.

2. План доказательства теоремы 1. Необходимость теоремы 1 вытекает из предложения 1. Нужно доказать достаточность.

В следующем параграфе будет показано, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда f, а следовательно, и g негомотопны нулю.

Теорема 1 вытекает из следующих утверждений:

Пусть $f, g : M \to S^1$ — гомотопные, но негомотопные нулю, отображения Морса.

Теорема 3. *Отображения f и g Σ-гомотопны таким отображениям f_1, $g_1 : M \to S^1$ соответственно, что для некоторых регулярных значений x, $y \in S^1$ отображений f_1 и g_1 соответственно выполняется соотношение*

$$f_1^{-1}(x) \cap g_1^{-1}(y) = \emptyset.$$

Теорема 4. *Пусть $x, y \in S^1$ — регулярные значения f и g соответственно. Если*

$$f^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) = \emptyset,$$

то f Σ-гомотопно такому отображению $f_1 : M \to S^1$, что

$$f_1^{-1}(y) = g^{-1}(y).$$

Следующее предложение является прямым следствием теоремы 2.

Предложение 2. *Предположим, что f и g имеют одинаковый критический тип. Если найдется точка $x \in S^1$, которая является регулярным значением обоих отображений, и $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$, то $f \sim_\Sigma g$.*

Доказательство. Пусть $X = f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$. Продеформировав f с помощью подходящей изотопии поверхности M, можем предположить, что $f = g$ в окрестности Y. Разрежем M вдоль X. Полученную поверхность обозначим через M' и пусть $\psi : M' \to M$ — фактор-отображение. Понятно, что $f \circ \psi : M' \to S^1$ гомотопно нулю и поэтому поднимается на универсальное накрывающее $\mathbb{R}$ до некоторого отображения $f' : M' \to \mathbb{R}$. Аналогично $g \circ \psi \sim 0$, и пусть g' — его поднятие.

Мы получили две функции Морса f' и g' на M', которые совпадают в окрестности $\partial M'$. По теореме 2 они Σ-гомотопны относительно окрестности края $\partial M'$. Тогда эта Σ-гомотопия индуцирует Σ-гомотопию между f и g относительно окрестности X. ■

Доказательство теоремы 1. По теореме 3 f и g Σ-гомотопны таким отображениям f_1 и g_1, что для некоторых их регулярных значений $x, y \in S^1$ соответственно $f_1^{-1}(x) \cap g_1^{-1}(y) = \emptyset$. Тогда по теореме 4 отображение f_1 Σ-гомотопно отображению f_2, для которого y является регулярным значением, и $f_2^{-1}(y) = g_1^{-1}(y)$. Теперь по предложению 2 $f_2 \sim_\Sigma g_1$. Следовательно, $f \sim g$. ■

3. Об отображениях Морса. Пусть P — одномерное гладкое многообразие без края (окружность S^1, или прямая $\mathbb{R}$), W — произвольное гладкое многообразие и $f : W \to P$ — отображение Морса.

1. Следующие утверждения вытекают из локальности понятия отображения Морса.

Предложение 3.

1. *Пусть V и Q — гладкие многообразия. Если $h : V \to W$ и $g : P \to Q$ — локальные диффеоморфизмы, то критические точки отображения $g \circ f \circ h : V \to Q$ невырождены тогда и только тогда, когда невырождены критические точки отображения f.*

2. *Композиция отображения Морса с гладким накрывающим отображением и поднятие отображения Морса на гладкое накрывающее пространство являются также отображениями Морса.*

3. *Если $H_t : W \to W$ и $G_t : P \to P$ — гладкие изотопии, то гомотопии $f \circ G_t$ и $H_t \circ f$ являются Σ-гомотопиями.*

Доказательство.

1. Напомним, что критическая точка гладкого отображения многообразия в одномерное многообразие называется *невырожденной*, если матрица, составленная из вторых про-

изводных — гессиан этого отображения, невырождена. Наше утверждение локальное, поэтому можно ограничиться случаем, когда V и W — открытые подмножества конечномерного евклидового пространства, P и Q — интервалы, h и g — диффеоморфизмы и f имеет только одну критическую точку.

Тогда отображение $p = g \circ f \circ h : V \to Q$ получается из f выбором другой системы координат. Выписывая точные формули, несложно видеть, что при этом гессиан функции p в критической точке получается из гессиана f в образе этой точки, умножением на невырожденные матрицы отличное от нуля число. Отсюда следует наше утверждение.

2. Это следует из того, что накрывающие отображения для гладких многообразий являются локальными диффеоморфизмами.

