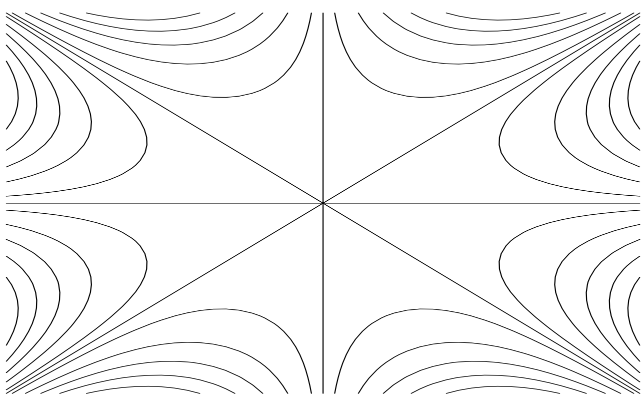
И. Ю. Власенко
С. И. Максименко
Е. А. Полулях

Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий



Киев 2006

*ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ИЗУЧЕНИИ
ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
МНОГООБРАЗИЙ*

М а т е м а т и к а   т а   ї ї   з а с т о с у в а н н я

Інститут математики
Національної академії наук України, Київ

Праці Інституту математики Національної академії наук України — Том 61

СЕКЦІЯ: Геометрія і топологія

И. Ю. Власенко
С. И. Максименко
Е. А. Полулях

Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий

Інститут математики НАН України
Київ 2006

УДК 517.938.5, 517.91
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИЗУЧЕНИИ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОГООБРАЗИЙ **И. Ю. Власенко, С. И. Максименко, Е. А. Полулях**. // Труды Института математики НАН Украины. Т. 61. / Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. — 338 с.

Книга посвящена изучению групп гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий методами топологии и теории динамических систем.

Изложенный материал включает в себя вопросы связанные с извлечением корней из гомеоморфизмов, вложимостью потоков Понтрягина в поверхности, а также с гомотопической структурой группы диффеоморфизмов, сохраняющих орбиты векторных полей.

Для специалистов, работающих области в топологии, теории динамических систем и теории функций, а также для студентов, аспирантов и всех, интересующихся преобразованиями многообразий.

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, профессор А. В. Болсинов, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Утверждено к печати ученым советом Института математики НАН Украины

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 966-02-4148-8

Предисловие

Группы преобразований многообразий лежат на стыке нескольких наук и несут на себе много различных структур. Кроме алгебраической структуры эти группы обладают "естественными" топологиями. При этом группы диффеоморфизмов компактных многобразий можно рассматривать даже как бесконечномерные группы Ли. Подгруппы групп диффеоморфизмов часто возникают как группы автоморфизмов различных структур на многообразиях, а сами группы преобразований естественно действуют на пространствах отображений. Особое место в теории групп преобразований занимают итерации, устойчивость и типичность гомеоморфизмов и диффеоморфизмов.

Целью данной монографии является описание ряда новых интересных тем, возникающих при изучении групп гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий. Книга состоит из пяти глав.

В первой главе приводятся предварительные сведения из теории динамических систем.

Во второй главе изучается связь между инвариантами динамической системы и инвариантами ее степеней.

Третья глава посвящена гомеоморфизмам канторового множества и вложениям надстроек над такими гомеоморфизмами в двумерные многообразия.

Четвертая глава содержит небольшой обзор результатов по структуре групп диффеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий.

В пятой главе изучаются диффеоморфизмы, сохраняющие слоения на многообразиях. Особое место занимают отображения, которые сохраняют орбиты векторных полей.

Авторы выражают свою глубокую признательность А. М. Самойленко за поддержку этого направления в нашем институте, А. Н. Шарковскому за конструктивные предложения, позволившие существенно улучшить содержание книги, А. В. Болсинову за внимательное изучение данной работы и важные замечания, В. Э. Гонтковской за ее нелегкий труд как редактора, нашим друзьям и коллегам Д. В. Болотову, М. А. Панкову и А. О. Пришляку за полезные обсуждения.

В последнюю по списку, но не последнюю по значению очередь, мы хотим поблагодарить В. В. Шарко за постоянную помощь, поддержку, многочисленные обсуждения, внимание и интерес к нашей работе.

ГЛАВА 1

Предварительные сведения

В этой главе мы напомним некоторые определения из теории динамических систем, необходимые в дальнейшем.

Для более детального ознакомления рекомендуем читателю книги К. С. Сибирского [34] и З. Нитецки [25].

Пусть X — топологическое пространство и $f : X \to X$ — гомеоморфизм. Пара (X, f) часто называется *(дискретной) динамической системой*.

Обозначим через $O_f(x)$ траекторию точки x под действием f, т.е. множество $\{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}\}$. Пусть также

$$O_f^+(x) = \{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}^+\} \quad \text{и} \quad O_f^-(x) = \{f^n(x) | \; n \in \mathbb{Z}^-\}$$

обозначают положительную и отрицательную полутраектории точки x соответственно.

1.1. Неблуждающее множество

Определение 1.1. *Точка x называется* ***неподвижной (фиксированной)*** *точкой гомеоморфизма f, если $f(x) = x$. Множество всех неподвижных точек f будет обозначаться* $\mathrm{Fix}\,(f)$.

Определение 1.2. *Точка x называется* ***периодической*** *периода n для гомеоморфизма f, если $f^n(x) = x$ и $f^k(x) \neq x$ для $k = 1, \ldots, n-1$. Множество всех периодических точек f обозначается через* $\mathrm{Per}\,(f)$.

Для каждой точки $x \in X$ определим ее *ω-предельное* $\omega_f(x)$ и *α-предельное* $\alpha_f(x)$ множества относительно f с помощью следующих формул:

$$\omega_f(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^n(x)} \qquad \text{и} \qquad \alpha_f(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^{-n}(x)}.$$

Можно также сказать, что $y \in \omega_f(x)$ тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность $\{N_i\} \subset \mathbb{N}$, что $\lim\limits_{i\to\infty} N_i = +\infty$ и $\lim\limits_{i\to\infty} f^{N_i}(x) = y$.

Очевидно также, что

$$\omega_f(x) = \alpha_{f^{-1}}(x).$$

Зачастую, когда понятно о каком гомеоморфизме идет речь, мы будем опускать индекс f и обозначать множества $\omega_f(x)$ и $\alpha_f(x)$ через $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ соответственно.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1.3. [34]. *Множества $\alpha(x)$ и $\omega(x)$ — инвариантны и замкнуты относительно f, а также содержатся в замыкании $\overline{O_f(x)}$ орбиты точки x. В частности, если $y \in \omega(x)$, то*

$$\alpha(y) \cup \omega(y) \ \subset \ \overline{O_f(y)} \ \subset \ \omega(x).$$

Обозначим

$$\mathrm{Lim}_-(f) = \bigcup_{x\in M} \alpha(x), \qquad \mathrm{Lim}_+(f) = \bigcup_{x\in M} \omega(x),$$

$$\mathrm{Lim}\,(f) = \mathrm{Lim}_-(f) \cup \mathrm{Lim}_+(f).$$

Последнее множество $\mathrm{Lim}\,(f)$ называется *предельным множеством f*.

Определение 1.4. *Точка x называется **рекуррентной**, (или в другой терминологии **устойчивой по Пуассону**, см.* [34, §9]*) для гомеоморфизма f, если*

$$x \in \alpha(x) \cap \omega(x).$$

*При $x \in \alpha(x)$ эта точка называется α-**рекуррентной**, или **устойчивой по Пуассону в отрицательном направлении**.*

*Аналогично определяются ω-**рекуррентные** (**устойчивые по Пуассону в положительном направлении**) точки.*

Пусть $\operatorname{Rec}_+(f)$ и $\operatorname{Rec}_-(f)$ — соответственно множества всех ω- и α-рекуррентных точек f. Тогда их пересечение

$$\operatorname{Rec}(f) = \operatorname{Rec}_+(f) \cap \operatorname{Rec}_-(f)$$

является множеством всех *рекуррентных* точек f. Очевидно, что

$$\operatorname{Rec}(f) \subset \operatorname{Lim}(f).$$

Множество рекуррентных точек, вообще говоря не замкнуто. Но можно доказать, см. [34, §14, теорема 1.14], что для полного метрического пространства замыкание $\overline{\operatorname{Rec}(f)}$ совпадает с центром Биркгофа отображения f, см. п. 1.2.

Следующее определение было дано Биркгофом в [60].

Определение 1.5. *Точка $x \in X$ называется **блуждающей** точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что*

$$f^m(U) \cap U = \varnothing \quad \textit{для всех } m > 0.$$

*Все остальные точки называют **неблуждающими**. Таким образом, точка $x \in X$ является неблуждающей для f, если для любой ее окрестности V найдется такое целое $m \neq 0$, что $f^m(V) \cap V \neq \varnothing$.*

Лемма 1.6. *Если X хаусдорфово пространство, то число m в определении 1.5 неблуждающей точки можно выбрать сколь угодно большим по модулю.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой окрестности V неблуждающей точки $x \in X$ существует только конечное множество чисел $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таких, что $f^{m_i}(V) \cap V \neq \varnothing$. Мы получим противоречие, показав, что тогда x является неблужающей для f.

Отметим, что x не может быть периодической. В противном случае, если p — период x, то $x \in f^{pk}(V) \cap V \neq \varnothing$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Далее, так как X хаусдорфово, то точки

$$x,\ f^{m_1}(x),\ \ldots,\ f^{m_k}(x)$$

имеют попарно непересекающиеся окрестности

$$U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_k$$

соответственно. Рассмотрим следующую окрестность

$$U = V \bigcap \bigcap_{i=0}^{k} f^{-m_i}(U_i)$$

точки x.

Покажем, что $f^k(U) \cap U = \varnothing$ для всех $k \neq 0$. Действительно, если $k \notin \{m_1, \ldots, m_k\}$, то по предположению об окрестности V

$$f^k(U) \cap U \subset f^k(V) \cap V = \varnothing.$$

Если же $k = m_i$, то

$$f^{m_i}(U) \cap U \subset f^{m_i} f^{-m_i}(U_i) \cap U_0 = U_i \cap U_0 = \varnothing.$$

Следовательно, x — блуждающая точка для f. □

Множество блуждающих точек f обозначается $W(f)$. Поскольку каждая блуждающая точка лежит в $W(f)$ вместе со своей окрестностью, то $W(f)$ открыто в X.

Множество неблуждающих точек f обозначается $\Omega(f)$. Оно замкнуто в X как дополнение к $W(f)$.

Так как периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}\,(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

Пример 1.7. Всякая *изолированная* точка пространства X является либо периодической, либо блуждающей.

Отметим, что неблуждающее множество, в отличие от множества периодических точек, зависит от того, на каком пространстве действует динамическая система. Так, для f-инвариантного подпространства $A \subseteq X$ выполняется неравенство $\Omega(f|_A) \subseteq \Omega(f)$ (см. предложение 2.25 на стр. 39), но множества $\Omega(f|_A)$ и $\Omega(f)$, вообще говоря, не обязаны совпадать даже если $\Omega(f) \subseteq A$.

Это замечание приводит к понятию центра динамической системы, которое было введено Биркгофом в [60].

1.2. Центр Биркгофа

Пусть $f : X \to X$. Наивное определение центра Биркгофа f состоит в том, чтобы максимально проитерировать конструкцию неблуждающего множества. Положим $\Omega_1(f) = \Omega(f)$ и по индукции определим

$$\Omega_{n+1}(f) = \Omega(f|_{\Omega_n(f)}).$$

Пересечение полученной последовательности вложенных друг в друга замкнутых инвариантных множеств

$$\Omega(f) = \Omega_1(f) \supset \Omega_2(f) \supset \cdots \supset \Omega_n(f) \supset \cdots$$

обозначим через $\Omega_\omega(f)$. Используя трансфинитную индукцию можно определить множества $\Omega_\lambda(f)$ для всех порядковых чисел λ. Тогда, согласно лемме Цорна, убывающая цепочка множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$ должна остановиться на некотором счетном ординале α, для которого

$$\Omega_\gamma(f) = \Omega(f|_{\Omega_\gamma(f)}).$$

Полученное замкнутое инвариантное множество и называется *центром* (*Биркгофа*). Будем обозначать его $BC(f)$.

Опишем построение $BC(f)$ более детально.

База индукции. Положим $\Omega_1(f) = \Omega(f)$.

Шаг индукции. Пусть λ — некоторое порядковое число. Предположим, что множества $\Omega_\alpha(f)$ уже определены для всех ординалов $\alpha < \lambda$.

Для того, чтобы определить множество $\Omega_\lambda(f)$, рассмотрим два случая:

(i) λ имеет предшествующий элемент $(\lambda - 1) < \lambda$ в классе Ξ всех ординалов, то есть для любого $\beta \in \Xi$ либо $\beta \leq (\lambda - 1)$, либо $\beta \geq \lambda$.

Тогда пусть

$$\Omega_\lambda(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_{\lambda-1}(f)}\right).$$

В частности, $\Omega_{n+1}(f) = \Omega\left(f|_{\Omega_n(f)}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(ii) λ не имеет непосредственно предшествующего ему порядкового числа. Тогда положим

$$\Omega_\lambda(f) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \Omega_\alpha(f).$$

В частности, $\Omega_\omega(f) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n(f)$.

Таким образом, мы получили набор замкнутых инвариантных подмножеств $\{\Omega_\lambda(f)\}_{\lambda\in\Xi}$ пространства X. При этом, по построению, соотношения

$$\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\beta(f) \quad \text{и} \quad \alpha \leq \beta$$

равносильны. Поэтому, порядок, индуцированный отношением включения на семействе множеств $\{\Omega_\lambda(f)\}$, является полным порядком.

Лемма 1.8. *Существует порядковое число γ такое, что*

$$\Omega_{\gamma+1}(f) = \Omega_\gamma(f)$$

(следовательно, и $\Omega_\alpha(f) = \Omega_\gamma(f)$ для всех $\alpha > \gamma$).

Доказательство. Заметим, что для каждого ординала λ существует порядковое число $(\lambda + 1)$, следующее непосредственно за λ. Действительно, пусть

$$A_\lambda = \{\alpha \in \Xi \mid \alpha > \lambda\}.$$

Тогда A_λ вполне упорядочено и содержит наименьший элемент $\lambda + 1$. Поэтому для каждого ординала α либо $\alpha \leq \lambda$, либо $\alpha \geq \lambda + 1$.

Предположим, что $\Omega_{\lambda+1}(f) \subsetneqq \Omega_\lambda(f)$ для всех $\lambda \in \Xi$.

Обозначим $B_\lambda = \Omega_\lambda(f) \setminus \Omega_{\lambda+1}(f)$. Тогда $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Xi}$ — семейство непустых попарно непересекающихся подмножеств пространства X. Воспользуемся теоремой Цермело (см. [119, 120]) и выберем из каждого B_λ по точке $x_\lambda \in B_\lambda$, $\lambda \in \Xi$ (напомним, что $B_\lambda \in 2^X$ для всех $\lambda \in \Xi$). Множество всех $\xi < \alpha$, $\xi \in \Xi$, обозначим через $\Gamma(\alpha)$.

Тогда для каждого $\alpha \in \Xi$ получим инъективное отображение $\Phi_\alpha : \Gamma(\alpha) \to X$, заданное формулой: $\Phi_\alpha(\beta) = x_\beta$.

Пусть $\aleph_\mu$ — кардинальное число, которое соответствует мощности множества X. По определению,

$$\aleph_\alpha = \operatorname{card}(\Gamma(\omega_\alpha)),$$

где ω_α — порядковое число, соответствующее предельному порядковому типу.

Напомним (см. [120]), что порядковый тип ξ вполне упорядоченного множества Z называется *предельным*, если он является наименьшим порядковым числом среди всех порядковых чисел, соответствующих всем возможным упорядочениям множества Z, превращающим его во вполне упорядоченное множество. (Предельные порядковые типы принято индексировать по возрастанию элементами Ξ.)

Таким образом получаем неравенство

$$\operatorname{card} X = \aleph_\mu < \aleph_{\mu+1} = \operatorname{card}(\Gamma(\omega_{\mu+1})),$$

которое, очевидно, противоречит существованию инъективного отображения

$$\Phi_{\omega_{\mu+1}} : \Gamma(\omega_{\mu+1}) \to X.$$

Следовательно, найдется такое $\gamma \in \Xi$, что

$$B_\gamma = \Omega_\gamma(f) \setminus \Omega_{\gamma+1}(f) = \varnothing.$$

Но тогда $\Omega_\gamma(f) = \Omega_{\gamma+1}(f)$. □

Используя лемму, дадим следующее определение.

Определение 1.9. *Пусть $\gamma \in \Xi$ — наименьший ординал, удовлетворяющий утверждению леммы 1.8 (он существует, так как Ξ вполне упорядочено).*

Замкнутое инвариантное подмножество

$$BC(f) = \Omega_\gamma(f)$$

*динамической системы (X, f) называется ее **центром Биркгофа**, а порядковое число γ — **глубиной центра** динамической системы (X, f).*

Замечание 1.10. Применяя теорему Бэра–Хаусдорфа (см. [1]) для топологических пространств со счетной базой (в частности, для сепарабельных метрических пространств), легко показать, что глубина центра произвольной динамической системы с таким фазовым пространством является счетным трансфинитом.

Заметим, что множество рекуррентных точек всегда принадлежит центру Биркгофа. Поэтому, если множество рекуррентных точек всюду плотно в неблуждающем множестве, то стабилизация наступает уже на первом шаге.

1.3. Цепно-рекуррентные множества

Эти множества являются своего рода метрическим аналогом неблуждающих множеств. Они введены Конли [74] и с успехом использовались для описания динамики типичных гомеоморфизмов.

Определение 1.11. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение метрического пространства (X, d) в себя и пусть $\varepsilon > 0$. Непустая конечная последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из X называется* **ε-цепью** *относительно f, если $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Будем говорить, что такая ε-цепь *начинается* в x_0, *заканчивается* в x_n и имеет длину n.

Обозначим через $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ множество концов всевозможных ε-цепей с началом в x. Очевидно, что при $\varepsilon < \varepsilon'$ каждая ε-цепь от x к y также является ε'-цепью, поэтому $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f) \subseteq \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f)$ при $\varepsilon < \varepsilon'$. В действительности верно более сильное утверждение:

Лемма 1.12. *Каждое множество $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ открыто и*

$$\overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)} \subseteq \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon < \varepsilon'.$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ и

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ y$$

— ε-цепь с началом в x и концом в y. Так как

$$d(f(x_{n-1}), y) < \varepsilon,$$

то $d(f(x_{n-1}), y) + \delta < \varepsilon$ для некоторого достаточо малого $\delta > 0$. Поэтому для любой точки y' из δ-окрестности точки y последовательность

$$x_0 = x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ y'$$

является ε-цепью от x к y', т.е. $y' \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$. Таким образом, множество $\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$ содержит δ-окрестность точки y, а значит, оно открыто.

Предположим, что $y \in \overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)}$. Тогда найдется такая точка $y' \in \mathcal{C}_\varepsilon(x, f)$, что $d(y', y) < \varepsilon' - \varepsilon$. Пусть

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ y'$$

произвольная ε-цепь с началом в x и концом в y'. Тогда

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ y$$

является ε'-цепью между x и y. Действительно,

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon < \varepsilon'$$

и

$$d(f(x_{n-1}), y) < d(f(x_{n-1}), y') + d(y', y) < \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon'.$$

Следовательно, $y \in \mathcal{C}_{\varepsilon'}(x, f)$. □

Обозначим

$$\mathcal{C}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}_\varepsilon(x, f).$$

Из леммы 1.12 вытекает, что $\mathcal{C}(x, f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{C}_\varepsilon(x, f)}$, а значит, $\mathcal{C}(x, f)$ замкнуто в X.

Определение 1.13. *Точка $x \in X$ называется* ***цепно-рекуррентной*** *для f, если $x \in \mathcal{C}(x, f)$. Множество всех цепно-рекуррентных точек f обозначается через $\mathcal{C}(f)$.*

Несложно видеть, что каждая неблуждающая точка является рекуррентной, поэтому имеют место следующие включения:

$$\mathrm{Fix}\,(f) \subset \mathrm{Per}\,(f) \subset \mathrm{Rec}\,(f) \subset \mathrm{Lim}\,(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f).$$

Лемма 1.14. *Если $f : X \to X$ равномерно непрерывный гомеоморфизм, то $\mathcal{C}(f)$ замкнуто и $\mathcal{C}(f^{-1}) \subset \mathcal{C}(f)$. В частности, если f^{-1} также равномерно непрерывен, то $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. (1) Сначала докажем, что

$$\mathcal{C}(f^{-1}) \subset \mathcal{C}(f).$$

Из равномерной непрерывности f следует, что для каждого $\omega > 0$ найдется такое $\delta(\omega) > 0$, что из $d(x, y) < \delta(\omega)$ вытекает, что $d(f(x), f(y)) < \omega$.

Пусть $x \in \mathcal{C}(f^{-1})$ и $\omega > 0$. Необходимо найти ω-цепь относительно f с началом и концом в x. По определению, существует $\delta(\omega)$-цепь относительно f^{-1} с началом и концом в x:

$$x = x_0, \ x_1, \ \ldots, \ x_{n-1}, \ x_n = x,$$

т.е. $d(f^{-1}(x_i), x_{i+1}) < \delta(\omega)$. Но тогда

$$d(f \circ f^{-1}(x_i), f(x_{i+1})) \ = \ d(f(x_{i+1}), x_i) \ < \ \omega.$$

Таким образом, обратная последовательность

$$x = x_n, \ x_{n-1}, \ \ldots, \ x_1, \ x_0 = x$$

является искомой ω-цепью относительно f.

(2) Покажем теперь, что $\mathcal{C}(f)$ замкнуто. Пусть x — предельная точка $\mathcal{C}(f)$ и $\varepsilon > 0$. Нужно построить ε-цепь относительно f с началом и концом в x.

Выберем произвольным образом три положительных числа ω, δ и ε' так, чтобы

$$\omega + \varepsilon' < \varepsilon, \qquad \varepsilon' + \delta < \varepsilon, \qquad \delta < \delta(\omega),$$

где $\delta(\omega)$ — константа в определении равномерной непрерывности f.

Так как x предельная точка для $\mathcal{C}(f)$, то найдется точка $y \in \mathcal{C}(f)$ такая, что $d(x, y) < \delta$. Тогда $d(f(x), f(y)) < \omega$.

Так как y рекуррентна для f, то существует ε'-цепь

$$y, \ y_1, \ \ldots, \ y_k, \ y$$

с началом и концом в точке $y \in X$ такая, что $d(x, y) < \omega$. Мы утверждаем, что последовательность

$$x, \ y_1, \ \ldots, \ y_k, \ x$$

является ε-цепью с началом и концом в x. Действительно

$$d(f(x), y_1) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), y_1) < \omega + \varepsilon' < \varepsilon,$$

$$d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon' < \varepsilon, \ \text{для} \ i = 1, \ldots, k-1,$$

$$d(f(y_k), x) \leq d(f(y_k), y) + d(y, x) < \varepsilon' + \delta < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Следствие 1.15. *Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм метрического компакта X. Тогда $\mathcal{C}(f)$ — замкнутое непустое множество, причем $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. Так как X компактно, то $\mathrm{Lim}\,(f)$, а значит, и $\mathcal{C}(f)$ — непусты. Замкнутость $\mathcal{C}(f)$ и равенство $\mathcal{C}(f^{-1}) = \mathcal{C}(f)$ следует из равномерной непрерывности f и f^{-1} согласно лемме 1.14. □

1.4. Регулярные блуждающие точки

Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм. Тогда в его множестве блуждающих точек можно выделить подмножества ω-регулярных точек, α-регулярных точек, регулярных точек и нерегулярных точек при помощи понятия регулярности, введенного Биркгофом и Смитом [61].

Определение 1.16. *Пусть $x \in W(f)$ — блуждающая точка. Тогда она называется ω-**регулярной**, если для произвольной окрестности U_Ω неблуждающего множества Ω найдется окрестность V_x точки x такая, что почти вся положительная полуорбита V_x содержится в U_Ω, т.е. начиная с некоторого $n > 0$ имеет место включение:*

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} f^i(V_x) \subset U_\Omega.$$

*Точка $x \in W(f)$ называется α-**регулярной**, если она ω-регулярна для обратного гомеоморфизма f^{-1} и **регулярной**, если она одновременно и ω- и α-регулярна.*

*Остальные блуждающие точки из X, не являющиеся ни α- ни ω-регулярными, называются **нерегулярными.***

Множества регулярных, α-регулярных и ω-регулярных точек будем обозначать соответственно через

$$\mathrm{Reg}\,(f), \qquad \mathrm{Reg}_-(f) \qquad \mathrm{Reg}_+(f).$$

Тогда по определению,

$$\mathrm{Reg}\,(f) \;=\; \mathrm{Reg}_{\,-}(f) \;\cap\; \mathrm{Reg}_{\,+}(f).$$

Очевидно, что все эти множества открыты.

1.5. Гиперболические отображения

1.5.1. Действительная нормальная форма Жордана матрицы. Пусть E_k обозначает единичную $(k\times k)$-матрицу. Для каждой $(k\times k)$-матрицы X и целого $p>0$ рассмотрим следующую $(pk\times pk)$-марицу

$$J_p(X) = \left.\begin{Vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & 0\\ E_k & X & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & X & 0\\ 0 & 0 & \cdots & E_k & X \end{Vmatrix}\right\} p, \tag{1.1}$$

называемую *жордановой p-клеткой*, соответствующей X.

Для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ обозначим

$$R\,(\alpha+i\beta) = \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta\\ \beta & \alpha \end{Vmatrix}. \tag{1.2}$$

Пусть A — действительная квадратная матрица. Напомним, что если $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ — ее комплексное собственное значение, то сопряженное к нему $\overline{\lambda}$ также будет собственным значением A. Обозначим через $\lambda_1,\overline{\lambda_1},\dots,\lambda_c,\overline{\lambda_c}$ комплексные, а через $\lambda_{c+1},\dots,\lambda_{c+d}$ действительные собственные значения A. Тогда матрица A сопряжена с блочно-диагональной матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} J_{p_1}(R(\lambda_1)) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{p_c}(R(\lambda_c)) & & \\ & & & J_{k_1}(\lambda_{c+1}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{k_d}(\lambda_{c+d}) \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

(см., например, теорему 2.2.5 в [153].)

Позже нам будет необходима следующая формула для экспоненты жордановой клетки:

$$e^{J_k(A)t} = \left\| \begin{array}{cccc} e^{At} & 0 & \cdots & 0 \\ t \cdot e^{At} & e^{At} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{At} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \cdot e^{At} & \cdots & e^{At} \end{array} \right\| . \tag{1.4}$$

1.5.2. Линейные гиперболические отображения. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейное отображение, определенное матрицей A. Тогда формула (1.3) также означает, что A индуцирует разложение $\mathbb{R}$ в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{c} E_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i} \;\oplus\; \bigoplus_{j=1}^{d} E_{\lambda_{c+j}}\,,$$

где $E_{\lambda,\bar{\lambda}}$ соответствует паре комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda, \bar{\lambda}$, а E_λ — действительному собственному значению λ отображения A. Эти пространства называют *корневыми*.

Введем обозначения:

$$E^- = E^-(A) = \bigoplus_{|\lambda|<1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|<1} E_{\lambda,\bar{\lambda}},$$

$$E^+ = E^+(A) = \bigoplus_{|\lambda|>1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|>1} E_{\lambda,\bar{\lambda}},$$

$$E^0 = E^0(A) = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1} E_{\lambda,\bar{\lambda}}.$$

Очевидно, что E^-, E^+ и E^0 инвариантны относительно отображения A и при этом $\mathbb{R}^n = E^- \oplus E^+ \oplus E^0$.

Определение 1.17. *Линейное отображение*

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

называется ***гиперболическим****, если абсолютные величины всех его собственных значений отличны от единицы. Другими словами, A — гиперболично тогда и только тогда, когда $E^0 = \{0\}$ или, что то же самое, когда $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$.*

Так как ограничение A на пространство $E^-(A)$ — линейный оператор, все собственные значения которого по модулю меньше единицы, то найдется норма, для которой ограничение $A|_{E^-(A)}$ является сжимающим. Кроме того, если A обратимо, то $E^+(A) = E^-(A^{-1})$ и ограничение A^{-1} на пространство $E^+(A)$ также сжимающее.

Определение 1.18. *Подпространства $E^-(A)$ и $E^+(A)$ называются соответственно* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *подпространствами линейного отображения A.*

1.5.3. Теорема Хартмана – Гробмана. Эта теорема утверждает, что в окрестности гиперболической неподвижной точки отображение топологически сопряжено со своей линейной частью.

Определение 1.19. *Пусть*

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

— C^1-отображение и $p \in \mathbb{R}^n$ — неподвижная точка f. Точка p называется ***гиперболической****, если касательное отображение*

$$D_p f : T_p M \to T_p M$$

является гиперболическим.

Теорема 1.20 (Хартман, Гробман). *Пусть*

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

— C^1-отображение, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, $p \in U$ — гиперболическая неподвижная точка f и

$$D_p f : T_p M \to T_p M$$

— касательное отображение в точке p. Тогда существуют такие окрестности U_1 и U_2 точки p, окрестности V_1 и V_2 начала координат $0 \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ и такой гомеоморфизм $h\colon U_1 \cup U_2 \to V_1 \cup V_2$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ V_1 & \xrightarrow{D_pf} & V_2 \end{array}$$

т.е. $f = h^{-1} \circ D_pf \circ h$ на U_1.

Таким образом, топологические свойства f вблизи p вполне определяются размерностями устойчивого и неустойчивого многообразий точки p, а также ориентацией f на них, т.е. имеет место

Следствие 1.21. *Пусть*

$$f\colon U \to R^n \qquad \text{и} \qquad g\colon V \to R^n$$

— диффеоморфизмы и $p \in U$ и $q \in V$ соответственно их неподвижные гиперболические точки, причем

$$\dim E^+(D_pf) = \dim E^+(D_qg),$$

$$\dim E^-(D_pf) = \dim E^-(D_qg),$$

$$\operatorname{sign}\,\det D_pf|_{E^+D_pf} = \operatorname{sign}\,\det D_qg|_{E^+D_qg},$$

$$\operatorname{sign}\,\det D_pf|_{E^-D_pf} = \operatorname{sign}\,\det D_qg|_{E^-D_qg}.$$

Тогда найдутся такие окрестности $U_1 \subset U$ и $V_1 \subset V$ точек p и q соответственно и гомеоморфизм $h\colon U_1 \to V_1$, что

$$h \circ f = g \circ h.$$

ГЛАВА 2

Корни из гомеоморфизмов

2.1. Введение

Изучению итераций и корней из преобразований посвящено такое огромное множество работ, что перечислить их не представляется возможным, см. напр. введение в [40]. Отметим только, что подходы к изучению преобразований можно очень условно разделить на две большие группы по способу задания преобразований.

Первый подход — это задание преобразований функциональными, дифференциальными или разностными уравнениями и изучение этих уравнений. Замечательными монографиями, посвященными функционально-разностным уравнениям, являются книги M. Kuczma [118] (1968) и Г. П. Пелюха и А. Н. Шарковского [27], каждая из которых содержит большую библиографию.

Другой подход — "безкоординатный" — в духе топологической теории динамических систем. Мы будем придерживаться именно этого подхода.

С каждым гомеоморфизмом $f : X \to X$ топологического пространства X можно связать целый ряд инвариантных подмножеств: множества неподвижных, периодических, неблуждающих точек и пр. В даной главе мы опишем связи между этими подмножествами для f и для его степеней f^n. В частности, докажем, что центры Биркгофа у f и у f^n совпадают для *произвольного хаусдорфового* топологического пространства X. Этот результат был известен для полных метрических пространств и доказывался косвенным образом. Наше доказательство прямое. Кроме того, полученный результат применим к динамическим системам на неполных пространствах, например, на ограничениях систем на *незамкнутых* инвариантных подмножествах.

2.2. Алгебраические препятствия к существованию корней

Пусть X — топологическое пространство и $f : X \to X$ — гомеоморфизм. Один из подходов к изучению гомеоморфизмов пространства X состоит в поиске тех гомеоморфизмов, которые коммутируют с данным. Можно ожидать, что чем сложнее устроен гомеоморфизм, тем меньше гомеоморфизмов с ним коммутирует. Тривиальными примерами коммутирующих с f гомеоморфизмов являются его степени f^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Более интересный пример доставляют корни из f. Скажем, что f допускает корень степени n, если его можно представить в виде $f = g^n$, где g — также гомеоморфизм X. В некоторых случаях корней из f оказывается очень много, поэтому естественно наложить дополнительные условия на g: если f принадлежит какой-нибудь подгруппе $\mathcal{G}$ в группе всех гомеоморфизмов X, то можно потребовать, чтобы и g принадлежал $\mathcal{G}$.

Например, если X — многообразие с некоторой (гладкой, аналитической, кусочно-линейной, римановой, симплектической и пр.) структурой и f — его гомеоморфизм сохраняющий эту структуру, то естественно требовать сохранение этой структуры и от g.

Типичный способ доказательства *невозможности* извлечения корня состоит в том, чтобы свести задачу к алгебраической и доказывать уже неразрешимость алгебраической задачи.

Предположим, что существует такой гомоморфизм

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$$

группы $\mathcal{G}$ на некоторую группу H, что образ $\phi(f)$ не имеет корней степени n в $\mathcal{H}$. Тогда, очевидно, что f не имеет корней в $\mathcal{G}$.

Отметим один простой, но важный, частный случай описанной конструкции, когда в качестве гомоморфизма ϕ берется внутренний автоморфизм $\phi_h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ для некоторого $h \in \mathcal{G}$, т.е. $\phi_h(f) = h^{-1}fh$

Лемма 2.1. *Если гомеоморфизмы f и f_1 сопряжены, т.е. $f_1 = h^{-1}fh$, то f обладает корнем степени n, тогда и только тогда, когда таким корнем обладает f_1*

Доказательство. Если $f = g^n$, то $f_1 = (h^{-1}gh)^n$. □

С другой стороны, наличие у $\phi(f)$ корня n-й степени в $\mathcal{H}$ еще не гарантирует существования корня у f.

Простейшим примером такого рода является разбиение группы гомеоморфизмов ориентируемого многообразия M на два класса: обращающих ориентацию и сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Эти классы образуют группу $\mathbb{Z}_2$ относительно операции композиции своих представителей. Поскольку в этой группе образующий элемент не допускает корней четной степени, то изменяющий ориентацию гомеоморфизм M не допускает корней четной степени.

Этот пример является частным случаем следующего общего подхода. Напомним, что каждый гомеоморфизм f пространства X индуцирует автоморфизмы групп гомологий H_*X, когомологий H^*X и гомотопических групп π_*X пространства X. Поэтому имеется естественный гомоморфизм группы гомеоморфизмов $\mathcal{G}$ пространства X в группы автоморфизмов этих групп. Если автоморфизм, соответствующий f, не допускает извлечения корня, то из f корень также не извлекается.

Указанные выше гомоморфизмы пропускаются через гомоморфизм $\mathcal{G} \to \pi_0\mathcal{G}$ в группу гомеотопий $\pi_0\mathcal{G}$ пространства X, т.е. группу классов изотопий гомеоморфизмов.

Такой подход позволяет сразу получать отдельные результаты о корнях для целых классов отображений.

Пример 2.2. Пускай M — компактная поверхность, $\gamma \subset \operatorname{Int} M$ — двухсторонняя неразбивающая M простая замкнутая кривая и $\tau : M \to M$ — гомеоморфизм называемый "скручиванием Дена" вдоль γ, см. раздел 4.4. Если M не является бутылкой Клейна, то гомотопический класс τ не имеет корней в группе гомеотопий M ни для какой степени $n \geq 2$. Отметим, что на бутылке Клейна, с точностью до гомотопии, меется единственная двухсторонняя неразбивающая простая замкнутая кривая и при этом скручивание Дена вдоль нее в группе гомеотопий M имеет порядок 2.

Заметим также, что даже если изотопический класс гомеоморфизма $h : M \to M$ является степенью в группе $\pi_0\mathcal{G}$, т.е. найдется гомеоморфизм g такой, что h изотопен g^n для $n \geq 2$, то отсюда еще не следует, что $h = g_1^n$ для некоторого $g_1 \in \mathcal{G}$.

Более того, на произвольном многообразии существуют гомеоморфизмы (и диффеоморфизмы) сколь угодно близкие к тождественному и не допускающие корней никакой степени $n \geq 2$, см. напр. [99, с. 123]. Такого рода примеры основаны на инвариантах изучаемых теорией динамических систем.

Гипотеза 2.3 (С. Смейл). *Для каждого многообразия M в группе $\mathcal{D}(M)$ существует открытое всюду плотное подмножество, состоящее из диффеоморфизмов f имеющих тривиальный централизатор $Z(f)$ в $\mathcal{D}(M)$, т.е. $Z(f)$ состоит только из степеней f.*

N. Kopell [116] (1970) показал справедливость этой гипотезы для $M = S^1$.

Затем J. Palis и J.-C. Yoccoz [154, 155] (1989) доказали ее для $\dim M = 2$, и показали, что в высших размерностях централизатор диффеоморфизмов тривиален для остаточного подмножества достаточно большого открытого множества в $\mathcal{D}(M)$, а также описали некоторые открытые подмножества в $\mathcal{D}(M)$, элементы которых имеют тривиальные централизаторы.

2.3. Препятствия к существованию корней, обусловленные динамикой гомеоморфизма

Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм и $g = \sqrt[n]{f} : X \to X$ корень из f степении n. Для описания препятствий к существованию g мы изучим связь между инвариантными множествами соответствующих динамических систем, определяемых f и g.

Известно, что неблуждающее множество гомеоморфизма может изменяться при возведении в степень, то есть, вообще говоря, $\Omega(g) \neq \Omega(g^n)$. Примеры таких отображений можно найти в [75, 162]. В то же время такие инвариантные множества гомеоморфизмов, как множества рекуррентных точек [94], предельных точек, цепно-рекуррентных точек, сохраняются при возведении в степень [8].

Особый интерес представляет центр Биркгофа. Известно, см. напр. [34, §14, теорема 1.14], что для динамических систем на полных метрических пространствах центр Биркгофа совпадает с замыканием множества рекуррентных точек, а значит, сохраняется при возведении в степень[1]. В общем же случае, представляющем интерес для бесконечномерных динамических систем, центр Биркгофа

[1] В книге [34] доказательство проводится только для метрических компактов. Но легко видеть, что те же рассуждения проходят и для полных метрических пространств.

	Утверждение	Где доказано	Условия
Fix	$\mathrm{Fix}\,(g) \subset \mathrm{Fix}\,(g^n)$	лемма 2.5	
Per	$\mathrm{Per}\,(g) = \mathrm{Per}\,(g^n)$	лемма 2.6	
Rec	$\mathrm{Rec}\,(g) = \mathrm{Rec}\,(g^n)$	лемма 2.9	
Lim	$\mathrm{Lim}\,(g) = \mathrm{Lim}\,(g^n)$	лемма 2.8	
BC	$BC(g) = BC(g^n)$	теорема 2.22	X — хаусдорфово
Ω	$\Omega(g) \supset \Omega(g^n)$	лемма 2.10	
	$\mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)] = \varnothing$	теорема 2.11	X — хаусдорфово
	$\Omega(g) = \Omega(g^n) = X$	следствие 2.12	X — хаусдорфово и $\Omega(g) = X$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}(g) \supset \mathcal{C}(g^n)$	лемма 2.26	X — метрическое
	$\mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(g^n)$	лемма 2.27	g — равномерно непрерывно
Reg	$\mathrm{Reg}\,(g) \supset \mathrm{Reg}\,(g^n)$	лемма 2.29	
	$\mathrm{Reg}\,(g) = \mathrm{Reg}\,(g^n)$	следствие 2.30	$\Omega(g) = \Omega(g^n)$

Таблица 2.1. Сводка результатов главы 2

может и не совпадать с замыканием множества рекуррентных точек. Мы покажем, что несмотря на итерационную неустойчивость неблуждающего множества, центр Биркгофа динамической системы на произвольном метрическом топологическом пространстве сохраняется при возведении в степень. Доказательство, помещенное в этой главе, основано на результатах, изложенных в препринте авторов [9].

Для удобства читателя все результаты этой главы сведены в таблицу 2.1. В ней $g : X \to X$ обозначает гомеоморфизм топологического пространства X и $n \geq 2$.

В качестве приложения, мы покажем (теорема 2.31), что если f — структурно устойчивый диффеоморфизм, например, дифеоморфизм Морса – Смейла, компактного многообразия M, и g — его корень степени n, т.е. $f = g^n$, то множества $\mathrm{Per}\,(f)$, $\mathrm{Rec}\,(f)$, $\mathrm{Lim}\,(f)$, $BC(f)$, $\Omega(f)$ и $\mathrm{Reg}\,(f)$, кроме возможно $\mathrm{Fix}\,(f)$, совпадают с соответствующими множествами для g.

Эти теоремы позволяют жестко очертить классы гомеоморфизмов, в которых могут лежать их корни.

2.4. Предельные и рекуррентные точки корней гомеоморфизма

Покажем, что множество периодических точек $\mathrm{Per}\,(f)$, множество рекуррентных точек $\mathrm{Rec}\,(f)$ и предельное множество $\mathrm{Lim}\,(f)$ инвариантны относительно операции возведения гомеоморфизма в степень и взятия из него корня.

Пусть X — топологическое пространство, $g : X \to X$ — гомеоморфизм и $n \geq 2$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.4. *Для каждой точки $x \in X$ ее g-орбита $O_g(x)$ совпадает объединением g^n-орбит точек $g^i(x)$, для $i = 0, \dots, n-1$:*

$$O_g(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} O_{g^n}(g^i(x)), \tag{2.5}$$

причем эти орбиты $O_{g^n}(g^i(x)), i = 0, \dots, n-1$, имеют одинаковые мощности. □

Лемма 2.5. $\mathrm{Fix}\,(g) \subset \mathrm{Fix}\,(g^n)$.

Доказательство. Если $g(x) = x$, то $g^n(x) = x$. □

Заметим, что обратное включение вообще говоря не верно. Примером может служить нетождественный периодический гомеоморфизм g степени n. Для него $\mathrm{Fix}\,(g) \neq X$, но $\mathrm{Fix}\,(g^n) = X$.

Лемма 2.6. $\operatorname{Per}(g) = \operatorname{Per}(g^n)$.

Доказательство. Заметим, что точка x является периодической, тогда и только тогда, когда ее орбита конечна. Из леммы 2.4 вытекает, что $O_g(x)$ конечна тогда и только тогда, когда конечна орбита $O_{g^n}(x)$. $\square$

Лемма 2.7. (i) $\omega_g(x) = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \omega_{g^n}(g^i(x))$.

(ii) *Если $x \in \omega_g(x)$, то все множества $\omega_{g^n}(g^i(x))$ совпадают друг с другом и, в частности, $\omega_{g^n}(x) = \omega_g(x)$.*

Аналогичные утверждения верны и для α-предельных множеств.

Доказательство. (i) Пусть $z \in \omega_{g^n}(g^i(x))$ для некоторого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Тогда найдется последовательность $\{N_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} N_k = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{k\to\infty} g^{nN_k}(g^i(x)) = z.$$

Это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} g^{nN_k+i}(x) = z$, т.е. $z \in \omega_g(x)$.

Обратно, пусть $z \in \omega_g(x)$. Покажем, что тогда найдется $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ такое, что

$$z \in \omega_{g^n}(g^k(x)). \tag{2.6}$$

Действительно, то что $z \in \omega_g(x)$ означает, что найдется такая последовательность $\{N_i\} \subset \mathbb{N}$, что

$$\lim_{i\to\infty} N_i = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{i\to\infty} g^{N_i}(x) = z.$$

Тогда $\{N_i\}$ содержит подпоследовательность $\{N_{i_j}\}$, лежащую в одном классе смежности по модулю n, то есть $N_{i_j} = nK_{i_j} + k$, причем $\lim\limits_{j\to\infty} K_{i_j} = +\infty$ и $k = 0, \ldots, n-1$. Но тогда $\lim\limits_{j\to\infty} g^{nK_{i_j}}(g^k(x)) = z$, т.е. $z \in \omega_{g^n}(g^k(x))$. Это доказывает (2.6).

(ii) Предположим, что $x \in \omega_g(x)$. Тогда $x \in \omega_{g^n}(g^i(x))$ для некоторого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ и по лемме 1.3

$$\omega_{g^n}(x) \ \subset \ \omega_{g^n}(g^i(x)).$$

Применяя к этому соотношению g^i получаем, что

$$\omega_{g^n}(g^i(x)) \ \subset \ \omega_{g^n}(g^{2i}(x)).$$

Поступая аналогично получим следующие соотношения

$$\omega_{g^n}(x) \ \subset \ \omega_{g^n}(g^i(x)) \ \subset \ \omega_{g^n}(g^{2i}(x)) \ \subset \cdots$$
$$\cdots \subset \ \omega_{g^n}(g^{ni}(x)) \ = \ \omega_{g^n}(x).$$

Следовательно, все эти множества совпадают друг с другом. □

Лемма 2.8. $\operatorname{Rec}_{\pm}(g) = \operatorname{Rec}_{\pm}(g^n)$.

Доказательство.

$$\operatorname{Rec}_{+}(g) \ = \ \bigcup_{x \in \omega_g(x)} \omega_g(x) \ \overset{\text{лемма 2.7}}{=\!=\!=} \ \bigcup_{x \in \omega_{g^n}(x)} \omega_{g^n}(x) =$$
$$= \operatorname{Rec}_{+}(g^n).$$

Аналогично, $\operatorname{Rec}_{-}(g) = \operatorname{Rec}_{-}(g^n)$ и $\operatorname{Rec}(g) = \operatorname{Rec}(g^n)$. □

Лемма 2.9. $\operatorname{Lim}_{\pm}(g) = \operatorname{Lim}_{\pm}(g^n)$.

Доказательство. Из леммы 2.7 вытекает, что

$$\operatorname{Lim}_{+}(g) \ = \ \bigcup_{x \in M} \omega_g(x) \ = \ \bigcup_{x \in M} \bigcup_{i=0}^{n-1} \omega_{g^n}(g^i(x)) \ =$$
$$= \ \bigcup_{x \in M} \omega_{g^n}(x) \ = \ \operatorname{Lim}_{+}(g^n).$$

Аналогично доказывается, что $\operatorname{Lim}_{-}(g) = \operatorname{Lim}_{-}(g^n)$. Поэтому, $\operatorname{Lim}(g) = \operatorname{Lim}(g^n)$. □

2.5. Неблуждающие точки корней гомеоморфизмов

Покажем, что неблуждающее множество гомеоморфизма не уменьшается при извлечении корня.

Лемма 2.10. *Пусть $g : X \to X$ — гомеоморфизм. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\Omega(g^n) \subseteq \Omega(g).$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega(g^n)$ и U_x — произвольная окрестность точки x. Надо показать, что

$$g^k(U_x) \cap U_x \neq \varnothing$$

для некоторого $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Так как $x \in \Omega(g^n)$, то, по определению, $g^{nl}(U_x) \cap U_x \neq \varnothing$ для некоторого $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. □

Обратное включение, вообще говоря, не верно. Ниже мы покажем, что справедлива следующая теорема и применим ее к доказательству итерационной инвариантности центра Биркгофа.

Теорема 2.11. *Пускай X — хаусдорфово пространство. Тогда для каждого гомеоморфизма $g : X \to X$ и $n \geq 2$ множество $\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$ нигде не плотно в X.*

Следствие 2.12. *Если $\Omega(g) = X$, то*

$$\Omega(g^n) = \Omega(g) = X$$

для всех $n \geq 2$.

Доказательство. Так как $\Omega(g^n)$ замкнуто, то множество

$$\Omega(g) \setminus \Omega(g^n) = X \setminus \Omega(g^n)$$

открыто в X. Но по теореме 2.11 оно также нигде не плотно в X. Следовательно, $X \setminus \Omega(g^n) = \varnothing$, т.е. $\Omega(g^n) = X$. □

Для доказательства теоремы 2.11 нам понадобится следующее определение.

Определение 2.13. *Скажем, что точка x* ***зацеплена*** *с точкой y под действием гомеоморфизма $g : X \to X$, если для любых сколь угодно малых окрестностей V_x и V_y точек x и y соответственно найдется сколь угодно большое по модулю число $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ такое, что*

$$g^t(V_x) \cap V_y \neq \varnothing.$$

Другими словами, g-орбита любой окрестности точки x пересекается с любой окрестностью точки y.

Если при этом число t всегда можно выбрать положительным (отрицательным), то будем называть точку x ***ω-зацепленной (α-зацепленной)*** *с y.*

Пример 2.14. Неблуждающая точка зацеплена сама с собой.

Пример 2.15. Пусть $g : M \to M$ — диффеоморфизм Морса-Смейла многообразия M и x, y — периодические точки g. Напомним, что каждая точка принадлежащая пересечению неустойчивого многообразия $W^u(x)$ точки x и устойчивого многообразия $W^s(y)$ точки y называется *гетероклинической*. Пусть $\gamma \in W^u(x) \cap W^s(y)$ — гетероклиническая точка. Тогда γ является ω-зацепленной со всеми точками неустойчивого многообразия $W^u(y)$ и α-зацепленной со всеми точками устойчивого многообразия $W^s(x)$.

