УДК 517.9

С. Максименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ГИПОТЕЗЕ ДЖ. УАЙТХЕДА

1. Введение. В работе [1] Дж. Уайтхед задал следующий вопрос: *Пусть K — двумерный асферичный CW-комплекс и L — его подкомплекс. Верно ли, что тогда L асферичен?*

Попытки построить неасферичный подкомплекс асферичного 2-комплекса не привели к успеху, и вопрос получил известность как гипотеза Уайтхеда. Нам также будет удобней говорить о нем как о гипотезе.

Гипотеза. *Всякий подкомплекс L асферичного двумерного CW-комплекса K асферичен.*

Было доказано, что если $\pi_1(L)$ у 2-комплекса L либо конечна, либо абелева, либо свободна, то L вообще не вкладывается ни в какой асферичный 2-комплекс, а также, что всякий подкомплекс асферичного 2-комплекса, содержащий только одну 2-клетку, асферичен [2, 3]. Дополнительная информация изложена во введении [4].

2. Определения и полученные результаты. Под *n-комплексом* ниже будет пониматься n-мерный локально конечный не более чем счетный CW-комплекс. Пусть K — связный 2-комплекс. K называется *асферичным*, если $\pi_2(K) = 0$. K будет называться *субасферичным*, если существует его вложение в асферичный комплекс в качестве подкомплекса.

Гипотезу теперь можно сформулировать так: *всякий субасферичный комплекс является асферичным.*

В данной статье получено несколько результатов, относящихся к вложимости 2-комплексов в асферичные 2-комплексы.

Теорема 1. *Пусть A и B — гомотопически эквивалентные конечные комплексы, A — подкомплекс комплекса X, $f: A \to B$ — гомотопическая эквивалентность, являющаяся* *клеточным отображением, и $Y = X \cup_f B$ — пространство, получающееся приклеиванием X к B по отображению f. Тогда пары (X, A) и (Y, B) гомотопически эквивалентны.*

Следствие 1. *Предположим, что A — субасферичен и* $\dim(B) \leq 2$, *тогда B — также субасферичен.*

Таким образом, для конечных клеточных 2-комплексов субасферичность является свойством их гомотопического типа.

Теорема 2. *Пусть K — 2-комплекс, L — его подкомплекс, $i : L \to K$ — вложение, $i_1 : \pi_1(L) \to \pi_1(K)$ — гомоморфизм, индуцированный i, G — подгруппа $\pi_1(L)$ и L_G — соответствующее ей накрывающее пространство комплекса L. Предположим, что K — асферичен. Тогда если естественный гомоморфизм $Q_G^2 : H^2(L, Z) \to H^2(L_G, Z)$ — нетривиален, то $G \not\subset \ker(i_1)$.*

Следствие 2. *Пусть $\widetilde{L}$ — универсальное накрывающее L. Если гомоморфизм $Q^2 : H^2(L, Z) \to H^2(\widetilde{L}_G, Z)$ нетривиален, то L — не субасферичен.*

Доказательство следствия 2. Предположим, что Q — нетривиален, но вкладывается в асферичный комплекс K и пусть $i : L \to K$ — некоторое вложение. Из теоремы 2 сразу следует, что единичная подгруппа группы $\pi_1(L)$ не содержится в $\ker(i_1)$, что невозможно. Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть L — это произвольный CW-комплекс, $\pi_1(L) = G$, $M \subset N$ — нормальные делители в G, $\hat{q} : C_M \to C_N$ — отображение цепных комплексов, индуцированное накрывающим отображением $q : L_M \to L_N$. Если индекс $|N : M|$ конечен, скажем, равен n, то существует такое цепное отображение $g : C_N \to C_M$, что $\hat{q} \circ g : C_N \to C_N$ совпадает с умножением на n.*

Следствие 3. *Если в группе гомологий $H_i(L_M, Z)$ (группе когомологий $H^i(L_N, Z)$) найдется хоть один элемент, порядок которого не делит $|N : M|$, то гомоморфизм i-мерных гомологий (i-мерных когомологий), индуцируемый q, нетривиален.*

Следствие 4. *Пусть L — двумерный клеточный комплекс,*

$\pi_1(L)$ — конечна и в группе $H^2(L,Z)$ найдется хоть один элемент, порядок которого не делит $|\pi_1(L)|$. Тогда L — не субасферичен.