3. Так как при каждом $t \in (0,1)$ отображения H_t и G_t являются диффеоморфизмами, то, по утверждению 1, отображения $f \circ G_t$ и $H_t \circ f$ являются отображениями Морса. ■

2. Предположим, что $P = S^1$, f поднимается на нетривиальное накрывающее пространство $\widetilde{P}$ окружности S^1 и $p : \widetilde{P} \to S^1$ — накрывающее отображение. Тогда если $g \sim f$, то g также поднимается до отображения в $\widetilde{P}$. Пусть $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ — соответствующие поднятия.

Предложение 4. *$f \sim_\Sigma g$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{f} \sim_\Sigma \widetilde{g}$.*

Доказательство. Из свойств накрывающих отображений известно, что $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f = p \circ \widetilde{f} \sim \sim p \circ \widetilde{g} = g$. Причем, если $\widetilde{H} : M \times I \to \widetilde{P}$ — гомотопия между $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$, то композиция $H = p \circ \widetilde{H} : M \times I \to S^1$ есть гомотопия между f и g. И наоборот, всякую гомотопию между f и g можно разложить в композицию $H = p \circ \widetilde{H}$, где $\widetilde{H}$ — гомотопия между $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$.

Остается показать, что H будет Σ-гомотопией тогда и только тогда, когда Σ-гомотопией является $\widetilde{H}$, т.е. что $\widetilde{H}_t$ и $H_t = p \circ \widetilde{H}_t$ одновременно являются или не являются отображениями Морса. Но это вытекает из утверждения 1 предложения 3. Предложение доказано.

2. Нам понадобятся утверждения, относящиеся к непрерывным отображениям в окружность.

Лемма 1.

1. *Непрерывные отображения $f, g : W \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомоморфизмы одномерных когомологий*

$$f^1, g^1 : H^1(S^1, \mathbb{Z}) \to H^1(W, \mathbb{Z}),$$

индуцированные f и g, совпадают.

2. *Непрерывное отображение $f : W \to S^1$ поднимается на нетривиальное накрывающее S^1 тогда и только тогда, когда гомоморфизм одномерных гомологий, индуцированный f, не является эпиморфизмом.*

Доказательство. Первое утверждение принадлежит теории препятствий, второе прямо следует из теоремы о поднятиях для накрывающих пространств [3].

Из п. 2 леммы 1 и предложения 4 следует, что при изучении компонент пространства отображений Морса многообразия W в одномерные многообразия достаточно рассматривать только функции Морса на W и негомотопные нулю отображения Морса W в S^1, индуцирующие в одномерных гомологиях эпиморфизм.

В случае когда W — поверхность, из только что сказанного и теоремы 2 вытекает справедливость теоремы 1 для гомотопных нулю отображений f и g.

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда $f \sim g \not\sim 0$.

Отметим также, что ниже, в доказательстве теоремы 1, мы не будем использовать возможное дополнительное условие эпиморфности гомоморфизма одномерных гомологий. ■

3. Напомним еще некоторые факты, относящиеся к минимальным функциям Морса на поверхностях.

Пусть $\xi = (W; V_0, V_1)$ — кобордизм, где W — поверхность, возможно, несвязная.

Предложение 5. *На ξ существует функция Морса без критических точек индексов 0 и 2 тогда и только тогда, когда для каждой компоненты $U \subset W$ оба множества $U \cap V_0$ и $U \cap V_1$ непусты. Функция с этим свойством является минимальной. Любые две минимальные функции имеют одинаковый критический тип. Если f — минимальная функция Морса на ξ, то, вводя дополнительные пары критических точек индексов 0 и 1 или 2 и 1, можно добиться, чтобы эта функция имела произвольный критический тип.*

Доказательство. В силу равенства Морса [4], для каждой функции Морса на ξ имеется соотношение

$$\chi M = c_0 - c_1 + c_2.$$

Так как $c_i \geq 0$, то минимум суммы $\sum ic_i$ при сохранении предыдущего условия достигается только тогда, когда $c_0 = c_2 = 0$. Следовательно, функции без критических точек индексов 0 и 2 минимальны и имеют однаковый критический тип.

Существование минимальных функций Морса на поверхностях и возможность получения функций произвольного критического типа вытекает из теории перестроек (см., например, [5]). ■

4. Вспомогательные результаты. Здесь мы введем некоторые обозначения и докажем два утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Пусть $x \in S^1$ — произвольное регулярное значения f и $X = f^{-1}(x)$. Множество X представляет собой компактное одномерное подмногообразие без края и, следовательно, является семейством окружностей. Разрежем M по X и обозначим полученную поверхность через M'. Пусть еще $\psi : M' \to M$ — отображение склеивания. Край $\partial M'$ обозначим через B, тогда $B = \psi^{-1}(X)$.