Лемма 2.16. *Пусть X — хаусдорфово пространство, $g : X \to X$ — гомеоморфизм и пусть $x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. Тогда для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ точка x зацеплена с точкой $g^k(x)$ под действием g^n.*

Замечание 2.17. Для зацепленности под действием g точек одной орбиты, например x и $g^k(x)$, достаточно требовать, чтобы для произвольной окрестности U точки x

нашлось сколь угодно большое по модулю число N такое, что
$$U \cap g^{k-N}(U) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. Необходимо найти число $k \in \{1, \dots, n-1\}$ обладающее следующим свойством: для каждой окрестности V точки x найдется сколь угодно большое по модулю число t такое, что
$$V \cap g^{k-nt}(V) \neq \varnothing.$$
Так как $x \notin \Omega(g^n)$, то существует такая окрестность U точки x, что
$$g^{ln}(U) \cap U = \varnothing$$
для всех $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, но поскольку $x \in \Omega(g)$, то найдется такое число $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что
$$g^m(U) \cap U = g^m \left[U \cap g^{-m}(U)\right] \neq \varnothing. \tag{2.7}$$
Тогда m не делится на n, т.е. $m = nt-k$, где $k = 1, \dots, n-1$, а значити поэтому, (2.7) равносильно следующему соотношению:
$$U \cap g^{k-nt}(U) \neq \varnothing. \tag{2.8}$$
Так как X — хаусдорфово, то m, а значит и t, можно выбрать сколь угодно большим по модулю, см. лемму 1.6.

Пусть V — произвольная окрестность точки x. Не теряя общности можно считать, что $V \subset U$. Тогда для V можно найти такое число $k_V \in \{1, \dots, n-1\}$ и сколь угодно большое по модулю число t_V, что
$$V \cap g^{k_V - nt_V}(V) \neq \varnothing.$$

Если теперь $W \subset V$ другая окрестность точки x, то в качестве чисел k_V и t_V всегда можно взять соответствующие числа k_W и t_W. Так как k_V может принимать только конечное множество значений, то можно выбрать одно и тоже k для всех окрестностей точки x. □

2.5.1. ***K*-зацепленность.** Пусть $g : X \to X$ гомеоморфизм, $n \geq 2$ и $K = \{k_1, \dots k_l\}$ — конечная последовательность чисел таких, что каждое $k_i \in \{0, \dots, n-1\}$. Мы допускаем, что некоторые из k_i, возможно даже все, могут совпадать друг с другом.

Определение 2.18. *Скажем, что точка $x \in X$ — **K-зацеплена** под действием гомеоморфизма g^n, если для любой окрестности U точки x найдутся сколь угодно большие по модулю числа $N_1, \dots, N_l \in \mathbb{Z}$ такие, что*

$$U \cap g^{k_1 - nN_1}(U) \cap g^{k_2 - nN_2}(U) \cap \dots \cap g^{k_l - nN_l}(U) \neq \varnothing.$$

Замечание 2.19. K-зацепленность точки x под действием g^n означает, что x "одновременно зацеплена" с точками $g^{k_1}(x), \dots, g^{l}(x)$, см. замечание 2.17. Так как числа N_i можно выбирать сколь угодно большими по модулю, то можно также считать, что если $k_i = k_j$ для некоторых $i \neq j$, то $N_i \neq N_j$ и поэтому, $g^{k_i - nN_i}(U)$ и $g^{k_j - nN_j}(U)$ представляют собой разные множества. Другими словами, зацепление точки x с точкой $g^{k_i}(x) = g^{k_j}(x)$ производится разными итерациями гомеоморфизма g^n.

Замечание 2.20. Если $0 \in K$, то x зацеплена под действием g^n с собой, и значит, является неблуждающей точкой для g^n, т.е. $x \in \Omega(g^n)$.

Лемма 2.21. *Предположим, что $x \in \mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$ — K-зацеплена под действием g^n, где*

$$K = \{k_1, \dots, k_l\}$$

и каждое $k_i = 0, \dots, n-1$. Тогда найдется такое число $k' \in \{1, \dots, n-1\}$, что x — также K'-зацеплена относительно g^n, где

$$K' = \{k_1, \dots, k_l,\, k',\, k_1 + k',\, \dots,\, k_l + k'\} \pmod n$$

и все суммы берутся по модулю n.

Подчеркнем, что в формулировке леммы

$$k' \neq 0 \pmod{n}.$$

Перед тем как доказывать лемму, выведем из нее теорему 2.11.

Доказательство теоремы 2.11. Покажем, что любая точка $x \in \operatorname{Int}[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$ — K-зацеплена под действием g^n, для некоторого множества K содержащего 0. Это, в частности, означает, что x зацеплена с собой под действием g^n, то есть является неблуждающей точкой g^n. Другими словами $x \in \Omega(g^n)$, что противоречит предположению. Следовательно, $\operatorname{Int}[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)] = \varnothing$.

Итак, пусть $x \in \operatorname{Int}[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$. Тогда согласно лемме 2.16 найдется такое $k_1 \in \{1, \ldots, n-1\}$, что x — K_1-зацеплена под действием g^n, где

$$K_1 = \{k_1\}.$$

Согласно лемме 2.21 найдется такое $k_2 \in \{1, \ldots, n-1\}$, что x — K_2-зацеплена под действием g^n, где

$$K_2 = \{k_1, k_2,\ k_1 + k_2\} \pmod{n}$$

и сумма $k_1 + k_2$ берется по модулю n.

Точно также, найдется число $k_3 \in \{1, \ldots, n-1\}$, что x — K_3-зацеплена под действием g^n, где

$$K_3 = \{k_1, k_2, k_1+k_2, k_3, k_1+k_3, k_2+k_3, k_1+k_2+k_3\} \pmod{n}$$

и все суммы берутся по модулю n. Заметим, что K_3 состоит из сумм по модулю n всевозможных непустых подмножеств последовательности $\{k_1, k_2, k_3\}$ и содержит 2^3-1 элементов.

Рассуждая аналогично, на l-м шаге мы получим такие числа $k_1, \ldots, k_l \in \{1, \ldots, n-1\}$, что x — K_l-зацеплена под действием g^n, где множество K_l состоит из сумм по модулю n всевозможных непустых подмножеств последовательности $\{k_1, \ldots, k_l\}$, а значит, содержит 2^l-1 элементов.

Тогда для достаточно большого (но конечного!) l, среди $k_1, \dots, k_l$ найдется n одинаковых чисел. Их сумма по модулю n равна 0, следовательно, $0 \in K_l$, а значит $x \in \Omega(g^n)$, что невозможно. Теорема 2.11 доказана. $\square$

Доказательство леммы 2.21. Предположим, что

$$x \in \mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$$

— K-зацеплена относительно g^n. Нужно найти число

$$k' \in \{1, \dots, n-1\},$$

обладающее следующим свойством: для произвольной окрестности U точки x найдутся сколь угодно большие по модулю числа

$$N_1, \dots, N_l, M_0, M_1, \dots, M_l \tag{2.9}$$

такие, что

$$\begin{gathered} U \cap g^{k_1 - nN_1}(U) \cap \dots \cap g^{k_l - nN_l}(U) \cap \\ \cap g^{k' - nM_0}(U) \cap g^{k_1 + k' - nM_1}(U) \cap g^{k_l + k' - nM_l}(U) \neq \varnothing \end{gathered} \tag{2.10}$$

Покажем, что для каждой окрестности U точки x можно найти некоторое число $k'(U) \in \{1, \dots, n-1\}$ и сколь угодно большие по модулю числа (2.9) так, чтобы выполнялось условие (2.10). Заметим, что если $V \subset U$ — еще одна окрестность точки x, то в качестве $k'(U)$ можно также взять $k'(V)$. Так как k' может принимать только конечное множество значений $1, \dots, n-1$, то можно считать, что все $k'(U)$ совпадают. Это и докажет лемму.

Итак, пусть U — произвольная окрестность точки x. Так как $x \in \mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]$, то можно считать, что

$$U \subset \mathrm{Int}\,[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)]\,.$$

Согласно K-зацепленности точки x под действием g^n, найдутся сколь угодно большие по модулю числа $N_1, \dots, N_l$

такие, что

$$U \ \cap \ g^{k_1 - nN_1}(U) \ \cap \ \cdots \ \cap \ g^{k_l - nN_l}(U) \neq \varnothing$$

Обозначим это пересечение через V. Тогда

$$V \subset U \subset \operatorname{Int}\left[\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)\right].$$

Пусть $y \in V$. Тогда по лемме 2.16 точка y зацеплена с $g^{k'}(y)$ для некоторого $k' = \{1, \ldots, n-1\}$, т.е. найдется сколь угодно большое по модулю число M_0 такое, что

$$V \cap g^{k' - nM_0}(V) \neq \varnothing.$$

Но это пересечение совпадает с пересечением

$$\overbrace{U \ \cap \ g^{k_1 - nN_1}(U) \ \cap \ \cdots \ \cap \ g^{k_l - nN_l}(U)}^{V} \ \cap$$
$$\cap \ \underbrace{g^{k' - nM_0}(U) \ \cap \ g^{k_1 + k' - n(N_1 + M_0)}(U) \ \cap \ g^{k_l + k' - n(N_l + M_0)}(U)}_{g^{k' - nM_0}(V)},$$

которое, согласно (2.10), непусто.

Остается заметить, что числа N_i и $M_i = N_i + M_0$ можно выбрать сколь угодно большими по модулю. $\square$

2.6. Центр Биркгофа корней гомеоморфизмов

Поскольку неблуждающее множество не сохраняется при извлечении корня, естественно было бы ожидать, что и центр Биркгофа (см. определение 1.9) ведет себя аналогичным образом. Однако известно, что для полных метрических пространств центр Биркгофа совпадает с замыканием множества рекуррентных точек, а значит, сохраняется при возведении в степень. В общем же случае, для неполных метрических пространств центр Биркгофа может не совпадать с замыканием множества рекуррентных точек. Покажем, что все же несмотря на итерационную неустойчивость неблуждающего множества, центр Биркгофа динамической системы на метрическом топологическом пространстве сохраняется при возведении в степень.

Теорема 2.22. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство и $g : X \to X$ — гомеоморфизм. Тогда $BC(g^n) = BC(g)$.*

Доказательство вытекает из теоремы 2.11 и следующих двух лемм, которые мы установим ниже.

Лемма 2.23. *$BC(g^n) \subseteq BC(g)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Лемма 2.24. *Пусть $g : X \to X$ — гомеоморфизм. Если $X_1 \subset X$ инвариантно относительно g, т.е. $g(X_1) = X_1$, то*

$$BC(g|_{X_1}) \subseteq BC(g).$$

Доказательство теоремы 2.22. Рассмотрим ограничение гомеоморфизма g на свой центр Биркгофа $BC(g)$, который мы для простоты обозначим через B. Так как $B = \Omega(g|_B)$, то $B = BC(g|_B)$. Кроме этого, по теореме 2.11 $\Omega(g^n|_B) = B$, следовательно, $B = BC(g^n|_B)$. Таким образом

$$B = BC(g|_B) \overset{\text{теорема 2.11}}{=} BC(g^n|_B) \overset{\text{лемма 2.24}}{\subseteq}$$
$$\subseteq BC(g^n) \overset{\text{лемма 2.23}}{\subseteq} B.$$

Следовательно, $BC(g^n) = B = BC(g)$. □

Перед тем, как доказывать леммы 2.24 и 2.23, отметим одно простое утверждение.

Предложение 2.25. [34, §13, теорема 1.13]. *Пусть $g : X \to X$ — гомеоморфизм и подпространство $A \subset X$ инвариантно относительно g, т.е. $g(A) = X$. Тогда*

$$\Omega(g|_A) \subseteq \Omega(g).$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega(g|_A)$ и $V \subset X$ — произвольная окрестность точки x в X. Необходимо найти такое $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что $g^m(V) \cap V \neq \varnothing$. Так как $U = V \cap A$ — окрестность x в A и x — неблуждающая точка для $g|_A$, то найдется такое $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что $g^m(V \cap A) \cap (V \cap A) \neq \varnothing$. Но тогда

$$g^m(V) \cap V \supset g^m(V \cap A) \cap (V \cap A) \neq \varnothing.$$

Предложение доказано. $\square$

Доказательство леммы 2.23. Пусть пространство X и отображение g удовлетворяют условиям леммы. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$.

Напомним, что при построении центра Биркгофа динамической системы (X, g) возникает семейство ее замкнутых инвариантных подмножеств, занумерованных при помощи ординалов:

$$\begin{aligned} \Omega(g) = \Omega_1(g) \supseteq \Omega_2(g) \supseteq \cdots \supseteq \\ \supseteq \Omega_\omega(g) \supseteq \Omega_{\omega+1}(g) \supseteq \cdots . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Это семейство упорядочено по включению. При этом, по самому построению, соотношения

$$\Omega_\alpha(g) \supseteq \Omega_\beta(g) \quad \text{и} \quad \alpha \leq \beta$$

равносильны, а множество индексов семейства (2.11) принимает значения в классе ординалов Ξ.

Аналогично, для динамической системы (X, g^n) рассмотрим семейство

$$\begin{aligned} \Omega(g^n) = \Omega_1(g^n) \supseteq \Omega_2(g^n) \supseteq \cdots \supseteq \\ \supseteq \Omega_\omega(g^n) \supseteq \Omega_{\omega+1}(g^n) \supseteq \cdots . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Это семейство имеет по построению те же свойства, что и семейство (2.11).

Воспользуемся трансфинитной индукцией для доказательства того, что

$$\Omega_\lambda(g) \supseteq \Omega_\lambda(g^n) \quad \forall \lambda \in \Xi\,. \tag{2.13}$$

База индукции. Пусть $\lambda = 1$. Тогда соотношение

$$\Omega_1(g) = \Omega(g) \supseteq \Omega(g^n) = \Omega_1(g^n)$$

следует из леммы 2.10.

Шаг индукции. Пусть $\lambda \in \Xi$. Предположим, что для всех $\alpha < \lambda$ справедливо неравенство $\Omega_\alpha(g) \supseteq \Omega_\alpha(g^n)$.

Рассмотрим два случая.

(i) Для элемента λ существует предшествующий элемент $\hat\lambda < \lambda$, то есть для любого $\beta \in \Xi$ либо $\beta \leq \hat\lambda$, либо $\beta \geq \lambda$.

Для упрощения обозначений положим $X = \Omega_{\hat\lambda}(g)$ и $X' = \Omega_{\hat\lambda}(g^n)$. Эти множества инвариантны относительно g и, по предположению индукции, $X \supseteq X'$. Поэтому,

$$\Omega_\lambda(g) \;\equiv\; \Omega(g|_X) \overset{\text{предл. 2.25}}{\supseteq} \Omega(g|_{X'}) \overset{\text{лемма 2.10}}{\supseteq} \\ \supseteq \Omega(g^n|_{X'}) \;\equiv\; \Omega_\lambda(g^n).$$

(ii) Элемент λ не имеет предшествующего.

Тогда по построению

$$\Omega_\lambda(g) = \bigcap_{\beta<\lambda} \Omega_\beta(g) \supseteq \bigcap_{\beta<\lambda} \Omega_\beta(g^n) = \Omega_\lambda(g^n)\,.$$

Это неравенство следует из включений $\Omega_\beta(f) \supseteq \Omega_\beta(g^n)$, $\beta < \lambda$.

Значит, соотношение (2.13) справедливо по индукции.

Пусть λ, $\lambda' \in \Xi$ — глубина центров динамических систем (X, g) и (X, g^n) соответственно. Обозначим

$$\beta = \max(\lambda, \lambda').$$

Тогда

$$BC(g) = \Omega_\beta(g) \supseteq \Omega_\beta(g^n) = BC(g^n).$$

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 2.24. Оно почти дословно повторяет рассуждения доказательства леммы 2.23 с той лишь разницей, что вместо g^n нужно рассматривать сужение $g|_{X'}$, а вместо ссылок на лемму 2.10 о том, что

$$\Omega(g) \supseteq \Omega(g^n)$$

— использовать предложение 2.25 о том, что

$$\Omega(g) \supseteq \Omega(g|_{X'}).$$

Детали мы оставляем читателю. □

2.7. Итерационная устойчивость аналогов центра Биркгофа

Отметим, что существующие аналоги центра Биркгофа, которые можно построить, положив в определении центра Биркгофа вместо неблуждающих множеств либо множества предельных точек, либо цепно-рекуррентные множества, являются итерационно устойчивыми.

Например, положим $\operatorname{Lim}_1(f) = \operatorname{Lim}(f)$ и определим по индукции $\operatorname{Lim}_{n+1}(f) = \operatorname{Lim}(f|_{\operatorname{Lim}_n(f)})$. Пересечение полученной последовательности вложенных замкнутых инвариантных множеств обозначим через $\operatorname{Lim}_\omega(f)$. Продолжим построение, используя трансфинитную индукцию. В соответствии с леммой Цорна, мы остановимся на некотором ординале α, для которого

$$\operatorname{Lim}_\alpha(f) = \operatorname{Lim}(f|_{\operatorname{Lim}_\alpha(f)}).$$

Такое множество рассматривал еще сам Биркгоф, и иногда в литературе его также называют центром Биркгофа. Мы будем называть его *центром (Биркгофа) предельных точек* динамической системы.

Поскольку множество предельных точек $\mathrm{Lim}\,(f)$ сохраняется при извлечении корня, центр (Биркгофа) предельных точек имеет то же свойство. Кроме того, центр (Биркгофа) предельных точек содержит замыкание множества рекуррентных точек и содержится в центре Биркгофа.

Множество $C(f)$ цепно-рекуррентных точек гомеоморфизма метрического компакта также сохраняется при извлечении корня, и аналогичная конструкция, использующая цепно-рекуррентные множества, дает нам независящий от итераций отображения *цепно-рекуррентный центр* динамической системы. По построению он содержит обычный центр Биркгофа.

Отметим еще, что в работе А. Н. Шарковского [39] также рассматривался минимальный центр притяжения *динамической системы*. Для каждого подмножества $M \subset X$ можно определить число $t(m, M, x)$, равное количеству значений $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, для которых $f^j(x) \in M$. Если существует предел

$$p(x \in M) = \lim_{m \to \infty} \frac{t(m, M, x}{m},$$

то он называется *вероятностью* нахождения траектории $\mathrm{Orb}(x)$ в множестве M. Замкнутое f-инвариантное подмножество $V_M \subset X$ называется *центром притяжения множества* M, если $p(x \in U) = 1$ для произвольной окрестности U множества V_M и любой точки $x \in M$. Если никакое собственное подмножество из V_M не является цетнром притяжения для M, то V_M называется *минимальным* центром притяжения M.

В [39] доказано, что для произвольного непрерывного отображения $f : I \to I$ отрезка I в себя периодические точки f плотны как в центре Биркгофа $BC(f)$, так и в минимальном центре притяжения V_I. Поэтому

$$BC(f) = V_I.$$

2.8. Цепно-рекуррентное множество корней гомеоморфизмов

Пусть X — метрическое пространство с метрикой d и $g : X \to X$ — его непрерывное отображение в себя.

Лемма 2.26. *$\mathcal{C}(g^n) \subset \mathcal{C}(g)$ для $n \geq 2$.*

Доказательство. Покажем, что каждую ε-цепь для g^n можно расширить до ε-цепи для g. Действительно, рассмотрим произвольную ε-цепь

$$x = x_0,\ \ x_1,\ \ \ldots,\ \ x_k = y$$

относительно g^n, т.е.

$$d(g^n(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для всех $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда легко видеть, что следующая последовательность

$$\begin{aligned} x = x_0, g(x_0), \ldots, g^{n-1}(x_0),& \\ x_1, g(x_1), \ldots, g^{n-1}(x_1), \ldots& \\ \ldots, x_{k-1}, g(x_{k-1}), \ldots, g^{n-1}(x_{k-1}), x_k = y& \end{aligned}$$

является ε-цепью относительно g. Для цепей, у которых $x = y$, эти рассуждения показывают, что $\mathcal{C}(g^n) \subseteq \mathcal{C}(g)$. $\square$

Лемма 2.27. *Предположим, что $g : X \to X$ — равномерно непрерывно. Тогда $\mathcal{C}(g^n) = \mathcal{C}(g)$ для каждого $n \geq 2$. В частности, если X — компакт, то $\mathcal{C}(g^n) = \mathcal{C}(g)$ для произвольного непрерывного отображения g.*

Доказательство. В силу леммы 2.26 достаточно показать, что $\mathcal{C}(g) \subset \mathcal{C}(g^n)$. Так как g — равномерно непрерывно, то для каждого $i \geq 2$ отображение g^i также равномерно непрерывно как композиция конечного числа равномерно непрерывных отображений. Поэтому, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех точек $x, y \in X$

и $i = 1, \dots, n$ из соотношения $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ вытекает, что $d(g^i(x), g^i(y)) < \varepsilon$.

Предложение 2.28. *Пусть $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ — δ_ε-цепь для g, т.е. $d(g(x_i), x_{i+1}) < \delta_\varepsilon$. Тогда*

$$d(g^n(x_i), x_{i+n}) < n\varepsilon.$$

Доказательство. Для простоты предположим, что $n = 3$. Общий случай доказывается аналогично. Тогда

$$d(g^3(x_i), x_{i+3}) \le d(g^3(x_i), g^2(x_{i+1})) + d(g^2(x_{i+1}), g(x_{i+2})) + \\ + d(g(x_{i+2}), x_{i+3}) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \quad \square$$

Пусть теперь $x = x_0, x_n, \dots, x_k = x$ произвольная δ_ε-цепь для g с одним и тем же началом и концом x. Не теряя общности можно считать, что k кратно n. Если это не так, то достаточно повторить эту цепь n раз:

$$x, \underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}, x}_{1}, \underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}, x}_{2}, \cdots, \underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}, x}_{n}.$$

Легко видеть, что полученная цепь также является δ_ε-цепью.

Итак, пусть k кратно n, т.е. $k = sn$. Тогда из предложения 2.28 вытекает, что $x = x_0, x_n, \dots, x_{sn} = x_k = x$ является $n\varepsilon$-цепью для g^n. Это доказывает обратное включение $\mathcal{C}(g) \subseteq \mathcal{C}(g^n)$. $\square$

2.9. Регулярные точки корней гомеоморфизмов

Лемма 2.29. *Пусть $g : X \to X$ — гомеоморфизм и $n \ge 2$. Тогда*

$$\mathrm{Reg}_{\pm}(g^n) \subset \mathrm{Reg}_{\pm}(g).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\mathrm{Reg}_{+}(g^n) \subset \mathrm{Reg}_{+}(g).$$

Пускай x — ω-регулярная точка g^n. Нужно доказать, что тогда x является ω-регулярной и для g, т.е. что для произвольной окрестности $\mathcal{U}$ множества $\Omega(g)$ найдется окрестность V_x точки x такая, что $g^k(V_x) \subset \mathcal{U}$ для всех достаточно больших k.

Напомним, что $\Omega(g^n) \subset \Omega(g)$, см. лемму 2.10. Так как $\Omega(g)$ инвариантно относительно g, то $g^r(\Omega(g^n)) \subset \Omega(g)$ для всех $r \in \mathbb{Z}$, а значит, найдется окрестность $\mathcal{U}_n$ множества $\Omega(g^n)$ такая, что

$$\bigcup_{r=0}^{n} g^r(\mathcal{U}_n) \subset \mathcal{U}.$$

В качестве $\mathcal{U}_n$ можно взять пересечение

$$\mathcal{U}_n = \bigcap_{r=0}^{n} g^{-r}(\mathcal{U}).$$

Так как x — ω-регулярна для g^n, то найдется ее окрестность V_x и число $N \in \mathbb{N}$ такие, что $g^{ni}(V_x) \subset \mathcal{U}_n$ для $i > N$. Следовательно, если $k = ni + r > Nn$, где $r = 0, \ldots, n-1$, то

$$g^k(V_x) = g^r(g^{ni}(V_x)) \subset g^r(\mathcal{U}_n) \subset \mathcal{U}.$$

Таким образом, x является ω-регулярной для g. $\square$

Следствие 2.30. *Если $\Omega(g) = \Omega(g^n)$, то*

$$\mathrm{Reg}_{\pm}(g) = \mathrm{Reg}_{\pm}(g^n),$$

а значит, $\mathrm{Reg}(g) = \mathrm{Reg}(g^n)$.

Доказательство. Пусть x — ω-регулярная точка g, и U_Ω — произвольная окрестность множества $\Omega(g) = \Omega(g^n)$. Тогда найдется окрестность V_x точки x такая и такое достаточно большое $N > 0$, что

$$\bigcup_{i>N} g^i(V_x) \subset U_\Omega.$$

Но тогда тем более

$$\bigcup_{ni>N} g^{ni}(V_x) \subset U_\Omega.$$

Это означает, что x — ω-регулярна для g^n. $\square$

Теорема 2.31. *Пусть $f : X \to X$ — такой гомеоморфизм метрического компакта X, что $\Omega(f) = \mathcal{C}(f)$. Если $f = g^n$, для некоторого гомеоморфизма $g : X \to X$, то*

$$\Omega(f) = \Omega(g).$$

При этом также каждое из множеств

$$\mathrm{Per}\,(f),\ \mathrm{Rec}\,(f),\ \mathrm{Lim}\,(f),\ BC(f),\ \mathrm{Reg}_{\pm}(f),\ \mathrm{Reg}\,(f)$$

совпадает с соответствующим множеством для g.

Замечание 2.32. Пусть $f : M \to M$ — C^0-типичный гомеоморфизм, либо C^1-типичным диффеоморфизм компактного многообразия M. В частности, f может быть структурно устойчивым или диффеоморфизмом Морса-Смейла. Из результатов [44, 76] вытекает, что тогда

$$\Omega(f) = \mathcal{C}(f). \tag{2.14}$$

Следовательно, теорема 2.31 верна для f.

Доказательство теоремы 2.31. Заметим, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(g^n) & \subset & \Omega(g) \\ \| & & \cap \\ \mathcal{C}(g^n) & = & \mathcal{C}(g) \end{array}$$

так как $\Omega(g^n) = \mathcal{C}(g^n)$ согласно (2.14) и $\mathcal{C}(g^n) = \mathcal{C}(g)$ по лемме 2.27. Из нее вытекает, что $\Omega(f) = \Omega(g^n) = \Omega(g)$. □

2.10. Корни из линейного отображения

Лемма 2.33. *Пусть A — $(n \times n)$-матрица, E_A^- и E_A^+ соответственно ее устойчивое и неустойчивое подпространства и $B = A^n$. Тогда*

$$E_A^- = E_B^- \qquad \textit{и} \qquad E_A^+ = E_B^+.$$

Доказательство. Так как собственные значения B равны n-м степеням соответствующих собственных значений A, то достаточно показать, что корневые подпространства A для соответствующих собственных значений являются корневыми подпространствами B. Не теряя общности, можно предполагать, что A находится в нормальной жордановой форме.

Если матрица A диагональна, то утверждение леммы получается непосредственно.

Предположим, что A не диагональна. Пусть λ — собственное значение A. Соответствующее собственное значение B будет λ^n. Пусть l — корневой вектор для A и λ. Тогда $(A - \lambda E)^k(l) = 0$ для некоторого $k \geq 1$. Следовательно,

$$(B - \lambda^n E)^k(l) = (A^n - (\lambda E)^n)^k(l) = \\ = \left(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}E\right)^k \underbrace{(A - \lambda E)^k(l)}_{=0} = 0,$$

т.е. l — корневой вектор для B и корневые подпространства для A являются корневыми для B. Так как A и B имеют одинаковую размерность, их корневые подпространства совпадают. Поскольку устойчивые и неустойчивые подпространства (см. 1.18) образованы из корневых подпространств, то они совпадают для A и B. $\square$

Лемма 2.34 ([10], глава VIII, §6). *Пусть B — невырожденная $(n \times n)$-матрица, тогда $B = \exp(Q)$ для некоторой матрицы Q. Следовательно, B включается в поток $\Phi_t(x,t) = \exp(Qt)x$, т.е. $Bx = \Phi_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. В частности, матричное уравнение $Y^n = B$ всегда имеет решение $Y = \exp\frac{1}{n}Q$.*

В качестве простого приложения теоремы Хартмана-Гробмана (см. теорему 1.20) получаем следующее утверждение.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ росток диффеоморфизма в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ причем 0 является неподвижной гиперболической точкой f.

Следствие 2.35. (1) *В достаточно малой окрестности начала координат f включается в* непрерывный *поток и, в частности, имеет корни произвольных степеней.*

(2) *Если $f = g^n$, где $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое* ***гладкое*** *отображение, что $g(0) = 0$, то g есть диффеоморфизм в окрестности* 0 *и* 0 *— гиперболическая точка для g. Кроме того, g сопряжен некоторому линейному отображению являющемуся корнем из $D_0(f)$.*

2.11. Устойчивые многообразия точек

Пусть $g : X \to X$ —гомеоморфизм метрического пространства X. Для точки $x \in X$ определим ее *устойчивое*, $W^s_g(x)$, и *неустойчивое*, $W^u_g(x)$, множества формулами:

$$W^s_g(x) = \{y \in X \mid \lim_{i \to +\infty} d(g^i(x), g^i(y)) \;=\; 0\,\},$$

$$W^u_g(x) = \{y \in X \mid \lim_{i \to -\infty} d(g^i(x), g^i(y)) \;=\; 0\,\}.$$

Очевидно, что $W^s_g(x) = W^u_{g^{-1}}(x)$.

В случае, когда X — компактное многообразие, g — его диффеоморфизм и x — неблуждающая *гиперболическая* точка g, множества $W^s_g(x)$ и $W^u_g(x)$ называются как *устойчивое* и *неустойчивое многообразия* точки x.

Лемма 2.36. (1) *Для каждого $n \geq 2$*

$$W^s_g(x) \;\subset\; W^s_{g^n}(x).$$

(2) *Если g — равномерно непрерывный гомеоморфизм, то*

$$W^s_g(x) = W^s_{g^n}(x).$$

Доказательство. (1) Пусть $y \in W^s_g(x)$. Тогда

$$\lim_{i\to+\infty} d(g^{ni}(x), g^{ni}(y)) \;=\; 0. \tag{2.15}$$

Это означает, что $y \in W^s_{g^n}(x)$.

(2) Предположим, что g — равномерно непрерывен и пусть $y \in W^s_{g^n}(x)$, т.е. выполняется условие (2.15). Покажем, что

$$\lim_{j\to+\infty} d(g^j(x), g^j(y)) \;=\; 0.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как g равномерно непрервывен, то для каждого $k \geq 2$ гомеоморфизм g^k также равномерно непрерывен. Поэтому для ε найдется такое $\delta > 0$, что как только $d(a,b) < \delta$, то $d(g^k(a), g^k(b)) < \varepsilon$ для $k = 1, \ldots, n$.

Далее, из (2.15) вытекает, что для δ найдется такое число $N > 0$, что как только $i > N$, то $d(g^{ni}(x), g^{ni}(y)) < \delta$.

Поэтому, если $j = ni + k$, где $i > N$ и $k = 1, \ldots, n$, т.е. $j > Nn + 1$, то

$$d(g^j(x)\ ,\ g^j(y)) \;=\; d\big(g^{ni}(g^k(x))\ ,\ g^{ni}(g^k(y))\big) \;<\; \varepsilon.$$

Следовательно, $y \in W^s_g(x)$. □

2.12. Свойства зацепленных точек

Лемма 2.37. *Если точка x — ω-(α-)зацеплена с точкой y, принадлежащей другой орбите, то каждая точка орбиты x — ω-(α-)зацеплена с каждой точкой орбиты y.*

Эта лемма показывает, что зацепленность траекторий не зависит от выбора их зацепленных точек.

Определение 2.38. *Назовем орбиту Γ_1 **зацепленной** с орбитой Γ_2, если найдется точка на Γ_1, зацепленная с некоторой точкой на Γ_2.*

Аналогично можно определить ω- и α-зацепленные траектории.

Доказательство леммы 2.37. Предположим, что x — ω-зацеплена с точкой y под действием g. Покажем, что тогда для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ точка $x_k = g^k(x)$ ω-зацеплена с точкой $y_l = g^l(y)$ под действием g.

Пусть U_{x_k} и U_{y_l} — произвольные окрестности точек x_k и y_l соответственно. Тогда $V_x = g^{-k}(U_{x_k})$ и $V_y = g^{-l}(U_{y_l})$ являются окрестностями x и y. Так как x ω-зацеплена с точкой y, то найдется сколь угодно большое такое $t > 0$, что

$$g^t(V_x) \cap V_y \neq \varnothing,$$

но

$$g^t(V_x) \cap V_y = g^t g^{-k}(U_{x_k}) \cap g^{-l}(U_{y_l}) = \\ = g^{-l}\left[g^{t-k+l}(U_{x_k}) \cap U_{y_l}\right] \neq \varnothing.$$

Поэтому, $g^{t-k+l}(U_{x_k}) \cap U_{y_l} \neq \varnothing$, причем число $t-k+l$ может быть выбрано сколь угодно большим.

Случай α-зацепленности доказывается аналогично. □

Определение 2.39. *Скажем, что точки*

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

***циклически** ω**-(**α**-)зацеплены** если существует такое $k = 1, \ldots, n-1$, что для всех $i = 0, \ldots, n-1$ точка x_i ω-(α-)зацеплена с точкой $x_{i+1 \pmod n}$.*

Лемму 2.16 теперь можно сформулировать в следующем виде:

Лемма 2.40. *Пусть $x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$. Тогда для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ g^n-орбиты точек*

$$x, g^k(x), g^{2k}(x), \ldots, g^{(n-1)k}(x)$$

циклически зацеплены под действием g^n.

Доказательство. Согласно лемме 2.16 g^n-орбиты точек x и $g^k(x)$ зацеплены под действием g^n. Но тогда для всех $l = 1, \ldots, n-1$ зацепленными будут g^n-орбиты точек $g^{lk}(x)$ и $g^{(l+1)k}(x)$. $\square$

Теорема 2.41. *Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм не имеющий циклически зацепленных блуждающих точек. Если $f = g^n$, для некоторого гомеоморфизма $g : X \to X$, то*

$$\Omega(f) = \Omega(g).$$

При этом каждое из множеств

$$\mathrm{Per}\,(f),\ \mathrm{Rec}\,(f),\ \mathrm{Lim}\,(f),\ BC(f),\ \mathrm{Reg}_{\pm}(f),\ \mathrm{Reg}\,(f)$$

совпадает с соответствующим множеством для g.

Доказательство. Пусть

$$x \in \Omega(g) \setminus \Omega(f) = \Omega(g) \setminus \Omega(g^n).$$

Тогда x является блуждающей для f. Более того, согласно лемме 2.16 x циклически зацеплена под действием $g^n = f$, что противоречит предположению. $\square$

Пример 2.42. Пусть X — нехаусдорфово топологическое пространство полученное из числовой прямой $\mathbb{R}$ "расщеплением" каждой целочисленной точки на две — "верхнюю" и "нижнюю" и пусть $g : X \to X$ — сдвиг вправо на 1. Тогда g-орбиты "верхних" и "нижних" целочисленных точек циклически зацеплены. Дадим формальное определение этой конструкции.

Пускай $X_1 \subset \mathbb{R}^2$ подмножество состоящее из двух паралельных прямых $y = \pm 1$ и для каждого *не целого* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ отождествим точки $(x, 1)$ и $(x, -1)$. Полученное фактор-пространство пространства X_1 обозначим через X. Очевидно, что отображение $g_1 : X_1 \to X_1$ заданное формулой $g(x, y) = (x + 1, y)$ индуцирует отображение сдвига на X. Тогда образы точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$ в X являются блуждающими циклически зацепленными точками g.

Лемма 2.43. *Предположим, что x и y блуждающие точки гомеоморфизма $f : X \to X$ и x ω-зацеплена с y. Тогда x не является ω-регулярной.*

Доказательство. Так как y — блуждающая точка, то найдется окрестность U_y точки y целиком лежащая вне некоторой окрестности B_Ω множества $\Omega(f)$. С другой стороны, по определению ω-регулярности точки x, найдется такая ее малая окрестность V_x, что

$$\bigcup_{i>N} f^i(V_x) \subset B_\Omega$$

для некоторого $N > 0$. Это противоречит ω-зацепленности точек x и y. $\square$

Лемма 2.44. *Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм метрического пространства X. Если $x \in X$ — ω-зацеплена под действием f с точкой $y \in X$, то $y \in \mathcal{C}(x, f)$. В частности, если $x = y$, то $x \in \mathcal{C}(f)$.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ нужно построить ε-цепь с началом x и концом y. Так как f непрерывно в точке x, то для ε надется такое $\delta > 0$, что из $d(x, x') < \delta$ вытекает, что $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Пускай U^x_δ — δ-окрестность точки x и V^y_ε — ε-окрестность точки y. Из ω-зацепленности x и y вытекает существование такого числа $n \geq 0$, что

$$f^n(U^x_\delta) \cap V^y_\varepsilon \neq \varnothing.$$

Пусть y' — какая-нибудь точка, принадлежащая этому пересечению: $y' \in f^n(U^x_\delta) \cap V^y_\varepsilon$. Тогда $y' = f^n(x')$ для некоторой точки $x' \in U^x_\delta$. Для $i = 1, \ldots, n-1$ положим $x_i = f^i(x') = f^{i-n}(y')$. Тогда последовательность

$$x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ y$$

является ε-цепью между x и y.

Действительно,

$$d(f(x), x_1) = d(f(x), f(x')) < \varepsilon,$$

$$d(f(x_i), x_{i+1}) = d(f(f^i(x')), f^{i+1}(x')) = 0 < \varepsilon$$

для $i = 0, \dots, n-2$ и

$$d(f(x_{n-1}), y) = d(f(f^{n-1}(x')), y) = d(f^n(x'), y) = \\ = d(y', y) < \varepsilon.$$

Лемма доказана. $\square$

ГЛАВА 3

О включении потоков Понтрягина

3.1. Введение

Напомним, что *расслоением* называется произвольная тройка вида $\xi = (E, p, B)$, где E и B — топологические пространства, называемые соответственно *тотальным пространством* и *базой*, а $p : E \to B$ — непрерывное отображение, называемое *проекцией* расслоения ξ. Для произвольной точки $b \in B$ множество $p^{-1}(b) \subset E$ называется слоем расслоения ξ над точкой b (см. [31]).

Определение 3.1. *Пусть* Γ *— канторово множество (определенное, например, в [17]),* $f : \Gamma \to \Gamma$ *— гомеоморфизм. Расслоение* ξ *над окружностью* S^1 *со слоем* Γ*, построенное по* f*, называется* ***расслоением Понтрягина*** *(см. [24]).*

Более подробно: на прямом произведении $I \times \Gamma$, где $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, вводится отношение эквивалентности. Эквивалентными объявляются точки $\{1\}\times\{x\}$ и $\{0\}\times\{f(x)\}$. Обозначим через N — факторпространство пространства $I \times \Gamma$ по этому отношению. Проекция $p : N \to S^1$ задается соотношением $p((t, x)) = t$ для всех точек $(t, x) \in N$. Тогда $\xi = (N, p, S^1)$.

Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$. На его тотальном пространстве N можно задать естественную структуру потока $F : N \times \mathbb{R} \to N$ при помощи соотношения

$$F((\tau, x))(t) = (\{t + \tau\}, f^{[t]}(x))$$

(здесь $[t], \{t\}$ — целая и дробная часть числа соответственно).

Этот поток называется *специальным потоком* (см. [2]), построенным по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$ или (абстрактной) *динамической системой Понтрягина* (см. [24]).

Замечание 3.2. *Непосредственная проверка показывает, что отображение*

$$F : N \times \mathbb{R} \to N$$

непрерывно и задает однопараметрическую группу гомеоморфизмов пространства N.

Замечание 3.3. *Для каждого $z \in N$ выполняется соотношение*

$$F(z)(\mathbb{R}) \cap p^{-1}(p(z)) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_k(z).$$

Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ отображение

$$p \circ F(z)\big|_{[t,t+1)} : [t, t+1) \to S^1$$

инъективно.

Так как $p \circ F(z)([t, t+1)) = p \circ F(z)(\mathbb{R}) = S^1$, то это отображение биективно.

Замечание 3.4. *Для всех $z_1, z_2 \in N$, для которых $p(z_1) = p(z_2)$, при любом $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$p \circ F(z_1)(t) = p \circ F(z_2)(t).$$

Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$, для которого найдутся двумерное (хаусдорфово) многообразие M^2 и отображение $\Phi : N \to M^2$, гомеоморфно отображающее пространство N на свой образ.

Мы будем исследовать следующий вопрос: как влияет указанное свойство пространства N на структуру динамической системы (F, N). Ограничения оказываются довольно жесткими. А именно, ниже будет доказано, что при условии существования вложения пространства N в двумерное многообразие множество неблуждающих точек динамической системы (F, N) совпадает с ее центром, который в свою очередь является объединением минимальных множеств этой системы (так как динамическая структура каскада (f, Γ) совпадает со структурой потока (F, N), этими же свойствами обладает и динамическая система (f, Γ)).

Для доказательства этого утверждения сначала проведем подготовительную работу, имеющую самостоятельный интерес.

Мы займемся свойствами динамической системы, индуцированной на $\Phi(N)$ отображением $\Phi \circ F : N \times \mathbb{R} \to M^2$. Введем для этой системы понятие локальной трансверсальной площадки (по аналогии с потоками на гладких многообразиях) и докажем теорему существования для локальных трансверсальных площадок. Затем для каждого инъективного отрезка произвольной траектории динамической системы (F, N) мы построим карту многообразия M^2, гомеоморфную двумерному диску и пересекающую множество $\Phi(N)$ по трубке траекторий, включающей данный отрезок траектории.

Далее, покажем, что при условии существования вложения пространства N в двумерное многообразие α и ω-предельные множества каждой траектории динамической системы (F, N) являются минимальными (следствия этого утверждения сформулированы выше).

3.2. Локальные трансверсальные площадки

Определение 3.5. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина и $\Phi : N \to M^2$ — вложение (гомеоморфное отображение на свой образ) в поверхность M^2. Назовем* ***локальной трансверсальной площадкой****, проходящей через точку $z \in \mathbb{N}$, инъективное непрерывное отображение $\gamma : I \to M^2$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $\Phi(z) \in \gamma((0,1))$*;*
(ii) $\Phi(N) \cap \gamma(I) \in \gamma((0,1))$*;*
(iii) *найдется открыто-замкнутое (в $p^{-1}(p(z)) \cong \Gamma$) подмножество V слоя $p^{-1}(p(z))$ такое, что*

$$\Phi^{-1} \circ \gamma(I) = V.$$

Предложение 3.6. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, M^2 — двумерное многообразие, $\Phi : N \to M^2$ — вложение.*

Пусть $\alpha : I \to M^2$ — локальная трансверсальная площадка, проходящая через точку $z \in N$. Тогда:

(i) *найдутся открытая окрестность $U \subset M^2$ точки $\Phi(z)$ и гомеоморфизм*

$$h : \operatorname{Cl} U \to B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

для которого

$$h(\alpha(I) \cap \operatorname{Cl} U) = \{(x_1, x_2) \in B \mid x_2 = 0\},$$

такие, что для каждого $z' \in \Phi^{-1}(\alpha(I) \cap U)$ определены

$$t_1(z'), t_2(z') \in \mathbb{R}, \quad -1/2 < t_1(z') < 0 < t_2(z') < 1/2,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\Phi \circ F(z')(t_i(z')) \notin U, \qquad i = 1, 2,$$

$$\Phi \circ F(z')((t_1(z'), t_2(z'))) \subset U,$$

$$\Phi \circ F(z')((t_1(z'), t_2(z'))) \cap \alpha(I) = \Phi(z').$$

(ii) *Для любой окрестности $U \subset M^2$ точки $\Phi(z)$, удовлетворяющей требованиям пункта* (i), *множества*

$$\Phi \circ F(z')((t_1(z'), 0)) \qquad \text{и} \qquad \Phi \circ F(z')((0, t_2(z')))$$

лежат в различных компонентах связности множества $U \setminus \alpha(I)$ для каждого $z' \in \Phi^{-1}(\alpha(I) \cap U)$.

Доказательство. Рассмотрим траекторию

$$F(z) : \mathbb{R} \to N$$

динамической системы (F, N). Так как для каждого $t \in \mathbb{R}$ отображение

$$p \circ F(z)\big|_{[t,t+1)} : [t, t+1) \to S^1$$

— инъективно, то $p \circ F(z)(1/2) \neq p(z)$ и

$$F(z)((-1/2, 1/2)) \cap p^{-1}(p(z)) = z = F(z)(0).$$

Множество $p^{-1}(p \circ F(z)(1/2))$ замкнуто в N, следовательно, множество $K = \Phi(p^{-1}(p \circ F(z)(1/2))) \cup \alpha(0) \cup \alpha(1)$ замкнуто в M^2. Так как $\Phi(z) \notin K$ (напомним, что по определению $\Phi(z) \in \alpha((0,1))$), найдется открытая окрестность $U_1 \subset M^2$ точки $\Phi(z)$, не пересекающаяся с K.

Так как M^2 — многообразие, найдется окрестность U_2 точки $\Phi(z)$, замыкание которой лежит в U_1 и гомеоморфно двумерному диску.

Фиксируем гомеоморфизм $h_2 : \operatorname{Cl} U_2 \to B$, где

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Пусть

$$\tau_1 = \inf\{t \in I \,|\, \alpha((t, \alpha^{-1} \circ \Phi(z))) \subset U_2\},$$

$$\tau_2 = \sup\{t \in I \,|\, \alpha((\alpha^{-1} \circ \Phi(z), t)) \subset U_2\}.$$

Тогда $\alpha(\tau_1)$, $\alpha(\tau_2) \in \partial U_2$. Заметим, что $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ (крайние неравенства выполняются, так как $\operatorname{Cl} U_2 \subset U_1$ и $U_1 \cap K = \varnothing$).

Множество $h_2 \circ \alpha([\tau_1, \tau_2])$ делит B на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно двумерному диску.

Найдется гомеоморфизм

$$\widetilde{h}_0 : \partial B \cup h_2 \circ \alpha([\tau_1, \tau_2]) \to \partial B \cup \{(x_1, x_2) \in B \,|\, x_2 = 0\},$$

для которого $\widetilde{h}_0(\partial B) = \partial B$ и

$$\widetilde{h}_0(\alpha([\tau_1, \tau_2])) = \{(x_1, x_2) \in B \,|\, x_2 = 0\}.$$

Существует гомеоморфизм $\widetilde{h} : B \to B$ (см. [37]) такой, что

$$\widetilde{h}\big|_{\partial B \cup h_2 \circ \alpha([\tau_1, \tau_2])} : \widetilde{h}_0.$$

Обозначим $h_2' = \widetilde{h} \circ h_2 : \operatorname{Cl} U \to B$.

Множество $\alpha([0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1]) \cap \operatorname{Cl} U$ компактно и не содержит точки $\Phi(z)$. Так как $h_2' \circ \Phi(z) \in \operatorname{Int} B$, найдется $\varepsilon > 0$, для которого

$$V_\varepsilon(h_2' \circ \Phi(z)) \subset \operatorname{Int} B,$$

$$\operatorname{Cl} V_\varepsilon(h_2' \circ \Phi(z)) \cap h_2' \circ \alpha([0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1]) = \varnothing.$$

Далее, существует линейный автоморфизм $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такой, что $L(V_\varepsilon(h_2' \circ \Phi(z))) = B$, $L(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Рассмотрим множество

$$U = (h_2')^{-1}(V_\varepsilon(h_2' \circ \Phi(z)))$$

и гомеоморфизм $h = L \circ h_2' : U \to B$.

Имеем $U \subset U_1$ и

$$\Phi \circ F(z')(-1/2), \qquad \Phi \circ F(z')(1/2) \notin U_1$$

для всех $z' \in p^{-1}(p(z))$, тогда для каждого

$$z' \in \Phi^{-1}(\alpha(I) \cap U)$$

определены величины

$$t_1(z') = \inf\{t < 0 \,|\, \Phi \circ F(z')((t, 0)) \subset U\},$$

$$t_2(z') = \sup\{t > 0 \,|\, \Phi \circ F(z')((0, t)) \subset U\},$$

причем $-1/2 < t_1(z') < t_2(z') < 1/2$.

Так как

$$\Phi(z') \in (\alpha(I) \cap \Phi \circ F(z')((t_1(z'), t_2(z')))) \subset$$
$$\subset (\Phi(p^{-1}(p(z))) \cap \Phi \circ F(z')((-1/2, 1/2))) = \Phi(z'),$$

то множество U удовлетворяет условию (i).

Пусть теперь $U \subset M^2$ — некоторая окрестность точки $\Phi(z)$, удовлетворяющая положению (i). Фиксируем точку $z' \in \Phi^{-1}(\alpha(I) \cap U)$. Покажем, что множества

$$\Phi \circ F(z')((t_1(z'), 0)) \qquad \text{и} \qquad \Phi \circ F(z')((0, t_2(z')))$$

лежат в разных компонентах связности множества $U \setminus \alpha(I)$.

Обозначим

$$V_1 = \{(x_1, x_2) \in \operatorname{Int} B \mid x_2 > 0\},$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2) \in \operatorname{Int} B \mid x_2 < 0\}.$$

Множества $h^{-1}(V_1)$, $h^{-1}(V_2)$ являются компонентами связности множества $U \setminus \alpha(I)$.

Так как

$$h \circ \Phi \circ F(z')\big|_{[t_1(z'), t_2(z')]} : [t_1(z'), t_2(z')] \to B$$

— простая непрерывная кривая и для нее выполняются соотношения

$$h \circ \Phi \circ F(z')((t_1(z'), t_2(z'))) \subset \operatorname{Int} B,$$
$$h \circ \Phi \circ F(z')(t_i(z')) \in \partial B, \quad i = 1, 2,$$

то множество $h \circ \Phi \circ F(z')([t_1(z'), t_2(z')])$ разбивает диск B на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно двумерному диску. Обозначим компоненты связности множества

$$B \setminus h \circ \Phi \circ F(z')([t_1(z'), t_2(z')])$$

через W_1 и W_2.