Доказательство следствия 4. Положим в теореме 3 $M = \{1\}$ — единичная подгруппа в G, $N = \pi_1(L) = G$. Тогда L_M — это универсальное накрывающее $\widetilde{L}$, а $L_N = L$. Теперь, в силу условия, гомоморфизм когомологий $Q_G^2 : H^2(L,Z) \to H^2(\widetilde{L},Z)$ — нетривиален и по следствию 2 к теореме 2 L — не субасферичен. Следствие доказано.

Последний результат следует также из работ [2, 3] вообще без никаких предположений о группе $H^2(L,Z)$.

3. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится общая конструкция — цилиндр частичного отображения. Пусть X и B — произвольные топологические пространства, A — подпространство в X, $f : A \to B$ — непрерывное отображение. *Цилиндром частичного отображения* f пространства X в B называется фактор-пространство $C_f(X)$ несвязной суммы $X \cup A \times I \cup B$, получаемое отождествлением точек $(a,0)$ с $a \in X$ и точек $(a,1) \in A \times I$ с $f(a) \in B$.

Так как само A является своим подпространством, то определено пространство $C_f(A)$, называемое *цилиндр отображения* f. Оно получается из несвязной суммы $A \times I \cup B$ отождествлением точек $(a,1) \in A \times I$ с $f(a) \in B$. Ясно, что $C_f(A)$ можно рассматривать как подпространство в $C_f(X)$.

Пусть, наконец, $Y = X \cup_f B$ — пространство, получаемое приклеиванием X к B по отображению f.

Отметим, что f гомотопно клеточному отображению, которое также является гомотопической эквивалентностью. Предположим, что A и B — конечны и $f : A \to B$ — клеточное отображение. Тогда $C_f(X)$ и Y естественным образом наделяются структурами локально конечных клеточных комплексов.

Если (X, A) — пара клеточных комплексов, то пары $(C_f(X), C_f(A))$ и (Y, B) гомотопически эквивалентны [6, с. 48, 49].

Пусть теперь $f : A \to B$ — гомотопическая эквивалентность, которая является клеточным отображением. Относительные гомотопические группы $\pi_n(C_f(A), A)$ тривиальны для всех $n \geq$ ≥ 0, поэтому A является сильным деформационным ретрактом $C_f(A)$ [5]. Пусть

$$H : C_f(A) \times I \to C_f(A)$$

— какая-нибудь деформационная ретракция $C_f(A)$ на A. Если A замкнуто в X, то H продолжается (тождественно на X) до сильной деформационной ретракции $H' : C_f(X) \times I \to C_f(X)$ всего $C_f(X)$ в X.

Так как $H'(C_f(A) \times I) \subset C_f(A)$, то пара (X, A) является сильным деформационным ретрактом пары $(C_f(X), C_f(A))$ и, следовательно, пары $(C_f(X), C_f(A))$ и (X, A) гомотопически эквивалентны, а тогда (X, A) и (Y, B) также гомотопически эквивалентны. Теорема доказана.

Следствие 5. *Предположим, что A — субасферичен, и* $\dim(B) \leq 2$, *тогда B — также субасферичен.*

Доказательство следствия 5. Субасферичность A означает, что существует вложение A в асферичный 2-комплекс X. Тогда по теореме 1 $Y = X \cup_f B$ гомотопически эквивалентен X и, следовательно, также асферичен. Кроме того, очевидно, что

$$\dim(Y) = \max(\dim(X \setminus A), \dim(B)) \leq 2.$$

Таким образом, B вкладывается в асферичный 2-комплекс Y, т. е. является субасферичным. Следствие доказано.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть X — локально линейно связное пространство. Для отображения $f : A \to B$ через f_n обозначается естественный гомоморфизм групп $\pi_n(A) \to$ $\to \pi_n(B)$.

Лемма 1. *Предположим, что K — асферичен. В этом случае отображение $f : X \to K$ гомотопно постоянному тогда и только тогда, когда образ* $\operatorname{Im}(f_1) = 0$.

Доказательство леммы. Понятно, что если f гомотопно постоянному отображению, то $\operatorname{Im}(f_1) = 0$. Обратно, если

$\mathrm{Im}(f_1) = 0$, то отображение f можно пропустить через универсальное накрывающее $\widetilde{K}$. Если теперь K — асферичен, то $\widetilde{K}$ стягиваемо и, следовательно, f гомотопно нулю. Лемма доказана.

Пусть теперь $f : X \to L$ и $g : L \to S^2$ — такие отображения, что $g \circ f : X \to S^2$ не гомотопно нулю.