Очевидно, что тогда композиция $f \circ \psi : M' \to S^1$ гомотопна нулю и, следовательно, поднимается до некоторого отображения $f' : M' \to \mathbb{R}$, такого, что $q \circ f' = f \circ \psi$, где $q : \mathbb{R} \to S^1$ — накрывающее отображение: $q(t) = e^{2\pi i t}$.

Не ограничивая общности можем считать, что $f'(M') = [0, 1]$. Тогда $q^{-1}(x) = \mathbb{Z}$ и $f'(B) = \{0, 1\}$. Положим

$$B_i = f'^{-1}(i), \quad i = 0, 1.$$

Определение 4. *Назовем компоненту V множества $M \setminus \setminus f^{-1}(x)$* лишней *(относительно f и x), если $f(\overline{V}) \neq S^1$, т.е. ее замыкание отображется не на всю окружность. Понятно, что $f^{-1}(x) \cap \overline{V}$ есть объединение окружностей. Назовем эти окружности также* лишними *компонентами $f^{-1}(x)$.*

Название аргументировано следующей леммой:

Лемма 2. *Пусть V — лишняя компонента $M \setminus f^{-1}(x)$ относительно f и x. Пусть дальше $R = \overline{V} \cap X$ — множество лишних окружностей из X. Тогда f Σ-гомотопно относительно дополнения к некоторой окрестности $\overline{V}$ такому отображению f_1, что x является регулярным значением f_1 и*

$$f_1^{-1}(x) = X \setminus R.$$

Следствие 1. *Всякое отображение Морса $f : M \to S^1$, для каждого своего регулярного значения X, Σ-гомотопно такому отображению f_1, что $M \setminus f_1^{-1}(x)$ не содержит лишних компонент относительно f_1 и x.*

Замечание. Условие, что $M \setminus f_1^{-1}(x)$ не содержит лишних компонент относительно f_1 и x равносильно тому, что каждая компонента поверхности M' пересекается с обоими множествами B_i, $i = 0, 1$.

Доказательство леммы. По условию $f(\overline{V})$ есть собственное подмножество S^1, поэтому сужение f на $\overline{V}$ гомотопно нулю. Пусть $f' : \overline{V} \to \mathbb{R}$ — поднятие, так что $f|_{\overline{V}} = q \circ f'$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $f'(X) = 0$, и $f'(\overline{V}) = [0, a]$, где $a < 1$. Возьмем δ такое, что $0 < 4\delta < 1 - a$ и множество $q[1 - 4\delta, 1] \subset S^1$ состоит из регулярных значений f.

Пусть K — объединение тех компонент множества $f'^{-1}[1 - -4\delta, 1]$, которые пересекаются с $\overline{V}$. В силу выбора δ имеем $K \cap \overline{V} \subset X$. Пусть $N = K \cup \overline{V}$. Множество $\overline{V}$ есть деформационный ретракт N, поэтому сужение f на N также гомотопно нулю, и поднятие $f'|_V$ продолжается до поднятия $f'|_N$. При этом $f'(N) = [-4\delta, a]$.

Положим еще

$$N_1 = M \setminus (f'^{-1}[-3\delta, a] \cap N).$$

Пусть $H : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ — изотопия тождественного отображения $\mathrm{id}\,\mathbb{R}$, которая неподвижна на дополнении к интервалу $(-3\delta, +\infty)$ и стягивает отрезок $[-3\delta, a]$ в отрезок $[-3\delta, -2\delta]$. Тогда отображение $F : M \times I \to S^1$, заданное формулой

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x), & x \in N_1, \\ q \circ H(f'(x), t), & x \in N, \end{cases}$$

является Σ-гомотопией отображения f. Просто проверяется, что отображение $f_1 = F_1$ искомое. Лемма доказана. ■

2. Пусть $\xi = (M'; B_0, B_1)$ — кобордизм, где M' — компактная, возможно, несвязная поверхность с краем $B = B_0 \cup B_1$, причем $B_i \neq \emptyset$ для $i = 0, 1$.

Пусть далее $A \subset \operatorname{int} M'$ — некоторое семейство попарно непересекающихся окружностей и U_i — объединение тех компонент множества $M' \setminus A$, которые пересекаются с B_i, $i = 0, 1$.