Предположим, что множества

$$h \circ \Phi \circ F(z')((t_1(z'), 0)) \text{ и } h \circ \Phi \circ F(z')((0, t_2(z')))$$

лежат в одной компоненте связности множества

$$\operatorname{Int} B \setminus h \circ \alpha(I).$$

Пусть это будет V_1.

Однозначно определено $x \in (-1, 1)$, для которого

$$h \circ \Phi(z') = \{x\} \times \{0\} \subset (-1, 1) \times \{0\}.$$

Обозначим через S окружность

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Так как точки $h \circ \Phi \circ F(z')(t_1(z'))$ и $h \circ \Phi \circ F(z')(t_2(z'))$ лежат в одной компоненте связности множества

$$S \setminus ((\{-1\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times \{0\})) = S \setminus h \circ \alpha(I),$$

то точки $\{-1\} \times \{0\}$ и $\{1\} \times \{0\}$ лежат в одной компоненте связности множества

$$S \setminus (h \circ \Phi \circ F(z')(t_1(z')) \cup h \circ \Phi \circ F(z')(t_2(z'))).$$

Следовательно, множества $(-1, x) \times \{0\}$ и $(x, 1) \times \{0\}$ лежат в одной компоненте связности множества

$$B \setminus h \circ \Phi \circ F(z')([t_1(z'), t_2(z')]).$$

Пусть это будет W_2.

Множество $[-1, x] \times \{0\}$ разбивает диск $\operatorname{Cl} W_2$ на две компоненты связности, причем точки $h \circ \Phi \circ F(z')(t_1(z'))$ и $h \circ \Phi \circ F(z')(t_2(z'))$ лежат в различных компонентах связности множества $\operatorname{Cl} W_2 \setminus ([-1, x] \times \{0\})$. Обозначим эти компоненты через Q_1', Q_2' ($h \circ \Phi \circ F(z')(t_i(z')) \subset Q_i'$, $i = 1, 2$).

Аналогично, точки

$$h \circ \Phi \circ F(z')(t_1(z')) \qquad \text{и} \qquad h \circ \Phi \circ F(z')(t_2(z'))$$

лежат в различных компонентах связности множества

$$\operatorname{Cl} W_2 \setminus ([x, 1] \times \{0\}).$$

Обозначим эти компоненты через Q_1'', Q_2'', так, чтобы

$$h \circ \Phi \circ F(z')(t_i(z')) \subset Q_i'', \qquad i = 1, 2.$$

Так как

$$h \circ \Phi \circ F(z')(t_1(z')) \notin [-1, 1] \times \{0\},$$

найдется $t_1' \in (t_1(z'), 0)$, для которого

$$h \circ \Phi \circ F(z')(t_1') \in Q_1' \cap Q_1''.$$

Аналогично, найдется $t_2' \in (0, t_2(z'))$ такое, что

$$h \circ \Phi \circ F(z')(t_2') \in Q_2' \cap Q_2''.$$

Множество $h \circ \Phi \circ F(z')([t_1', t_2'])$ компактно и лежит в $\operatorname{Int} B$. Значит, найдется также $\delta > 0$, для которого выполняются соотношения

$$V = V_\delta(h \circ \Phi \circ F(z')([t_1', t_2'])) \subset \operatorname{Int} B,$$

$$W_2 \cap V_\delta(h \circ \Phi \circ F(z')(t_i')) \in Q_i' \cap Q_i'', \quad i = 1, 2.$$

Отображение

$$F\big|_{N \times [t_1', t_2']} : N \times [t_1', t_2'] \to N$$

непрерывно. Поэтому множество

$$\widehat{V} = \left(h \circ \Phi \circ F\big|_{N \times [t_1', t_2']}\right)^{-1}(V)$$

является открытой окрестностью множества $\{z'\} \times [t_1', t_2']$ в пространстве $N \times [t_1', t_2']$. Так как $[t_1', t_2']$ — компакт, найдется открытая окрестность $\widetilde{V}_0$ точки z' в пространстве N, для которой $\widetilde{V}_0 \times [t_1', t_2'] \subset \widehat{V}$.

Пусть $\widetilde{V}_i = (h \circ \Phi)^{-1}(V_\delta(h \circ \Phi \circ F(z')(t_i')))$, $i = 1, 2$. Положим $\widetilde{V} = \widetilde{V}_0 \cap \widetilde{V}_1 \cap \widetilde{V}_2$. Тогда

$$h \circ \Phi \circ F(\widetilde{V})([t_1', t_2']) \subset V,$$

$$h \circ \Phi \circ F(\widetilde{V})(t_i') \subset V_\delta(h \circ \Phi \circ F(z')(t_i')), \quad i = 1, 2.$$

Множество $\widetilde{V} \cap \Phi^{-1} \circ \alpha(I)$ является открытой окрестностью точки z' в пространстве $p^{-1}(p(z))$. Множество $p^{-1}(p(z))$ гомеоморфно множеству Кантора и не имеет изолированных точек. Следовательно, найдется $z'' \in \widetilde{V} \circ \Phi^{-1} \circ \alpha(I)$, $z'' \neq z'$.

Так как отображение

$$p \circ F(z')\big|_{[t_1(z'), t_2(z')]} : [t_1(z'), t_2(z')] \to S^1$$

инъективно и $p(z') = p(z'')$, то $z'' \notin F(z')([t_1(z'), t_2(z')])$. Аналогично, так как

$$F(z'')(t) \neq F(z')(t) \qquad \text{и} \qquad p \circ F(z'')(t) = p \circ F(z')(t)$$

для всех $t \in [t_1(z'), t_2(z')]$, то

$$F(z'')(t) \notin F(z')([t_1(z'), t_2(z')])$$

и

$$F(z'')([t_1', t_2']) \cap F(z')([t_1(z'), t_2(z')]) = \varnothing.$$

Включение $[t_1', t_2'] \subset (-1/2, 1/2)$ влечет

$$F(z'')([t_1', t_2']) \cap p^{-1}(p(z)) = z'',$$

отсюда

$$\Phi \circ F(z'')([t_1', t_2']) \cap \alpha(I) = \Phi(z'').$$

Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$h \circ \Phi \circ F(z'')([t_1', t_2']) \subset h \circ \Phi \circ F(\widetilde{V})([t_1', t_2']) \subset V \subset \operatorname{Int} B,$$

$$h \circ \Phi \circ F(z'')(t_i') \subset h \circ \Phi \circ F(\widetilde{V})(t_i') \subset V_\delta(h \circ \Phi \circ F(z')(t_i'))$$

для $i = 1, 2$. Так как

$$\Phi(z'') \in \alpha(I) \setminus \Phi(z'), \quad h \circ \Phi(z'') \subset \operatorname{Int} B,$$

$$h(\alpha(I) \setminus \Phi(z')) \subset \operatorname{Cl} W_2$$

и $\partial W_2 \subset (\partial B \cup h \circ \Phi \circ F(z')([t_1(z'), t_2(z')]))$, то

$$h \circ \Phi \circ F(z'')([t_1', t_2']) \subset W_2.$$

Значит, $h \circ \Phi \circ F(z'')(t_i') \in Q_i' \cap Q_i''$, $i = 1, 2$.

Множество $h \circ \Phi \circ F(z'')([t_1', t_2'])$ связно, следовательно найдутся $y_1 \in (-1, x) \times \{0\}$, $y_2 \in (x, 1) \times \{0\}$, лежащие в $h \circ \Phi \circ F(z'')([t_1', t_2'])$ (очевидно, $y_1 \neq y_2$).

Итак, слой $p^{-1}(p(z))$ содержит два различных элемента

$$(h \circ \Phi)^{-1}(y_1) \text{ и } (h \circ \Phi)^{-1}(y_2),$$

лежащих в $F(z'')([t'_1, t'_2])$. А это невозможно, так как

$$F(z'')([t'_1, t'_2]) \cap p^{-1}(p(z)) = z''.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Замечание 3.7. *Легко видеть, что для любого $z \in N$ и трансверсальной площадки $\alpha : I \to M^2$, проходящей через точку z, найдется сколь угодно малая окрестность точки $\Phi(z)$, удовлетворяющая предложению 3.6.*

Следствие 3.8. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, (F, N) — соответствующая динамическая система Понтрягина и $\Phi : N \to M^2$ — вложение N в двумерное многообразие M^2.*

Пусть $Z \subset M^2$ — замкнутое двумерное подмногообразие с краем, $\Phi(x) \in \partial Z$ для некоторого $x \in N$ и $\alpha : I \to M^2$ — трансверсальная площадка в точке x такая, что $\alpha(I) \subset \partial Z$.

Тогда найдутся открытое подмножество V слоя

$$p^{-1}(p(x)),$$

содержащее точку x и лежащее в $\Phi^{-1}(\alpha(I))$, и $\delta > 0$ такие, что одна из следующих пар соотношений:

$$\Phi \circ F(z)((-\delta, 0)) \subset \operatorname{Int} Z,\ \Phi \circ F(z)((0, \delta)) \cap Z = \varnothing,$$

или

$$\Phi \circ F(z)((-\delta, 0)) \cap Z = \varnothing,\ \Phi \circ F(z)((0, \delta)) \subset \operatorname{Int} Z.$$

выполняется одновременно для всех $z \in V$.

Предварительно докажем две леммы, носящие технический характер, которые пригодятся нам и в дальнейшем.

Лемма 3.9. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, $s \in S^1$ — некоторая точка базы, A — открытое подмножество слоя $p^{-1}(s)$.*

Для любых a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, множество

$$F(A)((a_1, a_2))$$

открыто в N.

Доказательство. Покажем сначала, что для каждого $z \in p^{-1}(s)$ отображение $h_z = p \circ F(z) : \mathbb{R} \to S^1$ открыто.

Фиксируем $\tau \in S^1$. Пусть $t_0 \in h_z^{-1}(\tau)$. Рассмотрим два компакта

$$K_1 = [t_0 - 1/4, t_0 + 1/4] \qquad \text{и} \qquad K_2 = [t_0 + 1/4, t_0 + 3/4].$$

Легко видеть, что для каждого $\tau \in S^1$ выполняется равенство

$$h_z^{-1}(\tau) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{t + n\},$$

где t — некоторый прообраз точки τ.

Следовательно, каждое из отображений

$$h_z\big|_{K_1} : K_1 \to S^1 \qquad \text{и} \qquad h_z\big|_{K_2} : K_2 \to S^1$$

инъективно и $S^1 = h_z(K_1) \cup h_z(K_2)$.

Как известно, образ компакта при непрерывном отображении компактен и инъективное непрерывное отображение компакта в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом на свой образ. Известно также (см. [32]), что конечное замкнутое покрытие топологического пространства является фундаментальным (то есть подмножество топологического пространства открыто, если его пересечение с каждым элементом покрытия открыто в этом элементе покрытия в индуцированной топологии).

Значит, множество $U_\tau = h_z((t_0 - 1/4, t_0 + 1/4))$ открыто в S^1, так как U_τ открыто в K_1 и $U_\tau \cap K_2 = \varnothing$.

Кроме того, отображение

$$g_\tau = \left(h_z\big|_{K_1}\right)^{-1}\Big|_{U_\tau} : U_\tau \to (t_0 - 1/4, t_0 + 1/4)$$

непрерывно и $h_z \circ g_\tau = \mathrm{in} : U_\tau \to S^1$. Известно (см. [32]), что непрерывное отображение $h_z : \mathbb{R} \to S^1$ открыто, если для каждого $\tau \in S^1$ найдутся окрестность U_τ и непрерывное отображение $g_\tau : U_\tau \to \mathbb{R}$, такие что $h_z \circ g_\tau = \mathrm{in} : U_\tau \to S^1$.

Так как $\tau \in S^1$ произвольно, то отображение h_z открыто.

Приступим теперь непосредственно к доказательству леммы.

Расслоение ξ локально тривиально, поэтому найдутся окрестность $W \subset S^1$ точки s и гомеоморфизм

$$\varphi : p^{-1}(W) \to W \times \Gamma,$$

для которого $p = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi$. Здесь

$$\mathrm{pr}_1 : W \times \Gamma \to W \qquad \text{и} \qquad \mathrm{pr}_2 : W \times \Gamma \to \Gamma$$

— проекции.

Фиксируем $w \in A \subset p^{-1}(s)$. Из непрерывности отображения h_w в точке $t = 0$ и из равенства $h_w(0) = s$ следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что $h_w((-\delta, \delta)) \subset W$.

Уменьшая при необходимости δ, можно считать, что $2\delta < a_2 - a_1$.

Из замечаний 3.2 и 3.4 следует, что при всех $z \in p^{-1}(s)$ справедливы равенства

$$p \circ F(z)((-\delta, \delta)) = h_z((-\delta, \delta)) = h_w((-\delta, \delta)),$$

следовательно, определено непрерывное отображение

$$\varphi \circ F\big|_{p^{-1}(s) \times (-\delta, \delta)} : p^{-1}(s) \times (-\delta, \delta) \to W \times \Gamma.$$

Рассмотрим для каждого $z \in p^1(s)$ непрерывное отображение

$$\mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ F(z)\big|_{(-\delta, \delta)} : (-\delta, \delta) \to \Gamma.$$

Так как Γ — канторов дисконтинуум и образ связного множества при непрерывном отображении связен, то

$$\mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ F(z)((-\delta, \delta)) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ F(z)(0) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(z)$$

и

$$\varphi \circ F(A)((-\delta, \delta)) = h_w((-\delta, \delta)) \times \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(A).$$

Отображение h_w открыто, и значит, множество

$$\varphi \circ F(A)((-\delta, \delta))$$

открыто в $W \times \Gamma$, а множество $F(A)((-\delta,\delta))$ открыто в N.

Согласно замечанию 3.2, при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $F(t) : N \to N$ является гомеоморфизмом. Следовательно, множество

$$F(A)((-\delta,\delta)) = \bigcup_{t \in (a_1+\delta, a_2-\delta)} F(A)((t-\delta, t+\delta))$$

открыто в N. □

Лемма 3.10. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, z — некоторая точка пространтва N, U — открытая окрестность этой точки. Найдутся множество $A_0 \in p^{-1}(p(z))$, открытое в слое $p^{-1}(p(z))$, и $\delta > 0$, для которых $F(A_0)((-\delta,\delta)) \subset U$.*

Доказательство. Найдём окрестность W точки $p(z)$ и гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(W) \to W \times \Gamma$, для которого

$$p = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi.$$

Множество $\widetilde{U} = \varphi(U \cap p^{-1}(W))$ открыто в $W \times \Gamma$ и содержит точку $\varphi(z)$.

Возьмём элемент $W_0 \times A \subset W \times \Gamma$ базы окрестностей точки $\varphi(z)$, содержащийся в множестве $\widetilde{U}$ (W_0 и A — некоторые открытые подмножества пространств W и Γ соответственно).

Так как отображение $h_z = p \circ F(z) : \mathbb{R} \to S^1$ непрерывно, существует $\delta > 0$ такое, что $h_z((-\delta,\delta)) \subset W_0$. Следовательно, множество

$$\varphi^{-1}(h_z((-\delta,\delta)) \times A) = F(\varphi^{-1}(\{p(z)\} \times A))((-\delta,\delta))$$

открыто в $W \times \Gamma$ и содержится в $\widetilde{U}$.

Положим

$$A_0 = \varphi^{-1}(\{p(z)\} \times A) \subset p^{-1}(p(z)).$$

Множество $F(A_0)((-\delta,\delta))$ открыто в N, содержит точку z и лежит в U. □

Доказательство следствия 3.8. Как известно, ∂Z представляет собой компактное одномерное многообразие без края, вложенное в M^2, то есть объединение конечного числа непересекающихся окружностей.

Отображение $(\mathrm{in})^{-1} \circ \alpha : I \to \partial Z$ взаимно однозначно и непрерывно, а значит, оно является вложением, так как I — компакт. Поэтому множество $\partial Z \setminus \alpha((0,1))$ замкнуто в ∂Z и является компактным подмножеством M^2.

Согласно замечанию 3.7, найдется окрестность $U \subset M^2$ точки $\Phi(x)$, удовлетворяющая предложению 3.6 и такая, что

$$(\partial Z \cap U) \subset \alpha((0,1)).$$

Найдутся также (см. лемму 3.10) открытое подмножество V_0 слоя $p^{-1}(p(x))$, содержащее точку x, и $\delta \in (0, 1/2)$ такие, что

$$\Phi \circ F(V_0)((-\delta, \delta)) \subset U.$$

Множество $U \setminus \alpha(I) = U \setminus \partial Z$ состоит из двух компонент связности U_1 и U_2 (см. предложение 3.6), одна из которых лежит в $\operatorname{Int} Z$, другая — в $M^2 \setminus Z$ (предположив, что последнее не верно, немедленно придем к противоречию с тем, что $\Phi(x) \in \partial Z$). Пусть $U_1 \subset \operatorname{Int} Z$, $U_2 \subset M^2 \setminus Z$ (случай $U_1 \subset M^2 \setminus Z$, $U_2 \subset \operatorname{Int} Z$ рассматривается аналогично).

Из предложения 3.6 следует, что для каждого $w \in V_0$ справедливы либо соотношения

$$\Phi \circ F(w)((-\delta, 0)) \subset \operatorname{Int} Z, \quad \Phi \circ F(w)((0, \delta)) \cap Z = \varnothing,$$

либо

$$\Phi \circ F(w)((-\delta, 0)) \cap Z = \varnothing, \quad \Phi \circ F(w)((0, \delta)) \subset \operatorname{Int} Z.$$

Пусть для точки x выполняется первая пара соотношений.

Положим

$$\begin{aligned} V &= \{\, w \in V_0 \mid \Phi \circ F(w)((-\delta, 0)) \subset U_1 \,\}, \\ \widetilde{V} &= \{\, w \in V_0 \mid \Phi \circ F(w)((-\delta, 0)) \subset U_2 \,\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $x \in V$.

Покажем, что множество V открыто в $p^{-1}(p(x))$.

Согласно лемме 3.9, множества

$$F(V_0)((-\delta,\delta)),$$

$$F(p^{-1}(p(x)))((-\delta,0)) \qquad \text{и} \qquad F(p^{-1}(p(x)))((0,\delta))$$

открыты в N. Так как $\delta < 1/2$, то

$$F(p^{-1}(p(x)))((-\delta,0)) \cap F(p^{-1}(p(x)))((0,\delta)) = \varnothing\,.$$

Множество $\Phi^{-1}(U_1)$ открыто в N, так как Φ — вложение.

Далее, имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} &F(p^{-1}(p(x)))((-\delta,0)) \cap F(V_0)((-\delta,\delta)) \cap \Phi^{-1}(U_1) = \\ &= F(p^{-1}(p(x)))((-\delta,0)) \cap \big(F(V)((-\delta,0)) \cup F(V)((0,\delta))\big) = \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = F(V)((-\delta,0)). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу включений

$$\begin{aligned} F(V)((-\delta,0)) &\subset F(p^{-1}(p(x)))((-\delta,0)), \\ F(\widetilde{V})((0,\delta)) &\subset F(p^{-1}(p(x)))((0,\delta)). \end{aligned}$$

Значит, множество $F(V)((-\delta,0))$ открыто в N. Так как при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $F(t) : N \to N$ является гомеоморфизмом (см. замечание 3.2), то открыто и множество

$$F(V)((-\delta,\delta)) = \bigcup_{t\in(0,\delta)} F(V)((t-\delta,t)).$$

Остается заметить, что

$$p^{-1}(p(x)) \cap F(V)((-\delta,\delta)) = V,$$

так как $V \subset p^{-1}(p(x))$ и $\delta < 1/2$. $\square$

3.3. Окрестности образов трубок траекторий потока F в M^2

Лемма 3.11. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, (F, N) — соответствующая динамическая система Понтрягина и $\Phi : N \to M^2$ — вложение N в двумерное многообразие M^2.*

Пусть $Z \subset M^2$ — компактное двумерное подмногообразие с краем. Пусть $\Phi(z)$, $\Phi \circ F(z)(t) \in \partial Z$ и

$$\Phi \circ F(z)((0, t)) \subset \operatorname{Int} Z$$

для некоторых $z \in N$ и $t > 0$.

Пусть α_1, $\alpha_2 : I \to M^2$ — локальные трансверсальные площадки в точках z и $F(z)(t)$ такие, что $\alpha_i(I) \subset \partial Z$, $i = 1, 2$.

Тогда найдется открытая окрестность $U \subset M^2$ точки $\Phi(z)$, такая что для всех $z' \in \Phi^{-1}(\partial Z \cap U)$ выполняются соотношения $\Phi(z')$, $\Phi \circ F(z')(t) \in \partial Z$, и

$$\Phi \circ F(z')((0, t)) \subset \operatorname{Int} Z.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.10 для каждого

$$w = F(z)(t(w)) \in F(z)((0, t))$$

найдутся $\delta(w) > 0$ и открытое подмножество $V(w)$ слоя $p^{-1}(p(w))$, для которых

$$U(w) = F(V(w))((-\delta(w), \delta(w))) \subset \Phi^{-1}(\operatorname{Int} Z).$$

Уменьшая при необходимости $\delta(w)$, можно считать, что $0 < t(w) - \delta(w)$ и $t(w) + \delta(w) < t$.

Рассмотрим открытые множества

$$U' = F(V')((\delta', \delta')), \quad U'' = F(V'')((\delta'', \delta'')),$$

где δ', δ'', V', V'' — величины из утверждения следствия 3.8 для трансверсальных площадок α_1 и α_2 соответственно.

Набор множеств U', U'', $U(w)$, $w \in F(z)((0, t))$, составляет открытое покрытие компакта $F(z)([0, t])$. Выберем из него конечное подпокрытие

$$U', \quad U'', \quad U(w_i) = F(V_i)((-\delta_i, \delta_i)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим множество

$$V = V' \cap F(V'')(-t) \cap \bigcap_{i=1}^{n} F(V_i)(-t(w_i)).$$

Так как при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ гомеоморфизм

$$F(\tau) : N \to N$$

является послойным (см. замечания 3.2 и 3.4), то

$$V \subset p^{-1}(p(z)),$$

множество V открыто в пространстве $p^{-1}(p(z))$ и $z \in V$.

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}\widetilde{U} = F(V)((0,t)) \subset \\ \subset F(V')((0,\delta')) \cup F(V'')((-\delta'',0)) \cup \bigcup_{i=1}^{n} U(w_i) = \\ = (U' \cap \Phi^{-1}(\operatorname{Int} Z)) \cup (U'' \cap \Phi^{-1}(\operatorname{Int} Z)) \cup \\ \cup \bigcup_{i=1}^{n} U(w_i) \subset \Phi^{-1}(\operatorname{Int} Z).\end{aligned}$$

Так как множество V открыто в $\Phi^{-1}(\alpha_1((0,1)))$ и $\alpha_1((0,1))$ открыто в ∂Z, то V открыто в $\Phi^{-1}(\partial Z)$. Тогда найдется открытое подмножество U многообразия M^2 такое, что $\Phi^{-1}(U \cap \partial Z) = V$. $\square$

Замечание 3.12. *Легко видеть, что утверждение, аналогичное лемме 3.11, имеет место и при $t < 0$.*

3.4. Существование трансверсальных площадок

ТЕОРЕМА 3.13. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, M^2 — двумерное многообразие, $\Phi : N \to M^2$ — вложение. Тогда для каждой точки $z \in N$ существует локальная трансверсальная площадка, проходящая через эту точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $z \in N$. Возьмем точку $z' \in N$ такую, что $p(z) \neq p(z')$, то есть

$$z \notin p^{-1}(p(z')) = \Gamma_{z'}$$

(очевидно, такая точка найдется). Рассмотрим точку

$$y = \Phi(z) \in M^2$$

и компакт $\Phi(\Gamma_{z'})$. Так как $y \notin \Phi(\Gamma_{z'})$, то существует открытая окрестность $U \subset M^2$ точки y, для которой

$$U \cap \Phi(\Gamma_{z'}) = \varnothing.$$

Найдем две замкнутые окрестности D и D_0 точки y в M^2, каждая из которых гомеоморфна двумерному диску и удовлетворяющие соотношениям $D \subset \operatorname{Int} D_0$, $D_0 \subset U$. Для этого фиксируем карту (V, φ) многообразия M^2, содержащую точку y. Существует $\varepsilon > 0$, для которого

$$B_\varepsilon(\varphi(y)) \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^2,$$

так как $\varphi(U \cap V)$ — открыто и содержит точку $\varphi(y)$. Положим

$$D = \varphi^{-1}(B_{\varepsilon/3}(\varphi(y))), \quad D_0 = \varphi^{-1}(B_{2\varepsilon/3}(\varphi(y))).$$

Это и будут искомые окрестности.

Так как расслоение ξ — локально тривиально, найдутся открытое множество $W \subset S^1$, содержащее точку $p(z)$ и гомеоморфизм $\psi : p^{-1}(W) \to W \times \Gamma$, для которого

$$p = \operatorname{pr}_1 \circ \psi : p^{-1}(W) \to W.$$

Здесь $\mathrm{pr}_1 : W \times \Gamma \to W$ — проекция на первый сомножитель.

Множества вида $A \times B$ (где A — открытое линейно связное подмножество W, B — открыто-замкнутое подмножество Γ) составляют базу топологии пространства $W \times \Gamma$. Так как отображение

$$\Phi \circ \psi^{-1} : W \times \Gamma \to M^2$$

— непрерывно, то найдутся открытое линейно связное множество $A_0 \subset W \subset (S^1 \setminus p(z'))$ (гомеоморфное интервалу) и открыто-замкнутое множество $B_0 \subset \Gamma$ такие, что $\psi(z) \in A_0 \times B_0$ и

$$\Phi \circ \psi^{-1}(A_0 \circ B_0) \subset \operatorname{Int} D.$$

Фиксируем некоторый гомеоморфизм $h_0 : A_0 \to (0,1)$. Пусть $h_0(p(z)) = \tau_0$. Положим $\tau_1 = (\tau_0+1)/2 \in (\tau_0, 1)$. Найдется, очевидно, такой гомеоморфизм $k : (0,1) \to (0,3)$, что $k(\tau_0) = 1$, $k(\tau_1) = 2$.

Рассмотрим гомеоморфизм $h = k \circ h_0 : A_0 \to (0,3)$, набор интервалов

$$A_i = h^{-1}\left(\left[1 + \tfrac{1}{2^i}, 2 - \tfrac{1}{2^i}\right]\right), \quad i \in \mathbb{N},$$
$$\widehat{A}_i = h^{-1}\left(\left(1 - \tfrac{1}{2^i}, 2 + \tfrac{1}{2^i}\right)\right), \quad i \in \mathbb{N},$$

и набор множеств

$$Q_i^0 = A_i \times B_0, \quad \widehat{Q}_i^0 = \widehat{A}_i \times B_0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Множества Q_i^0 — замкнуты, $\widehat{Q}_i^0$ — открыты в $W \times \Gamma$. Обозначим

$$Q_i^1 = \psi^{-1}(Q_i^0), \quad P_i^1 = N \setminus \psi^{-1}(\widehat{Q}_i^0), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Множества P_i^1 и Q_i^1, $i \in \mathbb{N}$ — замкнуты в N, так как отображение ψ — непрерывно.

Положим

$$Q_i = \Phi(Q_i^1) = \Phi \circ \psi^{-1}(Q_i^0), \quad i \in \mathbb{N},$$
$$P_i = \Phi(P_i^1) \cap D_0, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Множества P_i, Q_i, $i \in \mathbb{N}$, замкнуты в M^2 (и в частности, в D_0).

Кроме того, введем обозначения

$$A = h^{-1}((1,2)), \quad \widehat{A} = h^{-1}([1,2]),$$

$$Q^0 = A \times B_0, \quad \widehat{Q}^0 = \widehat{A} \times B_0.$$

Так как $\partial Q^0 = (\partial A \times B_0) \cap (A \times \partial B_0)$ и $\partial B_0 = \varnothing$ (в силу того что B_0 — открыто-замкнутое), то

$$\partial Q^0 = \partial A \times B_0 = \partial \widehat{A} \times B_0 = \partial \widehat{Q}^0.$$

Заметим, что $\psi(z) \in \partial Q^0$, так как $p(z) = h^{-1}(1) \in \partial A$ по построению.

Положим

$$Q^1 = \psi^{-1}(Q^0), \quad P^1 = N \setminus \psi^{-1}(\widehat{Q}^0),$$

$$Q = \Phi \circ \psi^{-1}(Q^0), \quad P = \Phi(P^1) \cap D_0.$$

Нетрудно видеть, что P^1, Q^1 — открыты в N и удовлетворяют соотношениям $P^1 \cap Q^1 = \varnothing$, $\partial P^1 = \partial Q^1 = \psi^{-1}(K_0)$, где

$$K_0 = (\{h^{-1}(1)\} \times B_0) \cup (\{h^{-1}(2)\} \times B_0)\ ;$$

а множества P и Q — соотношениям

$$P \cap Q = \varnothing, \quad \partial P = \partial Q = \Phi \circ \psi^{-1}(K_0) = K,$$

$$\Phi(z) \in K, \quad \operatorname{Cl} Q \subset \operatorname{Int} D.$$

Кроме того,

$$Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i, \quad P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i.$$

Разобъем дальнейшие рассуждения на несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что найдется открытое подмножество U диска D_0 такое, что $Q \subset U \subset \operatorname{Int} D$, $P \subset D_0 \setminus \mathrm{Cl}U$ (и значит, $K = \partial U \cap \Phi(N)$).

Положим $\overline{P} = \mathrm{Cl}P$, $\overline{Q} = \mathrm{Cl}Q$.

При любом $i \in \mathbb{N}$ компакты Q_i и $\overline{P}$ не пересекаются. Тогда найдутся их непересекающиеся открытые окрестности $\widetilde{U}_i \supset Q_i$ и $\widetilde{\widetilde{U}}_i \supset \overline{P}$.

Аналогично, можно найти непересекающиеся открытые множества $\widetilde{V}_i \supset P_i$ и $\widetilde{\widetilde{V}}_i \supset \overline{Q}$.

Положим

$$U_i' = \bigcap_{k=1}^{i} \widetilde{\widetilde{U}}_k, \quad V_i' = \bigcap_{k=1}^{i} \widetilde{\widetilde{V}}_k, \quad i \in \mathbb{N}\,;$$

$$U_i = \widetilde{U}_i \cap V_i', \quad V_i = \widetilde{V}_i \cap U_i', \quad i \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $Q_i \subset U_i$ (так как $Q_i \subset \overline{Q}$ и $\overline{Q} \subset V_i'$ при любом $i \in \mathbb{N}$). Аналогично, $P_i \subset V_i$.

Заметим, что $U_i \cap V_j = \varnothing$ при всех i, $j \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $i \leq j$ (случай $i > j$ рассматривается аналогично). Тогда

$$V_j = \widetilde{V}_j \cap U_j' \subset U_j' = \bigcap_{k=1}^{j} \widetilde{\widetilde{U}}_k \subset \widetilde{\widetilde{U}}_i,$$

и при этом $U_i \subset \widetilde{U}_i$ и $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{\widetilde{U}}_i = \varnothing$.

Положим

$$U_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \quad V_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i.$$

Очевидно, $U_0 \cap V_0 = \varnothing$ (в противном случае нашлись бы i, $j \in \mathbb{N}$, для которых $U_i \cap V_j \neq \varnothing$). Так как $Q_i \subset U_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$ и $Q = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, то $Q \subset U_0$. Аналогично, $P \subset V_0$.

Обозначим $U = U_0 \cap \operatorname{Int} D$. Это и есть искомое множество, так как $P \subset V_0 \subset D_0 \setminus \mathrm{Cl}U_0 \subset D_0 \setminus \mathrm{Cl}U$.

Шаг 2. Можно считать, что U — линейно-связное множество.

В противном случае U распадается на не более чем счетное число компонент линейной связности $U^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (которые сами являются открытыми множествами):

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U^{(i)}.$$

Фиксируем точку $\tau \in A = h^{-1}((1,2)) \subset W$. Множество

$$\{\tau\} \times B_0 \subset W \times \Gamma$$

замкнуто (так как $\{\tau\}$ замкнуто в W и B_0 — открыто-замкнутое подмножество множества Γ), а поэтому оно компактно (как замкнутое подмножество компакта $\{\tau\} \times \Gamma$). Значит множество $\Phi \circ \psi^{-1}(\{\tau\} \times B_0)$ компактно в M^2 (и в D_0).

Набор $\{U^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ образует открытое покрытие множества

$$\Phi \circ \psi^{-1}(\{\tau\} \times B_0).$$

Выберем из него конечное подпокрытие $\{U^{(i_k)}\}_{k=1}^{n}$. Множества из этого подпокрытия попарно не пересекаются (так как являются различными компонентами линейной связности множества U). Поэтому множества

$$\Phi \circ \psi^{-1}(\{\tau\} \times B_0) \cap U^{(i_k)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

являются открыто-замкнутыми подмножествами множества $\Phi \circ \psi^{-1}(\{\tau\} \times B_0)$ в топологии, индуцированной с M^2. Следовательно их прообразы

$$\psi \circ \Phi^{-1}(\Phi \circ \psi^{-1}(\{\tau\} \times B_0) \cap U^{(i_k)}), k = 1, \ldots, n,$$

являются открыто-замкнутыми подмножествами множества $\{\tau\} \times B_0$ в топологии, индуцированой с $W \times \Gamma$, а множества

$$B^{(k)} = \mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ \Phi^{-1}(\Phi \circ \psi^{-1}(\{\tau\} \times B_0) \cap U^{(i_k)}),\ k = 1, \ldots, n,$$

— открыто-замкнутые подмножества Γ (здесь

$$\mathrm{pr}_2 : W \times \Gamma \to \Gamma$$

— проекция).

Так как при всех $x \in \Gamma$ множество $A \times \{x\}$ линейно-связно (гомеоморфно интервалу), то

$$\Phi \circ \psi^{-1}(A \times B^{(k)}) \subset U^{(i_k)}, k = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\psi(z) = \{s\} \times \{x\} \in W \times \Gamma$ $(x \in B_0)$. Так как $B_0 = \bigcup_{k=1}^{n} B^{(k)}$ и $B^{(k)} \cap B^{(m)} = \varnothing$ при $k \neq m$, то существует точно один номер $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $x \in B^{(k_0)}$. Тогда

(i) $\psi(z) \in \partial(A \times B^{(k_0)})$ (а значит выполняется соотношение $\Phi(z) \in \partial(\Phi \circ \psi^{-1}(A \times B^{(k_0)})))$;
(ii) $\Phi \circ \psi^{-1}(A \times B^{(k_0)}) = \Phi(N) \cap U^{(i_{k_0})}$;
(iii) $U^{(i_{k_0})}$ — линейно связно.

Следовательно, заменив множество $A \times B_0$ на $A \times B^{(k_0)}$, U на $U^{(i_{k_0})}$, получаем открытое подмножество диска D_0, удовлетворяющее всем требованиям пункта **1** и вдобавок, линейно связное.

Шаг 3. Покажем, что найдется замкнутое подмножество S диска D, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\operatorname{Int} D_0 \setminus S$ — открытое линейно связное множество;
(ii) $\operatorname{Int} S$ — открытое линейно связное множество;
(iii) все точки ∂S достижимы из $\operatorname{Int} S$;
(iv) все точки ∂S достижимы из $\operatorname{Int} D_0 \setminus S$;
(v) $Q \subset \operatorname{Int} S$;
(vi) $P \subset D_0 \setminus S$.
Отсюда вытекает, что, $K \subset \partial S$.

Вспомним, что $D_0 = \varphi^{-1}(B_{2\varepsilon/3}(\varphi(y)))$, где (V, φ) — некоторая (фиксированая) карта многообразия M^2, которая содержит точку $y = \Phi(z)$. Существует линейный автоморфизм $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такой, что

$$H(\varphi(y)) = 0,$$

$$H(B_{2\varepsilon/3}(\varphi(y))) = \widehat{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x| \le 1\},$$

$$H(B_{\varepsilon/3}(\varphi(y))) = \widehat{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x| \le \frac{1}{2}\right\}.$$

Отображение $H \circ \varphi : D_0 \to \widehat{D}_0$ является гомеоморфизмом. Будем рассматривать гомеоморфные образы (под действием отображения $H \circ \varphi$) множеств P, Q, K и U, обозначив их $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$, $\widehat{K}$ и $\widehat{U}$ соответственно.

Положим

$$\widehat{D}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{d}(0, x) \le \frac{3}{4}\right\}.$$

Так как $\widehat{U} \subset \operatorname{Int} \widehat{D}$, то $\operatorname{Cl} \widehat{U} \subset \operatorname{Int} \widehat{D}_1$ и $\mathrm{d}(x, \partial \widehat{D}_1) \ge 1/4$ для всех $x \in \operatorname{Cl} \widehat{U}$.

Каждой точке $x \in \partial \widehat{U} \setminus \widehat{K}$ сопоставим окрестность

$$V_x = B_{\varepsilon(x)}(x) = \{x' \in \widehat{D}_0 |\ \mathrm{d}(x, x') < \varepsilon(x)\},$$

где

$$\varepsilon(x) = \min(\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2), \qquad \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}(x, \partial \widehat{D}_1),$$

$$\mathrm{d}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x, H \circ \varphi(\Phi(N) \cap \widehat{D}_0)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x, (\widehat{P} \cup \widehat{Q} \cup \widehat{K})).$$

Набор множеств $\{V_x\}_{x \in \partial \widehat{U}_1 \setminus \widehat{K}}$ образует открытое покрытие множества $\partial \widehat{U} \setminus \widehat{K}$.

Рассмотрим, кроме того, множества

$$V_n(\widehat{K}) = \left\{x' \in \widehat{D}_0 |\ \mathrm{d}(x', \widehat{K}) < \frac{1}{2^n}\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

Выберем из набора $\{V_x\}_{x \in \partial \widehat{U}_1 \setminus \widehat{K}}$ счетную подсистему, образующую покрытие множества $\partial \widehat{U} \setminus \widehat{K}$.

Так как $\partial\widehat{U}$ — компакт, то из покрытия

$$V_1(\widehat{K}) \cup \bigcup_{x\in\partial\widehat{U}_1\setminus V_1(\widehat{K})} V_x$$

можно выбрать конечное подпокрытие $V_1(\widehat{K}), V_{x_1}, \ldots, V_{x_{n_1}}$. Обозначим

$$W_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} V_{x_i}.$$

Очевидно, $\partial\widehat{U} \setminus V_1(\widehat{K}) \subset W_1$.

Пусть для некоторого $s \geq 2$ уже найдено число $n_s \in \mathbb{N}$ и точки $x_i \in \partial\widehat{U} \setminus \widehat{K}$, $i = 1, \ldots, n_s$ такие, что

$$\partial\widehat{U} \setminus V_s(\widehat{K}) \subset W_s = \bigcup_{i=1}^{n_s} V_{x_i}.$$

Рассмотрим открытое покрытие множества $\partial\widehat{U}$

$$V_{s+1}(\widehat{K}), W_s, \{V_x\}_{x\in(\partial\widehat{U}_1\cap V_s(\widehat{K}))\setminus V_{s+1}(\widehat{K})}.$$

Выберем из него конечное подпокрытие

$$V_{s+1}(\widehat{K}), W_s, V_{x_{n_s+1}}, \ldots, V_{x_{n_{s+1}}}\ .$$

Обозначим

$$W_{s+1} = W_s \cup \bigcup_{i=n_s+1}^{n_{s+1}} V_{x_i}\ .$$

Очевидно, $\partial\widehat{U} \setminus V_{s+1}(\widehat{K}) \subset W_{s+1}$.

В результате получаем счетное покрытие $\{V_{x_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества $\partial\widehat{U} \setminus \widehat{K}$, обладающее следующими свойствами: при всех $s \in \mathbb{N}$

$$\partial\widehat{U} \setminus V_s(\widehat{K}) \subset W_s = \bigcup_{i=1}^{n_s} V_{x_i}\ ;$$

при всех $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\bigcup_{i=n_s+1}^{\infty} V_{x_i} \subset V_{s-1}(\widehat{K}) \ ,$$

и даже

$$\bigcup_{i=n_s+1}^{\infty} \mathrm{Cl} V_{x_i} \subset V_{s-1}(\widehat{K}).$$

Действительно, $x_i \in V_s(\widehat{K})$ при всех $i \geq n_s + 1$, то есть $\mathrm{d}(x_i, \widehat{K}) < 1/2^s$. Так как для любого $x \in \mathrm{Cl} V_{x_i}$ выполняются неравенства

$$\mathrm{d}(x_i, x) \leq 1/2\mathrm{d}(x_i, \widehat{K} \cup \widehat{P} \cup \widehat{Q}) \leq 1/2\mathrm{d}(x_i, \widehat{K}) < 1/2^{s+1},$$

то

$$\mathrm{d}(x, \widehat{K}) \leq \mathrm{d}(x, x_i) + \mathrm{d}(x_i, \widehat{K}) < 1/2^{s+1} + 1/2^s = \\ = 3/2^{s+1} < 1/2^{s-1}$$

и $\mathrm{Cl} V_{x_i} \subset V_{s-1}(\widehat{K})$, $i \geq n_s + 1$.

Рассмотрим множество

$$\widehat{S}_0 = \mathrm{Cl}(\widehat{U} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{x_i}).$$

Множество $\widehat{S}_0$ обладает целым рядом важных для нас свойств.

(a) Очевидно, $\widehat{Q} \subset \mathrm{Int}\, \widehat{S}_0$, так как $\widehat{Q} \subset \widehat{U}$ и $\widehat{U}$ открыто. Покажем, что $\widehat{P} \subset \widehat{D}_0 \setminus \widehat{S}_0$.

Пусть $x \in \widehat{P}$. Тогда $x \in \widehat{D}_0 \setminus \mathrm{Cl}\widehat{U}$. Так как $\partial\widehat{U}$ — компакт и $x \notin \partial\widehat{U}$, то $\mathrm{d}(x, \partial\widehat{U}) = \delta > 0$. Заметим, что

$$B_{\delta/2}(x) \subset \widehat{D}_0 \setminus \mathrm{Cl}\widehat{U}.$$

Покажем, что

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x) \bigcap \left(\bigcup_{x' \in \partial\widehat{U}_1 \setminus \widehat{K}} V_{x'} \right) = \varnothing.$$

Пусть это не так. Тогда найдутся

$$x' \in \partial\widehat{U}_1 \setminus \widehat{K} \qquad \text{и} \qquad t \in V_{x'} \cap B_{\delta/2}(x).$$

С одной стороны

$$\mathrm{d}(x,t) < \frac{1}{2}\mathrm{d}(x,\partial\widehat{U}) \leq \frac{1}{2}\mathrm{d}(x,x'),$$

с другой стороны,

$$\mathrm{d}(x',t) < \frac{1}{2}\mathrm{d}(x',\widehat{P} \cup \widehat{Q} \cup \widehat{K})$$

по определению $V_{x'}$, поэтому

$$\mathrm{d}(x',t) < \frac{1}{2}\mathrm{d}(x',\widehat{P}) \leq \frac{1}{2}\mathrm{d}(x,x').$$

Объединяя эти неравенства, получаем

$$\mathrm{d}(x,x') > \mathrm{d}(x,t) + \mathrm{d}(t,x'),$$

что противоречит неравенству треугольника.

Следовательно, $V_{x'} \cap B_{\delta/2}(x) = \varnothing$ при всех $x' \in \partial\widehat{U} \setminus \widehat{K}$. В частности,

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}\right) = \varnothing$$

и

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap \left(\widehat{U} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}\right)\right) = \varnothing.$$

Так как в последнем соотношении все множества открыты, то

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x) \bigcap \mathrm{Cl}\left(\widehat{U} \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}\right)\right) = \varnothing$$

и $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \subset \widehat{D}_0 \setminus \widehat{S}_0$.

Из (a) немедленно следует, что $\widehat{K} \subset \partial\widehat{S}_0$.

(b) Так как $(\mathrm{Cl}\widehat{U} \setminus \widehat{K}) \subset \mathrm{Int}\widehat{S}_0$, то границу $\partial\widehat{S}_0$ множества $\widehat{S}_0$ можно представить в виде объединения трех непересекающихся множеств:

$$\partial\widehat{S}_0 = \widehat{K} \cup \left(\partial\widehat{S}_0 \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}\right)\right) \cup \left(\partial\widehat{S}_0 \setminus \left(\widehat{K} \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}\right)\right),$$

причем

$$\partial\widehat{S}_0 \setminus \left(\widehat{K} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}\right) \subset \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}\right) .$$

Покажем, что

$$\partial\widehat{S}_0 \subset \widehat{K} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}.$$

Пусть $x \in \partial\widehat{S}_0 \setminus \widehat{K}$. Тогда $x \notin \widehat{P} \cup \widehat{Q} \cup \widehat{K}$ и

$$\mathrm{d}(x, \widehat{P} \cup \widehat{Q} \cup \widehat{K}) = \delta > 0.$$

Найдется $s \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta/2 > 1/2^s$.

Так как

$$\bigcup_{i=n_{s+1}}^{\infty} V_{x_i} \subset V_s(\widehat{K})$$

и

$$V_s(\widehat{K}) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(x) = \varnothing,$$

то

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x) \bigcap \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}\right) =$$

$$= B_{\frac{\delta}{2}}(x) \bigcap \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{n_{s+1}} \partial V_{x_i}\right) = B_{\frac{\delta}{2}}(x) \bigcap \bigcup_{i=1}^{n_{s+1}} \partial V_{x_i} ,$$

Значит, $x \in \partial S_0 \setminus \widehat{K}$ влечет $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}$. Из последнего заключаем, что

$$\widehat{S}_0 = \mathrm{Cl}\,\widehat{U} \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}\,V_{x_n}.$$

(c) Так как $\partial\widehat{S}_0 \setminus \widehat{K} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial V_{x_n}$ и при всех $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

$$\bigcup_{i=n_{s+1}}^{\infty} \partial V_{x_i} \subset \bigcup_{i=n_{s+1}}^{\infty} \operatorname{Cl} V_{x_i} \subset V_{s-1}(\widehat{K}),$$

то

$$\partial\widehat{S}_0 \setminus V_{s-1}(\widehat{K}) \subset \bigcup_{i=1}^{n_s} \partial V_{x_i}.$$

Поэтому, при любом $s \in \mathbb{N}$ та часть границы $\partial\widehat{S}_0$, которая лежит вне $V_s(\widehat{K})$ представляет собой конечное объединение дуг окружностей $\partial V_{x_1}, \dots, \partial V_{x_{n_{s+1}}}$. Из сказанного непосредственно следует, что:

(i) Множество $\operatorname{Int}\widehat{S}_0$ линейно-связно.

Проверим это. Отметим сначала, что множество

$$\widehat{U} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}$$

линейно-связно. Это следует из того, что множества $\widehat{U}$, V_{x_n}, $n \in \mathbb{N}$, линейно-связны и каждое из множеств V_{x_n}, $n \in \mathbb{N}$, имеет непустое пересечение с $\widehat{U}$.

Справедливы включения

$$\widehat{U} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n} \subset \operatorname{Int}\widehat{S}_0 \subset \left(\widehat{U} \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl} V_{x_n}\right).$$

Второе из них имеет место в силу того, что

$$\partial\widehat{U} \setminus \widehat{K} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n} \qquad \text{и} \qquad \widehat{K} \subset \partial\widehat{S}_0.$$

Фиксируем точку $z_0 \in \widehat{U} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}$. Пусть

$$x \in \operatorname{Int}\widehat{S}_0 \cap \partial V_{x_i}$$

для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Так как $\operatorname{Cl} V_{x_i}$ есть замкнутый двумерный диск, то точка x достижима из V_{x_i}, т. е. найдется инъективное непрерывное отображение $\varphi_1 : I \to \operatorname{Cl} V_{x_i}$ такое, что $\varphi_1(0) = x$, $\varphi_1((0,1)) \subset V_{x_i}$. Далее, найдется непрерывный путь $\varphi_2 : I \to \widehat{U} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{x_n}$, соединяющий точки $\varphi_1(1) \subset V_{x_i}$ и z_0. Тогда непрерывная кривая

$$\varphi : I \to \operatorname{Int} \widehat{S}_0,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{при} \quad t \in [0, 1/2) \\ \varphi_2(2t-1) & \text{при} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

соединяет точки x и z_0.

(ii) Каждая точка $x \in \partial\widehat{S}_0 \setminus \widehat{K}$ является достижимой из любой компоненты линейной связности множества $\widehat{D}_0 \setminus \partial\widehat{S}_0$, на границе которой она лежит.

Действительно, из (c) следует, что для любого

$$x \in \partial\widehat{S}_0 \setminus \widehat{K}$$

найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$U_\varepsilon(x) \cap \partial\widehat{S}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{s} \partial V_{x_{m_i}}$$

для некоторых $V_{x_{m_1}}, \ldots, V_{x_{m_s}}$.

Так как множества $\{x\}$ и $\partial V_{x_{m_i}}$, $i = 1, \ldots, n$, компактны, то из $x \notin \partial V_{x_{m_i}}$ при некотором i следует, что

$$\mathrm{d}(x, \partial V_{x_{m_i}}) > 0.$$

Следовательно, можно подобрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы с ε-окрестностью точки x пересекались только те из окружностей $\partial V_{x_{m_1}}, \ldots, \partial V_{x_{m_s}}$, которые содержат точку x.