Лемма 2. *Если K — асферичен, то* $\mathrm{Im}(f_1) \not\subset \ker(i_1)$.

Доказательство леммы. Итак, имеем диаграмму:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, phantom, "\overset{i}{\subset}"] \arrow[dr, "g"'] & K \\ & & S^2 \end{tikzcd}$$

Так как $\dim(K) = 2$, то отображение g, заданное на замкнутом подмножестве $L \subset K$, можно продолжить до отображения $\hat{g} : K \to S^2$ всего K в S^2. Отметим, что при этом $g = \hat{g} \circ i$ и $\hat{g}$ замыкает диаграмму, т. е. $g \circ f = \hat{g} \circ i \circ f$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, phantom, "\overset{i}{\subset}"] \arrow[dr, "g"'] & K \arrow[d, "\hat{g}"] \\ & & S^2 \end{tikzcd}$$

Если теперь предположить, что $\mathrm{Im}(f_1) \subset \ker(i_1)$, то, по лемме 1, отображение $i \circ f$, а значит, и отображение $g \circ f = \hat{g} \circ i \circ f$ гомотопны нулю. Это противоречит условию. Лемма доказана.

Пусть $G = \mathrm{Im}(f_1)$ и $q_G : L_G \to L$ — проекция накрывающего пространства на L. Поднимем f на накрывающее L_G до некоторого отображения $\tilde{f} : X \to L_G$. В результате получим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & L_G \arrow[dr, "q_G"] & & \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[rr, "f"'] & & L \arrow[r, phantom, "\overset{i}{\subset}"] \arrow[dr, "g"'] & K \arrow[d, "\hat{g}"] \\ & & & S^2 \end{tikzcd}$$

Если $g \circ f = g \circ q_G \circ \tilde{f}$ не гомотопно нулю, тогда и $g \circ q_G$ также не будет гомотопным постоянному отображению. Последнее замечание дает возможность использовать когомологии.

Лемма 3. *Существование хотя бы одного отображения $g : L \to S^2$ такого, что $g \circ q_G$, не гомотопно нулю равносильно тому, что гомоморфизм $Q_G^2 : H^2(L, Z) \to H^2(L_G, Z)$ нетривиален.*

Предполагая, что лемма доказана, завершим доказательство теоремы. Пусть Q_G^2 нетривиален, тогда, по лемме 4, найдется такое $g : L \to S^2$, что $g \circ q_G$ не гомотопно нулю. Если теперь Q_G^2 асферичен, то, применяя лемму к отображениям $q_G : L_G \to L$ и $g : L \to S^2$, получаем, что $G = \operatorname{Im}(q_{G1}) \not\subset \ker(i_1)$. Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Известно, что множество $[L, S^2]$ гомотопических классов отображений двумерного клеточного комплекса L в сферу S^2 совпадает с группой $H^2(L, Z)$ двумерных целочисленных когомологий комплекса L. Такая биекция получается сопоставлением каждому гомотопическому классу $\beta \in [L, S^2]$ образа образующей $H^2(S^2, Z) = Z$ при естественном гомоморфизме $\bar{\beta} : H^2(S^2, Z) \to H^2(L, Z)$.

Так как $\dim L = \dim L_G = 2$, то только что сказанное можно применить к L и L_G.

Предположим, что имеется такое $g : L \to S^2$, что $g \circ q_G$ не гомотопно постоянному, тогда g также не гомотопно постоянному. Поэтому $g \circ q_G$ соответствует некоторому ненулевому элементу $\mu \in H^2(L_G, Z)$, а g — ненулевому элементу $\lambda \in H^2(L, Z)$. Понятно, что $Q_G^2(\lambda) = \mu$ и, следовательно, Q_G^2 — нетривиален.

Обратно, пусть гомоморфизм Q_G^2 нетривиален и $\gamma \in H^2(L, Z)$ акой, что $Q_G^2(\gamma) \neq 0$. Возьмем отображение $g : L \to S^2$, соответствующее γ. Тогда отображению $g \circ q_G$ соответствует $Q_G^2(\gamma) \neq 0$ и оно не гомотопно нулю. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 3. Проведем его в несколько шагов.

1) Пусть G — группа и $Z[G]$ — ее групповое кольцо. Вся-

кий элемент $x \in Z[G]$ имеет вид $x = \sum_i n_i g_i$, где n_i — целые числа, почти все равные нулю, $g_i \in G$. Ниже нам понадобится следующая лемма [7, с. 549].