Лемма 3. *Если:*

1) каждая компонента M' пересекается с обоими множествами B_i, $i = 0, 1$;

2) семейство A разбивает M' между множествами B_0 и B_1;

3) $A \subset \overline{U}_0 \cap \overline{U}_1$,

то существует функция Морса $h : (M'; B_0, B_1) \to ([0,1]; 0, 1)$ такая, что

a) некоторая, произвольно наперед заданная, точка $z \in (0,1)$ является регулярным значением h и $h^{-1}(z) = A$;

b) в некоторой окрестности края B функция h совпадает с произвольной наперед заданной функцией Морса

$$f' : (M'; B_0, B_1) \to ([0,1]; 0, 1);$$

c) $\Sigma(f') = \Sigma(h)$.

Доказательство. В силу предложения 5 мы можем ограничиться случаем, когда f' является минимальной функцией Морса. Переходя к общему случаю, построим вначале минимальную функцию, удовлетворяющую a) и b), а затем добавим новые критические точки так, чтобы выполнялось еще и c), и предыдущие условия не были нарушены.

Отметим, что 1) означает, что

$$U_0 \cup U_1 = M' \setminus A. \tag{1}$$

Далее из 2) вытекает, что каждая компонента множества $M' \setminus A$ пересекается ровно с одним из множеств B_0 или B_1, а так как U_i состоят из целых компонент $M' \setminus A$, то это означает, что

$$U_0 \cap U_1 = \emptyset. \tag{2}$$

Зафиксируем произвольное число $z \in (0,1)$. Возьмем положительное $\delta < \min\{z, 1 - z\}$ и для каждой окружности σ из A выберем ее регулярную окрестность N_σ в M', так, чтобы для разных окружностей σ и σ' из A их окрестности N_σ и $N_{\sigma'}$ не пересекались.

Рассмотрим множество $N_\sigma \setminus \sigma$. Оно состоит из двух компонент K_0 и K_1. Из формул (1) и (2) следует, что каждое K_i, $i = 0,1$ содержится ровно в одном из множеств U_j, $j = 0,1$. А так как по условию 3) окрестность N_σ пересекается с обоими множествами U_0 и U_1, то K_i содержатся в разных U_j. Поэтому, не теряя общности можно предполагать, что $K_i \subset U_i$, $i = 0,1$.

Отметим еще, что для $i = 0,1$ выполняется соотношение:

$$\partial \overline{U}_i = B_i \cup A. \tag{3}$$

Пусть $\phi_\sigma : N_\sigma \to [z-\delta, z+\delta]$ — функция Морса на N_σ без критических точек, для которой $\phi_\sigma^{-1}(z) = \sigma$. Так как N_σ диффеоморфно произведению $\sigma \times [z-\delta, z+\delta]$, причем окружности $\sigma \subset N_\sigma$ соответствует слой $\sigma \times 0$, то в качестве ϕ_σ можно взять проекцию на вторую координату.

Можно также предполагать, что $\phi_\sigma^{-1}[z-\delta, z] \subset \overline{U}_0$, $\phi_\sigma^{-1}[z, z+ +\delta] \subset \overline{U}_1$. Пусть $N_A = \cup_{\sigma\in A} N_\sigma$ — окрестность A. Определим функцию $\phi : N_A \to [z-\delta, z+\delta]$, положив $\phi = \phi_\sigma$ на N_σ.

Из формулы (3) и того, что каждая компонента из U_i пересекается как с B, так и с A, в силу предложения 5, вытекает существование функций на кобордизмах

$$h_- : (\overline{U}_0; B_0, A) \to ([0,1/2]; 0, 1/2),$$

$$h_+ : (\overline{U}_1; A, B_1) \to ([1/2,1]; 1/2, 1)$$

без критических точек индексов 0 и 2, которые совпадают с ϕ в окрестности A и с f' в окрестности B, причем $h_+^{-1}(z) = h_-^{-1}(z) = = A$.

Положив $h = h_-$ на $\overline{U}_0$ и $h = h_+$ на $\overline{U}_1$, мы получим искомую минимальную функцию Морса на M'. ■

Замечание. Соотношение (3) означает кобордантность A и B_i.

5. О прообразах регулярных значений. Пусть M — ориентируемая поверхность, $f : M \to S^1$ — гладкое отображение и $x \in S^1$ — его регулярное значение. Рассмотрим множество $X = f^{-1}(x)$. Оно представляет собой объединение конечного числа окружностей.

1. Ориентации поверхности M и окружности S^1 позволяют каноническим образом ориентировать X.