Дальше будем считать, что

$$x \in \partial V_{x_{m_i}} \qquad \text{при всех} \qquad i \in \{1, \ldots, s\}$$

Обозначим через $z_1, \ldots, z_k$ все точки попарного пересечения окружностей $\partial V_{m_1}, \ldots, \partial V_{m_s}$, $i = 1, \ldots, s$, отличные от x (их, очевидно, конечное число). Пусть d_i, $i = 1, \ldots, s$, — радиусы окружностей $\partial V_{x_{m_i}}$. Пусть еще $\rho_j = \mathrm{d}(x, z_j)/2$, $j = 1, \ldots, k$.

Положим

$$\delta = \min(d_1, \ldots, d_s, \rho_1, \ldots, \rho_k, \varepsilon).$$

Рассмотрим окрестность $U_\delta(x)$. Ее граничная окружность $\partial U_\delta(x)$ пересекается с каждой из окружностей $\partial V_{x_{m_i}}$, $i = 1, \ldots, s$, точно в двух точках. Следовательно,

$$\operatorname{Cl} U_\delta(x) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{s} \partial V_{x_{m_i}} \right) = \bigcup_{j=1}^{2s} \gamma_j,$$

где γ_j, $j = 1, \ldots, 2s$, — являются дугами окружностей $\partial V_{x_{m_i}}$, $i = 1, \ldots, s$, одним из концов каждой из которых является точка x, а другой лежит в $\partial U_\delta(x)$. При этом $\gamma_i \cap \gamma_j = x$ при всех i, $j = 1, \ldots, 2s$, $i \neq j$.

Дуги γ_j, $j = 1, \ldots, 2s$, разбивают множество $\operatorname{Cl} U_\delta(x)$ на $2s$ замкнутых подмножеств B_j, $j = 1, \ldots, 2s$, таких, что $\operatorname{Int} B_i \cap \operatorname{Int} B_j = \varnothing$ при всех i, $j = 1, \ldots, 2s$. Каждое из этих подмножеств ограничено двумя дугами из семейства $\{\gamma_j\}$ и дугой окружности $\partial U_\delta(x)$, а значит, гомеоморфно двумерному диску. При этом $x \in \partial B_j$ для всех $j = 1, \ldots, 2s$.

Очевидно, точка x достижима из $\operatorname{Int} B_j$ для каждого $j = 1, \ldots, 2s$.

Пусть W — некоторая компонента линейной связности множества $\widehat{D}_0 \setminus \partial \widehat{S}_0$ такая, что $x \in \partial W$. Тогда

$$U_\delta(x) \cap W \neq \varnothing.$$

Отметим, что $W \cap \operatorname{Int} B_j \neq \varnothing$ влечет $\operatorname{Int} B_j \subset W$ для каждого $j \in \{1, \ldots, 2s\}$, так как

$$(\partial W \cap U_\delta(x)) \subset (\partial \widehat{S}_0 \cap U_\delta(x)) \subset \bigcup_{j=1}^{2s} \partial B_j.$$

С другой стороны, найдется $j_0 \in \{1, \dots, 2s\}$, удовлетворяющее неравенству $W \cap \operatorname{Int} B_{j_0} \neq \varnothing$, так как множество

$$U_\delta(x) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{2s} \operatorname{Int} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{2s} \gamma_j$$

имеет пустую внутренность и $U_\delta(x) \cap W \neq \varnothing$.

Значит, найдется $j_0 \in \{1, \dots, 2s\}$ такое, что

$$\operatorname{Int} B_{j_0} \subset W.$$

Точка x достижима из $\operatorname{Int} B_{j_0}$, и тем более она достижима из W.

Имеет место следующее простое предложение

Предложение 3.14. *Пусть дуга γ_j, $j \in \{1, \dots, 2s\}$ лежит на общей границе двух компонент линейной связности W', W'' множества $\widehat{D}_0 \setminus \partial \widehat{S}_0$. Тогда одна из этих компонент совпадает с* $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$.

Доказательство предложения 3.14. Пусть это не так, и ни одно из множеств W', W'' не совпадает с $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$. Тогда, очевидно, $W' \cap \widehat{S}_0 = W'' \cap \widehat{S}_0 = \varnothing$.

Фиксируем точку $x' \in \gamma_j \cap U_\delta(x)$, $x' \neq x$. Так как множества $\partial U_\delta(x)$, γ_i, $i \neq j$, — компактны, не содержат точку x' (и пространство $\widehat{D}_0$ — хаусдорфово), то найдется $\varepsilon' > 0$ такое, что окрестность $U_{\varepsilon'}(x')$ не пересекается с множествами $\partial U_\delta(x)$, γ_i, $i \neq j$.

Значит, $U_{\varepsilon'}(x') \subset W' \cup W'' \cup \gamma_j$. Точка x' лежит в $\partial \widehat{S}_0$ (т. к. в противном случае выполнялось бы включение

$$U_{\varepsilon'}(x') \subset \widehat{D}_0 \setminus \partial \widehat{S}_0,$$

что невозможно). Следовательно, x' достижима из $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$, а это невозможно, так как $\gamma_j \subset \partial \widehat{S}_0$ и, по предположению, $U_{\varepsilon'}(x') \cap \operatorname{Int} \widehat{S} = \varnothing$. □

Следствие 3.15. *Каждая точка* $x \in \partial\widehat{S}_0 \setminus \widehat{K}$ *достижима из* $\operatorname{Int}\widehat{S}_0$.

Замечание 3.16. *Для каждой компоненты линейной связности* W *множества* $\widehat{D}_0 \setminus \partial\widehat{S}_0$ *справедливо включение* $\partial W \subset \partial\widehat{S}_0$.

Замечание 3.17. *Для каждой компоненты линейной связности* W *множества* $\widehat{D}_0 \setminus \partial\widehat{S}_0$ *ее граница* ∂W *разделяет* $\widehat{D}_0$, *так как* $\widehat{D}_0 \setminus \operatorname{Cl} W$ *имеет непустую внутренность, которая содержит* $\widehat{D}_0 \setminus \widehat{D}_1$ *если* $W = \operatorname{Int}\widehat{S}_0$ *и содержит* $\operatorname{Int}\widehat{S}_0$ *если* $W \neq \operatorname{Int}\widehat{S}_0$.

Компонент линейной связности множества $\widehat{D}_0 \setminus \partial\widehat{S}_0$ не более чем счетное число, т. к. множество $\widehat{D}_0 \setminus \partial\widehat{S}_0$ открыто в $\widehat{D}_0$. Обозначим $W_0 = \operatorname{Int}\widehat{S}_0$. Пусть W_1 — компонента, содержащая кольцо $\widehat{D}_0 \setminus \widehat{D}_1$. Перенумеруем оставшиеся компоненты каким-либо способом.

Обозначим $\widehat{S} = \widehat{D}_0 \setminus W_1$. Очевидно, $\widehat{S} \subset \widehat{D}_1$.

Пусть $z_0 \in \Phi^{-1}(D_0)$. Рассмотрим траекторию

$$F(z_0) : \mathbb{R} \to N$$

динамической системы Понтрягина (F, N).

Из определения динамической системы (F, N) вытекает, что для любого $\tau \in S^1$ найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что $F(z_0)(t) \in p^{-1}(\tau)$. При этом

$$p^{-1}(\tau) \cap F(z_0)(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F(z_0)(t + n).$$

Найдем $t_0 \in [-1, 0]$, для которого $F(z_0)(t_0) \in p^{-1}(p(z'))$. Так как $\Phi(z_0) \in D_0 \subset U$ и

$$U \cap \Phi(p^{-1}(p(z'))) = \varnothing,$$

то $t_0 \in (-1, 0)$.

Рассмотрим отрезок траектории $F(z_0)([t_0, t_0 + 1])$.

Пусть $\partial\widehat{A} = \{\tau_1\} \cup \{\tau_2\} \subset S^1$. По построению

$$p(z') \notin \widehat{A}.$$

Следовательно, найдутся $t_1, t_2 \in (t_0, t_0 + 1)$ такие, что

$$p \circ F(z_0)(t_i) = \tau_i, \qquad i = 1, 2.$$

Будем считать, что $t_1 < t_2$ (случай $t_1 > t_2$ рассматривается аналогично).

Так как отображение

$$p \circ F(z_0)\big|_{[t_1,t_2]} : [t_1, t_2] \to S^1$$

инъективно и непрерывно, то $p \circ F(z_0)([t_1, t_2])$ совпадает с одним из множеств: либо с $\widehat{A}$, либо с $S^2 \setminus A$.

Так как $p\circ F(z_0)(t_0) = p(z') \notin \widehat{A}$, то в силу замечания 3.3

$$p\circ F(z_0)([t_1, t_2]) = \widehat{A}, \quad p\circ F(z_0)([t_0, t_1)\cup(t_1, t_0+1]) = S^1\setminus\widehat{A}.$$

Рассмотрим отображение

$$\mathrm{pr}_2 \circ\psi \circ F(z_0)\big|_{[t_1,t_2]} : [t_1, t_2] \to \Gamma.$$

Здесь $\mathrm{pr}_2 : W\times\Gamma \to \Gamma$ — проекция на второй сомножитель.

Так как образ связного множества при непрерывном отображении связен и Γ — канторов дисконтинуум, то

$$\mathrm{pr}_2 \circ\psi \circ F(z_0)([t_1, t_2]) = x$$

для некоторого $x \in \Gamma$.

Значит реализуется одна из двух следующих возможностей.

(i) $\Phi \circ F(z_0)((t_1, t_2)) \in Q$ при $x \in B_0$.

При этом

$$\begin{aligned} &F(z_0)([t_1, t_2]) \cap \partial(A_0 \times B_0) = \\ &\quad = F(z_0)([t_1, t_2]) \cap (\partial A_0 \times B_0) = F(z_0)(t_1) \cup F(z_0)(t_2) \end{aligned}$$

и $\Phi \circ F(z_0)([t_1, t_2]) \cap K = \Phi \circ F(z_0)(t_1) \cup \Phi \circ F(z_0)(t_2)$.

(ii) $\Phi \circ F(z_0)((t_1, t_2)) \cap Q = \varnothing$ при $x \notin B_0$.

Тогда $\Phi \circ F(z_0)([t_1, t_2]) \subset M^2 \setminus (Q \cup K)$, так как

$$\Phi^{-1}(K) = \partial(A_0 \times B_0) = \partial A_0 \times B_0$$

и $\Phi \circ F(z_0)([t_1, t_2]) \subset M^2 \setminus S_0$. Здесь $S_0 = \varphi^{-1} \circ H^{-1}(\widehat{S}_0)$.

Рассмотрим эти два варианта подробней.

1. Пусть $\Phi \circ F(z_0)([t_1, t_2]) \in M^2 \setminus S_0$. Так как

$$\Phi^{-1}(S_0) = \Phi^{-1}(K \cup Q) = \psi^{-1}(\widehat{A} \times B_0) \subset p^{-1}(\widehat{A}),$$

то $\Phi \circ F(z_0)([t_0, t_0 + 1]) \cap S_0 = \varnothing$ и $\Phi(z_0) \in P \subset D_0$.

Положим

$$\widehat{t} = \sup\{t \in (t_0, 0] \mid \Phi \circ F(z_0)(t) \in \partial D_0\}.$$

Рассмотрим непрерывную кривую

$$\alpha : I \to \widehat{D}_0 \setminus \partial \widehat{S}_0$$

$$\alpha(t) = H \circ \varphi \circ \Phi \circ F(z_0)((1 - t)\widehat{t}),$$

для которой

$$\alpha(0) = H \circ \varphi \circ \Phi \circ F(z_0)(\widehat{t}) \in \partial \widehat{D}_0 \subset W_1, \quad \alpha(1) = H \circ \varphi \circ \Phi(z_0).$$

В множестве $\widehat{D}_0 \setminus \partial \widehat{S}_0$ она соединяет точку

$$H \circ \varphi \circ \Phi(z_0)$$

с некоторой точкой из W_1. Следовательно,

$$H \circ \varphi \circ \Phi(z_0) \in W_1.$$

2. Пусть $\Phi \circ F(z_0)((t_1, t_2)) \subset Q$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что для всех

$$t' \in (t_0, t_0 + 1) \setminus [t_1, t_2],$$

для которых $\Phi \circ F(z_0)(t') \in D_0$, выполняется включение

$$H \circ \varphi \circ \Phi \circ F(z_0)(t') \in W_1.$$

Кроме того, для всех $t' \in (t_1, t_2)$ справедливо соотношение

$$H \circ \varphi \circ \Phi \circ F(z_0)(t') \in \widehat{Q} \subset \operatorname{Int} \widehat{S}_0\ .$$

Наконец,

$$H \circ \varphi \circ \Phi \circ F(z_0)(t') \in \widehat{K} \subset \partial \widehat{S}_0$$

для $t' \in \{t_1, t_2\}$.

Отсюда вытекает, что $\widehat{P} \subset W_1$, $\widehat{K} \subset \partial \widehat{S}$, любая точка множества $\widehat{K}$ достижима как из W_1, так и из $\operatorname{Int} \widehat{S}$ (так как $\operatorname{Int} \widehat{S}_0 \subset \operatorname{Int} \widehat{S}$ и все элементы $\widehat{K}$ достижимы из $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$).

Покажем, что любая точка множества $\partial \widehat{S} \setminus \widehat{K}$ достижима как из W_1, так и из $\operatorname{Int} \widehat{S}$.

Так как

$$\widehat{D}_0 = W_1 \cup \widehat{S}, \quad \partial W_1 \subset (\partial \widehat{D}_0 \cup \partial \widehat{S}_0), \quad \partial \widehat{D}_0 \cap \widehat{S} = \varnothing,$$

то $\partial \widehat{S} \subset \partial \widehat{S}_0$. Пусть $x \in \partial \widehat{S} \setminus \widehat{K}$. Тогда $x \in \partial \widehat{S}_0 \setminus \widehat{K}$. Выше мы уже показали, что точка x достижима из W_1 и из $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$. Значит она достижима и из $\operatorname{Int} \widehat{S}$.

Покажем наконец, что $\operatorname{Int} \widehat{S}$ — линейно связное множество. Так как

$$\widehat{D}_0 = \widehat{S}_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n, \qquad \widehat{S}_0 \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \right) = \varnothing$$

и $W_i \cap W_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\widehat{S} = \widehat{S}_0 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} W_n.$$

Зафиксируем $j \geq 2$.

Размерность множества $\Phi(p^{-1}(\partial \widehat{A}))$ равна нулю, так как оно гомеоморфно множеству Кантора. Из неравенства $K \subset \Phi(p^{-1}(\partial \widehat{A}))$ следует, что размерность гомеоморфного образа $\widehat{K} = H \circ \varphi(K)$ множества K также равна нулю.

С другой стороны, так как множество $\partial W_j \subset \mathbb{R}^2$ разбивает пространство $\widehat{D}_0$ (а вместе с ним, и $\mathbb{R}^2$), то его размерность не меньше единицы (см. [12]). Следовательно, дополнение ∂W_j до $\widehat{K}$ не пусто. Фиксируем $x \in \partial W_j \setminus \widehat{K}$.

Множество $\widehat{P} \cup \widehat{Q} \cup \widehat{K}$ компактно и не содержит точки x, поэтому найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathrm{d}(x, \widehat{P} \cup \widehat{Q} \cap \widehat{K}) > 2\varepsilon$.

Выше было показано, что существует конечный набор номеров $m_1, \ldots, m_s$, для которого

$$U_\varepsilon(x) \cap \partial\widehat{S}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{s} \partial V_{x_{m_i}}.$$

Окружности $\partial V_{x_{m_i}}$, $i = 1, \ldots, s$, пересекаются в конечном числе точек $z_1, \ldots, z_k$. Следовательно, найдутся $x' \in U_\varepsilon(x) \cap \partial W_j$ и номер i_0, для которых

$$x' \notin \partial V_{x_{m_i}} \qquad \text{при } i \neq i_0,$$

$$x' \in \partial V_{x_{m_i}} \qquad \text{при } i = i_0.$$

Для простоты будем считать, что $x' \in \partial V_{x_{m_1}}$.

Так как

$$x' \notin \bigcup_{i=2}^{s} \partial V_{x_{m_i}},$$

то найдется $\varepsilon' > 0$ такое, что

$$U_{\varepsilon'}(x') \cap \left(\bigcup_{i=2}^{s} \partial V_{x_{m_i}} \right) = \varnothing.$$

При необходимости уменьшая ε', можно считать, что ε' меньше радиуса окружности $\partial V_{x_{m_1}}$.

Множество $\partial V_{x_{m_1}}$ делит окрестность $U_{\varepsilon'}(x')$ на две компоненты линейной связности, одна из которых лежит в $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$ (см. предложение 3.14). Тогда вторая компонента лежит в W_j.

Таким образом, $U_{\varepsilon'}(x') \subset (\widehat{S}_0 \cup W_j) \subset \operatorname{Int} \widehat{S}$. Множество

$$(\operatorname{Int} \widehat{S}_0 \cup W_j \cup U_{\varepsilon'}(x')) \subset \operatorname{Int} \widehat{S}$$

является линейно связным, следовательно, при каждом $j \geq 2$ множества $\operatorname{Int} \widehat{S}_0$ и W_j лежат в одной компоненте линейной связности множества $\operatorname{Int} \widehat{S}$.

Пусть теперь $x \in \partial\widehat{S}_0 \cap \operatorname{Int}\widehat{S}$. Так как точка x достижима из $\operatorname{Int}\widehat{S}_0 \subset \operatorname{Int}\widehat{S}$ (см. следствие 3.15), то она лежит в той же компоненте линейной связности множества $\operatorname{Int}\widehat{S}$, что и множество $\operatorname{Int}\widehat{S}_0$.

Отсюда делаем вывод, что множество $\operatorname{Int}\widehat{S}$ является линейно связным.

Положим $S = \varphi^{-1} \circ H^{-1}(\widehat{S}) \subset D_0$. Это множество и будет искомым.

Шаг 4. Покажем, что множество S гомеоморфно замкнутому двумерному диску.

Рассмотрим множество

$$W = W_1 \cup \widetilde{W}_1 = W_1 \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(x, 0) > \tfrac{3}{4}\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Это множество является связным, так как множества W_1, $\widetilde{W}_1$ — связные и

$$W_1 \cap \widetilde{W}_1 = \widehat{D}_0 \setminus \widehat{D}_1 \neq \varnothing.$$

Так как $\widehat{S} \subset \widehat{D}_1$ по построению,

$$\widehat{D}_0 = \widehat{S} \cup W_1 \qquad \text{и} \qquad \widehat{S} \cap W_1 = \varnothing,$$

то $W = \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{S}$. Далее, поскольку все точки множества $\partial\widehat{S}$ достижимы из W_1, то они достижимы и из W. Вспомним еще, что $\operatorname{Int}\widehat{S}$ — непустое связное множество и все точки $\partial\widehat{S}$ достижимы из $\operatorname{Int}\widehat{S}$. Применяя теорему, обратную к теореме Жордана о кривой [18], заключаем, что множество $\widehat{S}$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску.

Значит, множество $S = \varphi^{-1} \circ H^{-1}(\widehat{S})$ также гомеоморфно замкнутому двумерному диску.

Шаг 5. Построим локальную трансверсальную площадку, проходящую через точку $z \in N$.

По построению $\Phi(z) \in K \subset \partial S$,

$$K \subset (\Phi(p^{-1}(\tau_1)) \cup \Phi(p^{-1}(\tau_2))),$$

$\{\tau_1\} \cup \{\tau_2\} = \partial A \subset S^1$.

Пусть $z \in p^{-1}(\tau_1)$ (случай $z \in p^{-1}(\tau_2)$ рассматривается аналогично). Так как $z \notin p^{-1}(\tau_2)$, множество $p^{-1}(\tau_2)$ компактно и $\Phi : N \to \Phi(N)$ — гомеоморфизм, то найдется открытая окрестность $U(z) \subset M^2$ точки $\Phi(z)$, для которой $U(z) \cap \Phi(p^{-1}(\tau_2)) = \varnothing$.

Множество S гомеоморфно замкнутому 2-диску. Поэтому, его граница гомеоморфна окружности. Фиксируем гомеоморфизм

$$\gamma : S^1 \to \partial S.$$

Так как $\partial S \cap \Phi(p^{-1}(\tau_2)) \neq \varnothing$, то прообраз $\gamma^{-1}(U(z))$ множества $U(z) \subset M^2$ является собственным открытым подмножеством окружности S^1. Значит, множество $\gamma^{-1}(U(z))$ является объединением не более чем счетного набора непересекающихся открытых интервалов.

Далее, найдется интервал из этого набора, содержащий точку $\gamma^{-1}(\Phi(z))$. Фиксируем гомеоморфизм

$$\gamma_0 : (0,1) \to S^1$$

включения этого интервала в окружность.

Однозначно определено $t_0 \in (0,1)$, для которого

$$\gamma \circ \gamma_0(t_0) = \Phi(z).$$

Так как каждое из множеств $\gamma \circ \gamma_0((0,t_0))$, $\gamma \circ \gamma_0((t_0,1))$ — одномерно, а множество $\Phi(p^{-1}(p(z)))$ имеет размерность ноль (как гомеоморфный образ множества Кантора), то найдутся t_1, $t_2 \in (0,1)$, $t_1 < t_0 < t_2$ такие, что $\gamma \circ \gamma_0(t_1)$, $\gamma \circ \gamma_0(t_2) \notin \Phi(N)$.

Множества $\gamma_0((t_1,t_2))$ и $S^1 \setminus \gamma_0([t_1,t_2])$ открыты и не пересекаются в S^1, отображение

$$\gamma^{-1} \circ \Phi \circ \psi^{-1}\big|_{\{\tau_1 \times B_0\}} : \{\tau_1 \times B_0\} \to S^1$$

является вложением. Тогда множество

$$\psi \circ \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \gamma_0((t_1,t_2)) = \psi \circ \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \gamma_0([t_1,t_2])$$

является открыто-замкнутым подмножеством множества $\{\tau_1 \times B_0\}$. Так как $\psi^{-1}(\{\tau_1 \times B_0\})$ — открыто-замкнутое подмножество слоя $p^{-1}(p(z))$, то и множество $\Phi^{-1} \circ \gamma \circ \gamma_0([t_1, t_2])$ является открыто-замкнутым подмножеством этого слоя.

Таким образом, отображение

$$\alpha : I \to M^2,$$

$$\alpha(t) = \gamma \circ \gamma_0((tt_1 + (1-t)t_2)), \qquad t \in I$$

и есть искомая локальная трансверсальная площадка.

Теорема 3.13 полностью доказана. $\square$

3.5. Теорема о трубке траектории

Следующая теорема показывает, что вложения расслоений Понтрягина в поверхности локально "почти выпрямляемы."

Теорема 3.18. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, (F, N) — соответствующая динамическая система Понтрягина, M^2 — двумерное многообразие и $\Phi : N \to M^2$ — вложение.*

Пусть для некоторого $z \in N$ числа t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ подобраны так, что отображение

$$F(z)\big|_{[t_1,t_2]} : [t_1, t_2] \to N$$

инъективно. Пусть α_1, $\alpha_2 : I \to M^2$ — локальные трансверсальные площадки в точках

$$x_1 = F(z)(t_1) \qquad \text{и} \qquad x_2 = F(z)(t_2)$$

соответственно, см. Рис. 3.1.

Тогда для любой открытой окрестности $U \subset M^2$ множества $\Phi \circ F(z)([t_1, t_2])$ найдутся множество $D \subset U$, гомеоморфное замкнутому двумерному диску, и гомеоморфизм $h : D \to I^2$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\Phi(N) \cap D = \Phi \circ F(A)([t_1, t_2])$ *для какого-нибудь открыто-замкнутого подмножества A слоя*

$$p^{-1}(p(z)) \subset N,$$

такого что $z \in A$;

(ii) $\partial D \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(A)(t_1) \cup \Phi \circ F(A)(t_2)$;

(iii) $\Phi \circ F(A)(t_1) \subset h^{-1}(\{0\} \times (0,1))$, $\Phi \circ F(A)(t_2) \subset h^{-1}(\{1\} \times (0,1))$;

(iv) $h^{-1}(\{0\} \times I) \subset \alpha_1(I)$, $h^{-1}(\{1\} \times I) \subset \alpha_2(I)$.

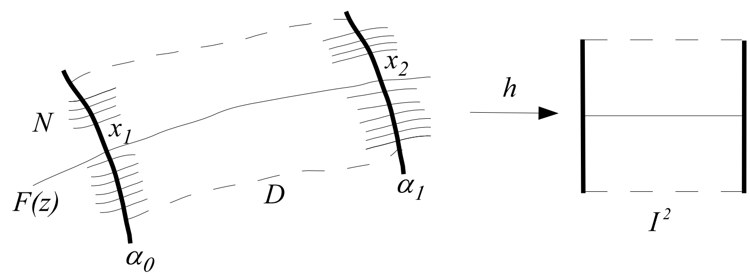


Рис. 3.1. Теорема о трубке траектории

Доказательство. Мы разобъем доказательство теоремы на несколько шагов.

Шаг 1. Уменьшим трансверсальные площадки α_1, α_2 так, чтобы для каждого z', лежащего в множестве

$$\Phi^{-1}(\alpha_1(I)),$$

выполнялось соотношение

$$\Phi \circ F(z')((0, t_2 - t_1]) \cap \alpha_1(I) = \varnothing,$$

для каждого z'', лежащего в множестве $\Phi^{-1}(\alpha_2(I))$, выполнялось соотношение

$$\Phi \circ F(z'')([t_1 - t_2, 0)) \cap \alpha_2(I) = \varnothing,$$

и множество $\alpha_1(I)$ не пересекалось с множеством $\alpha_2(I)$.

Фиксируем непересекающиеся открытые окрестности U', U'' точек $\Phi \circ F(z)(t_1)$ и $\Phi \circ F(z)(t_2)$.

Существует $n \in \mathbb{N}$, для которого

$$n - 1 < t_2 - t_1 \qquad \text{и} \qquad n \geq t_2 - t_1.$$

Фиксируем точки

$$z_k = F(z)(t_1 + k), \qquad k = 0, \dots, n-1,$$
$$z_n = F(z)(t_2 - t_1).$$

Найдем их непересекающиеся открытые окрестности

$$V(z_0) \subset \Phi^{-1}(U'), \;\; V(z_1), \;\; \dots, \;\; V(z_n).$$

Так как отображения

$$F(k) : N \to N, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$
$$F(t_2 - t_1) : N \to N$$

являются гомеоморфизмами, найдется окрестность

$$V'(z_0) \subset V(z_0),$$

для которой

$$F(V'(z_0))(k) \subset V(z_k), \qquad k = 0, \dots, n-1,$$
$$F(V'(z_0))(t_2 - t_1) \subset V(z_n).$$

Имеет место включение $\Phi^{-1}(\alpha_1(I)) \subset p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))$ и для каждого $z' \in p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))$ справедливо равенство

$$F(z')(\mathbb{R}) \cap p^{-1}(p \circ F(z)(t_1)) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F(z')(i),$$

и значит, для всех $z' \in \alpha_1(I) \cap V(z_0)$ выполняются соотношения

$$\big(F(z')([0, t_2 - t_1]) \cap (\Phi^{-1}(\alpha_1(I)) \cap V'(z_0))\big) \subset$$
$$\subset \left(F(z')(t_2 - t_1) \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} F(z')(k) \right) = F(z')(0) = z',$$

так как $F(z')(t_2 - t_1) \in V(z_n)$ и

$$F(z')(k) \in F(V'(z_0))(k) \subset V(z_k), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Из предыдущего вытекает, что

$$F(z')((0, t_2 - t_1]) \cap (\Phi^{-1}(\alpha_1(I)) \cap V'(z_0)) = \varnothing.$$

Так как отображение $\Phi : N \to M^2$ является гомеоморфизмом на свой образ, найдется открытое множество $\widetilde{U}'(z_0) \subset U' \subset M^2$, для которого $\Phi(N) \cap \widetilde{U}'(z_0) = \Phi(V'(z_0))$.

Однозначно определено $x \in (0,1)$ такое, что

$$\Phi \circ F(z)(t_1) = \alpha_1(x).$$

Найдется гомеоморфизм $\widehat{\alpha} : I \to I$, для которого

$$\widehat{\alpha}(x) = 1/2.$$

Так как в случае необходимости отображение α_1 можно заменить на

$$\alpha_1 \circ \widehat{\alpha}^{-1} : I \to M^2,$$

будем считать, что $\Phi(z_0) = \Phi \circ F(z)(t_1) = \alpha_1(1/2)$.

Пусть

$$x_1 = \inf\{x \in [0, 1/2] \mid \alpha_1([x, 1/2]) \subset \widetilde{U}'(z_0)\},$$

$$x_2 = \sup\{x \in [1/2, 1] \mid \alpha_1([1/2, x]) \subset \widetilde{U}'(z_0)\}.$$

Так как $\alpha_1(1/2) \subset \widetilde{U}'(z_0)$ и $\widetilde{U}'(z_0)$ — открыто, то

$$x_1 < 1/2 < x_2.$$

Каждое из множеств $\alpha_1([x_1, 1/2])$, $\alpha_1([1/2, x_2]) \subset M^2$ является гомеоморфным образом интервала, поэтому его размерность равна единице. Так как

$$\alpha_1(I) \cap \Phi(N) = \Phi(p^{-1}(p \circ F(z)(t_1)))$$

и размерность множества $\Phi(p^{-1}(p \circ F(z)(t_1)))$ равна нулю (оно гомеоморфно множеству Кантора), то найдутся

$$x_1' \in [x_1, 1/2) \qquad \text{и} \qquad x_2' \in (1/2, x_2]$$

такие, что $\alpha_1(x_i') \notin \Phi(N)$, $i = 1, 2$.

Выберем гомеоморфизм $\alpha : I \to [x'_1, x'_2]$. Заменяя отображение α_1 на $\alpha_1 \circ \alpha : I \to M^2$, получаем искомую трансверсальную площадку в точке $F(z)(t_1)$.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, справедливы и для $\alpha_2 : I \to M^2$. Надо только позаботиться о том, чтобы $\alpha_2(I) \subset U''$.

Шаг 2. По условию теоремы отображение

$$F(z)\big|_{[t_1,t_2]} : [t_1, t_2] \to N$$

инъективно. Значит, $F(z)(t_1) \neq F(z)(t_2)$ и найдутся открытые непересекающиеся окрестности V_1, V_2 точек $F(z)(t_1)$ и $F(z)(t_2)$.

Так как отображение $F(z) : \mathbb{R} \to N$ непрерывно, найдется $\tau > 0$, для которого

$$F(z)([t_1 - \tau, t_1]) \subset V_1 \qquad \text{и} \qquad F(z)([t_2, t_2 + \tau]) \subset V_2.$$

Не ограничивая общности рассуждений будем полагать, что $\tau < \min(1, t_2 - t_1)$.

Далее, $F(z)(t_2) \notin F(z)([t_1 - \tau, t_1])$, тогда множество

$$F(z)([t_1 - \tau, t_2])$$

не является носителем периодической траектории динамической системы (F, N). Следовательно, отображение

$$F(z)\big|_{[t_1-\tau,t_2]} : [t_1 - \tau, t_2] \to N$$

инъективно и $F(z)(t_1 - \tau) \notin F(z)([t_1, t_2])$.

Аналогично, $F(z)(t_2 + \tau) \notin F(z)([t_1, t_2])$.

Шаг 3. Найдем непересекающиеся окрестности $\widehat{U}_0$, $\widehat{U}_1$, $\widehat{U}_2$ множества $\Phi \circ F(z)([t_1, t_2])$ и точек

$$\Phi \circ F(z)(t_1 - \tau) \qquad \text{и} \qquad \Phi \circ F(z)(t_2 + \tau).$$

Их прообразы $\widehat{V}_i = \Phi^{-1}(\widehat{U}_i)$, $i = 0, 1, 2$, являются непересекающимися открытыми окрестностями множества

$F(z)([t_1, t_2])$ и точек $F(z)(t_1-\tau)$, $F(z)(t_2+\tau)$ соответственно.

Отображение $F : N \times \mathbb{R} \to N$ — непрерывно. Значит, его ограничение

$$F\big|_{[t_1-\tau, t_2+\tau]} : N \times [t_1-\tau, t_2+\tau] \to N$$

также непрерывно.

Рассмотрим множество

$$V = F(\widehat{V}_1)(-(t_1-\tau)) \cap F(\widehat{V}_2)(-(t_2+\tau)).$$

Так как при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $F(t) : N \to N$ является гомеоморфизмом, множество V является открытой окрестностью точки z.

Множество

$$\widetilde{V}_0 = F(V \times [t_1-\tau, t_2+\tau]) = \bigcup_{t \in [t_1-\tau, t_2+\tau]} F(V)(t)$$

открыто в пространстве N, при этом оно содержит отрезок траектории $F(z)([t_1, t_2])$. Для любого $z_0 \in \widetilde{V}_0$ найдется такое $t_0 \in [t_1-\tau, t_2+\tau]$, что $z_0 \in F(V \times \{t_0\})$. Отсюда вытекает, что

$$F(z_0)(t_1-\tau-t_0) \subset F(V \times \{t_1-\tau\}) \subset \widehat{V}_1,$$

$$F(z_0)(t_2+\tau-t_0) \subset F(V \times \{t_2+\tau\}) \subset \widehat{V}_2.$$

Зафиксируемем открытое множество $\widetilde{U}_0 \subset M^2$, для которого

$$\widetilde{U}_0 \cap \Phi(N) = \Phi(\widetilde{V}_0).$$

Положим $U_0 = \widehat{U}_0 \cap \widetilde{U}_0 \cap U$ (U — окрестность, входящая в условие теоремы).

Множества U_0, $\widehat{U}_1$, $\widehat{U}_2 \subset M^2$ являются соответственно непересекающимися открытыми окрестностями множества

$$\Phi \circ F(z)([t_1, t_2])$$

и точек

$$\Phi \circ F(z)(t_1 - \tau), \qquad \Phi \circ F(z)(t_2 + \tau).$$

При этом для каждого $z_0 \in \Phi^{-1}(U_0)$ найдется

$$t_0 \in [t_1 - \tau, t_2 + \tau],$$

для которого

$$\Phi \circ F(z_0)(t_1 - \tau - t_0) \subset \widehat{U}_1,$$

$$\Phi \circ F(z_0)(t_2 + \tau - t_0) \subset \widehat{U}_2.$$

Шаг 4. Найдем теперь открытые множества

$$\widetilde{U}_1, \qquad \widetilde{U}_2 \subset M^2$$

такие, что

$$\Phi(N) \cap \widetilde{U}_i = \Phi \circ F(V)(t_i),$$

$i = 1, 2$. Уменьшим, если необходимо, трансверсальные площадки α_1, $\alpha_2 : I \to M^2$ настолько, чтобы $\alpha_i(I) \subset \widetilde{U}_i$, $i = 1, 2$. Тогда для каждого $z' \in \Phi^{-1} \circ \alpha_1(I)$

$$\Phi \circ F(z')(-\tau) \in \Phi \circ F(V \times \{t_1 - \tau\}) \subset \widehat{U}_1,$$

$$\Phi \circ F(z')(t_2 - t_1 + \tau) \in \Phi \circ F(V \times \{t_2 + \tau\}) \subset \widehat{U}_2,$$

для каждого $z'' \in \Phi^{-1} \circ \alpha_2(I)$

$$\Phi \circ F(z'')(t_1 - t_2 - \tau) \in \Phi \circ F(V \times \{t_1 - \tau\}) \subset \widehat{U}_1,$$

$$\Phi \circ F(z'')(\tau) \in \Phi \circ F(V \times \{t_2 + \tau\}) \subset \widehat{U}_2\,.$$

Как известно, любой гомеоморфный образ конечного отрезка вещественной оси в двумерном многообразии обладает открытой окрестностью, гомеоморфной диску. Из этого вытекает, что найдется такая замкнутая окрестность $B \subset U_0$ множества $\Phi \circ F(z)([t_1, t_2])$, которая гомеоморфна двумерному диску и не содержит точек $\alpha_i(0)$, $\alpha_i(1)$, $i = 1, 2$.

Мы по-прежнему считаем, что $\alpha_i(1/2) = \Phi \circ F(z)(t_i)$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$x_i' = \inf\{x \in (0,1/2) \,|\, \alpha_i((x,1/2]) \subset \operatorname{Int} B\}, \quad i=1,2,$$
$$x_i'' = \sup\{x \in (1/2,1) \,|\, \alpha_i([1/2,x)) \subset \operatorname{Int} B\}, \quad i=1,2.$$

Положим

$$\beta_i(t) = \alpha_i(tx_i'' + (1-t)x_i'), \quad t \in I.$$

Получим инъективные непрерывные отображения

$$\beta_i : I \to B, \qquad i=1,2,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\beta_i((0,1)) \subset \operatorname{Int} B, \quad \beta_i(0), \beta_i(1) \in \partial B, \qquad i=1,2,$$
$$\beta_1(I) \cap \beta_2(I) = \varnothing.$$

Следовательно, диск B делится множествами

$$\beta_1(I) \qquad \text{и} \qquad \beta_2(I)$$

на три компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно двумерному диску. Обозначим через $\widetilde{D}$ замыкание той из них, которая содержит множество $\Phi \circ F(z)((t_1,t_2))$. Такая компонента найдется, так как согласно шагу 1

$$\Phi \circ F(z)((t_1,t_2)) \cap (\beta_1(I) \cup \beta_2(I)) = \varnothing.$$

Фиксируем гомеоморфизм $\widetilde{h} : \widetilde{D} \to I^2$, для которого

$$\widetilde{h} \circ \beta_1(I) = \{0\} \times I, \quad \widetilde{h} \circ \beta_2(I) = \{1\} \times I.$$

Шаг 5. Множество

$$\widetilde{W} = \left(\Phi \circ F\big|_{[t_1,t_2]}\right)^{-1} (\operatorname{Int} B)$$

является открытой окрестностью множества $\{z\} \times [t_1,t_2]$ в пространстве $N \times [t_1,t_2]$. Так как $[t_1,t_2]$ — компакт, найдется открытая окрестность W точки z в пространстве N такая, что

$$W \times [t_1,t_2] \subset \widetilde{W}.$$

Множество
$$F(W)([t_1,t_2]) = \bigcup_{t\in[t_1,t_2]} F(W)(t)$$
открыто в N и
$$\Phi \circ F(W)([t_1,t_2]) \subset \operatorname{Int} B.$$

Найдем открытые множества Q_1', $Q_2' \subset M^2$, для которых
$$Q_i' \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(W)(t_i), \quad i = 1,2.$$

Множества $\alpha_i^{-1} \circ \beta_i((0,1))$, $i = 1,2$, являются открытыми подмножествами интервала. Так как $\Phi^{-1} \circ \alpha_i(I)$ — открыто-замкнутое подмножество слоя $p^{-1}(p \circ F(z)(t_i))$, $i = 1,2$, отображения Φ и α_i являются гомеоморфизмами на свой образ, то отображение
$$\alpha_i^{-1} \circ \Phi : \Phi^{-1} \circ \alpha_i(I) \to I$$
является вложением и множество
$$\Phi^{-1} \circ \alpha_i(\alpha_i^{-1} \circ \beta_i((0,1))) = \Phi^{-1} \circ \beta_i((0,1)), \quad i = 1,2,$$
является открытым подмножеством в пространстве
$$\Phi^{-1} \circ \alpha_i(I)$$
(которое само является открытым подмножеством слоя $p^{-1}(p \circ F(z)(t_i))$). Значит, для $i = 1,2$, подмножество
$$\Phi^{-1} \circ \beta_i((0,1))$$
открыто в пространстве $p^{-1}(p \circ F(z)(t_i))$.

Заметим, что для всех $t \in \mathbb{R}$ и $z' \in N$ гомеоморфизм
$$F(t) : N \to N$$
порождает гомеоморфизм слоя $p^{-1}(p(z'))$ на слой
$$p^{-1}(p \circ F(z')(t))$$
расслоения $\xi = (N, p, S^1)$. Поэтому, множество
$$P_1 = \Phi^{-1} \circ \beta_1((0,1)) \cap F(\Phi^{-1} \circ \beta_2((0,1)))(t_1 - t_2)$$

является открытой окрестностью точки $F(z)(t_1)$ в пространстве $p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))$, множество

$$P_2 = F(\Phi^{-1} \circ \beta_1((0,1)))(t_2 - t_1) \cap \Phi^{-1} \circ \beta_2((0,1))$$

— открытая окрестность точки $F(z)(t_2)$ в слое

$$p^{-1}(p \circ F(z)(t_2)).$$

Отображения

$$\Phi\big|_{p^{-1}(p \circ F(z)(t_i))} : p^{-1}(p \circ F(z)(t_i)) \to M^2, \quad i = 1, 2,$$

являются вложениями. Поэтому найдутся открытые множества Q_1'', $Q_2'' \subset M^2$, для которых

$$\Phi(p^{-1}(p \circ F(z)(t_i))) \cap Q_i'' = \Phi(P_i), \quad i = 1, 2.$$

Введем обозначения

$$Q_i = Q_i' \cap Q_i'' \cap \operatorname{Int} B, \qquad i = 1, 2.$$

Множества Q_1 и Q_2 являются открытыми окрестностями точек $\Phi \circ F(z)(t_1)$ и $\Phi \circ F(z)(t_2)$, при этом

$$\Phi(N) \cap Q_2 \cap \beta_2((0,1)) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(Q_1 \cap \beta_1((0,1))))(t_2 - t_1),$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(Q_1 \cap \beta_1((0,1))))([0, t_2 - t_1]) \subset \operatorname{Int} B.$$

Для каждого $z' \in \Phi^{-1}(Q_1 \cap \beta_1((0,1)))$ отображение

$$\Phi \circ F(z')\big|_{[0, t_2 - t_1]} : [0, t_2 - t_1] \to M^2$$

непрерывно,

$$\Phi \circ F(z')(0) \in \beta_1(I), \quad \Phi \circ F(z')(t_2 - t_1) \in \beta_2(I),$$

$$\Phi \circ F(z')((0, t_2 - t_1)) \cap (\beta_1(I) \cup \beta_2(I)) = \varnothing$$

(последнее соотношение получается из пункта 1 с учетом включений $\beta_i(I) \subset \alpha_i(I)$, $i = 1, 2$).

Поэтому,

$$\Phi \circ F(z')([0, t_2 - t_1]) \subset \widetilde{D},$$

$$\Phi \circ F(z')((0, t_2 - t_1)) \subset \operatorname{Int} \widetilde{D},$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(Q_1 \cap \beta_1((0,1))))([0, t_2 - t_1]) \subset \widetilde{D},$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(Q_1 \cap \beta_1((0,1))))((0, t_2 - t_1)) \subset \operatorname{Int} \widetilde{D}.$$

Шаг 6. Как и раньше, будем считать, что

$$\Phi \circ F(z)(t_i) = \beta_i(1/2).$$

Пусть

$$x_1' = \inf\{x \in [0, 1/2] \,|\, \beta_1([x, 1/2]) \subset Q_1\},$$
$$x_2' = \sup\{x \in [1/2, 1] \,|\, \beta_1([1/2, x]) \subset Q_1\}.$$

Множество Q_1 — открыто, отображение $\beta_1 : I \to M^2$— непрерывно и $\beta_1(1/2) \in Q_1$. Поэтому $x_1' < 1/2 < x_2'$.

Из соображений размерности найдутся точки

$$x_1 \in (x_1', 1/2) \qquad \text{и} \qquad x_2 \in (1/2, x_2')$$

такие, что $\beta_1(x_k) \notin \Phi(N)$, $k = 1, 2$.

Пусть

$$y_1 = \inf\{x \in [x_1, x_2] \,|\, \beta_1(x) \in \Phi(N)\},$$
$$y_2 = \sup\{x \in [x_1, x_2] \,|\, \beta_1(x) \in \Phi(N)\}.$$

Величины y_1, y_2 определены, так как

$$\beta_1(1/2) = \Phi(z)(t_1) \in \Phi(N).$$

Так как множество $\Phi(N)$ — замкнуто, то $\beta_1(y_k) \in \Phi(N)$, $k = 1, 2$, и $x_1 < y_1 \le 1/2$, $x_2 > y_2 \ge 1/2$.

Из равенства

$$\beta_1([x_1, x_2]) \cap \Phi(p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))) =$$
$$= \beta_1((x_1, x_2)) \cap \Phi(p^{-1}(p \circ F(z)(t_1)))$$

следует, что

$$A_0 = \Phi^{-1} \circ \beta_1([y_1, y_2])$$

— открыто-замкнутое подмножество слоя $p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))$ (который гомеоморфен множеству Кантора), поэтому оно содержит больше одной точки и $y_1 < y_2$.

Найдутся точки z_1, $z_2 \in p^{-1}(p \circ F(z)(t_1)) \subset N$ удовлетворяющие равенствам $\beta_1(y_k) = \Phi(z_k)$, $k = 1, 2$.

Пусть

$$\widehat{y}_k = \Phi \circ F(z_k)(t_2 - t_1) \in \beta_2(I), \qquad k = 1, 2.$$

Так как отображение $F(t_2 - t_1) : N \to N$ — непрерывно, то значения x_1, $x_2 \in I$ можно подобрать мало отличающимися от $1/2$ настолько, чтобы отрезок $\beta_2([\widehat{y}_1, \widehat{y}_2])$ полностью лежал во множестве Q_2.

Так как

$$\Phi(z_k) \in \beta_1(I), \quad \Phi \circ F(z_k)(t_2 - t_1) \in \beta_2(I), \quad k = 1, 2,$$

$$\Phi \circ F(z_k)((0, t_2 - t_1)) \subset \operatorname{Int} \widetilde{D}, \quad k = 1, 2,$$

и непрерывные простые кривые

$$\Phi \circ F(z_k)\big|_{[0, t_2 - t_1]} : [0, t_2 - t_1] \to \widetilde{D}, \quad k = 1, 2,$$

не пересекаются, то гомеоморфизм $\widetilde{h} : \widetilde{D} \to I^2$ можно подобрать так, чтобы

$$\widetilde{h} \circ \Phi(F(z_1)([0, t_2 - t_1])) = I \times \{1/3\},$$

$$\widetilde{h} \circ \Phi(F(z_2)([0, t_2 - t_1])) = I \times \{2/3\}.$$

Пусть

$$D_0 = \widetilde{h}^{-1}(I \times [1/3, 2/3]).$$

Для любого $z' \in \Phi^{-1}(Q_1 \cap \beta_1((0, 1)))$, $z' \neq z_1$, z_2, множества

$$\Phi \circ F(z')([0, t_2 - t_1])$$

и

$$\Phi \circ F(z_1)([0, t_2 - t_1]) \cup \Phi \circ F(z_2)([0, t_2 - t_1])$$

не пересекаются, поэтому $\Phi \circ F(A_0)(t_2 - t_1) \subset \beta_2([\widehat{y}_1, \widehat{y}_2])$. Так как $\beta_2([\widehat{y}_1, \widehat{y}_2]) \subset Q_2$, то из пункта 5 вытекает, что

$$\beta_2([\widehat{y}_1, \widehat{y}_2]) \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(A_0)(t_2 - t_1),$$

$$\Phi \circ F(A_0)([0, t_2 - t_1]) \subset D_0.$$

Шаг 7. Покажем, что

$$D_0 \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(A_0)([0, t_2 - t_1]). \tag{3.16}$$

Мы уже установили, что

$$\partial D_0 \cap \Phi(N) \subset \Phi \circ F(A_0)([0, t_2 - t_1]).$$

Пусть $\Phi(\widehat{z}) \in \operatorname{Int} D_0$ для некоторого $\widehat{z} \in N$. Найдем t', $t'' \in \mathbb{R}$, $t' < 0 < t''$ такие, что

$$\Phi \circ F(\widehat{z})((t', t'')) \subset \operatorname{Int} D_0, \quad \Phi \circ F(\widehat{z})(t'), \quad \Phi \circ F(\widehat{z})(t'') \in \partial D_0.$$

Пусть $F(\widehat{z})(t') = z'$, $F(\widehat{z})(t'') = z''$. Так как

$$\begin{aligned} \partial D_0 = \Phi \circ F(z_1)([0, t_2 - t_1]) \cup \\ \cup\, \Phi \circ F(z_2)([0, t_2 - t_1]) \cup \Phi \circ \beta_1((y_1, y_2)) \cup \\ \cup\, \beta_2((\widehat{y}_1, \widehat{y}_2)), \end{aligned}$$

то

$$\Phi(z'), \Phi(z'') \in \beta_1((y_1, y_2)) \cup \beta_2((\widehat{y}_1, \widehat{y}_2)).$$

Если $\Phi(z') \in \beta_1((y_1, y_2))$ или $\Phi(z'') \in \beta_2((\widehat{y}_1, \widehat{y}_2))$, то

$$\Phi \circ F(\widehat{z})([t', t'']) = \Phi \circ F(\widetilde{z})([0, t_2 - t_1])$$

для некоторого $\widetilde{z} \in A_0$ и

$$\widehat{z} \in \Phi \circ F(A_0)([0, t_2 - t_1]).$$

Пусть $\Phi(z') \in \beta_2((\widehat{y}_1, \widehat{y}_2))$, $\Phi(z'') \in \beta_1((y_1, y_2))$. Тогда $z'' \in A_0$ и $\Phi \circ F(z'')([0, t_2 - t_1]) \in \widetilde{D}$. Следовательно,

$$\Phi \circ F(\widehat{z})([t', t'' + t_2 - t_1]) \subset \widetilde{D} \subset U_0.$$

С другой стороны, так как

$$\beta_2(I) \subset \alpha_2(I) \qquad \text{и} \qquad \alpha_2(I) \subset \Phi \circ F(V \times \{t_2\})$$

(см. Шаг 4), то

$$\Phi \circ F(\widehat{z})(t' + \tau) \subset \Phi \circ F(V \times \{t_2 + \tau\}) \subset \widehat{U}_2 \subset (M^2 \setminus U_0).$$

Так как $t' < t''$ и $\tau < t_2 - t_1$, то

$$t' + \tau \in [t', t'' + t_2 - t_1].$$

Получили противоречие. Равенство (3.16) доказано.