Лемма 4. *Множество*

$$D = \left\{ \sum_i n_i g_i \in Z[G] \middle| \sum_i n_i = 0 \right\}$$

является оболочкой элементов вида $1 - g$, $g \in G$.

2) Пусть X — клеточный комплекс, $\widehat{X}$ — его накрывающее пространство, $\pi_1(X) = N$, $\pi_1(\widehat{X}) = M$ и M — нормальный делитель в N. Через $C = \{C_j, \partial_j\}$ и $\widehat{C} = \{\widehat{C}_j, \hat{\partial}_j\}$ обозначим цепные комплексы соответственно X и $\widehat{X}$. $\widehat{C}$ естественным образом наделяется структурой $Z[N/M]$-комплекса.

Пусть $\{e^i_j\}$ — клетки в X. Они образуют базис для C как Z-модуля. Зафиксируем для каждой из них поднятие $\hat{e}^i_j$ на $\widehat{X}$. Тогда $\{\hat{e}^i_j\}$ образуют базис для $\widehat{C}$ как $Z[N/M]$-модуля, и каждая клетка из $\widehat{X}$ однозначно представляется в виде $\beta\hat{e}^i_j$, где $\beta \in N/M$. Пусть $q : \widehat{X} \to X$ — накрывающее отображение. Оно индуцирует отображение соответствующих цепных комплексов $\hat{q} : \widehat{C} \to C$. Оказывается, что:

Лемма 5.

1) *$\hat{q}$ — эпиморфизм, т. е. для всех j отображение $\hat{q}_j : \widehat{C}_j \to C_j$ эпиморфно;*

2) *ядро $\ker \hat{q}$ совпадает с оболочкой T элементов вида $(1 - \beta)\hat{e}^i_j$, где $\beta \in N/M$.*

Доказательство. Вначале дадим определение. Пусть A — R-модуль. Назовем элемент $z \in A$ *кратным* элементу $y \in A$, если $z = \gamma \cdot y$, где $\gamma \in R$.

Пусть $\hat{e}_j$ — некоторый базисный элемент из $\widehat{C}_j$ и

$$x = \left(\sum_k n_k \beta_k \right) \hat{e}_j$$

— j-мерная цепь из $\widehat{C}_j$, кратная $\hat{e}_j$. Тогда очевидно, что

$$\hat{q}(x) = \Big(\sum_k n_k\Big) e_j. \qquad (*)$$

Докажем теперь 1). Всякий элемент $y \in C_j$ имеет вид

$$y = \sum_k n_k e_j^k,$$

где n_k — целые и все, кроме конечного их числа, равны нулю. Теперь из формулы $(*)$ следует, что прообраз $\hat{q}^{-1}(y)$ непуст, так как, например,

$$\hat{q}\Big(\sum_k n_k \hat{e}_j^k\Big) = y.$$

Следовательно, $\hat{q}_j$ — эпиморфизм.

Докажем 2). Ясно, что всякий элемент $(1-\beta)\hat{e}_j$, где $\beta \in N/M$, принадлежит ядру $\hat{q}$ и, следовательно, $T \subset \ker(\hat{q})$.

Обратно, пусть сначала $x = \Big(\sum_k n_k\beta_k\Big)\hat{e}_j$ — j-мерная цепь из $\widehat{C}_j$, кратная $\hat{e}_j$. Из формулы $(*)$ сразу следует что $x \in \ker(\hat{q})$ тогда и только тогда, когда $\sum_k n_k = 0$. В этом случае, по лемме 4, получаем, что элемент $\sum_k n_k\beta_k$ группового кольца $Z[N/M]$ порождается элементами вида $1-\beta$, где $\beta \in N/M$. Следовательно, x порождается цепями вида $(1-\beta)\hat{e}_j^i$. Остается заметить, что всякий элемент из $\ker(\hat{q})$ порождается цепями, кратными базисным и которые также принадлежат $\ker(\hat{q})$. Лемма доказана.

3) Пусть H — группа и F — конечный нормальный делитель в H, $|F| = n$. Для каждого $h \in Z[H]$ в групповом кольце $Z[H]$ обозначим через $[h]$ сумму всех элементов смежного класса H по F, соответствующего h. Пусть e — единица в H, тогда $[e]$ — сумма всех элементов из F. Определим гомоморфизм $\phi : Z[H] \to \to Z[H]$, $\phi(x) = [e]x$.

Лемма 6. $\ker(\phi)$ *совпадает с оболочкой элементов вида* $1-f$, $f \in F$.