С каждым гладким отображением f многообразия M в окружность можно сопоставить векторное поле, аналогичное полю градиента: в локальном представлении отображение f является функцией, следовательно, однозначно определено векторное поле градиента этой функции. Обозначим его через $\widehat{\mathrm{grad}}\, f$. Отметим, что оно зависит от ориентации S^1.

Пусть C — компонента X и $z \in C$. Так как x — регулярное значение f, то f индуцирует изоморфизм:

$$\phi : TM_z \approx TX_z \oplus TS^1_x.$$

Выберем в TC_x вектор v_x (т.е. ориентируем C в точке x) так, чтобы пара $\langle \widehat{\mathrm{grad}}_x f, v_x \rangle$ определяла положительную ориентацию M. Эта ориентация определяет ориентацию C, а значит, и ориентацию A. Следовательно, мы можем рассматривать X как ориентированный одномерный цикл $[X] \in H_1 M$.

Отметим, что для разных регулярных значений $x, y \in S^1$ отображения f циклы $[f^{-1}(x)]$ и $[f^{-1}(y)]$ кобордантны и поэтому гомологичны.

2. На $H_1 M$ определена форма пересечения $\phi : H_1 M \times H_1 M \to \to \mathbb{Z}$. Эта форма естественным образом задает некоторый изоморфизм $p : H_1 M \to H^1 M$, сопоставляющий каждому $u \in H_1$ линейную форму $\phi(*, u)$.

3. Пусть $f : M \to S^1$ — гладкое отображение, x — его регулярное значение и $X = f^{-1}(x)$. Ориентируем X, как указано выше. Тогда $p(X)$ есть коцикл из $H^1 M$.

Пусть ξ — образующая группы $H^1 S^1 \approx \mathbb{Z}$, тогда мы имеем еще один коцикл $f^\sharp(\xi) \in H^1 M$, где

$$f^\sharp : H^1 S^1 \to H^1 M$$

— соответствующее отображение одномерных когомологий.

Предложение 6. *Имеет место равенство одномерных коциклов:*

$$p[X] = f^{\sharp}(\xi),$$

т.е. индекс пересечения любого одномерного цикла на M с прообразом регулярного значения равен степени отображения этого цикла в S^1. ■

Следствие 2. *Пусть $g : M \to S^1$ — еще одно гладкое отображение, y — его регулярное значение и $Y = g^{-1}(y)$ — ориентированный прообраз y. Условие $f \sim g$ равносильно условию $[X] = [Y] \in H_1 M$.* ■

6. Доказательство теоремы 3. Оно вытекает из следующей более общей теоремы.

Теорема 5. *Пусть $f : M \to S^1$ — негомотопное нулю отображение Морса, а Y — семья окружностей на M, которые попарно не пересекаются, причем ограничение $f|_Y$ гомотопно нулю. Тогда f Σ-гомотопно такому отображению h, что для некоторого регулярного значения z этого отображения*

$$h^{-1}(z) \cap Y = \emptyset.$$

Предположим, что теорема 5 верна. Рассмотрим множество $Y = g^{-1}(y)$. Оно представляет собой объединение конечного числа попарно не пересекающихся окружностей. Несложно видеть, что сужение $f|_Y : Y \to S^1$ гомотопно нулю, и поэтому к отображению f и множеству Y применима теорема 5. Отсюда следует утверждение доказываемой теоремы 3.

Покажем, что $f|_Y \sim 0$. Пусть K — произвольная компонента Y. Через $[K]$ обозначим одномерный цикл представляемый этой окружностью в $H_1 M$.

Так как $g(K)$ есть точка, то $[K] \in \ker g_{\sharp}$. Вследствие гомотопности f и g имеем $\ker f_{\sharp} = \ker g_{\sharp}$. Тогда $[K] \in \ker f_{\sharp}$, и отображение между окружностями $f|K : K \to S^1$ имеет степень 0. Отсюда $f|_K \sim 0$. ■

Доказательство теоремы 5. Пусть $x \in S^1$ — произвольное регулярное значение f и $X = f^{-1}(x)$. Мы можем считать, что пересечение Y и X трансверсально. Действительно, существует гладкая изотопия $H : M \times I \to M$, для которой $H_0 = \mathrm{id}\, M$ и пересечение $H_1(X)$ с Y трансверсально. Тогда, по утверждению 3 предложения 3, композиция $F = f \circ H^{-1} : M \times I \to S^1$ есть Σ-гомотопия отображения f, для которой

$$F_1^{-1}(x) = (f \circ H_1^{-1})^{-1}(x) = H_1 \circ f^{-1}(x) = H_1(X)$$

пересекается с Y трансверсально и мы можем заменить f на отображение F_1.