Шаг 8. Пусть $z' \in A_0$,

$$t' = \inf\{t < 0 \mid \Phi \circ F(z')((t, 0)) \in \operatorname{Int} B\}.$$

Так как

$$\Phi \circ F(z')((-\tau)) \in \widehat{U}_1 \subset (M^2 \setminus \operatorname{Int} B),$$

то $t' \in (-\tau, 0)$.

Докажем, что

$$\Phi \circ F(z')((t', 0)) \cap \widetilde{D} = \varnothing.$$

Сначала покажем, что

$$\Phi \circ F(z')((t', 0)) \cap \beta_1(I) = \varnothing.$$

Пусть это не так и

$$\Phi \circ F(z')(t'_0) \in \beta_1(I) \subset \alpha_1(I)$$

для некоторого $t'_0 \in (t', 0)$. Тогда, в силу шага 1,

$$\Phi \circ F(z')((t'_0, t'_0 + t_2 - t_1]) \cap \alpha_1(I) = \varnothing.$$

Так как $t'_0 \in (-\tau, 0)$ и $\tau < t_2 - t_1$, то $t'_0 + t_2 - t_1 > 0$, и в частности,

$$\Phi \circ F(z')(0) = \Phi(z') \notin \alpha_1(I).$$

Но последнее противоречит тому, что $\Phi(A_0) \subset \beta_1(I)$.

Аналогично,

$$\Phi \circ F(z')((t', 0)) \cap \beta_2(I) = \varnothing.$$

Если это не так, найдется $t''_0 \in (t', 0)$, для которого

$$\Phi \circ F(z')(t''_0) \in \beta_2(I).$$

Из этого следует, что

$$\Phi \circ F(z')(t''_0 + \tau) \in \widehat{U}_2 \subset (M^2 \setminus \operatorname{Int} B).$$

С другой стороны, так как $z' \in A_0$, то

$$F(z')([0, t_2 - t_1]) \subset F(A_0)([0, t_2 - t_1]) \subset \operatorname{Int} B.$$

Так как $t_0'' \in (-\tau, 0)$ и $\tau < t_2 - t_1$, то $t_0'' + \tau \in [0, t_2 - t_1]$, а это не возможно.

Следовательно, реализуется одна из двух возможностей: либо

$$\Phi \circ F(z')((t', 0)) \subset \widetilde{D},$$

либо

$$\Phi \circ F(z')((t', 0)) \cap \widetilde{D} = \varnothing.$$

Найдется окрестность

$$\widehat{U} \subset (\operatorname{Int} B \setminus \beta_2(I))$$

точки $z' \in \alpha_1(I)$, удовлетворяющая предложению 3.6. Обозначим через $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ компоненты связности множества

$$(\widehat{U} \setminus \alpha_1(I)) = (\widehat{U} \setminus \beta_1(I)).$$

Одна из них лежит в $\operatorname{Int} \widetilde{D}$, другая — в $\operatorname{Int} B \setminus \widetilde{D}$. Пусть $U^{(1)} \subset \operatorname{Int} \widetilde{D}$, $U^{(2)} \subset \operatorname{Int} B \setminus \widetilde{D}$.

Пусть $t_1' < 0$, $t_2' > 0$ — величины, для которых

$$\Phi \circ F(z')((t_1', t_2')) \subset \widehat{U},$$

$$\Phi \circ F(z')(t_i') \in \partial \widehat{U}, \quad i = 1, 2.$$

Так как $\Phi(z') \subset A_0$, то

$$\Phi \circ F(z')((0, t_2 - t_1)) \subset D_0 \cap \operatorname{Int} \widetilde{D}.$$

Значит,

$$\Phi \circ F(z')((0, t_2')) \subset U^{(1)} \subset \operatorname{Int} \widetilde{D},$$

$$\Phi \circ F(z')((t_1', 0)) \subset U^{(2)} \subset (\operatorname{Int} B \setminus \widetilde{D})$$

и $\Phi \circ F(z')((t', 0)) \cap (\operatorname{Int} B \setminus \widetilde{D}) \neq \varnothing$.

Последнее неравенство влечет вложение

$$\Phi \circ F(z')((t', 0)) \subset (\operatorname{Int} B \setminus \widetilde{D}).$$

Пусть теперь $z'' \in F(A_0)(t_2 - t_1)$,

$$t'' = \sup\{t > 0 \mid \Phi \circ F(z'')((0, t)) \in \operatorname{Int} B\}.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что

$$\Phi \circ F(z'')((0,t'')) \cap \widetilde{D} = \varnothing.$$

Шаг 9. Покажем, что найдется $\varepsilon > 0$, для которого

$$\Phi(N) \cap \widetilde{h}^{-1}(I \times [1/3-\varepsilon, 2/3+\varepsilon]) = \Phi \circ F(A_0)([0, t_2 - t_1]).$$

Расслоение $\xi = (N, p, S^{-1})$ — локально тривиально. Поэтому найдутся открытая окрестность $W_0 \subset S^1$ точки

$$p \circ F(z)(t_1)$$

в базе расслоения ξ и гомеоморфизм

$$\psi : p^{-1}(W_0) \to W_0 \times \Gamma,$$

для которого $p = \mathrm{pr}_1 \circ \psi : p^{-1}(W_0) \to W_0$. Здесь

$$\mathrm{pr}_1 : W_0 \times \Gamma \to W_0$$

— проекция на первый сомножитель.

Отображение $p \circ F(z) : \mathbb{R} \to S^1$ непрерывно, следовательно, найдется $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$, для которого

$$p \circ F(z)(t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1) \subset W_0.$$

Отображение

$$p \circ F(z)\big|_{(t_1-\varepsilon_1, t_1+\varepsilon_1)} : (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1) \to S^1$$

— инъективно. Поэтому множество

$$\widehat{W_0} = p \circ F(z)((t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1))$$

является связной открытой окрестностью точки $p \circ F(z)(t_1)$ в S^1, и значит, гомеоморфно интервалу (так как это собственное подмножество окружности).

В силу замечания 3.4 имеет место соотношение

$$F(p^{-1}(p(z)))((t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)) \subset p^{-1}(\widehat{W_0}).$$

Отображение

$$\mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ F(z')\big|_{(t_1-\varepsilon_1, t_1+\varepsilon_1)} : (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1) \to \Gamma$$

определено и непрерывно для каждого $z' \in p^{-1}(p(z))$. Так как множество $(t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)$ — связно и Γ — канторов дисконтинуум, то

$$\mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ F(z')((t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)) = \mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ F(z')(t_1),$$

$$\mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ F(p^{-1}(p(z)))((t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)) = \widehat{W}_0 \times \Gamma$$

(здесь $\mathrm{pr}_2 : W_0 \times \Gamma \to \Gamma$ — проекция на второй сомножитель), и

$$F(p^{-1}(p(z)))((t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)) = p^{-1}(\widehat{W}_0).$$

В частности,

$$\psi \circ F(A_0)((-\varepsilon_1, \varepsilon_1)) = \widehat{W}_0 \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0).$$

Множество $\psi(A_0)$ является открыто-замкнутым подмножеством пространства

$$\{p \circ F(z)(t_1)\} \times \Gamma = \psi(p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))),$$

поэтому множество $\mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0)$ открыто в Γ. Следовательно, $\widehat{W}_0 \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0)$ — открытое подмножество пространства $W_0 \times \Gamma$, и $F(A_0)((-\varepsilon_1, \varepsilon_1))$ — открытое подмножество пространства N.

Пусть $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — некоторая база открытых окрестностей точки $p \circ F(z)(t_1)$ в пространстве W_0. Так как множество $\mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0)$ открыто в Γ, то множества

$$W_i \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0), \qquad i \in \mathbb{N},$$

открыты в $W_0 \times \Gamma$. При этом

$$\psi(A_0) \subset W_i \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, множество $\psi(A_0)$ — компактно. Значит, набор $\{W_i \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0)\}_{i \in \mathbb{N}}$ составляет базу окрестностей множества $\psi(A_0)$ в пространстве $W_0 \times \Gamma$.

Множество $\psi \circ \Phi^{-1}(\mathrm{Int}\, B)$ открыто в пространстве

$$W_0 \times \Gamma$$

и $\psi(A_0) \subset \psi \circ \Phi^{-1}(\operatorname{Int} B)$. Поэтому найдется $i \in \mathbb{N}$, для которого

$$W_i \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0) \subset \psi \circ \Phi^{-1}(\operatorname{Int} B).$$

Найдется также $\varepsilon_2 > 0$ такое, что

$$\psi \circ F(A_0)((-\varepsilon_2, \varepsilon_2)) \subset W_i \times \mathrm{pr}_2 \circ \psi(A_0).$$

Из последнего соотношения вытекает

$$\Phi \circ F(A_0)((-\varepsilon_2, \varepsilon_2)) \subset \operatorname{Int} B.$$

Аналогично, найдется $\varepsilon_3 > 0$, для которого

$$\Phi \circ F(F(A_0)(t_2 - t_1))((-\varepsilon_3, \varepsilon_3)) = \\ = \Phi \circ F(A_0)((t_2 - t_1 - \varepsilon_3, t_2 - t_1 + \varepsilon_3)) \subset \operatorname{Int} B.$$

Положим $\varepsilon_4 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Тогда

$$\Phi \circ F(A_0)((-\varepsilon_4, t_2 - t_1 + \varepsilon_4)) \subset \operatorname{Int} B.$$

Аргументы, приведенные в пункте 8, показывают, что

$$[\Phi \circ F(A_0)((-\varepsilon_4, 0)) \cup \Phi \circ F(A_0)((t_2 - t_1, t_2 - t_1 + \varepsilon_4))] \cap \widetilde{D} = \varnothing.$$

Множество $F(A_0)((-\varepsilon_4, \varepsilon_4))$ открыто в N, поэтому открыто в N также и множество

$$F(A_0)((-\varepsilon_4, t_2 - t_1 + \varepsilon_4)) = \bigcup_{t \in [0, t_2 - t_1]} F(A_0)((t - \varepsilon_4, t + \varepsilon_4)).$$

Введем обозначения

$$\widetilde{N} = N \setminus F(A_0)([t_1, t_2]),$$

$$\widetilde{N}_0 = N \setminus F(A_0)((-\varepsilon_4, t_2 - t_1 + \varepsilon_4)).$$

Множество $\widetilde{N}_0$ — компактно (как замкнутое подмножество компакта N).

Так как

$$\widetilde{D} \cap \Phi(\widetilde{N}) = \widetilde{D} \cap \Phi(\widetilde{N}_0)$$

и

$$D_0 \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(A_0)([t_1, t_2]),$$

то множества $\widetilde{h}(\widetilde{D} \cap \Phi(\widetilde{N}))$ и $\widetilde{h}(D_0) = I \times [1/3, 2/3]$ представляют собой два непересекающихся компакта.

Значит, найдется $\varepsilon \in (0, 1/3)$, для которого

$$(I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]) \cap \widetilde{h}(\widetilde{D} \cap \Phi(\widetilde{N})) = \varnothing.$$

Введем обозначение

$$D = \widetilde{h}^{-1}(I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]).$$

Только что мы показали, что

$$D \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(A_0)([0, t_2 - t_1]).$$

Шаг 10. Как мы уже отмечали раньше, отображение

$$F(-t_1)\big|_{p^{-1}(p \circ F(z)(t_1))} : p^{-1}(p \circ F(z)(t_1)) \to p^{-1}(p(z))$$

является гомеоморфизмом. Поэтому $A = F(A_0)(-t_1)$ является открыто-замкнутым подмножеством слоя $p^{-1}(p(z))$, для которого $D \cap \Phi(N) = \Phi \circ F(A)([t_1, t_2])$.

Фиксируем гомеоморфизм

$$\widetilde{h}_0 : I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon] \to I^2$$

такой, что

$$\widetilde{h}_0(\{0\} \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]) = \{0\} \times I,$$

$$\widetilde{h}_0(\{1\} \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]) = \{1\} \times I.$$

Пара D, $h = \widetilde{h}_0 \circ \widetilde{h} : D \to I^2$ удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Теорема доказана. □

3.6. Динамические системы и топологические свойства расслоений Понтрягина

Теорема 3.19. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, (F, N) — соответствующая динамическая система Понтрягина, M^2 — двумерное многообразие и $\Phi : N \to M^2$ — вложение.*

Тогда для любого $z \in N$ α-предельное и ω-предельное множества траектории $F(z) : \mathbb{R} \to N$ являются минимальными множествами динамической системы (F, N).

Доказательство. Основывается на следующем ключевом утверждении (которое будет доказано в разделе 3.8).

Лемма 3.20. *Предположим, что R — замкнутое инвариантное множество динамической системы (F, N).*

Для любой окрестности $U \subset M^2$ множества $\Phi(R)$ найдется компактное подмногообразие X с краем многообразия M^2, обладающее следующими свойствами:

1) $X \subset U$;
2) $\Phi(R) \subset \operatorname{Int} X$;
3) *для любой траектории $F(x) : \mathbb{R} \to N$ такой, что*
$$\Phi \circ F(x)(t_1), \Phi \circ F(x)(t_2) \in \partial X \ ,$$
при некоторых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, выполняются включения
$$\Phi \circ F(x)((-\infty, t_1) \cup (t_2, \infty)) \subset \operatorname{Int} X,$$
$$\Phi \circ F((t_1, t_2)) \subset M^2 \setminus X.$$

Утверждение теоремы следует из леммы 3.20. Покажем это.

Фиксируем точку $z_0 \in N$. Рассмотрим ω-предельное множество траектории $F(z_0) : \mathbb{R} \to N$ потока (F, N). Это множество является компактным инвариантным подмножеством потока (F, N), поэтому оно содержит некоторое минимальное подмножество R (см. [34]).

Пусть найдется $z \in \omega(z_0) \setminus R$. Так как компакты $\Phi(z)$ и $\Phi(R)$ не пересекаются, найдутся их непересекающиеся окрестности $U(z)$, $U(R) \subset M^2$. Найдем подмногообразие $X \subset U(R)$, удовлетворяющее лемме 3.20. Отметим, что множество $\operatorname{Int} X \subset U(R)$ является открытой окрестностью множества $\Phi(R)$.

Отображение $\Phi : N \to M^2$ — вложение, следовательно, множества $V(z) = \Phi^{-1}(U(z))$, $V(R) = \Phi^{-1}(\operatorname{Int} X)$ являются непересекающимися открытыми окрестностями точки z и множества R.

Так как $z \in \omega(z_0)$, то существует $t_1 \in \mathbb{R}$, для которого $F(z_0)(t_1)$ содержится в $V(z)$. Аналогично, $R \subset \omega(z_0)$, и значит существует $t_2 > t_1$ такое, что $F(z_0)(t_2) \in V(R)$.

Так как $\Phi \circ F(z_0)(t_1) \in \operatorname{Int}(M^2 \setminus X)$, $\Phi \circ F(z_0)(t_2) \in X$ и $t_2 > t_1$, то из леммы 3.20 следует

$$F(z_0)((t_2, +\infty)) \subset \operatorname{Int} X \subset (M^2 \setminus U(z)).$$

Получили противоречие с тем, что $z \in (\omega(z_0) \setminus R)$.

Аналогично доказывается, что множество $\alpha(z)$ — минимальное. $\square$

Пусть (Γ, f) — динамическая система на канторовом множестве Γ, $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по (Γ, f), (F, N) — соответствующая динамическая система Понтрягина. Пусть найдутся двумерное многообразие M^2 и вложение $\Phi : N \to M^2$.

При этих условиях справедливы следующие утверждения.

Следствие 3.21. *Замыкание любой траектории потока (F, N), рекуррентной хотя бы в одном направлении, является минимальным множеством.*

Доказательство. Пусть траектория $F(z) : \mathbb{R} \to N$ — рекуррентна в положительном направлении. Тогда

$$F(z)(\mathbb{R}) \subset \omega(z).$$

По теореме 3.19 можество $\omega(z)$ является минимальным, и значит $\operatorname{Cl} F(z)(\mathbb{R}) = \omega(z)$ и множество $\operatorname{Cl} F(z)(\mathbb{R})$ — минимальное. Для траекторий, рекуррентных в отрицательном направлении доказательство аналогично. $\square$

Следствие 3.22. *Множество* Ω *неблуждающих точек потока* (F, N) *совпадает со множеством* BiRec *двоякорекуррентных точек. В частности, множество* BiRec *— замкнуто.*

Доказательство. Пусть траектория $F(z) : \mathbb{R} \to N$ не является рекуррентной в положительном направлении для некоторого $z \in \Omega$. Тогда $z \notin \omega(z)$.

Рассмотрим вложение $\Phi : N \to M^2$. Поскольку

$$\Phi(z) \notin \Phi(\omega(z)),$$

найдутся непересекающиеся окрестности U_1, U_2 точки $\Phi(z)$ и множества $\Phi(\omega(z))$ соответственно.

Для множества $R = \omega(z)$ и окрестности U_2 найдем компактное подмногообразие X с краем, удовлетворяющее лемме 3.20.

Так как $\operatorname{Int} X$ является открытой окрестностью множества $\Phi(R)$ в M^2, то $V_2 = \Phi^{-1}(\operatorname{Int} X)$ — открытая окрестность множества R. Значит, найдется $t_1 > 0$, для которого $F(z)(t_1) \in V_2$ (и $\Phi \circ F(z)(t_1)$ лежит в $\operatorname{Int} X$). Но

$$\Phi \circ F(z)(0) = \Phi(z) \notin X,$$

тогда найдется $t_0 \in (0, t_1)$ такое, что

$$\Phi \circ F(z)((t_0, +\infty)) \subset \operatorname{Int} X$$

и

$$F(z)((t_0, +\infty)) \subset V_2.$$

Положим

$$V_1 = \Phi^{-1}(U_1) \cap F(V_2)(-t_1).$$

Открытое множество V_1 не пусто (оно содержит по меньшей мере точку z). Отметим, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Так как

$$\Phi \circ F(z')(0) = \Phi(z') \in U_1 \subset (M^2 \setminus X)$$

и $\Phi \circ F(z')(t_1) \in \operatorname{Int} X$ для каждого $z' \in V_1$, то по лемме 3.20 для всех $z' \in V_1$ выполняется соотношение

$$\Phi \circ F(z')(t_1, +\infty) \subset \operatorname{Int} X,$$

и значит

$$\Phi \circ F(V_1)((t_1, +\infty)) \subset \operatorname{Int} X$$

и

$$F(V_1)((t_1, +\infty)) \cap V_1 = \varnothing.$$

Последнее соотношение противоречит тому, что z — неблуждающая точка.

Аналогично доказывается, что все неблуждающие точки динамической системы (F, N) рекуррентны в отрицательном направлении. □

3.7. Следствия из теоремы существования

Следствие 3.23. *Множество* Ω *совпадает с центром* BC *динамической системы* (F, N) *(и глубина центра равна единице).*

Доказательство. Напомним, что

$$\mathrm{BC} = \mathrm{Cl}\,\mathrm{BiRec}$$

(см. [34]). С другой стороны, $\Omega = \mathrm{BiRec}$ и множество BiRec замкнуто — по следствию 3.22. □

Следствие 3.24. *Для любого* $x \in \Gamma$ *множества* $\alpha(x)$ *и* $\omega(x)$ *являются минимальными множествами динамической системы* (Γ, f).

Доказательство. Рассмотрим динамическую систему Понтрягина (F, N). По построению, для любого $z \in N$ функция последования

$$\varphi : p^{-1}(p(z)) \to p^{-1}(p(z))$$

совпадает с единичным сдвигом

$$\varphi(z') = F(z')(1), \quad z' \in p^{-1}(p(z)),$$

вдоль траектории потока (F, N) и индуцирует на пространстве

$$\Gamma_z = p^{-1}(p(z)) \cong \Gamma$$

динамическую систему, которая топологически сопряжена с (Γ, f).

Пусть A_0 — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (Γ_z, φ) с фазовым пространством Γ_z. Тогда

$$F(A_0)(0) = A_0 = \varphi(A_0) = F(A_0)(1)$$

и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$F(A_0)(k) = F(A_0)(0) = A_0.$$

Тогда

$$F(A_0)(t) = F(F(A_0)([t]))(\{t\}) = F(A_0)(\{t\})$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ (здесь $[\,\cdot\,]$ и $\{\,\cdot\,\}$ — целая и дробная часть числа, соответственно). Поэтому

$$F(A_0)([k, k+1)) = F(A_0)([0,1)) = F(A_0)([0,1]) = F(A_0)(\mathbb{R})$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Вследствие этого любое замкнутое инвариантное подмножество A_0 динамической системы (Γ_z, φ) представляет собой пересечение в пространстве N множества Γ_z с замкнутым инвариантным множеством

$$A = F(A_0)([0,1)) = F(A_0)([0,1]) = F(A_0)(\mathbb{R})$$

динамической системы (F, N).

Сравнивая траектории точки z_0 под действием отображения φ и потока F, получаем соотношение

$$\mathrm{Orb}_\varphi(z_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(z_0)(n) \subset \mathrm{Orb}_F(z_0).$$

Поэтому, $\omega_\varphi(z_0) \subset \omega_F(z_0)$, а так как $\omega_\varphi(z_0) \subseteq \Gamma_z$, то и

$$\omega_\varphi(z_0) \subseteq (\Gamma_z \cap \omega_F(z_0)).$$

Аналогично,

$$\alpha_\varphi(z_0) \subseteq (\Gamma_z \cap \alpha_F(z_0)).$$

Пусть для некоторой точки $z_0 \in \Gamma_z$ найдется замкнутое инвариантное множество B_0 динамической системы (Γ_z, φ), для которого выполняется неравенство $B_0 \subsetneqq \omega_\varphi(z_0)$ (случай $B_0 \subsetneqq \alpha_\varphi(z_0)$ рассматривается аналогично).

Фиксируем точку $y \in \omega_\varphi(z_0) \setminus B_0$ и рассмотрим замкнутое инвариантное подмножество $B = F(B_0)([0, 1))$ потока F. Так как по построению $B \cap \Gamma_z = B_0$, то $y \in \omega_F(z_0) \setminus B$, и множество $\omega_F(z_0)$ не является минимальным. А это противоречит теореме 3.19.

Из сказанного делаем вывод, что для каждой точки фазового пространства Γ_z динамической системы (Γ_z, φ) её α-предельное и ω-предельное множества являются минимальными множествами этой динамической системы. А так как динамические системы (Γ_z, φ) и (Γ, f) топологически сопряжены, то аналогичное утверждение справедливо и для (Γ, f). $\square$

3.8. Доказательство леммы 3.20

Разобъем доказательство на несколько этапов.

Шаг 1. Построим компактное подмногообразие X' с краем такое, что $X' \subset U$ и $\Phi(R) \subset \operatorname{Int} X'$.

Для каждой точки $z \in \Phi(R) \subset U$ найдется окрестность W_z этой точки такая, что множество $\operatorname{Cl} W_z$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску и $\operatorname{Cl} W_z \subset U$. Действительно, найдется карта (V, φ), для которой $z \in V$. Множество $\varphi(V \cap U)$ открыто в $\mathbb{R}^2$ и содержит точку $\varphi(z)$. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(\varphi(z)) \subset \varphi(V \cap U)$. Положим $W_z = \varphi^{-1}(B_{\varepsilon/2}(\varphi(z)))$. Это, очевидно, и будет искомая окрестность.

Множество $\Phi(R)$ — компактно (как образ компактного множества при непрерывном отображении). Поэтому из открытого покрытия

$$\bigcup_{z\in\varphi(R)} W_z$$

можно выбрать конечное подпокрытие $W_{z_1},\dots,W_{z_n}$ множества $\Phi(R)$.

По построению для каждого $i \in \{1,\dots,n\}$ найдется карта (V_i,φ_i) такая, что $\operatorname{Cl} W_{z_i} \subset V_i \subset U$ и $\varphi_i(W_{z_i}) = B_{\varepsilon_i}$ для некоторого $\varepsilon_i > 0$.

Дальнейшая идея состоит в том, чтобы малым шевелением множеств ∂W_{z_i}, при котором система $\{W_{z_i}\}$ все еще остается покрытием множества R, привести их в общее положение.

Пусть диски W_{z_i}, $i = 1,\dots,k$, $k < n$, удовлетворяют следующим условиям:

(i) количество точек пересечения множеств ∂W_{z_i} и ∂W_{z_j} конечно при всех i, $j \in 1,\dots,k$, $i \neq j$;

(ii) никакие три из множеств ∂W_{z_i}, ∂W_{z_j}, ∂W_{z_s} не пересекаются в одной точке для различных i, j, s;

(iii) для каждого $z \in \partial W_{z_i} \cap \partial W_{z_j}$, $i \neq j$, найдутся окрестность $U_z \ni z$ и гомеоморфизм $\psi : U_z \to \mathbb{R}^2$ такие, что

$$\psi(U_z \cap \partial W_{z_i}) = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\psi(U_z \cap \partial W_{z_j}) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим один исключительный случай. Предположим, что для некоторого $i \in \{1,\dots k\}$ граница ∂W_{z_i} диска W_{z_i} лежит в замкнутом диске $\operatorname{Cl} W_{z_{k+1}}$.

Возникает несколько возможностей.

(a) $W_{z_i} \subseteq W_{z_{k+1}}$. В этом случае диск W_{z_i} можно исключить из рассмотрения, так как набор множеств

$$\bigcup_{\substack{j\in\{1,\dots,n\}\\ j\neq i}} W_{z_j}$$

всё равно покрывает компакт R.

(б) $(M^2 \setminus W_{z_i}) \subseteq W_{z_{k+1}}$. В этом случае $W_{z_i} \cup W_{z_{k+1}} = M^2$ и в качестве X можно взять само многообразие M^2. Это многообразие компактно, так как является объединением двух компактов $\operatorname{Cl} W_{z_i}$ и $\operatorname{Cl} W_{z_{k+1}}$.

(в) $(M^2 \setminus \operatorname{Cl} W_{z_i}) \subseteq W_{z_{k+1}}$ и $\partial W_{z_i} \cap \partial W_{z_{k+1}} \neq \varnothing$.

Если для какого-нибудь $s \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется неравенство $\partial W_{z_s} \in W_{z_{k+1}}$, то реализуется случай (а) или (б). Поэтому можно полагать, что имеют место соотношения $\partial W_{z_s} \setminus W_{z_{k+1}} \neq \varnothing$ для всех $s \in \{1, \ldots, k\}$.

Так как по построению набор открытых множеств

$$\{W_{z_s}\}_{s=1}^{n}$$

является покрытием компакта R, то множество $W_{z_{k+1}}$ покрывает компакт

$$R_{k+1} = R \setminus \left[\left(\bigcup_{\substack{s \in \{1,\ldots,n\} \\ s \neq k+1}} W_{z_s} \right) \right].$$

Компакты R_{n+1} и $\partial W_{z_{k+1}}$ не пересекаются, и значит, в замкнутом диске $\operatorname{Cl} W_{z_{k+1}}$ можно выбрать жорданову область $W'_{z_{k+1}}$ так, чтобы она содержала компакт R_{k+1} и замкнутый диск $\operatorname{Cl} W'_{z_{k+1}}$ содержался в $W_{z_{k+1}}$.

Легко видеть, что $\partial W_{z_i} \setminus \operatorname{Cl} W'_{z_{k+1}} \neq \varnothing$ для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ и при этом

$$R \subseteq W'_{z_{k+1}} \bigcup \bigcup_{\substack{s \in \{1,\ldots,n\} \\ s \neq k+1}} W_{z_s}.$$

Заменяя $W_{z_{k+1}}$ на $W'_{z_{k+1}}$, получаем конечное покрытие компакта R, имеющее все свойства (i) – (iii) и такое, что для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$ существует $y_i \in \partial W_{z_i} \setminus \operatorname{Cl} W_{z_{k+1}}$.

Рассмотрим карту (V_{k+1}, φ_{k+1}).

Так как замкнутое множество

$$\partial\varphi_{k+1}(V_{k+1}) \cup \bigcup_{i=1}^{k}\{\varphi_{k+1}(y_i)\}$$

не пересекается с компактом $\varphi_{k+1}(\mathrm{Cl}\, W_{z_{k+1}})$ в $\mathbb{R}^2$, то найдутся их непересекающиеся открытые окрестности. Следовательно, найдется компактное множество $B_0 \subset \mathbb{R}^2$, гомеоморфное замкнутому двумерному диску, для которого выполняются соотношения

$$B = \mathrm{Cl}(\varphi_{k+1}(W_{z_{k+1}})) \subset \mathrm{Int}\, B_0, \qquad B_0 \subset \varphi_{k+1}(V_{k+1}).$$

Для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ множество

$$\varphi_{k+1}^{-1}(\mathrm{Int}\, B_0) \cap \partial W_{z_i}$$

состоит из непересекающихся дуг окружности ∂W_{z_i} с концевыми точками, лежащими в $\varphi_{k+1}^{-1}(\partial B_0)$.

Так как $\mathrm{Cl}\, W_{z_{k+1}} \subset \varphi_{k+1}^{-1}(\mathrm{Int}\, B_0)$, компакты $\varphi_{k+1}^{-1}(\partial B_0)$ и $\mathrm{Cl}\, W_{z_{k+1}}$ не пересекаются. Значит, только конечное число дуг окружности ∂W_{z_i}, лежаших в $\varphi_{k+1}^{-1}(\mathrm{Int}\, B_0)$, которые содержат свои концевые точки на $\varphi_{k+1}^{-1}(\partial B_0)$, пересекается с $\mathrm{Cl}\, W_{z_{k+1}}$.

Обозначим эти дуги через $\mu_1^{(i)}, \ldots, \mu_{m_i}^{(i)}$.

Компакты $\partial W_{z_{k+1}}$ и R_{k+1} не пересекаются. Поэтому найдется открытая окрестность $U_1 \supset \partial W_{z_{k+1}}$, для которой $U_1 \cap R_{k+1} = \varnothing$. Аналогично, так как

$$\partial W_{z_{k+1}} \cap \varphi_{k+1}^{-1}(\partial B_0) = \varnothing,$$

то найдется окрестность $U_2 \supset \partial W_{z_{k+1}}$ такая, что

$$U_2 \cap \varphi_{k+1}^{-1}(\partial B_0) = \varnothing.$$

Поскольку $\varphi_{k+1}(V_{k+1} \cap U_1 \cap U_2)$ — открытая окрестность множества ∂B, то найдется $\delta > 0$, для которого

$$\begin{aligned} U_\delta(\partial B) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(x, \varphi_{k+1}(\partial W_{k+1})) < \delta\} \subset \\ &\subset \varphi_{k+1}(V_{k+1} \cap U_1 \cap U_2). \end{aligned}$$

Очевидно, что $U_\delta(\partial B) \subset \operatorname{Int} B_0$.

Перенумеруем дуги семейства

$$\{\varphi_{k+1}(\mu_s^{(i)}) \mid i = 1, \dots, k\,;\; s = 1, \dots, m_i\}$$

каким либо образом. Получим набор дуг $\mu_1, \dots, \mu_M$. По условию эти дуги пересекаются только в конечном числе точек.

Положим $\eta_1 = \mu_1$. Рассмотрим точки $x_0^{(2)}$, $x_1^{(2)}$, ..., $x_{m_2}^{(2)}$, где $x_0^{(2)}$, $x_{m_2}^{(2)} \subset \partial B_0$ — концевые точки дуги μ_2, а $x_1^{(2)}$, ..., $x_{m_2-1}^{(2)}$ — точки пересечения дуг μ_2 и η_1. Этими точками дуга μ_2 делится на m_2 простых дуг $\eta_2, \dots, \eta_{m_2+1}$ с концевыми точками во множестве $\partial B_0 \cup \eta_1$, причем каждая из этих дуг содержится во множестве $B_0 \setminus (\partial B_0 \cup \eta_1)$.

Пусть дуги $\eta_1, \dots, \eta_{m_s+1}$ уже построены. Рассмотрим точки $x_0^{(s+1)}$, $x_1^{(s+1)}, \dots, x_{m_{s+1}}^{(s+1)}$, где $x_0^{(s+1)}$, $x_{m_{s+1}}^{(s+1)} \subset \partial B_0$ — концевые точки дуги μ_{s+1}, а $x_1^{(s+1)}, \dots, x_{m_{s+1}-m_s-1}^{(s+1)}$ — точки пересечения дуги μ_{s+1} со множеством

$$\bigcup_{i=1}^{m_s+1} \eta_i = \bigcup_{j=1}^{s} \mu_j.$$

Этими точками дуга μ_{s+1} делится на $m_{s+1} - m_s$ простых дуг $\eta_{m_s+2}, \eta_{m_s+3}, \dots, \eta_{m_{s+1}+1}$ с концевыми точками во множестве

$$\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m_s+1} \eta_i.$$

Каждая из дуг $\eta_{m_s+2}, \eta_{m_s+3}, \dots, \eta_{m_{s+1}+1}$ без концевых точек содержится во множестве

$$B_0 \setminus \left(\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m_s+1} \eta_i \right).$$

Применяя последовательно к дугам $\mu_2, \dots, \mu_M$ этот метод построения, получим набор простых дуг $\eta_1, \dots, \eta_N$, пересекающихся только по концевым точкам и таких, что при каждом $j = 1, \dots, N$ концевые точки дуги η_j лежат во множестве

$$\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} \eta_i \,,$$

а дуга η_j без концевых точек лежит во множестве

$$B_0 \setminus \left(\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} \eta_i \right).$$

При этом

$$\bigcup_{i=1}^{M} \eta_i = \bigcup_{j=1}^{N} \mu_j.$$

Построим теперь гомеоморфизм диска B_0 на квадрат $I^2 \subset \mathbb{R}^2$, переводящий множество $\bigcup_{j=1}^{N} \eta_j$ в одномерный полиэдр.

Фиксируем гомеоморфизм $g_0 : B_0 \to I^2$.

Под действием этого отображения дуга η_1 перейдет в дугу η_1' с концевыми точками $x_1^1, x_2^1 \in \partial I^2$. Соединим точки x_1^1 и x_2^1 простой ломаной линией $\widetilde{\eta}_1$ с конечным числом звеньев, лежащей в $\operatorname{Int} I^2$.

Найдется гомеоморфизм

$$h_1' : \eta_1' \to \widetilde{\eta}_1,$$

для которого $h_1'(x_i^1) = x_i^1$, $i = 1, 2$.

Продолжим его до гомеоморфизма

$$h_1 : \partial I^2 \cup \eta_1' \to \partial I^2 \cup \widetilde{\eta_1}$$

при помощи тождественного отображения.

Дуга η_1' делит I^2 на две компоненты связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному диску. Обозначим их через A_1^1, A_2^1. Отметим, что ∂A_1^1, $\partial A_2^1 \subset (\partial I^2 \cup \eta_1')$.

Аналогично, дуга $\widetilde{\eta}_1$ делит I^2 на две компоненты связности $\widetilde{A}_1^1$, $\widetilde{A}_2^1$, для которых заданы гомеоморфизмы

$$h_1\big|_{\partial A_1^1} : \partial A_1^1 \to \partial \widetilde{A}_1^1, \quad h_1\big|_{\partial A_2^1} : \partial A_2^1 \to \partial \widetilde{A}_2^1.$$

Известно, что любой гомеоморфизм границ двух дисков можно продолжить до гомеоморфизма этих дисков. Поэтому найдутся гомеоморфизмы

$$g_1' : \mathrm{Cl}\, A_1^1 \to \mathrm{Cl}\, \widetilde{A}_1^1, \quad g_1'' : \mathrm{Cl}\, A_2^1 \to \mathrm{Cl}\, \widetilde{A}_2^1$$

такие, что

$$g_1'\big|_{\partial A_1^1} = h_1\big|_{\partial A_1^1}, \quad g_1''\big|_{\partial A_2^1} = h_1\big|_{\partial A_2^1}.$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение

$$g_1 : I^2 \to I^2,$$

$$g_1(x) = \begin{cases} g_1'(x) & \text{при} \quad x \in \mathrm{Cl}\, A_1^1, \\ g_1''(x) & \text{при} \quad x \in \mathrm{Cl}\, A_2^1. \end{cases}$$

определено корректно и является гомеоморфизмом.

Отображение $g_1 \circ g_0 : B_0 \to I^2$ переводит множество $\partial B_0 \cup \eta_1$ в конечный одномерный полиэдр $\partial B_0 \cup \widetilde{\eta}_1$.

Пусть для некоторого $s \in \{1, \ldots, N-1\}$ уже построены гомеоморфизмы $g_i : I^2 \to I^2$, $i = 1, \ldots, s$, такие, что отображение

$$g_s \circ g_{s-1} \circ \ldots \circ g_1 \circ g_0 : B_0 \to I^2$$

переводит множество $\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^s \eta_i$ в конечный полиэдр $\partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^s \widetilde{\eta}_i$.

Пусть под действием последнего отображения дуга η_{s+1} переходит в простую дугу η'_{s+1}. Пусть

$$x_1^{s+1},\ x_2^{s+1} \subset \partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i$$

— концевые точки дуги η'_{s+1}. Согласно условиям, наложенным на семейство $\{\eta_i\}$, выполняется соотношение

$$\eta'_{s+1} \setminus \left(\{x_1^{s+1}\} \cup \{x_2^{s+1}\}\right) \subset I^2 \setminus \left(\partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i\right).$$

Поэтому найдется компонента связности множества

$$I^2 \setminus (\partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i),$$

содержащая дугу η'_{s+1}. Обозначим эту компоненту A^{s+1}.

Множество $\operatorname{Cl} A^{s+1}$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску (доказательство легко провести индукцией по s). При этом x_1^{s+1}, $x_2^{s+1} \in \partial A^{s+1}$.

Так как

$$\partial A^{s+1} \subset \partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i,$$

то ∂A^{s+1} — конечный одномерный полиэдр (ломаная линия с конечным числом звеньев). Поэтому найдется простая ломаная линия $\widetilde{\eta}_{s+1}$ с концами в точках x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, лежащая в $\operatorname{Int} A^{s+1}$.

Найдется гомеоморфизм

$$h'_{s+1} : \eta'_{s+1} \to \widetilde{\eta}_{s+1},$$

для которого $h'_{s+1}(x_i^{s+1}) = x_i^{s+1}$, $i = 1, 2$.

Продолжим его до гомеоморфизма

$$h_{s+1} : \partial A^{s+1} \cup \eta'_{s+1} \to \partial A^{s+1} \cup \widetilde{\eta}_{s+1}$$

при помощи тождественного отображения.

Дуга η'_{s+1} делит A^{s+1} на две компоненты связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному диску. Обозначим их через A_1^{s+1}, A_2^{s+1}. Отметим, что

$$\partial A_1^{s+1},\ \partial A_2^{s+1} \subset (\partial A^{s+1} \cup \eta'_{s+1}).$$

Аналогично, дуга $\widetilde{\eta}_{s+1}$ делит A^{s+1} на две компоненты связности $\widetilde{A}_1^{s+1}$, $\widetilde{A}_2^{s+1}$, для которых заданы гомеоморфизмы

$$h_{s+1}\big|_{\partial A_1^{s+1}} : \partial A_1^{s+1} \to \partial \widetilde{A}_1^{s+1}, \quad h_{s+1}\big|_{\partial A_2^{s+1}} : \partial A_2^{s+1} \to \partial \widetilde{A}_2^{s+1}.$$

Найдутся гомеоморфизмы

$$g'_{s+1} : \mathrm{Cl}\, A_1^{s+1} \to \mathrm{Cl}\, \widetilde{A}_1^{s+1}, \quad g''_{s+1} : \mathrm{Cl}\, A_2^{s+1} \to \mathrm{Cl}\, \widetilde{A}_2^{s+1}$$

такие, что

$$g'_{s+1}\big|_{\partial A_1^{s+1}} = h_{s+1}\big|_{\partial A_1^{s+1}}, \quad g''_{s+1}\big|_{\partial A_2^{s+1}} = h_{s+1}\big|_{\partial A_2^{s+1}}.$$

Продолжим гомеоморфизм

$$\widetilde{g}_{s+1} : \mathrm{Cl}\, A^{s+1} \to \mathrm{Cl}\, A^{s+1},$$

$$\widetilde{g}_{s+1}(x) = \begin{cases} g'_{s+1}(x) & \text{при} \quad x \in \mathrm{Cl}\, A_1^{s+1}, \\ g''_{s+1}(x) & \text{при} \quad x \in \mathrm{Cl}\, A_2^{s+1}. \end{cases}$$

до гомеоморфизма $g_{s+1} : I^2 \to I^2$ при помощи тождественного отображения.

Отображение

$$g_{s+1} \circ g_s \circ \ldots \circ g_1 \circ g_0 : B_0 \to I^2$$

переводит множество $\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{s+1} \eta_i$ в конечный одномерный полиэдр $\partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{s+1} \widetilde{\eta}_i$.

Тогда отображение

$$G = g_N \circ g_{N-1} \circ \ldots \circ g_1 \circ g_0 : B_0 \to I^2$$

переводит множество $\partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{N} \eta_i = \partial B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{M} \mu_i$ в конечный одномерный полиэдр $\partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{\eta}_i$.

Под действием отображения G диск $B = \varphi(W_{z_{k+1}})$ переходит в некоторый диск $B' \subset I^2$. Поскольку отображение G является гомеоморфизмом, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$G^{-1}(U_\varepsilon(\partial B')) \subset U_\delta(\partial B).$$

Тогда найдется диск B'', границей которого является ломаная линия с конечным числом звеньев, для которого $\partial B'' \subset U_{\varepsilon/3}(\partial B')$ и

$$G \circ \varphi \left(R \setminus \left[\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_{z_i} \right) \cup \left(\bigcup_{i=k+2}^{n} W_{z_i} \right) \right] \right) \subset \mathrm{Int}\, B''.$$

Согласно теореме 5.3 из [33] существует $\varepsilon/3$-изотопия H пространства $\mathbb{R}^2$ такая, что полиэдры

$$H_1(\partial B'') \qquad \text{и} \qquad \partial I^2 \cup \bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{\eta}_i$$

пересекаются трансверсально.

Непосредственная проверка показывает, что для диска $\widetilde{B} \subset \mathbb{R}^2$, ограниченного множеством $H_1(\partial B'')$, справедливы соотношения $\widetilde{B} \subset I^2$ и

$$G \circ \varphi \left(R \setminus \left[\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_{z_i} \right) \cup \left(\bigcup_{i=k+2}^{n} W_{z_i} \right) \right] \right) \subset \operatorname{Int} \widetilde{B}.$$

Заменим диск $W_{z_{k+1}}$ на $\varphi^{-1} \circ G^{-1}(\operatorname{Int} \widetilde{B})$.

Проделывая описанную процедуру для дисков $W_{z_2}, \ldots, W_{z_n}$ по очереди, получим покрытие множества R, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) количество точек пересечения множеств ∂W_{z_i} и ∂W_{z_j} конечно при всех i, $j \in 1, \ldots, n$, $i \neq j$;

(ii) никакие три различные множества из семейства $\{\partial W_{z_i}\}_{i=1}^{n}$ не пересекаются в одной точке;

(iii) для каждого $z \in \partial W_{z_i} \cap \partial W_{z_j}$, $i \neq j$, найдутся окрестность U_z и гомеоморфизм $\psi : U_z \to \mathbb{R}^2$ такие, что

$$\psi(U_z \cap \partial W_{z_i}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\psi(U_z \cap \partial W_{z_j}) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — точки попарного пересечения окружностей из системы $\{\partial W'_{z_i}\}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — набор, состоящий из всех попарно непересекающихся дуг этих окружностей с концами в точках $\{x_j\}_{j=1}^{m}$.

Принимая в качестве множества вершин набор $\{x_j\}$, множества ребер — набор $\{\gamma_s\}$, получаем конечный граф $\widetilde{L}$, вложенный в M^2. Кратность каждой вершины равна 4.

Имеет место соотношение

$$\bigcup_{i=1}^{n} \partial W'_{z_i} = \Big(\bigcup_{j=1}^{m} \{x_j\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{s=1}^{k} \gamma_s\Big).$$

Заметим, что в силу выбора множеств $\partial W'_{z_i}$ для каждой вершины графа $\widetilde{L}$ ровно два из четырех ребер, инцидентных этой вершине, лежат в множестве $\bigcup_{i=1}^{n} W'_{z_i}$.

Исключая из набора ребер графа $\widetilde{L}$ все ребра, лежащие во множестве $\bigcup_{i=1}^{n} W'_{z_i}$, получаем конечный граф L, вложенный в M^2, каждая из вершин которого имеет кратность 2. Значит, граф L представляет собой объединение конечного числа циклов, которое служит границей множества $\bigcup_{i=1}^{n} W'_{z_i}$. Непосредственная проверка показывает, что каждый из циклов гомеоморфен окружности.

Следовательно, множество

$$X' = \mathrm{Cl}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} W'_{z_i}\Big)$$

представляет собой двумерное компактное многообразие с краем. Край многообразия X' представляет собой несвязное объединение конечного числа окружностей. Обозначим эти окружности через

$$\beta_i : S^1 \to M^2, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Шаг 2. Покажем, что окружности

$$\beta_i, \qquad i = 1, \ldots, l$$

можно продеформировать так, чтобы для каждой точки

$$x \in \Phi(N) \cap \partial X'$$

выполнялось одно из условий:

(i) найдутся t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < 0 < t_2$ такие, что $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(x))(t) \notin X'$ при $t \in (t_1, 0)$ и $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(x))(t) \in \operatorname{Int} X'$ при $t \in (0, t_2)$;

(ii) найдутся t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < 0 < t_2$ такие, что
$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(x))(t) \in \operatorname{Int} X'$ при $t \in (t_1, 0)$ и
$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(x))(t) \notin X'$ при $t \in (0, t_2)$.

Для каждого β_i, $i = 1, \ldots, l$, найдем воротник $C_i \subset X'$ (вложение $c_i : S^1 \times I \to X'$, для которого $c_i(\tau, 0) = \beta_i(\tau)$ и множество $c_i(S^1 \times [0, 1))$ является открытой окрестностъю множества $\beta_i(S^1)$ в X'), такой, чтобы выполнялись равенства $C_i \cap R = \varnothing$ и $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (так как X' — триангулируемо, существование воротника гарантируется следствием 2.26 из [33]).

Фиксируем $i \in \{1, \ldots, l\}$. Построим гомеоморфизм

$$h : C_i \to \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [1, 3]\}.$$

Для определенности будем считать, что

$$h \circ \beta_i(S^1) = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r = 1\}.$$

Рассмотрим множество $K = h^{-1}(\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r = 2\})$. Пусть $K \cap \Phi(N) \neq \varnothing$. Положим

$$a = \inf_{z \in K \cap \Phi(N)} \max\{t \geq 0 \,|\, \Phi(F(\Phi^{-1}(z))([-t, t])) \in C_i\}.$$

Заметим, что если $a < \infty$, то $a > 0$. Иначе (в силу непрерывности Φ) нашлась бы последовательность точек из K, сходящаяся к некоторой точке, лежащей в ∂C_i. Но это невозможно, так как множества ∂C_i и K — непересекающиеся компакты.

Найдется $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ такое, что $1/n < a/4$.

Фиксируем $x_0 \in N$. Положим

$$\alpha_k = p\big(F(x_0)\big(\big[k/n - 2/3n, k/n + 2/3n\big]\big)\big), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Система отрезков $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ покрывает S^1 — базу расслоения ξ. Никакие два из отрезков этой системы не имеют общих граничных точек.

Для каждого $x \in \Phi^{-1}(K)$ и отрезка α_j такого, что $p(x) \in \alpha_j$, отрезок $F(x)([\tau_1, \tau_2])$ траектории $F(x)$, содержащий точку x, для которого $p \circ F(x)([\tau_1, \tau_2]) = \alpha_j$, обладает тем свойством, что

$$\Phi \circ F(x)([\tau_1, \tau_2]) \subset C_i.$$

Действительно, $F(x)([\tau_1, \tau_2]) \subset F(x)([-a, a])$, как показывает непосредственная проверка.

Выберем для каждого $x \in \Phi^{-1}(K)$ интервал $\alpha_{j(x)}$ из системы $\{\alpha_k\}$, такой что $p(x) \in \operatorname{Int} \alpha_{j(x)}$. По теореме 3.13 найдутся трубка траекторий $W_x = A(x) \times I$ и диск

$$\widetilde{D}_x \subset \operatorname{Int} C_i,$$

такие что

$$p(W_x) = \alpha_{j(x)},$$

$$\Phi(N) \cap \widetilde{D}_x = \Phi(W_x), \quad \Phi(N) \cap \partial \widetilde{D}_x = \Phi(\partial W_x).$$

Набор $\{\operatorname{Int} \widetilde{D}_x\}_{x \in \Phi(N) \cap K}$ образует покрытие компакта $\Phi(N) \cap K$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\operatorname{Int} \widetilde{D}_1, \ldots, \operatorname{Int} \widetilde{D}_m$. Обозначим через $W_i = A_i \times I$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, трубки траекторий потока (F, N), которым соответствуют диски $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_m$. Обозначим

$$D_k = h(\widetilde{D}_k), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Очевидно,

$$h(K \cap \Phi(N)) \subset \bigcup_{k=1}^{m} \operatorname{Int} D_k.$$

Введем обозначение

$$D_0 = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \leq 2\}.$$

Поскольку $\operatorname{Int} D_k \cap \operatorname{Int} D_0 \neq 0$ при всех $k = 1, \ldots, m$ (это следует из соотношения $\partial D_0 = h(K)$), то множество $\bigcup_{k=0}^{m} \operatorname{Int} D_k$ — связно.