Доказательство. Ясно, что всякий элемент указанного вида принадлежит ядру $\ker(\phi)$. Докажем, что эти элементы порождают $\ker(\phi)$. В каждом смежном классе $v \in H/F$ выберем по одному представителю g_v. Назовем $x = \sum\limits_k n_k h_k \in Z[H]$ *v-однородным по F*, если все h_k принадлежат одному и тому же классу H по F. Понятно, что всякий $x \in Z[H]$ однозначно представляется в виде конечной суммы однородных по F элементов. Ясно также, что достаточно доказать, что однородные элементы порождаются элементами вида $1 - f$, $f \in F$. Итак, пусть x — v-однородный элемент. Тогда:

1) $x = g_v \cdot \left(\sum\limits_k n_k \cdot f_k\right)$, где $f_k \in F$;

2) $\phi(x) = \left(\sum\limits_k n_k\right) \cdot [g_v]$;

3) $\phi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_k n_k = 0$.

Сумму $\sum\limits_k n_k \cdot f_k$, где $f_k \in F$ можно рассматривать как элемент подкольца $Z[F]$ кольца $Z[H]$. Поэтому если $\sum\limits_k n_k = 0$, то по лемме получаем, что $\sum\limits_k n_k \cdot f_k$ порождается в $Z[F] \subset Z[H]$ элементами вида $1 - f$, $f \in F$. Следовательно, $x = g_v \cdot \left(\sum\limits_k n_k \cdot f_k\right)$ также порождается элементами указанного вида. Лемма доказана.

4) Докажем теперь теорему. Пусть $M \subset N$ — нормальные делители в G. Положим $H = G/M$, $F = N/M$. F можно рассматривать как нормальный делитель в H. По условию $|F| = |N/M| = n$. Пусть далее L_M и L_N — накрывающие пространства, соответствующие M и N, C_M и C_N — их цепные комплексы, $q : L_M \to L_N$ — накрывающее отображение и $\hat{q} : C_M \to C_N$ — цепное отображение, индуцируемое q.

C_M является $Z[G/M] = Z[H]$-модулем и поэтому гомоморфизм, определенный в п. 3) (произведение каждой цепи из C_M на $[e]$ — сумму элементов из F), индуцирует некоторое цепное

$\mathbb{Z}[H]$-отображение $\psi : C_M \to C_M$.

Из леммы сразу следует, что $\ker(\psi)$ совпадает с оболочкой элементов вида $(1-f)\cdot\hat{e}^i_j$, где $f \in F$ и $\hat{e}^i_j$ — элементы базиса в C_M. С другой стороны, с этой оболочкой совпадает и ядро $\ker(\hat{q})$. Кроме того, $\hat{q}$ — эпиморфизм. Следовательно, C_N изоморфен подкомплексу $B = \mathrm{im}(\psi)$ комплекса C_M и существует цепное отображение $g : C_N \to C_M$, замыкающее диаграмму:

$$\begin{tikzcd} C_M \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\hat{q}"'] & & C_M \\ & C_N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим отображение $\hat{q} \circ g : C_N \to C_N$. Легко видеть, что оно совпадает с умножением на n. Достаточно доказать это только для базисных элементов e_j из C_N. Если $\hat{e}_j \in C_M$ — базисный элемент, являющийся поднятием e_j, то $g(e_j) = [e] \cdot \hat{e}_j$ и тогда

$$\hat{q} \circ g(e_j) = \hat{q}([e] \cdot \hat{e}_j) = n \cdot e_j.$$

Теорема 3 доказана.

1. *Whitehead J.H.C.* On adding relations to the homotopy groups // Ann. Math. — 1941. — **42**, N 2. — P. 409–428.

2. *Cockcroft W.H.* On two-dimensional aspherical complexes // Proc. London Math. Soc. — 1954. — **4**, N 3. — P. 375–384.

3. *Adams J.F.* A new proof of a theorem of W. H. Cockcroft // J. London Math. Soc. — 1955. — **30**. — P. 482–488.

4. *Howie J.* Aspherical and acyclic 2-complexes // Ibid. — 1979. — **20**, N 2. — P. 549–558.

5. *Whitehead J.H.C.* On the homotopy type of ANR's // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — **54**, N 11. — P. 1133–1145.

6. *Ху Сы-Цзян.* Теория гомотопий. — М.: Мир, 1964. — 486 с.

7. *Fox R.* Free differential calculus // J. Ann. Math. — 1953. — **57**, N 2. — P. 547–559.