Разрежем M по X и обозначим полученную поверхность через M'. Пусть еще $\psi : M' \to M$ — отображение склеивания. Край $\partial M'$ обозначим через B, тогда $B = \psi^{-1}(X)$.

В силу следствия к лемме 2, можем предполагать, что каждая компонента M' пересекается с обоими множествами B_i, $i = 0, 1$.

Композиция $f \circ \psi : M' \to S^1$ гомотопна нулю и, следовательно, поднимается до некоторого отображения $f' : M' \to \mathbb{R}$, такого, что $q \circ f' = f \circ \psi$, где $q : \mathbb{R} \to S^1$ — накрывающее отображение: $q(t) = e^{2\pi i t}$.

Не ограничивая общности, можем считать, что $f'(M') = [0, 1]$. Тогда $q^{-1}(x) = \mathbb{Z}$ и $f'(B) = \{0, 1\}$. Положим

$$B_i = f'^{-1}(i) \quad i = 0, 1.$$

Пусть далее $C = \psi^{-1}(Y)$. Тогда C является объединением конечного числа дуг и окружностей на M, причем концы этих дуг принадлежат B. Разобъем компоненты C на следующие 4 группы.

Пусть α_i $(i = 0, 1)$ — множество тех дуг из C, оба конца каждой из которых принадлежат одному и тому же множеству B_i. Пусть β — множество тех дуг из C, один конец каждой из которых принадлежит B_0, а второй — B_1. Ясно, что все остальные компоненты C представляют собой окружности, не пересекающиеся с C. Обозначим их множество через γ.

Имеют место два утверждения, которые мы докажем ниже:

Лемма 4. *Если $X \cap Y \neq \emptyset$, то каждое из множеств α_i, $i = 0, 1$ непусто.*

Предложение 7. *Из того, что каждая компонента M' пересекается с обоими множествами B_0 и B_1, следует, что существует семейство окружностей $A \subset \operatorname{int} M'$, которое обладает следующими свойствами:*

1. $A \cap (\alpha_0 \cup \alpha_1 \cup \gamma) = \emptyset, \quad i = 0, 1.$
2. *A пересекается с каждой дугой из β ровно в одной точке, и это пересечение трансверсально.*
3. *A удовлетворяет условиям 2) и 3) леммы 3.*

Предположим, что это предложение доказано, построим семейство A и пусть $Y_1 = \psi(A)$. Тогда мы можем применить к Y_1 лемму 3 и построить функцию $h : M' \to \mathbb{R}$, совпадающую с f' в окрестности B, имеющую критический тип $\Sigma(f')$ причем $h^{-1}(z) = A$ для некоторого регулярного значения $z \in (0, 1)$.

Тогда по теореме 2 $h \sim_\Sigma f'$ и индуцирует такое отображение $f_1 : M \to S^1$, что:

a) $f_1 \sim_\Sigma f$ относительно некоторой окрестности X;
b) $f_1^{-1}(x) = f^{-1}(x) = X$;
c) точка $q(z) \in S^1$ является регулярным значением f_1 и $f_1^{-1}(z) = Y_1$.

В силу гомотопности f и f_1 сужение f_1 на Y_1 также гомотопно нулю, но при этом из условий 1 и 2 следует, что число точек пересечения $X_1 \cap Y$ *строго меньше* числа точек пересечения $X \cap Y$. Рассуждая дальше по индукции, мы построим такое отображение $f_k : M \to S^1$, что для некоторого его регулярного значения z

$$f_k^{-1}(z) \cap Y = \emptyset.$$

Тогда $h = f_k$ будет искомым отображением и теорема доказана. Итак, остается доказать лемму 4 и предложение 7.

Доказательство леммы 4. Пусть $\bar{f} : Y \to \mathbb{R}$ — поднятие $f|_Y$ так, что $q \circ \bar{f} = f : Y \to S^1$. Пусть дальше $K \subset Y$ — такая окружность, что $K \cap X \neq \emptyset$. Тогда вследствие компактности K функция $\overline{f}$ имеет минимум и максимум на K. В силу трансверсальности пересечения Y с $X = f^{-1}(x)$ и того, что x — регулярное значение f, критические значения $\overline{f}$, (в частности эти минимум и максимум) не принадлежат $q^{-1}(x) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Покажем, что α_0 непусто. Пусть $t = \max \overline{f}$. Рассмотрим множество

$$W = \overline{f}^{-1}\left[[t], t, \right],$$

где $[a]$ обозначает целую часть от a. Множество W непусто, так как содержит точку максимума f на K, и состоит из дуг K.