Из-за выбора интервалов α_j и в силу того, что

$$p(\partial W_x) = \partial \alpha_{j(x)}$$

для всех $x \in h \circ \Phi(N) \cap K$, справедливо следующее положение.

Если для каких-то k, $s \in \{1, \dots, m\}$, $k \neq s$, выполняется неравенство $\partial \widetilde{D}_k \cap \partial \widetilde{D}_s \cap \Phi(N) \neq \varnothing$, то

$$\alpha_{j(k)} = p(\partial W_k) = p(\partial W_s) = \alpha_{j(s)},$$

так как при $j_1 \neq j_2$ интервалы α_{j_1} и α_{j_2} по построению не имеют общих граничных точек. Поэтому для любого $z \in \Phi^{-1}(\partial \widetilde{D}_k \cap \partial \widetilde{D}_s)$ найдется $\delta > 0$ такое, что из двух интервалов: $\Phi \circ F(z)((-\delta, 0))$ и $\Phi \circ F(z)((0, \delta))$ — один лежит во множестве $\operatorname{Int} \widetilde{D}_k \cap \operatorname{Int} \widetilde{D}_s$, а другой принадлежит дополнению $M^2 \setminus (\widetilde{D}_k \cap \widetilde{D}_s)$.

Следовательно, для всех $z \in \partial D_k \cap h \circ \Phi(N)$ либо

$$z \in \bigcup_{s=1}^{m} \operatorname{Int} D_s,$$

либо выполняется одно из условий:

(i) найдутся $t_1 < 0 < t_2$ такие, что

$$h \circ \Phi \circ F(x)(t) \notin \bigcup_{s=1}^{m} D_s \qquad \text{при} \qquad t_1 < t < 0 \qquad \text{и}$$

$$h \circ \Phi \circ F(x)(t) \in D_k \qquad \text{при} \qquad 0 < t < t_2;$$

(ii) найдутся $t_1 < 0 < t_2$ такие, что

$$h \circ \Phi \circ F(x)(t) \in D_k \qquad \text{при} \qquad t_1 < t < 0 \qquad \text{и}$$

$$h \circ \Phi \circ F(x)(t) \notin \bigcup_{s=1}^{m} D_s \qquad \text{при} \qquad 0 < t < t_2.$$

Поскольку

$$\partial(\bigcup_{s=1}^{m} D_s) \subset \bigcup_{s=1}^{m} \partial D_s,$$

то для каждой точки $x \in \partial(\bigcup_{s=1}^{m} D_s) \cap h \circ \Phi(N)$ должно выполняться одно из условий, приведенных выше.

Обозначим через A ту компоненту связности множества

$$\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,r\le 3\}\setminus\bigcup_{k=0}^{m}D_k,$$

которая содержит окружность $\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,r=3\}$; через D будем обозначать множество $\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,r\le 3\}\setminus A$.

Далее мы используем леммы 3.25 – 3.28, доказательство которых будет приведено в следующем параграфе.

Лемма 3.25. *Пусть $V_1,\dots,V_n$ — жордановы области на двумерной сфере S^2, ограниченные простыми замкнутыми кривыми $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, соответственно.*

Пусть множество $\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ связно.

Тогда каждая из компонент дополнения

$$S^2\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Cl}(V_i)=S^2\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\big(V_i\cup\gamma_i(S^1)\big)$$

является жордановой областью.

Из этой леммы и из теоремы Шёнфлиса (см. [37]) следует, что множество $D\subset\mathbb{R}^2$ гомеоморфно двумерному диску.

Заметим, что

$$\partial D_0\cap h\circ\Phi(N)\subset\bigcup_{i=1}^{m}D_i\qquad\text{и}\qquad\partial D\subset\bigcup_{i=1}^{m}D_i.$$

Поэтому для каждой точки

$$x\in\partial D\cap h\circ\Phi(N)$$

выполняется одно из следующих условий:

(i) найдутся $t_1<0<t_2$ такие, что

$$F(\Phi^{-1}\circ h^{-1}(x))(t)\in\mathrm{Int}\,A$$

при всех $t_1<t<0$ и

$$F(\Phi^{-1}\circ h^{-1}(x))(t)\in\mathrm{Int}\,D$$

при всех $0 < t < t_2$;

(ii) найдутся $t_1 < 0 < t_2$ такие, что

$$F(\Phi^{-1} \circ h^{-1}(x))(t) \in \operatorname{Int} D$$

при всех $t_1 < t < 0$ и

$$F(\Phi^{-1} \circ h^{-1}(x))(t) \in \operatorname{Int} A$$

при всех $0 < t < t_2$.

Непосредственная проверка показывает, что

$$\pi_1(h^{-1}(\partial D)) \neq 0$$

в пространстве C_i, так как $D \supseteq D_0$.

Имеет место следующая лемма (см. [29]).

Лемма 3.26. *Пусть $C^2 \cong S^1 \times I$ — замкнутый двумерный цилиндр и $\gamma \subset C^2$ — непрерывная замкнутая кривая без самопересечений. Тогда $\pi_1(\gamma) \in \{-1, 0, 1\}$.*

Согласно этой лемме $|\,\pi_1(h^{-1}(\partial D))\,| = 1$, и множества

$$C_i \cap (h^{-1}(A)), \quad C_i \cap (h^{-1}(\operatorname{Int} D))$$

гомеоморфны цилиндрам.

Заменим X' на

$$X' \setminus (C_i \cap (h^{-1}(\operatorname{Int} D))),$$

и часть границы β_i — на $\widetilde{\beta}_i = h^{-1}(\partial D)$.

В случае, когда $K \cap \Phi(N) = \varnothing$, заменим X' на

$$X' \setminus h^{-1}(\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r < 2\}),$$

и β_i — на $\widetilde{\beta}_i = K$.

Проделывая описанную процедуру для всех компонент края β_i, $i = 1, \ldots, l$, многообразия X', получаем многообразие X'', удовлетворяющее условиям шага 2.

Шаг 3. Покажем, что найдется двумерное компактное многообразие с краем $X \subset X''$, $R \subset \operatorname{Int} X$ такое, что для любой траектории $F(x) : \mathbb{R} \to N$, для которой $\Phi \circ F(x)(t_0) \in \partial X$ при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$, выполняется одно из следующих соотношений:
либо

$$\Phi \circ F(x)(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Int} X = \Phi \circ F(x)((t_0, +\infty)),$$

либо

$$\Phi \circ F(x)(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Int} X = \Phi \circ F(x)((-\infty, t_0)).$$

Рассмотрим компактное множество

$$H = \left(\bigcup_{i=1}^{l} \beta_i \right) \cap \Phi(N) = \partial X'' \cap \Phi(N).$$

Оно распадается на два непересекающиеся подмножества H_r и H_s. Множество H_r состоит из всех $y \in H$, для которых найдется $t(y) \neq 0$ такое, что $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))(t(y)) \in \partial X''$, и выполняется одно из условий:
либо

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))((0, t(y))) \in \operatorname{Int} X'' \qquad \text{при} \quad t(y) > 0,$$

либо

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))((t(y), 0)) \in \operatorname{Int} X'' \qquad \text{при} \quad t(y) < 0.$$

Множество H_s состоит из всех $y \in H$, для которых

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))(t) \in \operatorname{Int} X''$$

при всех $t < 0$ либо при всех $t > 0$.

Отметим, что (по построению) для каждой точки

$$y \in H \subset \partial X''$$

найдется локальная трансверсальная площадка

$$\alpha_y : I \to \partial X'',$$

проходящая через эту точку.

Из леммы 3.11 и замечания 3.7 следует, что для каждого $y \in H_r$ найдется окрестность $U_y \subset M^2$ такая, что $y' \in H_r$ для каждого $y' \in (H \cap U_y)$ и $t(y') = t(y)$, то есть множество H_r открыто в H.

Покажем, что H_r — замкнуто в H.

Предположим, что это не так и найдется последовательность $\{y_k \in H_r\}$, сходящаяся к некоторой точке

$$y_0 \notin H_r.$$

Поскольку множество H компактно и $H = H_s \cup H_r$, то $y_0 \in H_s$. Не ограничивая общности будем считать, что $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(t) \in \operatorname{Int} X''$ при всех $t > 0$. Обозначим $y'_k = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))(t(y_k))$. Далее, так как $\partial X''$ — компакт, то последовательность $\{y'_k\}$ имеет предельную точку $y'_0 \in \partial X''$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{y'_k\}$ сходится к y'_0.

Непосредственно проверяется, что, во-первых,

$$t(y_k) > 0$$

при всех $n > k_1$, начиная с некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$; во-вторых, найдутся i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, l\}$ и $k_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $y_n \in \beta_{i_1}$, $y'_n \in \beta_{i_2}$ при $n > k_2$.

Отметим, что $y_0 \neq y'_0$, так как, с одной стороны,

$$t(y'_n) = -t(y_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

с другой, — при $y_0 = y'_0$, начиная с некоторого $k \in \mathbb{N}$, для всех $n > k$ должны выполняться соотношения $t(y'_n) > 0$.

Зафиксируем непересекающиеся открытые окрестности U и U' точек y_0 и y'_0 соответственно.

Найдем ε, $\varepsilon' > 0$ такие, что

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, \varepsilon]) \subset U,$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_0))([-\varepsilon', 0]) \subset U'.$$

Обозначим $\widetilde{y}_0 = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(\varepsilon)$, $\widetilde{y}'_0 = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_0))(-\varepsilon')$. Согласно теореме 3.13 существуют трансверсальные площадки $\alpha_{\widetilde{y}_0} : I \to X$, $\alpha_{\widetilde{y}'_0} : I \to X$ в точках $\widetilde{y}_0$, $\widetilde{y}'_0$. Зафиксируем еще и трансверсальные площадки $\alpha_{y_0} : I \to \partial X''$, $\alpha_{y'_0} : I \to \partial X''$.

Пусть $D \subset U$, $D' \subset U'$ — диски и

$$h : D \to I^2, \qquad h' : D' \to I^2$$

— гомеоморфизмы из теоремы 3.18 такие, что

$$\Phi(N) \cap \partial D \subseteq \alpha_{y_0}(I) \cup \alpha_{\widetilde{y}_0}(I),$$
$$\Phi(N) \cap \partial D' \subseteq \alpha_{y'_0}(I) \cup \alpha_{\widetilde{y}'_0}(I)$$

и

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, \varepsilon]) \subseteq D,$$
$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_0))([-\varepsilon, 0]) \subseteq D'.$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, будем считать, что $y_n \in \partial D$ и $y'_n \in \partial D'$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим трансверсальную площадку $\alpha_{y_0} : I \to \partial X''$. Последовательность $\{\alpha_{y_0}^{-1}(y_n)\}$ сходится к точке $\alpha_{y_0}^{-1}(y_0)$. Можно выбрать из этой последовательности монотонную подпоследовательность. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательность $\{\alpha_{y_0}^{-1}(y_n)\}$ — монотонна.

Аналогично, рассмотрим трансверсальную площадку

$$\alpha_{y'_0} : I \to \partial X''.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{\alpha_{y'_0}^{-1}(y'_n)\}$ — монотонна.

Значит, переходя к подпоследовательности, можно считать, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются условия:

(i) $t(y_k) > 0$;

(ii) существуют такие i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, l\}$, что $y_k \in \beta_{i_1}$, $y'_k \in \beta_{i_2}$ при всех $k \in \mathbb{N}$;

(iii) $y_k \in \partial D$, $y'_k \in \partial D'$;

(iv) последовательности $h(y_k)$ и $h'(y'_k)$ монотонны в

$$\{0\} \times I \subset I^2 \qquad \text{и} \qquad \{1\} \times I \subset I^2$$

соответственно.

Обозначим

$$\widetilde{y}_k = \Phi \circ F(\Phi^{-1}((y_k))(\varepsilon) \in \partial D,$$
$$\widetilde{y}'_k = \Phi \circ F(\Phi^{-1}((y'_k))(-\varepsilon') \in \partial D'.$$

Так как последовательность $\{h(y_k)\}$ — монотонна в

$$\{0\} \times I$$

и множества $h \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([0,\varepsilon])$ попарно не пересекаются, то последовательность $\{h(\widetilde{y}_k)\}$ — монотонна в $\{1\} \times I$. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество

$$\gamma_k \cup \widetilde{\gamma}_k \cup \left(h \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([0,\varepsilon])\right) \cup \\ \cup \left(h \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{k+1}))([0,\varepsilon])\right),$$

где $\gamma_k \in \{0\} \times I$, $\widetilde{\gamma}_k \in \{1\} \times I$ — отрезки с концами в точках $h(y_k)$, $h(y_{k+1})$ и $h(\widetilde{y}_k)$, $h(\widetilde{y}_{k+1})$, гомеоморфно окружности и, следовательно, ограничивает в I^2 диск $\widetilde{B}_k$. Непосредственная проверка показывает, что для дисков $B_k = h^{-1}(\widetilde{B}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, выполняются соотношения

$$B_k \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mu_i\right) = \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([0,\varepsilon])\right) \cup \\ \cup \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{k+1}))([0,\varepsilon])\right) \subset \partial B_k,$$

где $\mu_i = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_i))([0,t(y_i)])$, $i \in \mathbb{N}$, — семейство попарно непересекающихся интервалов (концевыми точками интервала μ_i являются точки y_i и y'_i, интервал μ_i без концевых точек лежит в $\operatorname{Int} X''$).

Так как последовательность $\{h'(y'_k)\}$ монотонна в

$$\{1\} \times I$$

и множества $h' \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_k))([-\varepsilon', 0])$ попарно не пересекаются, то последовательность $\{h'(\widetilde{y}'_k)\}$ — монотонна в $\{0\} \times I$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество

$$\gamma'_k \cup \widetilde{\gamma}'_k \cup \left(h' \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_k))([-\varepsilon', 0])\right) \cup \\ \cup \cup \left(h' \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_{k+1}))([-\varepsilon', 0])\right),$$

где $\gamma'_k \in \{1\} \times I$, $\widetilde{\gamma}'_k \in \{0\} \times I$ — отрезки с концами в точках $h'(y'_k)$, $h'(y'_{k+1})$ и $h'(\widetilde{y}'_k)$, $h'(\widetilde{y}'_{k+1})$, гомеоморфно окружности и, следовательно, ограничивает в I^2 диск $\widetilde{B}'_k$. При этом для дисков $B'_k = (h')^{-1}(\widetilde{B}'_k)$, $k \in \mathbb{N}$, имеют место соотношения

$$B'_k \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mu_i\right) = [(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_k))([-\varepsilon', 0])) \cup \\ \cup \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y'_{k+1}))([-\varepsilon', 0])\right)] \subset \partial B'_k.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем непрерывное инъективное отображение $\widetilde{\widetilde{\gamma}}_k : I \to B_k$ такое, что

$$\widetilde{\widetilde{\gamma}}_k(0) = y_k, \quad \widetilde{\widetilde{\gamma}}_k(1) = \widetilde{y}_{k+1}, \quad \widetilde{\widetilde{\gamma}}_k((0,1)) \subset \operatorname{Int} B_k.$$

Каждое из множеств

$$\begin{aligned} \eta_k &= \gamma_k \cup \gamma'_k \cup \mu_k \cup \mu_{k+1}, \\ \widetilde{\eta}_k &= \widetilde{\gamma}_k \cup \widetilde{\gamma}'_k \cup \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([\varepsilon, t(y_k) - \varepsilon'])\right) \cup \\ &\quad \cup \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{k+1}))([\varepsilon, t(y_{k+1}) - \varepsilon'])\right), \\ \widetilde{\widetilde{\eta}}_k &= \widetilde{\widetilde{\gamma}}_k \cup \widetilde{\gamma}'_k \cup \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([0, t(y_k) - \varepsilon'])\right) \cup \\ &\quad \cup \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{k+1}))([\varepsilon, t(y_{k+1}) - \varepsilon'])\right), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

— гомеоморфно окружности. При этом для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$\eta_k \subset X'', \quad \eta_k \cap \partial X'' = \gamma_k \cup \gamma'_k,$$

$$\widetilde{\eta}_k \subset \operatorname{Int} X'',$$

$$\widetilde{\widetilde{\eta}}_k \subset X'' \quad \widetilde{\widetilde{\eta}}_k \cap \partial X'' = \{y_k\},$$

$$\left(\eta_k \cup \widetilde{\eta}_k \cup \widetilde{\widetilde{\eta}}_k\right) \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mu_i\right) \subset (\mu_k \cup \mu_{k+1}).$$

Непосредственная проверка показывает, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ окружности $\widetilde{\eta}_k$ и $\widetilde{\widetilde{\eta}}_k$ гомотопны η_k.

Рассмотрим семейство попарно непересекающихся окружностей $\{\widetilde{\eta}_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$. В следующем параграфе будет доказана такая лемма.

Лемма 3.27. *Пусть Z — компактное двумерное многообразие с краем, $\{\Theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — набор попарно непересекающихся окружностей, вложенных в $\operatorname{Int} Z$.*

Тогда набор $\{\Theta_n\}$ распадается на конечное число классов гомотопии окружностей.

Из леммы 3.27 следует, что семейство $\{\widetilde{\eta}_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$, а вместе с ним и семейство $\{\widetilde{\widetilde{\eta}}_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$, распадается на конечное число классов гомотопности.

В следующем параграфе будет доказана также лемма.

Лемма 3.28. *Пусть Z — связное компактное двумерное многообразие с краем. Найдется число $N = N(Z)$ такое, что для любого набора $\{\Theta_k\}$ вложенных в Z попарно непересекающихся окружностей, который удовлетворяет условиям:*

(i) *ни одна из окружностей Θ_k не стягивается в точку;*
(ii) *каждая из окружностей Θ_k пересекается с краем ∂Z, ровно в одной точке z_k;*
(iii) *найдется связная компонента β края ∂Z, которая содержит все z_k;*
(iv) *все окружности набора Θ_k попарно гомотопны;*

количество элементов в наборе $\{\Theta_k\}$ конечно и не превосходит N.

Из леммы 3.28 вытекает, что только конечное число окружностей из набора $\{\widetilde{\widetilde{\eta}}_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ не гомотопно нулю.

Применяя леммы 3.27 и 3.28 к семействам $\{\widetilde{\eta}_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{\widetilde{\eta}}_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, заключаем, что все окружности из набора $\{\widetilde{\widetilde{\eta}}_{2k}\}$ кроме, быть может, конечного числа, гомотопны нулю.

Отсюда делаем вывод, что семейство $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ содержит лишь конечное число окружностей, не гомотопных нулю. Без ограничения общности можем считать, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ окружность η_k стягиваема в точку в пространстве X'' и, поэтому, ограничивает в X'' диск D_k.

Как известно, из компактности пространства N следует, что для любой траектории потока (F, N) ее ω-предельное множество непусто.

Так как полутраектория $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0)) : \mathbb{R}_+ \to X$ лежит в X'', и X'' — компактно, то $\Omega = \Phi(\omega(\Phi^{-1}(y_0))) \subset X''$. На самом деле, справедливо включение

$$\Omega = \Phi(\omega(\Phi^{-1}(y_0))) \subset \operatorname{Int} X''.$$

Действительно, если найдутся $z \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}$ такие, что $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(t) \in \partial X''$, то найдется и $\delta > 0$, для которого либо

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))((t-\delta, t)) \cap X'' = \varnothing,$$

либо

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))((t, t+\delta)) \cap X'' = \varnothing.$$

С другой стороны, так как множество $\omega(\Phi^{-1}(y_0))$ является инвариантным подмножеством потока (F, N), то

$$F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) \subset \omega(\Phi^{-1}(y_0))$$

и

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) \subset X''.$$

Для последовательности $\{\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ найдется предельная точка $z \in \operatorname{Int} X''$. Эта точка лежит в Ω, следовательно $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Int} X''$. Будем считать, что последовательность $\{\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(n)\}$ сходится к точке z.

Так как при любом $t \in \mathbb{R}$ отображение $F(t) : N \to N$ — непрерывно, то последовательность $\{\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(t)\}$ сходится к точке $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Выберем в пространстве $\operatorname{Int} X''$ базу окрестностей

$$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

точки z. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k_n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(k_n) \in U_n.$$

Будем считать, что $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(n) \in U_n$. Так как при каждом $n \in \mathbb{N}$ множество U_n является окрестностью точки $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(n)$, то найдется подпоследовательность $\{y_{k_n}\}$ последовательности $\{y_n\}$, для которой $n < t(y)$ и $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{n_k}))(n) \in U_n$. Последовательность

$$\{\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{n_k}))(n)\}$$

сходится к точке z.

Будем считать, что последовательность

$$\{\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

сходится к точке z.

Покажем, что существует такая окрестность W множества

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}),$$

что

$$W \cap (\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(t)) = \varnothing$$

при всех $t > 0$, и тем самым приведём к противоречию предположение о том, что $y_0 \in H_s$.

Отметим, что при любом $k \in \mathbb{N}$ диски D_k и D_{k+1} (ограниченные множествами η_k и η_{k+1} соответственно) пересекаются по дуге

$$\mu_{k+1} \subset \partial D_k \cap \partial D_{k+1},$$

поэтому множество $D_k \cup D_{k+1}$ гомеоморфно диску, кроме того, и множество

$$B_k = \bigcup_{i=1}^{k} D_k$$

также гомеоморфно диску. При этом

$$\partial B_k = \mu_1 \cup \mu_{k+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} (\gamma_k \cup \gamma'_k) \right),$$

$$\gamma_k \cup \gamma'_k \subset \partial X'', \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{F(\Phi^{-1}(y_n))(n)\}$ сходится к $\Phi^{-1}(z) \in N$ и отображение проекции $p : N \to S^1$ непрерывно, то последовательность $\{p \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(n)\}$ сходится к $p \circ \Phi^{-1}(z)$. Следовательно, найдется последовательность вещественных чисел $\{\tau_n\}$, $\tau_n \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что

$$p \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(n + \tau_n) = p \circ \Phi^{-1}(z)$$

и $F(\Phi^{-1}(y_n))(n + \tau_n) \to \Phi^{-1}(z)$ при $n \to \infty$.

Фиксируем окрестность $U \subset \operatorname{Int} X''$ точки z. Так как отображение $F : N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно, то

$$F(\Phi^{-1}(y_n))((n - |\tau_n|, n + |\tau_n|)) \subset U,$$

начиная с некоторого $m \in \mathbb{N}$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что эти соотношения выполняются для всех $n \in \mathbb{N}$.

Обозначаем $z_n = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(n + \tau_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$z_n \in \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))((0, t(y_n))),$$

$$p \circ \Phi^{-1}(z_n) = p \circ \Phi^{-1}(z)$$

и последовательность $\{z_n\}$ сходится к z.

Пусть $\alpha_z : I \to M^2$ — произвольная трансверсальная площадка в точке z. Так как $\Phi^{-1} \circ \alpha_z(I) \subset p^{-1}(p(\Phi^{-1}(z)))$

и множество $\Phi^{-1} \circ \alpha_z(I)$ является (по определению трансверсальной площадки) окрестностью точки $\Phi^{-1}(z)$ в пространстве $p^{-1}(p(\Phi^{-1}(z)))$, то найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $z_n \in \alpha_z(I)$ при всех $n > n_0$.

Рассмотрим две возможности.

(a) Предположим, что траектория $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))$ не является периодической.

Фиксируем $L \in \mathbb{N}$. Найдем окрестность U отрезка траектории

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L]),$$

для которой $U \cap (\partial X'' \cup \mu_1) = \varnothing$.

Построим трансверсальные площадки

$$\alpha_{-L} : I \to M^2, \quad \alpha_L : I \to M^2,$$

проходящие через точки

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(-L) \qquad \text{и} \qquad \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(L),$$

соответственно.

Пусть $D(L)$, $h_L : D(L) \to I^2$ — соответственно замкнутый диск и гомеоморфизм из теоремы 3.18. Так как

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L])$$

— простая дуга,

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))((-L, L)) \subset \operatorname{Int} I^2,$$

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(-L) \in \{0\} \times (0, 1) \subset \partial I^2$$

и

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(L) \in \{1\} \times (0, 1) \subset \partial I^2,$$

то найдется гомеоморфизм $\widetilde{h}_L : I^2 \to I^2$, переводящий

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L])$$

в $I \times \{1/2\}$ и такой, что

$$\widetilde{h}_L(\{0\} \times I) = \{0\} \times I, \quad \widetilde{h}_L(\{1\} \times I) = \{1\} \times I.$$

Поэтому, заменяя h_L на $\widetilde{h}_L \circ h_L$, можем считать, что

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L]) = I \times \{1/2\}.$$

Начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, для всех $n > n_0$ будут иметь место включения

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z_n))(-L) \subset h_L^{-1}(\{0\} \times I) \subset \alpha_{-L}(I),$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z_n))(L) \subset h_L^{-1}(\{1\} \times I) \subset \alpha_L(I).$$

Для каждого $k > n_0$

$$D(L) \cap \mu_k = \bigcup_{i=1}^{m_k} \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([\tau_i^k, \tau_i^k + 2L]).$$

Интервалы $[\tau_i^k, \tau_i^k + 2L]$ и $[\tau_j^k, \tau_j^k + 2L]$ не пересекаются при $i \neq j$, поэтому их конечное число (точнее, $2Lm_k < t(y_k)$).

Покажем, что $m_k \leq 2$ при всех $k > n_0$.

Пусть это не так, и $m_k \geq 3$ при некотором $k > n_0$. Рассмотрим семейство простых непересекающихся дуг

$$\Theta_i = h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([\tau_i^k, \tau_i^k + 2L]), \quad i = 1, \ldots, m_k.$$

При каждом i выполняются соотношения

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))((\tau_i^k, \tau_i^k + 2L)) \subset \operatorname{Int} I^2,$$

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))(\tau_i^k) = \{0\} \times \{x_i\} \subset \{0\} \times I \subset \partial I^2,$$

$$h_L \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))(\tau_i^k + 2L) = \{1\} \times \{x_i'\} \subset \{1\} \times I \subset \partial I^2.$$

Следовательно, так как дуги семейства $\{\Theta_i\}_{i=1}^{m_k}$ попарно не пересекаются, множество $\operatorname{Int} I^2 \setminus (\bigcup_{i=1}^{m_k} \Theta_i)$ имеет $m_k + 1$ компоненту связности A_0, A_1, …, A_{m_k}. Каждая из компонент гомеоморфна открытому двумерному диску.

Поскольку

$$h_L^{-1}\left(\operatorname{Int} I^2 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m_k} \Theta_i\right)\right) \cap \partial B_k = \varnothing,$$

то при каждом $j \in \{0, \dots, m_k\}$ выполняется одно из двух соотношений: либо

$$h_L^{-1}(A_j) \subset \operatorname{Int} B_k,$$

либо

$$h_L^{-1}(A_j) \subset X'' \setminus B_k.$$

Перенумеруем $\{\tau_i\}$ так, чтобы $x_1 < x_2 < \dots < x_{m_k}$. Перенумеруем также $\{A_j\}$ таким образом, чтобы

$$\{0\} \times (0, x_1) \subset \partial A_0,$$

$$\{0\} \times (x_j, x_{j+1}) \subset \partial A_j, \quad j = 1, \dots, m_k - 1,$$

$$\{0\} \times (x_{m_k}, 1) \subset \partial A_{m_k}.$$

Тогда $\Theta_i = \partial A_{i-1} \cap A_i$, $i = 1, \dots, m_k$.

Так как при каждом $i \in \{1, \dots, m_k\}$ множество

$$h_L^{-1}(A_{i-1} \cup A_i \cup \Theta_i)$$

является окрестностью точки

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))(\tau_i^k + L) \in \partial B_k,$$

то в точности одно из множеств $h_L^{-1}(A_{i-1})$, $h_L^{-1}(A_i)$ лежит в $\operatorname{Int} B_k$.

В частности, одно из множеств $h_L^{-1}(A_1)$, $h_L^{-1}(A_2)$ лежит в $\operatorname{Int} B_k$. Пусть это будет множество $h_L^{-1}(A_1)$ (случай $h_L^{-1}(A_2) \subset \operatorname{Int} B_k$ рассматривается аналогично).

Поскольку по построению $\partial A_1 \cap h_L(B_k) = \Theta_1 \cup \Theta_2$, то

$$h_L^{-1}(\partial A_1 \setminus (\Theta_1 \cup \Theta_2)) \subset \operatorname{Int} B_k.$$

Значит, простые непересекающиеся дуги

$$h_L^{-1}(\{0\} \times [x_1, x_2]) \text{ и } h_L^{-1}(\{1\} \times [x_1', x_2'])$$

лежат в B_k ($x_1' < x_2'$, так как дуги Θ_1, Θ_2 не пересекаются и $x_1 < x_2$).

С другой стороны, как показывает непосредственная проверка, точки

$$h_L^{-1}(\{1\} \times \{x_1'\}) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))(\tau_1^k + 2L)$$

и

$$h_L^{-1}(\{1\} \times \{x_2'\}) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))(\tau_2^k + 2L)$$

лежат в различных компонентах связности множества

$$B_k \setminus h_L^{-1}(\{0\} \times [x_1, x_2]).$$

Из этого вытекает, что

$$h_L^{-1}(\{0\} \times [x_1, x_2]) \cap h_L^{-1}(\{1\} \times [x_1', x_2']) \neq \varnothing.$$

Получили противоречие с тем, что $m_k > 2$.

Поскольку по построению выполняется включение

$$B_k \subset B_{k+1}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, то $z_n \notin \operatorname{Int} B_k$ при $n \geq k$ (так как $z_n \in \partial B_n$). Следовательно, $z \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ и

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \varnothing.$$

Аналогично,

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, +\infty)) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \varnothing.$$

С другой стороны, выполняются включения

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Cl} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right),$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, +\infty)) \subset \operatorname{Cl} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right).$$

Из предыдущих рассуждений вытекает, что при $m_k = 2$ выполняются включения

$$h_L^{-1}(A_1) \subset X'' \setminus B_k, \quad h_L^{-1}(A_0 \cup A_2) \subset \operatorname{Int} B_k.$$

Так как

$$h_L^{-1}(I \times \{1/2\}) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L]) \subset X'' \setminus B_k,$$

то $I \times \{1/2\} \subset A_1$ и $x_1 < 1/2 < x_2$.

Обозначим $C_1 = I \times [0, 1/2)$, $C_2 = I \times (1/2, 1]$.

Рассмотрим множество C_1. Покажем, что либо
$$h_L^{-1}(C_1) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k,$$
либо найдется $a_1 \in [0, 1/2)$, для которого
$$h_L^{-1}(I \times (a_1, 1/2)) \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \varnothing.$$

Отметим сначала, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ либо
$$\mu_k \cap h_L^{-1}(C_1) = \varnothing,$$
либо найдется $\tau_k \in [0, t(y_k)]$, для которого
$$\mu_k \cap h_L^{-1}(C_1) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_k))([\tau_k, \tau_k + 2L]).$$

Рассмотрим трансверсальные площадки
$$h_L^{-1}(\{0\} \times I), \quad h_L^{-1}(\{1\} \times I),$$
проходящие через точки
$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(-L) \text{ и } \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(L),$$
соответственно. Пусть
$$\{V_n \subset \operatorname{Int} X''\}_{n\in\mathbb{N}}$$
— база окрестностей отрезка траектории
$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L]).$$
Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем, согласно теореме 3.18, диск $D_n(L) \subset V_n$ и гомеоморфизм
$$h_{L,n} : D_n(L) \to I^2,$$
для которого
$$h_{L,n}^{-1}(\{0\} \times I) \subset h_L^{-1}(\{0\} \times I), \quad h_{L,n}^{-1}(\{1\} \times I) \subset h_L^{-1}(\{1\} \times I).$$

Поскольку
$$h_L \circ h_{L,n}^{-1}(\{0\} \times I) \subset (\{0\} \times I) \subset \partial I^2$$
и
$$h_L \circ h_{L,n}^{-1}(\{1\} \times I) \subset (\{1\} \times I) \subset \partial I^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

то множества

$$\widetilde{V}_n = h_L \circ h_{L,n}^{-1}(I \times (0,1)) = h_L \circ h_{L,n}^{-1}(I^2 \setminus ((I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\})))$$

открыты в пространстве I^2 и составляют базу окрестностей множества

$$I \times \{1/2\} = h_L(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L])).$$

Рассмотрим другую базу окрестностей этого множества. Ее составляют множества

$$U_n = \{x \in I^2 \mid \mathrm{d}(x, I \times \{1/2\}) < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $h_L^{-1}(\widetilde{V}_i \cap C_1) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) = \varnothing$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Найдется $j \in \mathbb{N}$ такое, что $U_j \subset \widetilde{V}_i$. Тогда

$$\mathrm{Cl}\, U_{j+1} \subset U_j \subset \widetilde{V}_i$$

и

$$h_L^{-1}\left[\mathrm{Cl}(U_{j+1} \cap C_1) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right)\right] = \varnothing$$

Легко видеть, что множество $\mathrm{Cl}(U_{j+1} \cap C_1)$ гомеоморфно двумерному диску. Так как

$$h_L^{-1}(\mathrm{Cl}(U_{j+1} \cap C_1)) \cap \mu_n = \varnothing$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$h_L^{-1}(\mathrm{Cl}(U_{j+1} \cap C_1)) \cap \partial B_n = \varnothing, \quad n \in \mathbb{N}.$$

И поскольку

$$(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([-L, L])) \subset h_L^{-1}(\partial U_{j+1} \cap C_1),$$

то множество $h_L^{-1}(\mathrm{Cl}\, U_{j+1} \cap C_1)$ лежит в $X'' \setminus B_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ и

$$h_L^{-1}(\partial U_{j+1} \cap C_1) \subset \left(X'' \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right).$$

Пусть $a_1 = 1/2 - 1/(j+1)$. Обозначим $\widetilde{C}_1 = I \times (a_1, 1/2)$. Тогда $h_L^{-1}(\widetilde{C}_1) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) = \varnothing$.

Отметим, что в этом случае имеет место равенство

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0,+\infty)) \cap h_L^{-1}\left((0,1)\times(a_1,1/2)\right) = \varnothing.$$

Пусть это не так, и найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(t_0) \in h_L^{-1}((0,1)\times(a_1,1/2)).$$

Поскольку множество $h_L^{-1}((0,1)\times(a_1,1/2))$ открыто в X'' и последовательность $\{\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(t_0)\}$ сходится к $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(t_0)$, то найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для него

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_{n_0}))(t_0) \in h_L^{-1}((0,1)\times(a_1,1/2)),$$

а это невозможно, так как

$$h_L^{-1}\left((0,1)\times(a_1,1/2)\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) = \varnothing.$$

Пусть теперь $h_L^{-1}(\widetilde{V}_k \cap C_1) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\right) \neq \varnothing$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Фиксируем $i \in \mathbb{N}$. Найдется $j \in \mathbb{N}$, для которого

$$\widetilde{V}_j \subset U_i.$$

Найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu_n \cap h_L^{-1}(\widetilde{V}_j \cap C_1) \neq \varnothing$. Существует $\tau_n \in [0, t(y_n)]$, для которого имеют место соотношения

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))([\tau_n, \tau_n + 2L]) \subset D_n(L),$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))((\tau_n, \tau_n + 2L)) \subset \operatorname{Int} D_n(L)\,,$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(\tau_n) \in h_{L,n}^{-1}(\{0\}\times I) \subset h_n^{-1}(\{0\}\times I),$$

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(\tau_n + 2L) \in h_{L,n}^{-1}(\{1\}\times I) \subset h_n^{-1}(\{1\}\times I).$$

Далее, поскольку $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))(\tau_n) \in h_L^{-1}(\{0\}\times I)$, то

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))([\tau_n, \tau_n + 2L]) \subset D(L)$$

и

$$\begin{aligned} h_L(\mu_n) \cap C_1 = h_L(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))([\tau_n, \tau_n + 2L])) \subset \\ \subset (C_1 \cap \widetilde{V}_j) \subset (C_1 \cap U_i). \end{aligned}$$

Множество

$$\lambda_n = h_L(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_n))([\tau_n, \tau_n + 2L]))$$

является простой дугой, принадлежащей $\operatorname{Int} C_1$; при этом ее концевые точки лежат в ∂C_1. Поэтому, дуга λ_n разбивает диск $\operatorname{Cl} C_1$ на две компоненты связности A_0 и A_1, одна из которых (пусть это будет A_1) содержит множество $I \times \{1/2\}$. Так как

$$\lambda_n = h_L(\partial B_n \cap h_L^{-1}(\operatorname{Cl} C_1)),$$

то одно из множеств $h_L^{-1}(A_0)$ или $h_L^{-1}(A_1)$ лежит в $\operatorname{Int} B_n$, а другое — в $X'' \setminus B_n$. Но

$$z \in h_L^{-1}(I \times \{1/2\}) \subset (X'' \setminus B_n),$$

поэтому, $h_L^{-1}(A_0) \subset \operatorname{Int} B_n$.

Непосредственная проверка показывает, что $A_1 \subset U_i$. Значит $(C_1 \setminus U_i) \subset A_0$ и $h_L^{-1}(C_1 \setminus U_i) \subset h_L^{-1}(A_0) \subset \operatorname{Int} B_n$.

Итак, для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$h_L^{-1}(C_1 \setminus U_i) \subset \operatorname{Int} B_n.$$

Так как $\{U_i\}$ — база окрестностей множества $I \times \{1/2\}$, то

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = I \times \{1/2\} \text{ и } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (C_1 \setminus U_i) = C_1.$$

Следовательно,

$$h_L^{-1}(C_1) = h_L^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (C_1 \setminus U_i)\right) = \\ = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} h_L^{-1}(C_1 \setminus U_i)\right) \subset \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right).$$

Отметим, что в этом случае

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, +\infty)) \cap h_L^{-1}(C_1) = \varnothing,$$

потому что

$$\Phi\circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0,+\infty))\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\varnothing.$$

Аналогично, для множества $C_2=I\times(1/2,1]$ либо

$$h_L^{-1}(C_2)\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k,$$

либо найдется $a_2\in(1/2,1]$ такое, что для множества

$$\widetilde{C}_2=I\times(1/2,a_2)$$

выполняется соотношение

$$h_L^{-1}(\widetilde{C}_2)\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k\right)=\varnothing.$$

Положим $\widehat{C}=\mathrm{Cl}(C_1'\cup C_2')$, где

$$C_i'=\begin{cases} C_i, & \text{если} \quad h_L^{-1}(C_i)\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k,\\ \widetilde{C}_i, & \text{если} \quad h_L^{-1}(\widetilde{C}_i)\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k\right)=\varnothing,\end{cases}\qquad i=1,2.$$

Далее,

$$h_L\circ\Phi\circ F(\Phi^{-1}(z))((-L,L))=((0,1)\times\{1/2\})\subset\operatorname{Int}\widehat{C},$$

поэтому множество $\widehat{D}_L=\operatorname{Int}h_L^{-1}(\widehat{C})$ является открытой окрестностью множества $\Phi\circ F(\Phi^{-1}(z))((-L,L))$. Выше мы показали, что

$$\widehat{D}_L\cap\big(\Phi\circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0,+\infty))\big)=\varnothing.$$

Система $\{\widehat{D}_L\}_{L\in\mathbb{N}}$ образует покрытие траектории

$$\Phi\circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}),$$

для которого

$$\left(\bigcup_{L\in\mathbb{N}}\widehat{D}_L\right)\cap\big(\Phi\circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0,+\infty))\big)=\varnothing.$$

(b) Пускай теперь $\Phi\circ F(\Phi^{-1}(z))$ — периодическая траектория. Пусть $L\in\mathbb{N}$ — ее минимальный период.

Найдем окрестность U траектории

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))([0, L]),$$

для которой $U \cap (\partial X'' \cup \mu_1) = \varnothing$.

Фиксируем точки

$$z' = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(1/4), \quad z'' = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(-1/4).$$

Справедливо соотношение

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))(\mathbb{R}) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z'))((0, L - 1/4)) \cup \\ \cup \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z''))((0, L - 1/4)).$$

Фиксируем трансверсальные площадки

$$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_1'', \alpha_2'' : I \to M^2,$$

проходящие через точки

$$z', F(\Phi^{-1}(z'))(L - 1/4), z'' \text{ и } F(\Phi^{-1}(z''))(L - 1/4)$$

соответственно.

Для отрезка траектории

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z'))([0, L - 1/4])$$

найдем замкнутый диск D' и гомеоморфизм $h' : D' \to I^2$, удовлетворяющие требованиям теоремы 3.18. Аналогично, для отрезка траектории

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z''))([0, L - 1/4])$$

построим замкнутый диск D'' и соответствующий гомеоморфизм $h'' : D'' \to I^2$.

Повторяя рассуждения пункта **(a)**, найдем окрестности $\widehat{D}'$, $\widehat{D}''$ интервалов

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z'))((0, L - 1/4))$$

и

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z''))((0, L - 1/4))$$

соответственно. Эти окрестности образуют открытое покрытие траектории $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z))$, для которого

$$\left(\widehat{D}' \cup \widehat{D}''\right) \cap \left(\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, +\infty))\right) = \varnothing.$$

Значит, построена окрестность траектории

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(z)),$$

которая не пересекается с полутраекторией

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, +\infty)).$$

Это противоречит тому, что $z \in \Omega = \Phi(\omega(\Phi^{-1}(y_0)))$.

Следовательно, множество H_r — замкнуто в H (и в $\partial X''$).

Пусть $y \in H_r$. Обозначим

$$G(y) = \begin{cases} \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))([0, t(y)]), & \text{если} \quad t(y) > 0, \\ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))([-t(y), 0]), & \text{если} \quad t(y) < 0. \end{cases}$$

Пусть

$$G_r = \bigcup_{y \in H_r} G(y), \quad G_s = (X'' \cap \Phi(N)) \setminus G_r.$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти подмногообразие X многообразия X'', для которого

$$X \cap \Phi(N) = G_s.$$

Пусть β_{j_1}, β_{j_2} — компоненты края многообразия X'', содержащие точки $y \in H_r$ и $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))(t(y))$ соответственно.

Так как компакты $G(y)$ и $\partial X'' \setminus (\beta_{j_1} \cup \beta_{j_2})$ не пересекаются, найдется открытая окрестность $V(y) \subset M^2$ множества $G(y)$ такая, что $(\partial X'' \setminus (\beta_{j_1} \cup \beta_{j_2})) \cap V(y) = \varnothing$.

Для каждого множества $G(y)$, $y \in H_r$, фиксируем его открытую окрестность указанного вида.

Вспомним, что по построению для каждого $y \in H$ существует трансверсальная площадка $\alpha_y : I \to \partial X''$. Пусть

$y \in H_r$, $t(y) > 0$ (в случае, когда $t(y) < 0$, построения аналогичны). Согласно лемме 3.11 найдётся открытая окрестность $U(y) \subset M^2$ точки y такая, что $y' \in H_r$ для любого $y' \in U(y) \cap H$ и $t(y') = t(y)$.

Можно считать, что $\alpha_y(I) \subset U(y)$ (тогда $H_s \cap \alpha_y(I) = \varnothing$ для всех $y \in H_r$).

Далее, поскольку $\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))((0, t(y))) \subset X''$ и

$$y, \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))(t(y)) \in \partial X'',$$

то согласно следствию 3.8 найдутся δ_1, $\delta_2 > 0$, для которых

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y))((-\delta_1, 0) \cup (t(y), t(y) + \delta_2)) \subset (M^2 \setminus X'').$$

Значит, множество $G(y)$ не может быть носителем образа периодическкой траектории потока (F, N). Поэтому для каждого $G(y)$ найдутся замкнутый диск $D(y) \subset V(y)$ и гомеоморфизм $h_y : D(y) \to I^2$, удовлетворяющие требованиям теоремы 3.18.

Так как множество $D(y) \cap \Phi(N)$ является образом трубки траекторий потока (F, N) и

$$t(y') = t(y) \qquad \text{для всех} \qquad y' \in \alpha_y(i),$$

то имеет место включение $(D(y) \cap \Phi(N)) \subset G_r$.

Множество $h_y^{-1}(I \times (0,1)) \subset D(y)$ является открытой окрестностью множества $G(y)$ (и, в частности, точки y) в пространстве X''.

Получили открытое покрытие

$$\bigcup_{y \in H_r} h_y^{-1}(I \times (0,1))$$

множества H_r, а также и множества G_r, так как включение $z \in h_y^{-1}(I \times (0,1))$ влечет $G(z) \subset h_y^{-1}(I \times (0,1))$, в пространстве X''. Поскольку H_r — компакт, то найдется его конечное подпокрытие

$$\bigcup_{i=1}^{n} h_{y_i}^{-1}(I \times (0,1)).$$

Оно удовлетворяет соотношениям

$$G_r \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(y_i), \quad G_s \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} D(y_i) \right) = \varnothing.$$

Покажем, что диски $D_i = D(y_i)$, удовлетворяющие теореме 3.18, можно подобрать таким образом, чтобы

$$D_i \subset X'', \quad h_i^{-1}(I \times (0,1)) = h_{y_i}^{-1}(I \times (0,1)) \subset \operatorname{Int} X''.$$

Фиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим множество

$$Q_i = (h_i \circ \Phi(N) \cap (\{0\} \times I)).$$

Из теоремы 3.18 вытекает, что $Q_i \subset \{0\} \times (0,1)$.

Далее, Q_i — замкнуто, поэтому найдутся x_1, $x_2 \in (0,1)$ такие, что точки $\{0\} \times \{x_1\}$ и $\{0\} \times \{x_2\}$ лежат в Q_i и $Q_i \subset \{0\} \times [x_1, x_2]$. Однозначно определены z_1, $z_2 \in H_r$, для которых $h_i(z_k) = \{0\} \times \{x_k\}$, $k = 1, 2$.

Множества

$$G(z_k) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z_k))([0, t(z_k)]), \qquad k = 1, 2,$$

удовлетворяют соотношениям

$$G(z_k) \subset D_i,$$

$$h_i(z_k) \in \{0\} \times (0,1), \quad h_i \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z_k))(t(z_k)) \in \{1\} \times (0,1),$$

$$h_i \circ \Phi \circ F(\Phi^{-1}(z_k))((0, t(z_k))) \subset \operatorname{Int} I^2, \quad k = 1, 2,$$

$$h_i(G(z_1)) \cap h_i(G(z_2)) = \varnothing.$$

Поэтому, как было показано выше, найдется гомеоморфизм $\widetilde{h}_i : I^2 \to I^2$ такой, что

$$\widetilde{h}_i(\{0\} \times I) = \{0\} \times I, \quad \widetilde{h}_i(\{1\} \times I) = \{1\} \times I,$$

$$\widetilde{h}_i(G(z_k)) = I \times \{k/3\}, \qquad k = 1, 2.$$

Непосредственная проверка показывает справедливость соотношения $\widetilde{h}_i \circ h_i(D_i \cap \Phi(N)) \subset (I \times [1/3,\ 2/3])$.

Заменим гомеоморфизм h_i на $\widetilde{h}_i \circ h_i : D_i \to I^2$ (новый гомеоморфизм будем по-прежнему обозначать h_i).

Отметим, что

$$h_i^{-1}((0,1)\times\{k/3\}) = \Phi\circ F(\Phi^{-1}(z_k))((0,t(z_k)))\subset \operatorname{Int} X''$$

для $k=1,2$.

Рассмотрим множество

$$A = \partial X''\setminus h_i^{-1}\left((\{0\}\times(0,1))\cup(\{1\}\times(0,1))\right).$$

Так как

$$h_i(A)\cap(I\times\{k/3\}) = \varnothing, \qquad k=1,2,$$

и множества $h_i(A)$, $I\times\{k/3\}$, $k=1,2$, — компактны, то найдется $\varepsilon\in(0,1/3)$ такое, что

$$h_i(A)\cap(I\times[1/3-\varepsilon,\ 1/3]) = \varnothing,$$
$$h_i(A)\cap(I\times[2/3,\ 2/3+\varepsilon]) = \varnothing.$$

Значит,

$$\begin{aligned} &h_i(\partial X'')\cap(I\times[1/3-\varepsilon,1/3]) = \\ &\qquad = (\{0\}\times[1/3-\varepsilon,1/3])\cup(\{1\}\times[1/3-\varepsilon,1/3]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &h_i(\partial X'')\cap(I\times[2/3,2/3+\varepsilon]) = \\ &\qquad = (\{0\}\times[2/3,2/3+\varepsilon])\cup(\{1\}\times[2/3,2/3+\varepsilon]).\end{aligned}$$

Далее,

$$h_i(\partial X'')\cap((0,1)\times[1/3-\varepsilon,1/3]) = \varnothing$$

и

$$h_i^{-1}\left((0,1)\times\{1/3\}\right)\subset \operatorname{Int} X'',$$

поэтому

$$h_i^{-1}\left((0,1)\times\{1/3-\varepsilon\}\right)\subset \operatorname{Int} X''.$$

Аналогично,

$$h_i^{-1}\left((0,1)\times\{2/3+\varepsilon\}\right)\subset \operatorname{Int} X''.$$

Обозначим $J^2 = I\times[1/3-\varepsilon,2/3+\varepsilon]$. Покажем, что

$$\begin{gathered} h_i^{-1}(J^2)\subset X'',\\ h_i^{-1}\left((0,1)\times[1/3-\varepsilon,2/3+\varepsilon]\right)\subset \operatorname{Int} X''. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Так как $h_i^{-1}\left((0,1)\times[1/3-\varepsilon,2/3+\varepsilon]\right)\cap \mathrm{Int}\, X''\neq\varnothing$, нам достаточно показать, что

$$h_i^{-1}\left((0,1)\times[1/3-\varepsilon,2/3+\varepsilon]\right)\cap\partial X''=\varnothing.$$

Пусть β_{j_1}, β_{j_2} — компоненты края многообразия X'', содержащие множества $h_i^{-1}(\{0\}\times I)$ и $h_i^{-1}(\{1\}\times I)$ соответственно (каждая из этих компонент гомеоморфна окружности, причем может случиться так, что $j_1=j_2$).

Поскольку $h_i^{-1}(J^2)\subset D_i\subset V_i=V(y_i)$ и по построению

$$(\partial X''\setminus(\beta_{j_1}\cup\beta_{j_2}))\cap V_i=\varnothing,$$

то $(h_i^{-1}(J^2)\cap\partial X'')\subset(\beta_{j_1}\cup\beta_{j_2})$.

Заметим, что множество

$$\widetilde{A}=(\beta_{j_1}\cup\beta_{j_2})\setminus\big(h_i^{-1}(\{0\}\times(0,1))\cup h_i^{-1}(\{1\}\times(0,1))\big)$$

гомеоморфно несвязному объединению двух интервалов, поэтому для каждого $z\in\widetilde{A}$ найдется непрерывный путь $\beta_z: I\to\widetilde{A}$, соединяющий точку z с одной из точек

$$h_i^{-1}(\{k_1\}\times\{k_2\}),\qquad k_1,\qquad k_2=0,1.$$

Предположим, что существует

$$z\in\widetilde{A}\cap h_i^{-1}\left((0,1)\times[1/3-\varepsilon,2/3+\varepsilon]\right).$$

Так как точки $h_i^{-1}(\{k_1\}\times\{k_2\})$, k_1, $k_2=0,1$, лежат в

$$M^2\setminus h_i^{-1}(J^2),$$

то найдется $t\in I$, для которого $\beta_z(t)\in\partial(h_i^{-1}(J^2))$.

С другой стороны,

$$\begin{gathered}\big(\partial(h_i^{-1}(J^2))\cap(\beta_{j_1}\cup\beta_{j_2})\big)\subset\\ \subset\big(h_i^{-1}(\{0\}\times(0,1))\cup h_i^{-1}(\{1\}\times(0,1))\big)\\ \subset\Big((\beta_{j_1}\cup\beta_{j_2})\setminus\widetilde{A}\Big).\end{gathered}$$

Поэтому

$$h_i^{-1}\left((0,1)\times[1/3-\varepsilon,2/3+\varepsilon]\right)\cap\partial X''=\varnothing,$$

и значит, выполняются включения (3.17).

Положим $\widetilde{D}_i = h_i^{-1}(J^2)$. Это, очевидно, и будет искомый диск.

Следовательно построено семейство замкнутых дисков $\{D_i\}_{i=1}^n$ и соответствующие им гомеоморфизмы

$$h_i : D_i \to I^2,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\Phi(N) \cap (\bigcup_{i=1}^n D_i) = G_r$;
(ii) $D_i \subset X''$, $i = 1, \ldots, n$;
(iii) $(D_i \cap \partial X'') = h_i^{-1}(\{0\} \times I) \cup h_i^{-1}(\{1\} \times I)$, $i = 1, \ldots, n$;
(iv) $(D_i \cap G_r) \subset h_i^{-1}(I \times (0, 1))$, $i = 1, \ldots, n$.

Покажем, как заменить этот набор на другой набор дисков

$$\{\widehat{D}_j\}_{j=1}^m, \quad m \leq n,$$

который будет удовлетворять свойствам (i) – (iv) и вдобавок такой, что

$$\widehat{D}_j \cap \widehat{D}_k = \varnothing$$

при всех $j \neq k$, j, $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Пусть для некоторых i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ множества

$$\Phi(N) \cap D_{i_1} \qquad \text{и} \qquad \Phi(N) \cap D_{i_2}$$

не пересекаются. Покажем, что диски D_{i_1}, $D_{i_2} \subset X''$, удовлетворяющие теореме 3.18, можно подобрать так, чтобы выполнялось равенство $D_{i_1} \cap D_{i_2} = \varnothing$.

Пусть, как и раньше, $h_{i_k} : D_{i_k} \to I^2$, $k = 1, 2$, — гомеоморфизмы, для которых

$$((I \times \{1/3\}) \cup (I \times \{2/3\})) \subset h_{i_k}(\Phi(N) \cap D_{i_k}),$$

$$h_{i_k}(\Phi(N) \cap D_{i_k}) \subset I \times [1/3,\ 2/3].$$

Поскольку

$$I \times \{k/3\} \subset h_{i_1}(\Phi(N) \cap D_{i_1})$$

и

$$h_{i_1}(\Phi(N)\cap D_{i_1})\cap h_{i_1}(D_{i_2})=\varnothing,$$

то $(I\times\{k/3\})\cap h_{i_1}(D_{i_2})=\varnothing$, $k=1,2$. Покажем, что

$$((0,1)\times[1/3,\ 2/3])\cap h_{i_1}(D_{i_2})=\varnothing. \tag{3.18}$$

Пусть это не так, и найдется

$$z\in h_{i_1}^{-1}\left((0,1)\times[1/3,2/3]\right)\cap D_{i_2}.$$

Поскольку $h_{i_1}^{-1}\left((0,1)\times[1/3,2/3]\right)\subset \operatorname{Int}X''$, то

$$h_{i_2}(z)\in(0,1)\times I.$$

Пусть $h_{i_2}(z)=\{\tau_1\}\times\{\tau_2\}$ для каких-нибудь $\tau_1\in(0,1)$, $\tau_2\in I$. Далее, найдется непрерывный путь

$$\alpha: I\to(0,1)\times I,$$

соединяющий точку $h_{i_2}(z)$ с точкой

$$\{\tau_1\}\times\{1/3\}\in I\times\{1/3\}.$$

Положим, например,

$$\alpha(t)=\{\tau_1\}\times\{(1-t)\tau_2+t/3\},\quad t\in I.$$

Так как

$$h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(1)=h_{i_2}^{-1}(\{\tau_1\}\circ\{1/3\})\in(D_{i_2}\cap\Phi(N)),$$

то $h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(1)\in X''\setminus D_{i_1}$ и тем более,

$$h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(1)\in X''\setminus h_{i_1}^{-1}\left((0,1)\times[1/3,2/3]\right).$$

Поэтому найдется $t\in I$, для которого

$$h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(t)\in\partial\left(h_{i_1}^{-1}\left((0,1)\times[1/3,2/3]\right)\right).$$

Включение $\alpha(I)\subset(0,1)\times I$ влечет $h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(I)\subset\operatorname{Int}X''$, отсюда

$$h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(t)\notin\left(h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times[1/3,2/3])\cup h_{i_1}^{-1}(\{1\}\times[1/3,2/3])\right).$$

С другой стороны,

$$h_{i_2}^{-1}\circ\alpha(t)\notin\left(h_{i_1}^{-1}((0,1)\times\{1/3\})\cup h_{i_1}^{-1}((0,1)\times\{2/3\})\right),$$

поскольку последнее множество не пересекается с D_{i_2}.

Следовательно, не существует

$$z \in h_{i_1}^{-1}\left((0,1)\times[1/3,2/3]\right)\cap D_{i_2}$$

и справедливость равенства (3.18) установлена.

Покажем, кроме того, что

$$\big(h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times[1/3,\,2/3])\cup h_{i_1}^{-1}(\{1\}\times[1/3,\,2/3])\big)\cap D_{i_2}=\varnothing.$$

Так как по построению

$$\{k_1\}\times\{k_2/3\}\in h_{i_1}(\Phi(N)),$$

$k_1\in\{0,1\}$, $k_2\in\{1,2\}$, а по условию

$$(D_{i_1}\cap\Phi(N)))\cap((D_{i_2}\cap\Phi(N))))=\varnothing,$$

то нам достаточно проверить равенство

$$\big(h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times(1/3,\,2/3))\cup h_{i_1}^{-1}(\{1\}\times(1/3,\,2/3))\big)\cap D_{i_2}=\varnothing.$$

Пусть β_j — компонента края многообразия X'', содержащая множество $h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times(1/3,2/3))$ (эта компонента гомеоморфна окружности). Как известно (см. [37]), любое вложение окружности в двумерное многообразие является локально плоским. Поэтому для каждого

$$z\in h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times(1/3,2/3))$$

в многообразии M^2 найдется карта (V,φ), для которой

$$\varphi(V)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,|\,x_1^2+x_2^2<1\},$$
$$\varphi(\beta_j\cap V)=\{(x_1,x_2)\in\varphi(V)\,|\,x_2=0\}.$$

Множество

$$h_{i_1}^{-1}(I\times\{1/3\})\cup h_{i_1}^{-1}(I\times\{2/3\})\cup h_{i_1}^{-1}(\{1\}\times[1/3,2/3])$$

компактно и не содержит точку z, а значит, окрестность V можно уменьшить так, чтобы в дополнение к двум предыдущим выполнялось еще и условие

$$V\cap\partial\left(h_{i_1}^{-1}(I\times[1/3,\,2/3])\right)\subset h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times(1/3,\,2/3)).$$

Поскольку последнее множество гомеоморфно интервалу, граница которого лежит, по построению, вне V, то

$$V \cap \beta_j \subset h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times (1/3,\, 2/3)).$$

Множество $V \setminus \beta_i$ имеет две компоненты связности, одна из которых лежит в $M^2 \setminus X''$, а другая — в

$$h_{i_1}^{-1}((0,1) \times (1/3, 2/3)).$$

Следовательно, $V \cap \operatorname{Int} D_{i_2} = \varnothing$ и $z \notin D_{i_2}$.

Аналогично доказывается, что

$$h_{i_1}^{-1}(\{1\} \times (1/3, 2/3)) \cap D_{i_2} = \varnothing.$$

Итак,

$$(I \times [1/3, 2/3]) \cap h_{i_1}(D_{i_2}) = \varnothing.$$

Так как множества $I \times [1/3, 2/3]$ и $h_{i_1}(D_{i_2})$ — компактны и не пересекаются, то найдется $\varepsilon \in (0, 1/3)$, для которого

$$(I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]) \cap h_{i_1}(D_{i_2}) = \varnothing.$$

Положим

$$\widetilde{D}_{i_1} = h_{i_1}^{-1}(I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]).$$

Множества $\widetilde{D}_{i_1}$, D_{i_2} будут составлять искомую пару непересекающихся дисков.

Пусть теперь

$$(D_{i_1} \cap \Phi(N)) \cap (D_{i_2} \cap \Phi(N)) \neq \varnothing$$

для некоторых i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, n\}$.

Далее, пусть $(D_{i_1} \cap \Phi(N)) \subset D_{i_2}$. Тогда диск D_{i_1} можно исключить из рассмотрения, потому что оставшиеся диски $\{D_i\}_{i \neq i_1}$ все равно образуют покрытие множества G_r. Аналогично, если имеет место неравенство $(D_{i_2} \cap \Phi(N)) \subset D_{i_1}$, то диск D_{i_2} можно исключить из рассмотрения.

Предположим, что

$$(D_{i_1} \cap \Phi(N)) \setminus (D_{i_2} \cap \Phi(N)) \neq \varnothing,$$

$$(D_{i_2} \cap \Phi(N)) \setminus (D_{i_1} \cap \Phi(N)) \neq \varnothing.$$

Покажем, что пару дисков D_{i_1}, D_{i_2} можно заменить на пару непересекающихся дисков $\widetilde{D}_{i_1}$, $D_{i_2} \subset X''$, $\widetilde{D}_{i_1} \subset D_{i_1}$, удовлетворяющих теореме 3.18, для которых

$$\left(\widetilde{D}_{i_1} \cup D_{i_2}\right) \cap \Phi(N) = (D_{i_1} \cup D_{i_2}) \cap \Phi(N).$$

Пусть $z_0 \in D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \Phi(N)$. Найдется $y_0 \in H_r$ такое, что

$$z_0 \in G(y_0) = \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))([0, t(y_0)]).$$

Тогда $G(y_0) \subset (D_{i_1} \cap D_{i_2})$.

Пусть $h_{i_k} : D_{i_k} \to I^2$, $k = 1, 2,$ — гомеоморфизмы из теоремы 3.18.

Пусть β_j — компонента края многообразия X'', содержащая точку y_0. Мы считаем, что $t(y_0) > 0$. При $t(y_0) < 0$ вместо y_0 надо рассматривать точку

$$\Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_0))(t(y_0)).$$

Так как

$$y_0 \in h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times I) \cap h_{i_2}^{-1}(\{0\} \times I)$$

и множества $h_{i_k}^{-1}(\{0\} \times I)$, $k = 1, 2,$ — связны, то

$$h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times I) \cup h_{i_2}^{-1}(\{0\} \times I) \subset \beta_j.$$

Множество $h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times I)$ замкнуто в M^2, и значит, множество $h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times I) \cap \Phi(N)$ — замкнуто в $\beta_j \cap \Phi(N)$.

Поскольку

$$\left(h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times I) \cap \Phi(N)\right) \subset h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times (0, 1))$$

и множество $h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times (0, 1))$ открыто в β_j, то множество $h_{i_1}^{-1}(\{0\} \times I) \cap \Phi(N)$ открыто в $\beta_j \cap \Phi(N)$.

Аналогично, $h_{i_2}^{-1}(\{0\} \times I) \cap \Phi(N)$ — открыто-замкнутое подмножество $\beta_j \cap \Phi(N)$.

Следовательно, $(h_{i_1}^{-1}(\{0\}\times I)\setminus h_{i_2}^{-1}(\{0\}\times I))\cap\Phi(N)$ — открыто-замкнутое подмножество $\beta_j\cap\Phi(N)$ и множество

$$\big((\{0\}\times I)\setminus h_{i_1}\circ h_{i_2}^{-1}(\{0\}\times I)\big)\cap h_{i_1}\circ\Phi(N)= \\ =((\{0\}\times I)\setminus h_{i_1}(D_{i_2}))\cap h_{i_1}\circ\Phi(N)$$

является открыто-замкнутым подмножеством в

$$(\{0\}\times I)\cap h_{i_1}\circ\Phi(N).$$

Согласно нашему предположению, найдется

$$z_1\in(D_{i_1}\setminus D_{i_2})\cap\Phi(N).$$

Существует $y_1\in H_r$, для которого $z_1\in G(y_1)$. Тогда

$$G(y_1)\subset((D_{i_1}\setminus D_{i_2})\cap\Phi(N))$$

и множество

$$((\{0\}\times I)\setminus h_{i_1}(D_{i_2}))\cap h_{i_1}\circ\Phi(N)$$

не пусто, так как оно содержит одну из точек

$$h_{i_1}\circ\Phi\circ F(\Phi^{-1}(y_1))(t(y_1))\qquad\text{или}\qquad h_{i_1}(y_1)$$

Далее, множество

$$(\{0\}\times(0,1))\cap h_{i_1}(\Phi(N))=(\{0\}\times I)\cap h_{i_1}(\Phi(N))$$

гомеоморфно открыто-замкнутому подмножеству некоторого слоя расслоения $\xi=(N,p,S^1)$ (см. теорему 3.18), поэтому оно не содержит изолированных точек, причем его открыто-замкнутое подмножество

$$((\{0\}\times I)\setminus h_{i_1}(D_{i_2}))\cap h_{i_1}(\Phi(N))$$

состоит более чем из одной точки.

Следовательно, найдутся $x_1,\ x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, для которых

$$\{0\}\times\{x_k\}\in h_{i_1}(\Phi(N))\setminus h_{i_1}(D_{i_2}),\quad k=1,2,$$

$$x_1=\min\{x\in I\,|\,\{0\}\times\{x\}\in h_{i_1}(\Phi(N))\setminus h_{i_1}(D_{i_2})\},$$

$$x_2=\max\{x\in I\,|\,\{0\}\times\{x\}\in h_{i_1}(\Phi(N))\setminus h_{i_1}(D_{i_2})\}.$$

Гомеоморфизм $h_{i_1}: D_{i_1} \to I^2$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $x_k = k/3$ и

$$I \times \{x_k\} \subset h_{i_1}(\Phi(N)), \qquad k = 1, 2.$$

Тогда

$$I \times \{x_k\} \subset h_{i_1}(\Phi(N)) \setminus h_{i_1}(D_{i_2}), \quad k = 1, 2,$$
$$h_{i_1}(\Phi(N)) \setminus h_{i_1}(D_{i_2}) \subset I \times [1/3,\, 2/3].$$

Покажем, что

$$(I \times [1/3,\, 2/3]) \cap h_{i_1}(D_{i_2}) = \varnothing. \tag{3.19}$$

Фиксируем $z_2 \in (D_{i_2} \setminus D_{i_1}) \cap \Phi(N)$. Найдется такое $y_2 \in H_r$, для которого $z_2 \in G(y_2)$. Тогда и

$$G(y_2) \subset (D_{i_2} \setminus D_{i_1}) \cap \Phi(N).$$

Поскольку

$$G(y_2) \cap \partial X'' = y_2 \cup \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_2))(t(y_2)),$$

и $y_2 \neq \Phi \circ F(\Phi^{-1}(y_2))(t(y_2))$, то найдется $z' \in G(y_2) \cap \operatorname{Int} X''$.

Пусть

$$z'' \in \left(h_{i_1}^{-1}((0,1) \times [1/3, 2/3]) \cap D_{i_2}\right) \subset \operatorname{Int} X''.$$

Так как $D_{i_2} \cap \operatorname{Int} X'' = h_{i_2}^{-1}((0,1) \times I)$, то

$$h_{i_2}(z'),\ h_{i_2}(z'') \in (0,1) \times I.$$

Можно построить непрерывный путь $\alpha : I \to (0,1) \times I$, соединяющий точки $h_{i_2}(z')$ и $h_{i_2}(z'')$.

Поскольку

$$z' \in G(y_2) \subset (D_{i_2} \setminus D_{i_1}) \subset \left(D_{i_2} \setminus h_{i_1}^{-1}((0,1) \times [1/3, 2/3])\right),$$
$$z'' \in h_{i_1}^{-1}((0,1) \times [1/3, 2/3]),$$

то найдется $t_0 \in I$ такое, что

$$h_{i_2}^{-1} \circ \alpha(t_0) \in \partial\left(h_{i_1}^{-1}((0,1) \times [1/3, 2/3])\right) \cap \operatorname{Int} X'' =$$
$$= h_{i_1}^{-1}((0,1) \times \{1/3\}) \cup h_{i_1}^{-1}((0,1) \times \{2/3\}),$$

а это невозможно, так как последнее множество лежит по построению в $X'' \setminus D_{i_2}$.

Следовательно,

$$((0,1) \times [1/3,\ 2/3]) \cap h_{i_1}(D_{i_2}) = \varnothing.$$

Это соотношение влечет (см. выше)

$$[(\{0\} \times (1/3,\ 2/3)) \cup (\{1\} \times (1/3,\ 2/3))] \cap h_{i_1}(D_{i_2}) = \varnothing.$$

Наконец, вспомним, что

$$h_{i_1}^{-1}(I \times \{k/3\}) \subset \Phi(N) \setminus D_{i_2}, \quad k = 1, 2.$$

Итак, справедливость соотношения (3.19) установлена.

Поскольку компакты $I \times [1/3, 2/3]$ и $h_{i_1}(D_{i_2})$ не пересекаются, то найдется $\varepsilon \in (0, 1/3)$, для которого

$$(I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]) \cap h_{i_1}(D_{i_2}) = \varnothing.$$

Положим $\widetilde{D}_{i_1} = h_{i_1}^{-1}(I \times [1/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon])$. Диск $\widetilde{D}_{i_1}$, очевидно, удовлетворяет условиям из теоремы 3.18. При этом

$$\widetilde{D}_{i_1} \cap D_{i_2} = \varnothing, \quad (D_{i_1} \cap \Phi(N)) \setminus D_{i_2} \subset \widetilde{D}_{i_1}.$$

Значит, $\widetilde{D}_{i_1}$, D_{i_2} — искомая пара дисков.

Фиксируем конечный набор $\{D_i\}_{i=1}^n$ замкнутых дисков, удовлетворяющий свойствам (i) – (iv).

(a) Построим по индукции последовательность

$$D_n^0 \supseteq D_n^1 \supseteq \ldots \supseteq D_n^{n-1} = \widehat{D}_n$$

замкнутых дисков, удовлетворяющих условиям из теоремы 3.18, такую, что набор дисков $D_1, \ldots, D_{n-1}, \widehat{D}_n$ удовлетворяет свойствам (i) – (iv) и $D_i \cap \widetilde{D}_n = \varnothing$, $i = 1, \ldots, n-1$.

База индукции. $D_n^0 = D_n$.

Шаг индукции. Пусть уже построен диск

$$D_n^k,\ k \in \{0, \ldots, n-2\},$$

такой, что набор дисков $D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n^k$ удовлетворяет свойствам (i) – (iv) и $D_i \cap D_n^k = \varnothing$ при $i \le k$.

Если множества $D_n^k \cap \Phi(N)$ и $D_{k+1} \cap \Phi(N)$ не пересекаются, то найдем замкнутый диск $\widetilde{D}_n^k \subseteq D_n^k$, удовлетворяющий условиям из теоремы 3.18 и такой, что

$$(\widetilde{D}_n^k \cup D_{k+1}) \cap \Phi(N) = (D_n^k \cup D_{k+1}) \cap \Phi(N)$$

и

$$\widetilde{D}_n^k \cap D_{k+1} = \varnothing$$

(см. выше). Положим $D_n^{k+1} = \widetilde{D}_n^k$.

Пусть теперь $D_n^k \cap D_{k+1} \cap \Phi(N) \neq \varnothing$.

Если $\left(D_n^k \setminus D_{k+1}\right) \cap \Phi(N) = \varnothing$, положим $D_n^{k+1} = \varnothing$. В противном случае рассмотрим пару дисков D_n^k и D_{k+1} и заменим диск D_n^k на $D_n^{k+1} = \widetilde{D}_n^k \subseteq D_n^k$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения $D_n^{k+1} \cap D_{k+1} = \varnothing$ и

$$(D_n^{k+1} \cup D_{k+1}) \cap \Phi(N) = (D_n^k \cup D_{k+1}) \cap \Phi(N)$$

(см. выше).

Очевидно, что набор дисков $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n^{k+1}$ обладает свойствами (i) – (iv) и $D_i \cap D_n^{k+1} = \varnothing$ при $i \le k+1$.

(b) Пусть для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ уже построен набор замкнутых дисков

$$D_1, \dots, D_j, \widehat{D}_{j+1}, \dots, \widehat{D}_n,$$

который удовлетворяет свойствам (i) – (iv) и такой, что $\widehat{D}_i \cap \widehat{D}_l = \varnothing$ при $i \neq l$, $i, l \in \{j+1, \dots, n\}$, и $\widehat{D}_i \cap D_k = \varnothing$ для всех $i \in \{j+1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, j\}$.

Повторяя рассуждения пункта (a), построим по индукции последовательность

$$D_j = D_j^0 \supseteq D_j^1 \supseteq \ldots \supseteq D_j^{n-1} = \widehat{D}_j$$

замкнутых дисков, которые удовлетворяют условиям теоремы 3.18, такую, что набор дисков

$$D_1, \dots, D_{j-1}, \widehat{D}_j, \dots, \widehat{D}_n$$

удовлетворяет свойствам (i) – (iv) и

$$D_l \cap \widehat{D}_j = \varnothing,\ l = 1, \ldots, j-1.$$

Так как $\widehat{D}_j \subseteq D_j$, то $\widehat{D}_l \cap \widehat{D}_j \subseteq \widehat{D}_l \cap D_j = \varnothing, l \in \{j+1, \ldots, n\}$.

(c) По индукции, набор

$$\widehat{D}_1, \ldots, \widehat{D}_n$$

удовлетворяет свойствам (i) – (iv) и $\widehat{D}_i \cap \widehat{D}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Некоторые элементы из этого набора по построению могут оказаться пустыми, однако набор содержит по крайней мере один непустой элемент в силу свойства (i) и предположения, что $G_r \neq \varnothing$.

Поэтому, исключая из рассмотрения пустые элементы набора дисков $\{\widehat{D}_i\}_{i=1}^n$, получаем непустой конечный набор замкнутых дисков $\{\widehat{D}_i\}_{i=1}^m$, $m \leq n$, удовлетворяющий требуемым свойствам.

Непосредственная проверка показывает, что множество

$$\mathrm{Cl}\left(X'' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i\right) = X$$

представляет собой компактное двумерное многообразие с краем, для которого $\Phi(R) \subset G_s = (X \cap \Phi(N))$. Поскольку

$$G_s \cap \partial X = G_s \cap \partial X'' = H_s$$

и $H_s \cap \Phi(R) = \varnothing$, то $\Phi(R) \subset \mathrm{Int}\, X$ и многообразие X удовлетворяет утверждению леммы.

Лемма 3.20 доказана.

3.9. Доказательства лемм

Определение 3.29. ***Жорданова область*** *на плоскости $\mathbb{R}^2$ или двумерной сфере S^2 — это открытая область, границей которой является образ жордановой кривой.*

Для доказательства леммы 3.25 нам понадобится следующее утверждение (см. [147]).

Теорема 3.30 (Керекьярто). *Пускай J_1 и J_2 — две простые замкнутые кривые, имеющие более одной общей точки. Тогда все компоненты дополнения до $J_1 \cup J_2$ являются жордановыми областями.*

Доказательство леммы 3.25. Пусть области

$$V_1, \dots, V_n \subseteq S^2$$

удовлетворяют условиям леммы. Сначала мы проверим следующее утверждение: найдется $j \in \{1, \dots, n\}$ такое, что множество

$$\bigcup_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ i \neq j}} V_i$$

связно, иными словами, из набора $V_1, \dots, V_n$ можно выбрать $n-1$ множество так, чтобы объединение выбранных множеств было связно.

Предположим, что это утверждение не верно. Тогда существует $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$, для которого

(а) найдутся k множеств из набора

$$V_1, \dots, V_n,$$

объединение которых связно;

(б) объединение любых $k+1$ множеств из набора

$$V_1, \dots, V_n$$

— несвязно.

Все области $V_1, \dots, V_n$ гомеоморфны открытым двумерным дискам, в частности, они являются связными множествами. Это следует из теоремы Шёнфлиса (см. [147]). Поэтому, так как случай $k = 1$ не исключается, даже если объединение любых двух множеств из набора $V_1, \dots, V_n$

несвязно, то существует k, удовлетворяющее условиям (а) и (б).

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что множество $W_k = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ связно. Если для всех $m \in \{k+1, \ldots, n\}$ пересечение $W_k \cap V_m$ пусто, то

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=k+1}^{n} V_j\right) = \varnothing$$

и множество $V_1 \cup \ldots \cup V_n$ распадается на два непересекающихся открытых подмножества, а это противоречит предположению о его связности.

Значит, найдётся $m \in \{k+1, \ldots, n\}$ такое, что

$$(V_1 \cup \ldots \cup V_k) \cap V_m \neq \varnothing.$$

Так как оба множества W_k и V_m открытые и связные, то и их объединение $V_1 \cup \ldots \cup V_k \cup V_m$ является связным множеством, а это противоречит выбору k.

Докажем утверждение леммы индукцией по числу областей n.

База индукции. При $n = 1$ утверждение леммы следует из теоремы Жордана о кривой (см. [147]).

Шаг индукции. Предположим, что лемма справедлива для любого семейства из n областей, удовлетворяющих её условиям.

Пусть семейство $V_1 \cup \ldots \cup V_n \cup V_{n+1}$ удовлетворяет условиям леммы. Мы уже доказали, что из него можно выбрать n множеств так, что их объединение будет связно.

Не ограничивая общности, будем считать что множество

$$W_n = V_1 \cup \ldots \cup V_n$$

связно.

Так как

$$\begin{aligned} R_n &= \mathrm{Cl}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(V_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (V_i \cup \gamma_i(S^1)) = \\ &= \Big(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i(S^1)\Big), \end{aligned}$$

множества R_n и $\Gamma_n = \gamma_1(S^1) \cup \ldots \cup \gamma_n(S^1)$ — замкнуты, а множество W_n — открыто, тогда все граничные точки любой компоненты дополнения до R_n содержатся в множестве Γ_n. Из этого легко следует, что любая компонента дополнения до R_n является такой компонентой дополнения до Γ_n, что она не имеет общих точек с множеством W_n.

Пусть U — связная компонента множества

$$S^2 \setminus R_{n+1} = S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{Cl}(V_i).$$

Обозначим через U_0 ту компоненту множества

$$S^2 \setminus R_n = S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(V_i),$$

которая содержит множество U. По предположению индукции множество U_0 является жордановой областью. Поэтому, найдется простая замкнутая кривая $\mu : S^1 \to S^2$ такая, что $\partial U_0 = \mu(S^1) \subseteq \Gamma_n$.

Обозначим $\Gamma_{n+1} = \gamma_1(S^1) \cup \ldots \cup \gamma_{n+1}(S^1)$. Так как

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(U_0) \cap \Gamma_{n+1} &= \mathrm{Cl}(U_0) \cap (\Gamma_n \cup \gamma_{n+1}(S^1)) = \\ &= (\mathrm{Cl}(U_0) \cap \Gamma_n) \cup (\mathrm{Cl}(U_0) \cap \gamma_{n+1}(S^1)) = \\ &= \mu(S^1) \cup (\mathrm{Cl}(U_0) \cap \gamma_{n+1}(S^1)) \subseteq \\ &\subseteq \mu(S^1) \cup \gamma_{n+1}(S^1), \end{aligned}$$

тогда все граничные точки связной области U лежат в компактном множестве $\mu(S^1) \cup \gamma_{n+1}(S^1) \subseteq \Gamma_{n+1}$, причем сама область U не имеет с этим множеством общих точек. Поэтому область U является одной из компонент дополнения

$$S^2 \setminus (\mu(S^1) \cup \gamma_{n+1}(S^1)).$$

Согласно теореме Жордана о кривой, простая замкнутая кривая γ_{n+1} разбивает сферу S^2 на две связных компоненты V_{n+1} и $\widehat{V}_{n+1}$. Так как $\gamma_{n+1}(S^1) \cup V_{n+1} \subseteq R_{n+1}$, то $S^2 \setminus R_{n+1} \subseteq \widehat{V}_{n+1}$. Поэтому и $U \subseteq \widehat{V}_{n+1}$.

Аналогично, дополнение $S^2 \setminus \mu(S^1)$ имеет две связные компоненты U_0 и $\widehat{U}_0$, причем

$$W_n = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subseteq \widehat{U}_0.$$

По условию леммы множество $W_n \cup V_{n+1}$ связно, поэтому множество $V_{n+1} \cap \widehat{U}_0$ не пусто, так как содержит непустое подмножество $W_n \cap V_{n+1}$.

Если $V_{n+1} \subseteq \widehat{U}_0$, то $\gamma_{n+1}(S^1) \subseteq \mathrm{Cl}(\widehat{U}_0)$ и

$$\gamma_{n+1}(S^1) \cap U_0 = \gamma_{n+1}(S^1) \cap (S^2 \setminus \mathrm{Cl}(\widehat{U}_0)) = \varnothing.$$

Поэтому связное открытое множество U_0 лежит в дополнении

$$S^2 \setminus (\gamma_{n+1}(S^1) \cup \mu(S^1))$$

и $U_0 = U$ (по определению $U \subseteq U_0$ — связная компонента указанного дополнения). По предположению индукции множество U_0 является жордановой областью, а тогда и множество U — жорданова область если только $V_{n+1} \subseteq \widehat{U}_0$.

Если $\widehat{U}_0 \subseteq V_{n+1}$, то и $W_n \subseteq V_{n+1}$. И значит,

$$R_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{Cl}(V_i) = \mathrm{Cl}(V_{n+1})$$

и $S^2 \setminus R_{n+1} = \widehat{V}_{n+1}$. В этом случае $U = \widehat{V}_{n+1}$ — жорданова область по теореме Жордана о кривой.

Предположим теперь, что $\widehat{U}_0 \setminus V_{n+1} \neq \varnothing$ и $V_{n+1} \setminus \widehat{U}_0 \neq \varnothing$.

Напомним, что по построению $V_{n+1} \cap \widehat{U}_0 \neq \varnothing$. Кроме того, выполняется неравенство $U \subseteq \widehat{V}_{n+1} \cap U_0$, следовательно $\widehat{V}_{n+1} \cap U_0 \neq \varnothing$.

Так как

$$\widehat{U}_0 \setminus V_{n+1} = \widehat{U}_0 \cap (\gamma_{n+1}(S^1) \cup \widehat{V}_{n+1}) = \\ = (\widehat{U}_0 \cap \gamma_{n+1}(S^1)) \cup (\widehat{U}_0 \cap \widehat{V}_{n+1}) \neq \varnothing,$$

то по крайней мере одно из множеств, $\widehat{U}_0 \cap \gamma_{n+1}(S^1)$ или $\widehat{U}_0 \cap \widehat{V}_{n+1}$, не пусто.

Пусть найдется $x_0 \in \widehat{U}_0 \cap \gamma_{n+1}(S^1)$. Множество $\gamma_{n+1}(S^1)$ по теореме Жордана о кривой является общей границей обеих компонент V_{n+1} и $\widehat{V}_{n+1}$ дополнения S^2 до γ_{n+1}, поэтому открытая окрестность $\widehat{U}_0$ точки $x_0 \in \gamma_{n+1}(S^1)$ содержит как точки множества V_{n+1}, так и точки множества $\widehat{V}_{n+1}$. Значит, $\widehat{U}_0 \cap \widehat{V}_{n+1} \neq \varnothing$.

Аналогично, из соотношения $V_{n+1} \setminus \widehat{U}_0 \neq \varnothing$ следует

$$U_0 \cap V_{n+1} \neq \varnothing.$$

Открытое множество U_0 связно и пересекается с обеими компонентами V_{n+1} и $\widehat{V}_{n+1}$ дополнения $S^2 \setminus \gamma_{n+1}(S^1)$. Поэтому оно должно пересекаться и с их общей границей $\gamma_{n+1}(S^1)$. Пусть $x \in U_0 \cap \gamma_{n+1}(S^1)$.

По аналогии с предыдущим, из неравенств

$$\widehat{U}_0 \cap V_{n+1} \neq \varnothing \qquad \text{и} \qquad \widehat{U}_0 \cap \widehat{V}_{n+1} \neq \varnothing$$

вытекает, что существует $\widehat{x} \in \widehat{U}_0 \cap \gamma_{n+1}(S^1)$.

Так как $U_0 \cap \widehat{U}_0 = \varnothing$, то точки x и $\widehat{x}$ различны.

Кривая γ_{n+1} делится точками x и $\widehat{x}$ на две простые непрерывные дуги α_1, $\alpha_2 : I \to S^2$ с общими концами

$$x = \alpha_i(0), \qquad \widehat{x} = \alpha_i(1), \qquad i = 1, 2,$$

и такие, что

$$\begin{aligned} \alpha_1(I) \cup \alpha_2(I) &= \gamma_{n+1}(S^1), \\ \alpha_1(I) \cap \alpha_2(I) &= \{x, \widehat{x}\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Множество $\alpha_1(I)$ связно,

$$x = \alpha_1(I) \cap U_0 \qquad \text{и} \qquad \widehat{x} = \alpha_1(I) \cap \widehat{U}_0.$$

Поэтому

$$\alpha_1(I) \cap \mu(S^1) = \alpha_1(I) \cap (S^2 \setminus (U_0 \cup \widehat{U}_0)) \neq \varnothing.$$

Очевидно, $x, \widehat{x} \notin \alpha_1(I) \cap \mu(S^1)$.

Аналогично, $\alpha_2(I) \cap \mu(S^1) \neq \varnothing$, причем

$$x, \widehat{x} \notin \alpha_2(I) \cap \mu(S^1).$$

Пусть $y_i \in \alpha_i(I) \cap \mu(S^1)$, $i = 1, 2$. Тогда из соотношений (3.20) следует, что $y_1, y_2 \in \gamma_{n+1}(S^1) \cap \mu(S^1)$ и $y_1 \neq y_2$.

Применяя теперь к жордановым кривым γ_{n+1} и μ теорему Керекьярто заключаем, что каждая из связных компонент дополнения $S^2 \setminus (\gamma_{n+1}(S^1) \cup \mu(S^1))$ является жордановой областью. В частности, U — жорданова область.

Так как компоненту U множества

$$S^2 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{Cl}(V_i) \right)$$

мы выбирали произвольно, то шаг индукции завершен и лемма полностью доказана. $\square$

Доказательство леммы 3.26. Пусть

$$M = \{x \in C^2 \mid \varphi(x) = \varphi_0 \pmod{2\pi}\}$$

— меридиан цилиндра и $M \cap \gamma$ — его пересечение с кривой γ.

Отображение $\gamma : S^1 \to C^2$ инъективно и непрерывно, S^1 — компакт. Как известно, инъективное непрерывное отображение компакта является его гомеоморфизмом на свой образ. Следовательно, $\gamma : S^1 \to \gamma(S^1)$ — гомеоморфизм и $\gamma : S^1 \to C^2$ — вложение. Согласно теореме 5.3 из [33] можно привести γ и M в общее положение, то есть существует изотопия $\chi_t : C^2 \to C^2$ такая, что $\chi_0 = \mathrm{Id} : C^2 \to C^2$, $\chi_1(\gamma)$ — непрерывная замкнутая кривая без самопересечений, пересекающая M трансверсально. Очевидно, $\pi_1(\gamma) = \pi_1(\chi_1(\gamma))$.

Так как S^1 — компакт, то кривая $\chi_1(\gamma)$ пересекает M в конечном числе точек. Пусть это будут точки

$$A_i = (1, \varphi_0, z_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Спроецируем $\chi_1(\gamma)$ на экватор γ_0 при помощи отображения $p : C^2 \to \gamma_0,\ \ p((1, \varphi, z)) = (1, \varphi, 0)$. Присвоим точке A_i знак «+», если после проектирования направление движения вдоль $\chi_1(\gamma)$ в достаточно малой окрестности точки A_i совпадет с направлением обхода экватора, и знак «−», — в противном случае.

Пусть среди точек $A_i,\ i = 1, \ldots, n$, найдутся точки, помеченные как знаком «+», так и знаком «−». Докажем, что кривую $\chi_1(\gamma)$ можно произотопировать так, что ее образ будет пересекаться с M трансверсально в тех же точках, что и $\chi_1(\gamma)$, кроме двух, $A_j \neq A_k$, одна из которых имеет знак «+», а другая — знак «−».

Кривая $\chi_1(\gamma)$ разбивается точками A_i на n интервалов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Перенумеруем точки A_i, так чтобы концами интервала

$$\gamma_i, \quad i = 1, \ldots, (n-1)$$

были точки A_i и A_{i+1}, концами интервала γ_n — точки A_n и A_1.

Сопоставим каждой точке интервала $\gamma_i \subset C^2$ одно из значений ее полярного угла так, чтобы функция

$$\varphi_i : \gamma_i \to \mathbb{R}$$

была непрерывна и $\varphi_i(A_i) = \varphi_0$. Сопоставим отрезку γ_i число

$$a_i = \max_{x \in \gamma_i} \{|\varphi_i(x) - \varphi_0|\}.$$

Так как при всех i $\gamma_i \cap M = \partial\gamma_i = A_i \cup A_{i+1}$, то кривые γ_i делятся на два класса:

(i) точки A_i и A_{i+1} имеют один знак. В этом случае имеем $\varphi_i(A_{i+1}) = \varphi_0 \pm 2\pi$ и $a_i = 2\pi$.

(ii) точки A_i и A_{i+1} имеют разные знаки. Тогда

$$\varphi_i(A_{i+1}) = \varphi_0 \qquad \text{и} \qquad a_i < 2\pi.$$

Выберем среди чисел a_i, $i = 1, \ldots, n$, минимальное. Пусть это будет число a_j для интервала γ_j. Тогда $a_j < 2\pi$.

Рассмотрим область B, ограниченную интервалом γ_j и отрезком $J \in M$, соединяющим точки A_j и A_{j+1}. ∂B — простая замкнутая кривая и $\pi_1(\partial B) = 0$ в силу выбора a_j. Поэтому B гомеоморфна двумерному диску. Для любой кривой γ_i, $i \neq j$ найдется точка x такая, что

$$|\varphi_i(x) - \varphi_0| \geq \max_{x \in \gamma_j} \{|\varphi_j(x) - \varphi_0|\}.$$

Следовательно,

$$x_i \in \gamma_i \cap (C^2 \setminus B).$$

Покажем, что при всех $i \neq j$ $B \cap \gamma_i = \varnothing$. Действительно, если бы для некоторого $i \neq j$ выполнялось соотношение $B \cap \gamma_i \neq \varnothing$, то кривая γ_i должна была бы пересечься с ∂B, что невозможно, так как $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$, $\gamma_i \cap M = \varnothing$ и $J \subset M$.

Возьмем достаточно малую окрестность U диска B и произотопируем ее на себя (неподвижно на границе) таким образом, чтобы при этом $\gamma \cap U$ перешло в компоненту связности множества $U \setminus M$, не пересекающуюся с диском B. Продолжим эту изотопию на C^2 при помощи тождественной изотопии.

При помощи конечного числа таких изотопий можно добиться, чтобы все точки пересечения кривой γ с меридианом M имели один знак.

Пусть теперь все точки A_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют один знак. Заметим, что $n = |\pi_1(\gamma)|$. Предположим, что $n \geq 2$.

Рассмотрим простую замкнутую кривую $\beta = \gamma_1 \cup J$, где $J \subset M$ — интервал, соединяющий точки A_1 и A_2. Очевидно, что $\pi_1(\beta) = \pm 1$. Кривая β делит C^2 на две связные компоненты C_1 и C_2. Пусть C_2 — та из них, в которой лежит дуга γ_2.

Пусть $t_1 = \gamma^{-1}(A_1)$ и $t_2 = \gamma^{-1}(A_2)$ — прообразы точек A_1 и A_2 на окружности S^1. Найдутся ε_1 и ε_2 такие, что

(1) окрестности $U_1 = U_{\varepsilon_1}(A_1)$ и $U_2 = U_{\varepsilon_2}(A_2)$ не пересекаются;

(2) для некоторых $\delta'_k, \delta''_k > 0$, $k = 1, 2$, выполняются равенства $\gamma^{-1}(U_k \cap \gamma) = (t_k - \delta'_k, t_k + \delta''_k)$;

(3) интервалы $\gamma((t_k - \delta'_k, t_k))$ и $\gamma((t_k, t_k + \delta''_k))$ лежат в разных компонентах связности множества
$$U_k \setminus M, \quad k = 1, 2.$$

Пусть
$$U_k \setminus M = U_k^- \cup U_k^+, \quad \gamma((t_k - \delta'_k, t_k)) \subset U_k^-,$$
$$\gamma((t_k, t_k + \delta''_k)) \subset U_k^+, \quad k = 1, 2.$$

Найдется односвязная окрестность U меридиана M такая, что $U_k \subset U$, $\;k = 1, 2$. Так как точки A_1 и A_2 имеют один знак, то множества U_1^-, U_2^- лежат в одной компоненте связности множества $U^- \cup U^+ = U \setminus M$, U_1^+, U_2^+ — в другой. Пусть

$$U_k^- \subset U^-, \quad U_k^+ \subset U^+, \quad k = 1, 2.$$

Покажем, что кривые β и $\tilde{\gamma} = \gamma \setminus (\gamma_1 \cup A_1 \cup A_2)$ не пересекаются.

Так как $\tilde{\gamma} \cap \gamma_1 = \varnothing$, то точки множества $\tilde{\gamma} \cap \beta$ должны лежать на интервале $J \subset M$. Отсюда следует, что кривые $\tilde{\gamma}$ и β могут пересекаться только в тех из точек

$$A_i, \ \ i \neq 1, 2,$$

которые лежат на интервале J, а точнее, на интервале

$$J_0 = J \setminus (U_1 \cup U_2) \subset J.$$

Найдем связную окрестность V интервала J_0, такую что $V \cap \gamma_1 = \varnothing$, $V \subset U$. Множество $V \setminus M$ имеет две компоненты связности, V^- и V^+. Так как

$$(V \setminus M) \cap (U_2 \setminus M) \neq \varnothing$$

и

$$V^+ \subset U^+, \ U_2^+ \subset U^+,$$

то $V^+ \cup U_2^+$ — связное множество.

Так как по предположению $\gamma_2 \subset C_2$, то $C_2 \cap U_2^+ \neq \varnothing$, потому что $\gamma((t_2, t_2 + \delta_2'')) = \gamma_2 \cap U_2^+ = \tilde{\gamma} \cap U_2^+ \subset U_2^+ \subset C_2$. Из связности C_2 и U_2^+ вытекает, что $U_2^+ \subset C_2$. Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что

$$\gamma((t_1 - \delta_1', t_1)) = \tilde{\gamma} \cap U_1^- \subset C_1.$$

Отсюда следует, что $V^+ \subset C_2$, $V^- \subset C_1$.

Предположим, что $A_3 \in J_0$, $t_3 = \gamma^{-1}(A_3)$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ должно выполняться включение $\gamma((t_3 - \delta, t_3)) \subset V \cap C_2 = V^+$. С другой стороны, для всех достаточно малых $\delta > 0$ $\gamma((t_3 - \delta, t_3)) \subset V^-$, потому что точка A_3 имеет тот же знак, что и A_1. Так как $V^+ \cap V^- = \varnothing$, то $A_3 \notin J_0$.

Итак, $A_3 \in C_2$. Из этого заключаем, что $\gamma_3 \subset C_2$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что $A_4 \in C_2$. А тогда и $\gamma_4 \subset C_2$, и т. д..

В результате за конечное число шагов получаем, что

$$(\bigcup_{i\neq 1} \gamma_i) \cup (\bigcup_{i\neq 1,2} A_i) = \tilde{\gamma} \subset C_2.$$

Но $\gamma((t_1-\delta_1', t_1)) \subset \tilde{\gamma}$ и $\gamma((t_1-\delta_1', t_1)) \subset U_1^- \subset C_1$. Кроме того, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Доказательство леммы 3.27. Предположим, что в семействе $\{\Theta_k\}$ имеется бесконечное подсемейство попарно негомотопных окружностей. Для простоты будем считать, что любые два различных элемента семейства $\{\Theta_k\}$ не гомотопны.

Прежде всего, исключим из рассмотрения окружности, гомотопные точке или одной из компонент края многообразия Z. Таких окружностей конечное число, так как многообразие Z — компактно.

Пусть $\chi(Z)$ — Эйлерова характеристика многообразия Z, $g(Z)$ — его род.

Доказательство леммы опирается на следующие положения.

A0. Как известно, любое двумерное компактное многообразие с краем триангулируемо [43].

Справедливо следующее утверждение, которое мы докажем несколько позже.

Лемма 3.31. *Пусть Z — компактное двумерное многообразие с краем, $\Theta : S^1 \to \operatorname{Int} Z$ — вложение.*

Найдется такая триангуляция многообразия Z и такая триангуляция окружности S^1, что отображение Θ

будет симплициальным и $\Theta(S^1)$ *будет полным подпространством симплициального пространства* Z*.*

Замечание 3.32. ***Регулярной окрестностью*** *подпространства* A *симплициального пространства* X *назовем окрестность, составленную из всех открытых звезд* $\mathrm{st}(a, X)$ *с* $a \in A$ *(см. [32]). Как известно (там же), регулярные окрестности полного подпространства* A *в пространстве* X *и его барицентрическом подразделении* $\mathrm{ba}\, X$ *изотопны. Поэтому всегда можно предполагать, что регулярная окрестность подпространства* $\Theta(S^1)$ *отделена от края многообразия* Z*.*

Замечание 3.33. *Носитель регулярной окрестности подпространства* $\Theta(S^1) \subset Z$ *не зависит от триангуляции многообразия* Z *(с точностью до изотопии), так как любые две триангуляции* Z *обладают изоморфными подразделениями,* [37].

Замечание 3.34. *Для произвольной окрестности подпространства* A *конечного симплициального пространства* X *найдется такое* $n \in \mathbb{N}$*, что регулярная окрестность подпространства* A *в пространстве* $\mathrm{ba}^n X$ *лежит в* U *(см.* [32]*).*

Аналогично доказательству леммы 3.31, с учетом замечания 3.4, доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.35. *Пусть* Z *— компактное двумерное многообразие с краем,*

$$\Theta_i : S^1 \to \mathrm{Int}\, Z, \quad i = 1, \ldots, n,$$

— конечный набор вложенных в $\mathrm{Int}\, Z$ *непересекающихся окружностей. Пусть*

$$U_i \supset \Theta_i(S^1), \quad i = 1, \ldots, n,$$

— некоторые окрестности множеств $\Theta_i(S^1)$.

Найдется триангуляция многообразия Z такая, что каждое из множеств

$$\Theta_i(S^1), \quad i = 1, \ldots, n,$$

является полным подпространством симплициального пространства Z и регулярная окрестность подпространства $\Theta_i(S^1)$ лежит во множестве U_i для $i = 1, \ldots, n$.

A1. Пусть Θ — окружность, вложенная в $\operatorname{Int} Z$, $U_0(\Theta)$ — ее регулярная окрестность. Тогда найдется регулярная окрестность $U(\Theta) \subset U_0(\Theta)$ такая, что $Z \setminus U(\Theta)$ — компактное многообразие с краем и $\chi(Z \setminus U(\Theta)) = \chi(Z)$.

Фиксируем триангуляцию многообразия Z, удовлетворяющую лемме 3.31. Пусть $U_0(\Theta)$ — регулярная окрестность окружности Θ. Перейдя, если необходимо, к барицентрическому подразделению $\operatorname{ba} Z$, получаем регулярную окрестность $U(\Theta)$ окружности Θ, отделенную от края многообразия Z. Граница $\partial U(\Theta) = \partial(Z \setminus U(\Theta))$ является одномерным подкомплексом пространства $\operatorname{ba} Z$. Она состоит из конечного числа вершин $\{v_i\}_{i=1}^n$ и конечного числа ребер $\{e_i\}_{i=1}^n$, причем количество вершин совпадает с количеством ребер.