Пусть σ — компонента $W \cap K$ и x_1, x_2 — ее концы. Это точки пересечения $K \cap X$. Так как $f(X) = q(\mathbb{Z}) = x$, то значение $\overline{f}$ на каждом x_i должно быть целым числом из отрезка $\overline{f}(W)$. Следовательно, $\overline{f}(x_i) = [t]$, $i = 1, 2$.

Так как $\overline{f}|_\sigma$ и $f'|_\sigma$ являются поднятиями одного и того же отображения $f|_\sigma$, то

$$f'|_\sigma = \overline{f}|_\sigma - [t].$$

Из этой формулы следует, что $f'(x_i) = 0$ для $i = 1, 2$, т.е. что $x_i \in B_0$. Это и означает, что $\sigma \subset \alpha_0$ и α_0 не пусто. Аналогично доказывается, что $\alpha_1 \neq \emptyset$. ■

Доказательство предложения 7. Нам нужно построить семейство окружностей A, удовлетворяющее условиям 1–3.

Разрежем M' по $\alpha_0 \cup \alpha_1$. Мы получим поверхность, край которой имеет углы. Обозначим ее через L и пусть $r : L \to M'$ — фактор-отображение. Положим

$$B' = r^{-1}(B), \quad B'_i = r^{-1}(B_i), \quad i = 0, 1.$$

Тогда край каждой компоненты границы ∂L пересекается с B', но только с одним из множеств B'_0 или B'_1.

Для каждой компоненты $T \subset L$ и $i = 0, 1$ пусть T_i обозначает объединение тех компонент края ∂T, которые пересекаются с B'_i.

Через L' обозначим множество тех связных компонент L, которые пересекаются с обоими множествами B'_0 и B'_1, т.е. это множество тех $T \subset L$, для которых оба множества T_0 и T_1 непусты.

Пусть еще L_i для $i = 0, 1$ будет объединением тех компонент L, которые пересекаются только с B'_i. Ясно, что

$$L = L' \cup L_0 \dot{\cup} L_1.$$

Пусть еще $\beta' = r^{-1}(\beta)$ и $\gamma' = r^{-1}(\gamma)$. Отметим, что $\beta' \subset L'$, $\gamma' \subset \operatorname{int} L$. В каждой компоненте T из L' мы построим некоторое семейство окружностей C_T. Их объединение по всем компонентам из L' и будет семейством A, удовлетворяющим условиям данного предложения.

Итак, пусть T — компонента L', $c : T_0 \times [0,1] \subset T$ — воротник T_0 в T, причем $c(x, 0) = x \in T_0$. Тогда для достаточно малого $\tau \in \in [0,1]$ множество окружностей $C_T = c(T_0 \times \tau)$ является искомым. Покажем, как выбрать τ.

Отметим, что пересечение β с T_0 трансверсально и каждая дуга из $\beta \cap T$ пересекается с T_0 ровно в одной точке (ее начале). Отсюда следует, что для достаточно малого $\tau_\beta \in [0,1]$ пересечение $c(T_0 \times \tau)$ с каждой дугой $l \in \beta' \cap T$ остается трансверсальным и состоит из единственной точки.

Далее $\gamma' \subset \operatorname{int} L$, поэтому найдется $\tau_\gamma \in [0,1]$ такое, что $c(T_0 \times \times \tau) \cap \gamma' = \emptyset$.

Положим $\tau_T = \min\{\tau_\beta, \tau_\gamma\}$. Пусть $C_T = c(T_0 \times \tau_T)$, $A' = = \bigcup_{T \in L'} C_T$, $A = r(A')$. Покажем, что A — искомое семейство. Условия 1 и 2 предложения следуют прямо из построения. Докажем, что для A выполняются условия 2) и 3) леммы 3.

2) A разбивает M' между B_i, $i = 0, 1$. Пусть V — компонента M' и $\omega : [0,1] \to V$ такой путь, что $\omega(i) \in B_i$, $i = 0, 1$. Покажем, что он обязательно пересекает A.

Пусть t_0 — последнее из чисел $t \in [0,1]$, для которых $\omega(t) \in \in B_0 \cup \alpha_0$, и t_1 — первое из чисел $t \in [t_0, 1]$, для которых $\omega(t) \in$

$\in B_1 \cup \alpha_1$. Тогда путь $r^{-1}(\omega[t_0, t_1])$ содержится в некоторой компоненте $T \subset L'$ и пересекается как с T_0, так и с T_1.

По построению C_T разбивает T между T_0 и T_1, поэтому $r^{-1}(\omega[t_0, t_1])$ пересекается с $C_T \subset A'$, следовательно, $\omega[0,1]$ пересекается с A. ■

3) Пусть U_i — объединение тех компонент $M' \setminus A$, которые пересекаются с B_i, $i = 0, 1$. Пусть σ — компонента из A. Покажем, что $\sigma \subset \overline{U}_i$.

Пусть $r^{-1}(\sigma) \subset C_T$, где T — некоторая компонента из L', т.е. T пересекается с обоими множествами $B'_i, i = 0, 1$. Рассмотрим множество $T \setminus C_T$. Существует единственная компонента этого множества, которая пересекается с B'_1. Ее замыкание — это дополнение к воротнику T_0 и поэтому оно содержит C_T. Замыкания остальных компонент являются воротниками над компонентами T_0, следовательно, $r^{-1}(\sigma)$ принадлежит замыканию одной из таких компонент.

Таким образом, для каждого $i = 0, 1$ окружность σ принадлежит замыканию некоторой компоненты $M' \setminus A$, которая содержит $r^{(}T_i)$, а значит, пересекается и с B_i. ■

7. Доказательство теоремы 4. Обозначим $X = f^{-1}(x)$, $Y = g^{-1}(y)$. По условию $X \cap Y = \emptyset$.

Не теряя общности, мы можем сразу предполагать, что X и Y не содержат лишних компонент. Иначе, по лемме 2, эти компоненты с помощью Σ-гомотопии можно устранить. При этом пересечение прообразов x и y у новых отображений останется пустым.

Разрежем M вдоль X, обозначим полученную поверхность через M' и сохраним те же обозначения, что и в параграфе 4. Мы утверждаем, что для семейства окружностей $A = \psi^{-1}(Y) \subset \subset \operatorname{int} M'$ выполняются условия 1)–3) леммы 3.

Тогда мы можем построить функцию $h : M' \to \mathbb{R}$, совпадающую с f' в окрестности B, имеющую критический тип $\Sigma(f')$, причем $h^{-1}(q^{-1}(y)) = A$.

По теореме 2 $h \sim_\Sigma f'$, при этом h индуцирует такое отображение $f_1 : M \to S^1$, что:

a) $f_1 \sim_\Sigma f$ относительно некоторой окрестности X;

b) $f_1^{-1}(x) = f^{-1}(x) = X$;

c) точка $y \in S^1$ является регулярным значением f_1 и $f_1^{-1}(y) = Y$, т.е. $f_1^{-1}(y) = g^{-1}(y)$.

Теперь, по предложению 2, $f_1 \sim_\Sigma g$, и теорема доказана.

Докажем выполнение условий 1)–3). Условие 1) выполнено по предположению.

2) Ориентация M и дифференциалы отображений f и g индуцируют ориентацию соответствующих прообразов X и Y и их можно рассматривать как одномерные циклы $[X]$ и $[Y]$ группы гомологий H_1M. Из $f \sim g \not\sim 0$, в силу следствия 2, вытекает, что эти циклы гомологичны: $[X] = [Y]$. Но тогда для $i = 0,1$ циклы $[A]$ и $[B_i]$ из H_1M' также гомологичны. Так как они не пересекаются, то A разбивает M' между B_i, $i = 0,1$.

3) Из гомологичности A и B_i вытекает их кобордантность, т.е. для $i = 0,1$ найдется семейство U_i компонент множества $M' \setminus A$, такое, что $\partial\overline{U}_i = A \cup B_i$. В частности $A \subset \overline{U}_0 \cap \overline{U}_1$.

Остается показать, что U_i — это в точности объединение тех компонент из $M' \setminus A$, которые пересекаются с B_i, но это вытекает из условия 1). ■

Автор благодарен Шарко В.В. за помощь и поддержку при написании работы. Автор также признателен Панкову М.А., Полуляху Е.А. и Пришляку О.А. за просмотр рукописи и замечания, позволившие устранить некоторые неточности.

1. *Шарко В.В.* Функции на поверхностях. I. — Настоящий сборник, с. 408–434.
2. *Кудрявцева Е.А.* Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Мат. сборник (в печати).
3. *Ху Сы-Цзян.* Теория гомотопий. — М.: Мир, 1964. — 486 с.
4. *Милнор Дж.* Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
5. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1972. — 280 с.