При удалении $U(\Theta)$ удаляются все треугольники, вершины и ребра пространства $\operatorname{ba} Z$, лежащие в $\operatorname{Cl} U(\Theta)$, кроме тех, которые лежат в $\partial U(\Theta)$.

С другой стороны, ограничение нашей триангуляции на $\operatorname{Cl} U(\Theta)$ само по себе является триангуляцией этого многообразия. Поэтому,

$$\begin{gathered}\chi(Z \setminus U(\Theta)) = \chi(Z) \,-\, \chi(\operatorname{Cl} U(\Theta)) + \\ + \{ \text{ число вершин триангуляции, лежащих в } \partial U(\Theta)\} - \\ - \{ \text{ число ребер триангуляции, лежащих в } \partial U(\Theta)\} \;= \\ = \; \chi(Z) - \chi(\operatorname{Cl} U(\Theta)).\end{gathered}$$

Так как $\operatorname{Cl} U(\Theta)$ гомеоморфно либо цилиндру, либо листу Мебиуса, то $\chi(\operatorname{Cl} U(\Theta)) = 0$ и $\chi(Z \setminus U(\Theta)) = \chi(Z)$.

А2. Пусть W — двумерное компактное многообразие с краем и окружность $\Theta \subset \operatorname{Int} W$ не разбивает W (т. е. $W \setminus \Theta$ — связное множество). Тогда для достаточно малой регулярной окрестности $U(\Theta)$ выполняется соотношение $g(W \setminus U(\Theta)) \leq g(W) - 1$.

Доказательство этого соотношения сводится к непосредственной проверке. Рассмотрим, к примеру, случай, когда W — неориентируемо, $W \setminus U(\Theta)$ — ориентируемо, и $U(\Theta)$ гомеоморфно листу Мебиуса.

Пусть n — род многообразия W, n' — род $W \setminus U(\Theta)$, k — количество компонент края ∂W. Тогда

$$\chi(W) = 2-n-k, \quad \chi(W \setminus U(\Theta)) = 2-2n'-(k+1) = \chi(W).$$

Следовательно, $n = 2n'+1$ и $n' = 1/2(n-1) = 1/2(n+1)-1$. Так как $n \in \mathbb{N}$, то $1/2(n+1) \leq n$ и $n' \leq n-1$.

Остальные возможности рассматриваются аналогично.

А3. Пусть W — компактное связное двумерное многообразие с краем и окружность $\Theta \subset \operatorname{Int} W$ разбивает W. Пусть $U(\Theta)$ — регулярная окрестность Θ, отделенная от края ∂W. Пусть

$$W \setminus U(\Theta) = W_1 \cup W_2,$$

где W_1, W_2 — непересекающиеся компактные связные двумерные многообразия с краем. Тогда

$$g(W_1) + g(W_2) \leq g(W).$$

Отметим, что в данном случае окрестность $U(\Theta)$ гомеоморфна цилиндру, так как

$$\partial W_1 \cup \partial W_2 = \partial W \cup \partial U(\Theta),$$

причем $\partial W_i \cap \partial U(\Theta) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$, и $\partial W_1 \cap \partial W_2 = \varnothing$ (то есть $U(\Theta)$ должна иметь две компоненты края).

Заметим, что $\chi(W_1 \cup W_2) = \chi(W_1) + \chi(W_2)$, так как $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ и W_1, W_2 — замкнуты.

Введем обозначения

$$g(W) = n, \qquad g(W_1) = n_1, \qquad g(W_2) = n_2.$$

Количество компонент края многообразий W, W_1 и W_2 обозначим через k, k_1 и k_2, соответственно (очевидно, что $k = k_1 + k_2 - 2$).

Дальнейшее доказательство сводится к непосредственной проверке. Рассмотрим, например, случай, когда W и W_1 — неориентируемы, W_2 — ориентируемо. Имеет место соотношение

$$\chi(W) = 2 - n - k = \chi(W_1) + \chi(W_2) =$$
$$= 2 - n_1 - k_1 + 2 - 2n_2 - k_2.$$

Значит, $n = n_1 + 2n_2 \geq n_1 + n_2$, так как $n_2 \geq 0$.

Остальные возможности рассматриваются аналогично.

А4. Пусть W — компактное двумерное многообразие с краем, $\{\Theta_{(m)}\}$ — семейство вложенных в $\operatorname{Int} W$ попарно непересекающихся окружностей, регулярная окрестность каждой из которых гомеоморфна листу Мебиуса. Тогда семейство $\{\Theta_{(m)}\}$ содержит не более чем $g(W)$ элементов.

Пусть это не так. Выберем $g(W) + 1$ элемент

$$\Theta_{(1)}, \ldots, \Theta_{(g(W)+1)}$$

из семейства $\{\Theta_{(m)}\}$.

Так как $\Theta_{(1)}, \ldots, \Theta_{(g(W)+1)}, \partial W$ — конечный набор непересекающихся компактов, то найдутся попарно не пересекающиеся открытые подмножества

$$V_i,\ i = 0, \ldots, g(W) + 1,$$

многообразия W такие, что $\partial W \subset V_0$, и

$$\Theta_i \subset V_i,\ i = 1, \ldots, g(W) + 1.$$

Наконец, найдутся регулярные окрестности

$$U_i = U(\Theta_{(i)}) \subset V_i,\ i = 1, \ldots, g(W) + 1,$$

окружностей $\Theta_{(i)}$.

Рассмотрим последовательность компактных двумерных многообразий с краем

$$W_{(0)} = W\,; \qquad W_{(i)} = W_{(i-1)} \setminus U_i, \quad i = 1, \ldots, g(W) + 1.$$

Так как для каждого $i = 1, \ldots, g(W) + 1$ окружность $\Theta_{(i)}$ (согласно A3) не разделяет той компоненты многообразия $W_{(i-1)}$, в которой она лежит, то (согласно A2)

$$g(W_{(i)}) \leq g(W_{(i-1)}) - 1, \qquad i = 1, \ldots, g(W) + 1.$$

Так как $g(W_{(i)}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, g(W) + 1$, и

$$g(W) = g(W_{(0)}),$$

то $g(W_{(g(W))}) = 0$ и многообразие $W_{g(W)}$ — ориентируемо. А это противоречит тому, что $U_{g(W)+1} \subset W_{g(W)}$ и множество $U_{g(W)+1}$ гомеоморфно листу Мебиуса.

A5. Пусть W — компактное связное двумерное многообразие с краем. Если W не гомеоморфно двумерному диску, сфере, цилиндру либо проективной плоскости, то выполняется соотношение

$$g(W) - 1 \geq \chi(W). \tag{3.21}$$

Действительно, пусть W — ориентируемое многообразие. Тогда $\chi(W) = 2 - 2g(W) - k$, $g(W) \geq 0$ (k — количество компонент края) и неравенство (3.21) не выполняется только в случае $g(W) = 0$, $k \leq 2$.

Пусть W — неориентируемо. Тогда $\chi(W) = 2 - g(W) - k$, $g(W) \geq 1$ и неравенство (3.21) не выполняется только в случае $g(W) = 1$, $k = 0$.

Как известно (см. [21]), два двумерных компактных связных многообразия с краем гомеоморфны тогда и только тогда, когда они оба одновременно ориентируемы или неориентируемы, имеют одинаковый род и одинаковое количество компонент края. Поэтому, неравенство (3.21) не выполняется только для диска ($g(W) = 0$, $k = 1$), сферы ($g(W) = 0$, $k = 0$), цилиндра ($g(W) = 0$, $k = 2$) и проективной плскости ($g(W) = 1$, $k = 0$).

Приступим теперь непосредственно к доказательству леммы 3.27.

Так как Z — компактно, то оно имеет только конечное число компонент связности. Поэтому достаточно проверить утверждение леммы для случая, когда Z — связно. Рассмотрим сначала один общий случай.

Пусть Z — связное компактное двумерное многообразие с краем, не гомеоморфное диску, сфере, цилиндру, проективной плоскости, тору или бутылке Клейна.

Пусть $\Theta_1, \ldots, \Theta_l$, $l = 2g(Z) - \chi(Z)$, — набор вложенных в $\operatorname{Int} Z$ непересекающихся окружностей, каждая из которых не стягивается в точку и не гомотопна никакой компоненте края многообразия Z. Тогда найдутся

$$i, j \in \{1, \ldots, l\}$$

такие, что окружности Θ_i и Θ_j гомотопны.

Предположим, что это не так и никакие две окружности из набора $\{\Theta_i\}_{i=1}^l$ не гомотопны друг другу.

Так как множества ∂Z, $\Theta_1, \ldots, \Theta_l$ составляют конечный набор непересекающихся компактов, то найдутся попарно не пересекающиеся открытые в Z множества

$$V_0 \supset \partial Z, \quad V_i \supset \Theta_i, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Найдутся также и регулярные окрестности

$$U_i = U(\Theta_i) \subset V_i, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Согласно A5 не более чем $g(Z)$ окружностей из семейства $\{\Theta_i\}$ имеют регулярные окрестности, гомеоморфные листу Мебиуса. Пусть это будут окружности

$$\Theta_i, \quad i \in \{l - g(Z) + 1, \ldots, l\}.$$

Исключим их из рассмотрения. Получим набор окружностей $\{\Theta_i\}_{i=1}^{l'}$, $l' = g(Z) - \chi(Z)$, регулярная окрестность каждой из которых гомеоморфна цилиндру.

Отметим, что при всех $i = 1, \dots, l'$ окружность Θ_i гомотопна каждой из компонент края своей регулярной окрестности U_i.

Далее мы будем последовательно выбрасывать из Z регулярные окрестности U_i, $i = 1, \dots, l'$. При выбрасывании очередной регулярной окрестности в связной компоненте многообразия, которая содержала эту окрестность, либо появится еще две компоненты края, либо эта связная компонента распадется на два связных многообразия с непустым краем. Поэтому, в процессе выбрасывания регулярных окрестностей в многообразии не могут появляться новые компоненты с пустым краем (гомеоморфные, в частности, сфере, проективной плоскости, тору или бутылке Клейна).

Пусть после выбрасывания очередной регулярной окрестности U_i в многообразии появилась связная компонента, гомеоморфная двумерному диску. Значит, окружность Θ_i является стягиваемой в точку в Z, а это невозможно.

Рассмотрим ситуацию, когда после выбрасывания множества U_i в многообразии появляется связная компонента, гомеоморфная цилиндру. Это значит, что окружность Θ_i гомотопна либо компоненте края многообразия Z, либо окружности Θ_j, $j < i$ (если одна компонента края цилиндра совпадает с одной из компонент края окрестности U_i, вторая — с одной из компонент края окрестности U_j). В силу условий, наложенных на семейство $\{\Theta_k\}_{k=1}^{l'}$, такая ситуация может возникнуть только в двух случаях: множество U_i лежит в связной компоненте многообразия, гомеоморфной либо тору, либо бутылке Клейна (обе компоненты края цилиндра, возникающего после выбрасывания окрестности U_i из многообразия, принадлежат множеству

∂U_i). Так как многообразие Z не гомеоморфно ни тору, ни бутылке Клейна, и в процессе выбрасывания регулярных окрестностей каждая компонента многообразия имеет непустой край, то появление связной компоненты, гомеоморфной цилиндру, исключено.

Далее, рассмотрим последовательность компактных двумерных многообразий с краем $Z_0 = Z$; $Z_i = Z_{i-1} \setminus U_i$, $i = 1, \ldots, l'$.

В силу аргументов, изложенных выше, при каждом

$$i = 0, 1, \ldots, l'$$

ни одна из связных компонент многообразия Z_i не гомеоморфна диску, сфере или проективной плоскости. Поэтому для любой связной компоненты многообразия Z_i выполнено соотношение (3.21). Складывая эти неравенства, получаем

$$g(Z_i) - n_i \geq \chi(Z_i),$$

где n_i — количество связных компонент многообразия Z_i.

В силу пунктов 2 и 3, для каждого $i = 1, \ldots, l'$ должно выполняться соотношение $g(Z_i) - n_i \leq (g(Z_{i-1}) - n_i) - 1$. Поэтому

$$g(Z_{l'}) - n_{l'} \leq (g(Z_0) - n_0) - l' = g(Z) - l' - 1.$$

Так как $l' = g(Z) - \chi(Z)$, то $g(Z_{l'}) - n_{l'} \leq \chi(Z) - 1$. Однако, в силу пункта 1), $\chi(Z_{l'}) = \chi(Z_0) = \chi(Z)$, откуда

$$g(Z_{l'}) - n_{l'} \geq \chi(Z).$$

Полученное противоречие завершает доказательство для случая, когда многообразие Z — связно и не гомеоморфно диску, сфере, цилиндру, проективной плоскости, тору или бутылке Клейна.

Приступим к разбору исключительных случаев.

Непосредственная проверка показывает (см. A2 и A3), что

— окружность, вложенная в диск или в сферу, является стягиваемой в точку;

— окружность, вложенная в цилиндр, либо стягиваема в точку, либо гомотопна одной из компонент края цилиндра (см. лемму 3.26);

— окружность, вложенная в проективную плоскость, либо стягиваема в точку, либо ее регулярная окрестность гомеоморфна листу Мебиуса. Так как $g(\mathbb{R}P^2) = 1$, то, с учетом А4, получаем, что не существует двух окружностей, вложенных в $\mathbb{R}P^2$, которые не пересекаются и не стягиваемы в точку.

Следовательно, утверждение леммы справедливо для многообразия Z, гомеоморфного двумерному диску, цилиндру, сфере или проективной плоскости.

Пусть Z гомеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна. Выберем из набора $\{\Theta_k\}$ пять попарно негомотопных нестягиваемых в точку непересекающихся окружностей

$$\Theta_1, \dots, \Theta_5.$$

Найдем их непересекающиеся регулярные окрестности

$$U_1, \dots, U_5.$$

Рассмотрим многообразие $Z_1 = Z \setminus U_1$ (очевидно, что $g(Z_1) \leq 2$, $\chi(Z_1) = 0$). Каждая из связных компонент многообразия Z_1 имеет непустой край, поэтому не гомеоморфна ни тору, ни бутылке Клейна. Возьмем Z_1 в качестве исходного многообразия. Рассмотрим набор $\Theta_2, \dots, \Theta_5$ вложенных в Z_1 окружностей. Дальнейшие рассуждения сводятся к одному из случаев, разобранных выше. Лемма 3.27 доказана. □

Доказательство леммы 3.28. Также, как и в доказательстве леммы 3.27, рассмотрим такую конструкцию.

Рассмотрим семейство $\{\widetilde{\Theta}_i\}_{i=1}^{l}$, состоящее из попарно непересекающихся нестягиваемых окружностей, вложенных в $\operatorname{Int} Z$. Пусть $l = g(Z) + 2k(Z) + 2A + 1$, где $k(Z)$ — количество компонент края многообразия Z, $A = g(Z) - \chi(Z) - 1$. Докажем, что найдутся три различные номера i_1, i_2, $i_3 \in \{1, \ldots, l\}$ такие, что связная компонента многообразия $Z \setminus (\widetilde{\Theta}_{i_1} \cup \widetilde{\Theta}_{i_2})$, в которой лежит окружность $\widetilde{\Theta}_{i_3}$, гомеоморфна двумерному цилиндру.

Выберем для каждого $i \in \{1, \ldots, l\}$ регулярную окрестность $U_i \supset \widetilde{\Theta}_i$ так, чтобы $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} U_i\right) \cap V = \varnothing$$

для некоторого открытого $V \supset \partial Z$.

Из доказательства леммы 3.27 следует, что для не более чем $g(Z)$ элементов сесмейства $\{\widetilde{\Theta}_i\}_{i=1}^{l}$ их регулярные окрестности гомеоморфны листу Мебиуса. Будем считать, что при $i = 1, \ldots, l'$, $l' = l - g(Z) = 2k(Z) + 2A + 1$ множество U_i гомеоморфно цилиндру (и следовательно, окружность $\widetilde{\Theta}_i$ гомотопна каждой из компонент края множества U_i).

Рассмотрим последовательность многообразий с краем $Z_0 = Z$, $Z_i = Z_{i-1} \setminus U_i$, $i = 1, \ldots, l'$.

Каждое из многообразий Z_i можно представить в виде

$$Z_i = Z_i^{(1)} \cup Z_i^{(2)}, \quad i = 0, \ldots, l',$$

где $Z_i^{(1)}$ составлено из тех связных компонент многообразия Z_i, для которых выполняется неравенство (3.21) леммы 3.27, $Z_i^{(2)}$ содержит все остальные компоненты связности многообразия Z_i.

Используя аргументацию, аналогичную использованной в доказательстве леммы 3.27, получаем, что каждая из связных компонент многообразия $Z_i^{(2)}$ может быть гомеоморфна только цилиндру.

Пусть N_i — количество связных компонент многообразия $Z_i^{(2)}$, n_i — количество связных компонент многообразия $Z_i^{(1)}$,

$$A_i = g(Z_i) - n_i - \chi(Z_i).$$

Так как род и Эйлерова характеристика двумерного цилиндра равны нулю, то

$$A_i = g(Z_i^{(1)}) - n_i - \chi(Z_i^{(1)}) = g(Z_i^{(1)}) - n_i - \chi(Z), \quad i = 1, \ldots, l';$$

$$A = A_0 = g(Z) - \chi(Z) - 1.$$

В лемме 3.27 показано, что $0 \leq A_i \leq A$, $i = 1, \ldots, l'$.

Убедимся, что для любого $i \in \{1, \ldots, l'\}$ выполняется неравенство

$$i \leq (N_i + A) - A_i. \tag{3.22}$$

При $i = 0$ имеем $A_0 = A$, $N_0 = 0$, и неравенство (3.22) выполняется.

Из доказательства леммы 3.27 следует, что или

$$A_{i+1} \leq A_i + 1,$$

или в многообразии $Z_i \setminus U_{i+1}$ появляется еще одна связная компонента, гомеоморфная цилиндру, то есть

$$N_{i+1} = N_i + 1.$$

В любом случае, $(N_{i+1} + A) - A_{i+1} \geq (N_i + A) - A_i + 1$. Значит, неравенство (3.22) справедливо при всех

$$i = 1, \ldots, l'$$

Так как $0 \leq A_i \leq A$ при всех $i = 0, 1, \ldots, l'$, то

$$i \leq i + A_i \leq N_i + A, \quad i = 0, 1, \ldots, l'.$$

С другой стороны, из неравенства (3.22) при

$$i = l' = 2k(Z) + 2A + 1$$

получаем $N_{l'} \geq l' + A = 2k(Z) + A + 1$.

Поэтому $2N_{l'} \geq l' + 2k(Z) + 1$ и

$$l' \leq 2(N_{l'} - k(Z)) - 1. \tag{3.23}$$

Так как при каждом $i = 0,\ 1, \ldots, l'$ не более чем $k(Z)$ связных компонент многообразия $Z_i^{(2)}$ содержат компоненты края многообразия Z, то найдется не менее чем $N_{l'} - k(Z)$ связных компонент многообразия $Z_{l'}^{(2)}$, каждая из которых обладает следующим свойством: ее край лежит во множестве

$$\bigcup_{i=1}^{l'} \partial U_i,$$

причем различные компоненты края относятся к различным регулярным окрестностям из семейства $\{U_i\}_{i=1}^{l'}$.

В силу (3.23), найдется номер i_3 и две связные компоненты $C_1,\ C_2 \subset Z_{l'}^{(2)}$ такие, что $\partial C_s \cap \partial U_{i_3} \neq \varnothing$, $s = 1, 2$, в многообразии Z.

Множество $C_1 \cup C_2 \cup U_{i_3}$ гомеоморфно цилиндру. При этом

$$\partial(C_1 \cup C_2 \cup U_{i_3}) \subset (\partial C_1 \cup \partial C_2) \subset (\partial U_{i_1} \cup \partial U_{i_2})$$

для некоторых $i_1,\ i_2 \in \{1, \ldots, l'\}$.

Заметим, что $i_1 \neq i_2$, иначе множество $C_1 \cup C_2 \cup U_{i_1} \cup U_{i_3}$ было бы гомеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна. А это невозможно (см. доказательство леммы 3.27).

Возьмем связную компоненту множества

$$(C_1 \cup C_2 \cup U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup U_{i_3}) \setminus (\widetilde{\Theta}_{i_1} \cup \widetilde{\Theta}_{i_2}),$$

содержащую $\widetilde{\Theta}_{i_3}$. Она гомеоморфна цилиндру и ее граница в Z суть множество $\widetilde{\Theta}_{i_1} \cup \widetilde{\Theta}_{i_2}$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству леммы 3.28.

Пусть $\{\Theta_k\}$ — семейство окружностей, удовлетворяющих условиям леммы. Предположим, что из этого семейства можно выбрать набор $\{\Theta_i\}_{i=1}^L$, состоящий из

$$L = 3g(Z) + 2k(Z) - 2\chi(Z) - 1$$

различных элементов.

Построим набор $\{\widetilde{\Theta}_i\}_{i=1}^L$, состоящий из попарно непересекающихся нестягиваемых окружностей, вложенных в $\operatorname{Int} Z$, такой, что для всех $i = 1, \dots, L$

$$\begin{gathered} \widetilde{\Theta}_i \cap \Theta_i \neq \varnothing\,; \\ \widetilde{\Theta}_i \cap \Theta_j = \varnothing \quad \text{при } j \neq i,\ j \in \{1, \dots, L\}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Для этого найдем непересекающиеся открытые в Z окрестности $V_1, \dots, V_L$ точек $z_1, \dots, z_L$, замыкание каждой из которых гомеоморфно пересечению в $\mathbb{R}^2$ замкнутого единичного круга и верхней полуплоскости.

Так как при каждом i окружность Θ_i не стягиваема в точку, то $\Theta_i \setminus \operatorname{Cl} V_i \neq \varnothing$.

Фиксируем $i \in \{1, \dots, L\}$. Пусть

$$\Theta_i : I/(\{0\} \cup \{1\}) \cong S^1 \to Z, \quad \Theta_i(0) = z_i,$$

— отображение вложения. Обозначим

$$\tau_1 = \max\{\, \tau \in I \mid \Theta_i([0,\tau)) \subset V_i \,\}\,,$$

$$\tau_2 = \min\{\, \tau \in I \mid \Theta_i((\tau,1]) \subset V_i \,\}\,.$$

Так как $\Theta_i(S^1)$ и ∂V_i — компакты, то величины τ_1 и τ_2 определены. Так как $\Theta_i(S^1) \setminus \operatorname{Cl} V_i \neq \varnothing$ и $z_i \in \operatorname{Int} V_i$ в пространстве Z, то $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$.

Выберем $t_1 \in (0, \tau_1)$ и $t_2 \in (\tau_2, 1)$ (очевидно, что

$$\Theta_i(t_s) \in V_i \cap \operatorname{Int} Z,$$

для $s = 1, 2$). Так как множество $\operatorname{Cl} V_i$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску, отображения

$$\Theta\big|_{[0,\tau_1]} : [0, \tau_1] \to \operatorname{Cl} V_i, \quad \Theta\big|_{[\tau_1,1]} : [\tau_1, 1] \to \operatorname{Cl} V_i$$

являются вложениями и выполняются включения

$$\Theta(0) = \Theta(1) = z_i \in \partial V_i, \quad \Theta(\tau_s) \in \partial V_i,$$
$$\Theta((0, \tau_s)) \subset \operatorname{Int} V_i, \quad s = 1, 2,$$

то множество $\Theta([0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1])$ делит диск $\operatorname{Cl} V_i$ на три части, каждая из которых гомеоморфна диску. Обозначим через W ту из них, граница которой содержит обе точки $\Theta(\tau_1)$ и $\Theta(\tau_2)$.

Найдется гомеоморфизм

$$\varphi : \operatorname{Cl} W \to D,$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Под действием отображения φ множество $\Theta([0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1])$ перейдет в замкнутый интервал, лежащий в ∂D.

Так как множества

$$K_1 = \varphi \circ \Theta([0, t_1] \cup [t_2, 1]), \quad K_2 = \varphi(\Theta([\tau_1, \tau_2] \cap \operatorname{Cl} W))$$

— компактны и не пересекаются, то найдется $\varepsilon > 0$, для которого $U_\varepsilon(K_1) \cap K_2 = \varnothing$. Далее, найдется (см. [37]) такое непрерывное инъективное отображение

$$\gamma : I \to D,$$

что

$$\gamma(0) = \varphi \circ \Theta(t_1), \quad \gamma(1) = \varphi \circ \Theta(t_2),$$
$$\gamma((0, 1)) \subset (\operatorname{Int} D \cap U_\varepsilon(K_1)).$$

Значит, кривая γ пересекается со множеством $\varphi(\Theta(S^1))$ только в точках $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$. Кроме того, кривая γ гомотопна дуге K_1 в пространстве D.

Следовательно, отображение

$$\widetilde{\Theta}_i : [0, 1 + \tau_2 - \tau_1] \big/ (\{0\} \cup \{1 + \tau_2 - \tau_1\}) \to Z,$$

$$\widetilde{\Theta}_i(t) = \begin{cases} \Theta_i(t + \tau_1), & t \in [0, \tau_2 - \tau_1), \\ \varphi^{-1} \circ \gamma(t + \tau_2 - \tau_1), & t \in [\tau_2 - \tau_1, 1 + \tau_2 - \tau_1], \end{cases}$$

определяет окружность $\widetilde{\Theta}_i$, вложенную в $\operatorname{Int} Z$ и гомотопную окружности Θ_i. Так как $\widetilde{\Theta}_i \setminus V_i = \Theta_i \setminus V_i \neq \varnothing$, то справедливы соотношения (3.24).

Повторяем наше построение для остальных номеров $j \in \{1, \ldots, L\}$. Получаем семейство $\{\widetilde{\Theta}_i\}_{i=1}^{L}$ окружностей, вложенных в $\operatorname{Int} Z$.

Так как множества $\Theta_i \cup V_i$, $i = 1, \ldots, L$, попарно не пересекаются и для всех i выполняются соотношения

$$\widetilde{\Theta}_i \subset \Theta_i \cup V_i,$$

то семейство $\{\widetilde{\Theta}_i\}_{i=1}^{L}$ удовлетворяет всем оговоренным нами требованиям.

Согласно первой части доказательства леммы, найдутся три различных номера i_1, i_2, $i_3 \in \{1, \ldots, L\}$ такие, что

$$Z \setminus (\widetilde{\Theta}_{i_1} \cup \widetilde{\Theta}_{i_2}) = Z_1 \cup Z_2, \quad Z_1 \cap Z_2 = \varnothing,$$

Z_1 — гомеоморфно цилиндру, $\partial Z_1 = \widetilde{\Theta}_{i_1} \cup \widetilde{\Theta}_{i_2}$ и $\widetilde{\Theta}_{i_3} \subset Z_1$.

Так как

$$\widetilde{\Theta}_{i_3} \cap \Theta_{i_3} \neq \varnothing$$

и

$$\Theta_{i_3} \cap \partial Z_1 = \Theta_{i_3} \cap (\widetilde{\Theta}_{i_1} \cup \widetilde{\Theta}_{i_2}) = \varnothing,$$

то $\Theta_{i_3} \subset Z_1$.

И поскольку

$$\beta \cap \Theta_{i_3} = \{z_{i_3}\} \neq \varnothing,$$

$$\beta \cap \partial Z_1 = \beta \cap (\Theta_{i_1} \cup \Theta_{i_2}) = \varnothing,$$

то для компоненты края β многообразия Z должно выполняться включение $\beta \subset Z_1$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.28. $\square$

Доказательство леммы 3.31. Напомним, что вложение

$$\Theta : S^1 \to \operatorname{Int} Z$$

является локально плоским (см. [37]). Это означает, что для каждого $z \in \Theta(S^1)$ найдутся окрестность $U_z \subset \operatorname{Int} Z$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U_z \to \mathbb{R}^2$ такие, что $\varphi_z(z) = 0$,

$$\varphi_z(U_z) = D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$\varphi_z(U_z \cap \Theta(S^1)) = J = \{(x_1, x_2) \in D \,|\, x_2 = 0\}.$$

Для каждого $z \in Z \setminus \Theta(S^1)$ найдется карта (U_z, φ_z) такая, что $U_z \cap \Theta(S^1) = \varnothing$.

Рассмотрим открытое покрытие $\{U_z\}_{z \in Z}$ компакта Z. Выберем из него конечное подпокрытие $\{U_i = U_{z_i}\}_{i=1}^{n_2}$.

Пусть

$$z_i \in \Theta(S^1), \qquad i = 1, \ldots, n_1,$$
$$\Theta(S^1) \cap U_i = \varnothing, \qquad i = n_1 + 1, \ldots, n_2.$$

Рассмотрим набор множеств

$$D_+ = \{(x_1, x_2) \in D \,|\, x_2 \geq 0\},$$

$$D_- = \{(x_1, x_2) \in D \,|\, x_2 \leq 0\},$$

$$V_i = \varphi_i^{-1}(D_+), V_{i+n_1} = \varphi_i^{-1}(D_-), \quad i = 1, \ldots, n_1,$$

$$V_{i+n_1} = U_i, \qquad i = n_1 + 1, \ldots, n_2.$$

Рассмотрим еще и множества

$$\begin{aligned} W_i &= \varphi_i(V_i), & i &= 1, \ldots, n_1, \\ W_{i+n_1} &= \varphi_i(V_{i+n_1}), & i &= 1, \ldots, n_2, \end{aligned}$$

и их несвязное объединение

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} W_i, \qquad n = n_1 + n_2.$$

Пусть

$$V_{ij} = \operatorname{Int} V_i \cap \operatorname{Int} V_j \neq \varnothing$$

для некоторых i, $j \in \{1, \dots, n\}$. Отметим, что в силу выбора множеств $\{V_i\}$ выполняются соотношения

$$\operatorname{Int} V_i \cap \operatorname{Int} V_j \; = \; [(V_i \cap V_j) \setminus \Theta(S^1)] \; \subset \; Z \setminus \Theta(S^1).$$

Отождествим множества

$$W_{ij} = \varphi_i(V_i \cap \operatorname{Cl} V_{ij}) \subset W_i$$

и

$$W_{ji} = \varphi_j(V_j \cap \operatorname{Cl} V_{ij}) \subset W_j$$

посредством гомеоморфизма $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : W_{ij} \to W_{ji}$.

В результате получим некоторое топологическое пространство Z'.

Рассмотрим кроме того набор гомеоморфизмов

$$\psi_i = \mathrm{Id} : W_i \to \mathbb{R}^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Непосредственная проверка показывает, что набор

$$(W_i, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

составляет атлас пространства Z', задавая на нем структуру компактного двумерного многообразия с краем.

Нетрудно видеть, что корректно определена непрерывная проекция

$$P : Z' \to Z,$$

$$P\big|_{W_i} = \varphi_i^{-1}\big|_{W_i} : W_i \to Z, \quad i = 1, \dots, n_1,$$

$$P\big|_{W_{i+n_1}} = \varphi_i^{-1}\big|_{W_{i+n_1}} : W_{i+n_1} \to Z, \quad i = 1, \dots, n_2.$$

для которой

$$\Theta' = P^{-1}(\Theta(S^1)) \subset \partial Z',$$

причем множество Θ' состоит из целых компонент края пространства Z'. Отображение

$$P\big|_{Z' \setminus \Theta'} : Z' \setminus \Theta' \to Z \setminus \Theta(S^1)$$

взаимно-однозначно.

Фиксируем триангуляцию пространства Z'. Множество Θ' является носителем некоторого одномерного симплициального подпространства симплициального пространства Z'. Рассмотрим барицентрическое подразделение $\operatorname{ba} Z'$.

Подпространство пространства $\operatorname{ba} Z'$ с носителем Θ' является полным (его пересечение с носителем любого симплекса пространства $\operatorname{ba} Z'$ является носителем некоторого симплекса этого пространства или пусто) (см. [32]).

Пусть $a_1, \ldots, a_{m_1}$ — вершины симплициального пространства $\operatorname{ba} Z'$; $a_1, \ldots, a_{m_2}$ — все вершины этого пространства, лежащие в Θ'.

Пусть точки $b_1, \ldots, b_{m_3}$ составляют полный прообраз множества $P(\bigcup_{i=1}^{m_2} a_i)$. Рассмотрим подразделение симплициального пространства $\operatorname{ba} Z'$ с вершинами $b_1, \ldots, b_m$:

$$b_i = a_{i+m_1-m_2}, \qquad i = m_3 + 1, \ldots, m.$$

Здесь $m = m_3 + m_1 - m_2$. Очевидно, что подпространство Θ' полно относительно этого подразделения.

Образ построенного подразделения под действием P обладает следующими свойствами :

(i) носитель грани любого симплекса является носителем некоторого симплекса;

(ii) если носитель одного симплекса покрыт носителем другого симплекса, то носитель первого симплекса — есть носитель грани второго симплекса;

(iii) для каждой пары пересекающихся симплексов их пересечение является носителем некоторого симплекса.

Однако образ триангуляции пространства Z', вообще говоря, не является триангуляцией пространства Z.

А именно, триангуляция пространства Z задана корректно везде, кроме множества $\Theta(S^1)$.

Остановимся на последнем замечании более подробно. Пусть s_1, $s_2 \subset \Theta'$ — два одномерных симплекса;

$$\alpha_j : T^1 \to s_j, \quad j = 1, 2,$$

— гомеоморфизмы, задающие симплициальную структуру (здесь T^1 — стандартный одномерный симплекс). Пусть $P(s_1) = P(s_2)$.

Отображения

$$P_j = P|_{s_j}, \quad j = 1, 2,$$

— взаимно-однозначны и непрерывны. Так как s_1 и s_2 — компактные подмножества Z', то отображения P_1, P_2 являются гомеоморфизмами на свой образ. Однако сквозное отображение $\alpha_2^{-1} \circ P_2^{-1} \circ P_1 \circ \alpha_1 : T^1 \to T^1$ не обязано быть линейным.

Так как $s_1 \subset \partial Z'$, то существует ровно один двумерный симплекс τ_1, для котрого $s_1 \subset \partial\tau_1$. Аналогично, найдется единственный двумерный симплекс τ_2 такой, что $s_2 \subset \partial\tau_2$. Поскольку подпространство Θ' — полное, то $\tau_j \cap \Theta' = s_j$, $j = 1, 2$.

Пусть $\beta_j : T^2 \to \tau_j$ — гомеоморфизмы, задающие симплициальную структуру.

Рассмотрим гомеоморфизмы

$$h_1 = \alpha_2^{-1} \circ P_2^{-1} \circ P_1 \circ \alpha_1 : T^1 \to T^1,$$
$$h_2 : \partial T^2 \to \partial T^2,$$
$$h_2\big|_{\beta_2^{-1}(s_2)} = \beta_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ h_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ \beta_2, \quad h_2\big|_{\partial T^2 \setminus \beta_2^{-1}(s_2)} = \mathrm{Id}\,.$$

Пространство T^2 гомеоморфно замкнутому двумерному диску, поэтому гомеоморфизм h_2 можно продолжить до некоторого гомеоморфизма $h : T^2 \to T^2$.

Положим $\widetilde{\beta}_2 = \beta_2 \circ h$, $\widetilde{\alpha}_2 = \alpha_2 \circ h_1$. Эти отображения определяют симплексы $\widetilde{\tau}_2$, $\widetilde{s}_2$.

Поскольку

$$\widetilde{\beta}_2\big|_{\beta_2^{-1}(s_2)} = \beta_2 \circ h_2\big|_{\beta_2^{-1}(s_2)} =$$

$$= \beta_2 \circ \beta_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ h_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ \beta_2 = \alpha_2 \circ h_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ \beta_2,$$

то отображение

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_2^{-1} \circ \widetilde{\alpha}_2 &= \beta_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ h_1^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ h_1 = \\ &= \beta_2^{-1} \circ \alpha_2 : T^1 \to T^2 \end{aligned}$$

является линейным, а симплициальная структура $\widetilde{\tau}_2$ и $\widetilde{s}_2$ согласована.

Далее, имеет место равенство

$$\widetilde{\beta}_2\big|_{\partial T^2 \setminus \beta_2^{-1}(\Theta')} = \beta_2\big|_{\partial T^2 \setminus \beta_2^{-1}(\Theta')},$$

поэтому заменяя симплексы τ_2, s_2 на $\widetilde{\tau}_2$, $\widetilde{s}_2$, получаем триангуляцию пространства Z'.

С другой стороны, для отображения

$$\beta_1^{-1} \circ P_1^{-1} \circ P_2 \circ \widetilde{\beta}_2\big|_{\widetilde{\beta}_2^{-1}(\widetilde{s}_2)} : \widetilde{\beta}_2^{-1}(\widetilde{s}_2) \to \beta_1^{-1}(s_1)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \beta_1^{-1} \circ P_1^{-1} \circ P_2 \circ \widetilde{\beta}_2 &= \beta_1^{-1} \circ P_1^{-1} \circ P_2 \circ \beta_2 \circ h_2 = \\ &= \beta_1^{-1} \circ P_1^{-1} \circ P_2 \circ \beta_2 \circ \beta_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ h_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ \beta_2 = \\ &= \beta_1^{-1} \circ P_1^{-1} \circ P_2 \circ \alpha_2 \circ (\alpha_2^{-1} \circ P_2^{-1} \circ P_1 \circ \alpha_1) \circ \alpha_2^{-1} \circ \beta_2 = \\ &= \beta_1^{-1} \circ \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ \beta_2. \end{aligned}$$

И значит, это отображение линейно, так как линейны отображения $\beta_1^{-1} \circ \alpha_1$ и $\alpha_2^{-1} \circ \beta_2$. Поэтому, триангуляция симплексов $P(\tau_1)$ и $P(\widetilde{\tau}_2)$ — согласована.

Выполнив аналогичное построение для всех пар одномерных симплексов, носители образов которых (под действием отображения P) совпадают, получим триангуляцию многообразия Z', переходящую под действием отображения P в некоторую триангуляцию многообразия Z, для которой $\Theta(S^1)$ является одномерным симплициальным подпространством.

Заменяя при необходимости триангуляцию Z на ее барицентрическое подразделение $\mathrm{ba}\, Z$, получаем триангуляцию многообразия Z, для которой подпространство $\Theta(S^1)$ является полным.

Остается индуцировать триангуляцию на S^1 при помощи отображения

$$\Theta^{-1} : \Theta(S^1) \to S^1.$$

Лемма 3.31 доказана. $\square$

ГЛАВА 4

Группы автоморфизмов многообразий

В этой главе дается краткий обзор некоторых результатов о структуре групп гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий. Обзор ни в коей мере не может претендовать на полноту. Особое внимание уделяется поверхностям и 3-многообразиям. Со многими вопросами топологии этих многообразий можно познакомиться в книгах [19, 22, 37].

Перед тем, как приступить к изложению, напомним определения топологий на пространствах отображений.

4.1. Топологии на пространствах отображений

4.1.1. Топологические векторные пространства. *Топологическое векторное пространство F над полем* $\mathbb{R}$ — это линейное пространство с такой топологией, в которой операции сложения векторов и умножения на скаляры

$$+ : F \times F \to F, \qquad * : \mathbb{R} \times F \to F$$

являются непрерывныммии.

Пространство Фреше — это метризуемое полное топологическое векторное пространство F, топология которого определяется счетным семейством полунорм

$$\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le \cdots \le \|\cdot\|_n \le \cdots .$$

Таким образом, последовательность $\{x_i\} \subset F$ сходится к точке $x \in F$, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{i\to\infty} \|x - x_i\|_n = 0$ для каждого n.

Банахово пространство $(F, \| \ \|)$ — это пространство Фреше, в котором все полунормы совпадают с одной и той же *нормой* $\| \ \|$.

Гильбертово пространство $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — это банахово пространство, в котором норма задается *невырожденной билинейной формой* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Назовем *весом* топологического пространства X наименьшую среди мощностей всюду плотных подмножеств этого пространства. Напомним, что пространство, имеющее вес $\aleph_0$, т.е. обладающее счетным всюду плотным множеством, называется *сепарабельным*.

Топологическая структура пространств Фреше описывается следующей теоремой:

Теорема 4.1. (1) *Пусть X и Y — бесконечномерные пространства Фреше. Они гомеоморфны и только тогда, когда их веса совпадают.*

(2) *Каждое бесконечномерное сепарабельное пространство Фреше* гомеоморфно *счетному произведению интервалов* $s = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (0, 1)$.

История этой теоремы такова. В 1928 M. Frechet задал следующий вопрос: верно ли, что все сепарабельные бесконечномерные банаховы пространства гомеоморфны[1].

Первый шаг был сделан только через 25 лет, когда V. L. Klee [113] (1953) доказал, что если E — нерефлексивное нормированное линейное пространство и A — слабо компактное подмножество в E, то E гомеоморфно дополнению $E \backslash A$. Этот результат вызвал интерес к изучению топологии бесконечномерных пространств и, фактически, определил подход к доказательству теоремы 4.1.

[1] Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, p. 95, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

М. И. Кадец [14] (1958) показал, что все сепарабельные бесконечномерные рефлексивные банаховы пространства гомеоморфны друг другу.

Далее, М. И. Кадец [16] (1959) и V. L. Klee [114] (1960) независимо обобщили этот результат на класс всех сепарабельных бесконечномерных сопряженных банаховых пространств, а затем C. Bessaga и A. Pełczyński [57] (1960) показали, что все "известные" банаховы пространства гомеоморфны друг другу (см. также I. Singer [166] (1958) и C. Bessaga [56] (1964)).

R. D. Anderson [48] (1966) доказал, что сепарабельное гильбертово пространство l_2 гомеоморфно пространству s и, что все сепарабельные бесконечномерные полные метризуемые локально-выпуклые топологические векторные пространства попарно гомеоморфны.

М. И. Кадец [15] (1967) установил, что любые два сепарабельные бесконечномерные банаховы пространства гомеоморфны друг другу. При этом М. И. Кадец существенным образом использовал технику функционального анализа, и поэтому естественно возник вопрос о топологическом доказательстве.

R. D. Anderson и R. H. Bing [49] (1968) дали другое элементарное доказательство того, что $l_2 \approx s$, а C. Bessaga и A. Pełczyński [58] (1969) получили топологическое доказательство гомеоморфности сеперабельного банахового пространства пространству s.

Наконец, H. Toruńczyk [180] (1981) дал характеризацию l_2-многообразий, т.е. пространств локально гомеоморфных l_2, из которой вытекало утверждение (2) теоремы 4.1.

Отметим, что, вообще говоря, неверно, что банахово пространство, рассматриваемое как пространство Фреше с единственной нормой, *диффеоморфно* пространству Фреше того же веса — гомеоморфизм между ними не обязан быть согласованным с их линейными структурами.

Примером пространства Фреше может служить пространство $C^\infty(M)$ гладких функций на компактном многообразии M.

4.1.2. Топологии Уитни. Пусть M и N — гладкие многообразия. На пространстве C^r-отображений $C^r(M,N)$ можно определить две серии *топологий Уитни — сильные* (или *тонкие*) C^r_S и *слабые* C^r_W, $r = 0, \dots, \infty$. При этом, для компактного M, топологии C^r_S и C^r_W совпадают. Напомним их определение.

База слабой топологии C^0_W порождается множествами вида

$$\mathcal{N}_W^{K,V} = \{f \in C^0(M,N) \mid f(K) \subset V\},$$

где $K \subset M$ — компакт, а $V \subset N$ — открыто. Эту топологию также называют *компактно-открытой*.

База сильной топологии C^0_S порождается множествами вида

$$\mathcal{N}_S^V = \{f \in C^0(M,N) \mid \Gamma_f \subset V\},$$

где $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in M \times N\}$ график f, а $V \subset M \times N$ — открытое подмножество.

Топология C^r_W (соотв. C^r_S) для $r < \infty$ определяется аналогично, но теперь нужно найти способ, при помощи которого можно было бы сравнивать производные отображений до порядка r включительно. Для этого заметим, что каждое отображение $f \in C^r(M,N)$ можно отождествить с сечением расслоения струй $J^r(M,N) \to M$, сопоставляя f его r-струйное расширение $j^r(f)$. Это соответствие $f \mapsto j^r(f)$ индуцирует вложение $C^r(M,N)$ в пространство отображений $C^r(M, J^r(M,N))$.

Зададим теперь на $C^r(M, J^r(M,N))$ топологию C^0_W (соотв. C^0_S). Ее ограничение на подпространство

$$C^r(M,N) \subset C^r(M, J^r(M,N))$$

и называется топологией C^r_W (соотв. C^r_S).

Можно определить топологии Уитни менее формально, хотя предыдущее определение часто оказывается удобным. Для простоты будем предполагать, что M и N являются подмножествами евклидовых пространств, соответственно $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, достаточно больших размерностей. Тогда отображение $f \in C^r(M, N)$ задается набором n координатных функций $f_i : M \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ класса C^r. Обозначим через $\|D^k(f)\|(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ максимум модулей всех частных производных порядка k всех координатных функций f_i:

$$\|D^k(f)\|(x) = \sup_{i=1,\ldots,n} \sup_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \\ \sum \alpha_j = k}} \left| \frac{\partial^k f_i(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} \right|.$$

Положим также

$$\|f\|_r(x) = \sum_{k=0}^{r} \|D^k(f)\|(x)$$

и для каждого компактного подмножества $K \subset M$ определим r-ю норму $\|f\|_r^K$ отображения f как

$$\|f\|_r^K = \sup_{x \in K} \|f\|_r(x).$$

Пусть $f \in C^r(M, N)$. Тогда база слабой топологии C^r_W на $C^r(M, N)$ в точке f порождается множествами вида

$$\mathcal{N}^{K,\varepsilon}_{W,r}(f) = \{g \in C^r(M, N) \mid \|f - g\|_r^K < \varepsilon\}, \tag{4.25}$$

где $K \subset M$ — компакт и $\varepsilon > 0$.

Базу сильной топологии C^r_S на $C^r(M, N)$ в точке f порождают множества вида

$$\mathcal{N}^{\delta}_{S,r}(f) = \{g \in C^r(M, N) \mid \|f - g\|_r(x) < \delta(x)\}, \tag{4.26}$$

где $\delta : M \to (0, \infty)$ — произвольная непрерывная строго положительная функция.

Наконец, топология C^∞_W (соотв. C^∞_S) на $C^\infty(M, N)$ порождается всеми топологиями C^r_W для $r < \infty$.

Очевидно, что сильная C^r_S-топология *сильнее* слабой C^r_W. Заметим также, что если M компактно, то топологии C^r_W и C^r_S совпадают.

Замечание 4.2. Можно определить нормы $\| \; \|^K_\infty$ по аналогии с конечными нормами $\| \; \|^K_r$ и задать с их помощью слабую $\hat{C}^\infty_W$- и сильную $\hat{C}^\infty_S$-топологии на $C^\infty(M, N)$. Но оказывается, что полученные топологии сильнее, чем соответствующие C^∞_W- и C^∞_S-топологии Уитни. Причина в том, что открытые множества C^∞-топологий Уитни на $C^\infty(M, N)$ задаются ограничениями на частные производные отображений лишь до какого-то *конечного* порядка r. В тоже время отркрытые множества $\hat{C}^\infty$-топологий задаются ограничениями на *все* частные производные отображений. В этом состоит коренное различие между банаховыми пространствами и пространствами Фреше и, соответственно, многообразиями смоделированными на таких пространствах.

Пусть $C^r_\partial(M, N)$ — подпространство в $C^r(M, N)$, состоящее из отображений f, для которых $f(\partial M) \subset \partial N$. Тогда $C^r_\partial(M, N)$ является *банаховым* C^r-многообразием, а $C^\infty_\partial(M, N)$ является *многообразием Фреше*.

По поводу определения структур банаховых многообразий и многообразий Фреше см. также [11, 41, 55, 83, 99, 123].

Замечание 4.3. Пусть A, B — гладкие многообразия, $\mathcal{X} \subset C^\infty(A, B)$ — подмножество с индуцированной C^∞_S-топологией, Y — топологическое пространство, $F : \mathcal{X} \to Y$ и $G : Y \to \mathcal{X}$ — отображения. Тогда непрерывность F означает, что для любого открытого $U \subset Y$ его прообраз $F^{-1}(U)$ открыт в какой-нибудь C^r_S-топологии $(0 \leq r < \infty)$ на $C^\infty(A, B)$.

Аналогично, непрерывность G означает, что для любого подмножества $\mathcal{U} \subset C^\infty(A, B)$, открытого в какой-нибудь C^r_S-топологии ($0 \le r < \infty$) на $C^\infty(A, B)$, множество $G^{-1}(\mathcal{X} \cap \mathcal{U})$ открыто в Y.

4.1.3. C^r_S-топологии Уитни для пространств отображений некомпактных многообразий. Пусть M — некомпактное многообразие. Тогда “естественной” топологией на $C^r(M, N)$ обычно считается сильная C^r_S — она позволяет лучше отслеживать поведение отображений “на бесконечности”. В частности, именно в C^r_S-топологиях для $r = 1, \dots, \infty$, группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}^r(M)$ является открытым подмножеством $C^r(M, M)$, а отображение композиции

$$k : C^r(M, N) \times C^r(N, P) \to C^r(M, P), \qquad k(f, g) = g \circ f$$

— непрерывно.

С другой стороны, следующая лемма показывает, что сильные C^r_S-топологии на $C^r(M, N)$ являются достаточно патологичными. Поэтому при изучении диффеоморфизмов некомпактного многообразия M, часто ограничиваются рассмотрением групп $\mathcal{D}_c(M)$ диффеоморфизмов с компактным носителем, задавая на них сильную топологию. Кроме этого, под компонентой *линейной* связности отображения $h \in C^r(M, N)$ в *сильной* C^r_S-топологии, обычно понимают множество изоморфизмов, изотопных h.

Лемма 4.4 (см. [11, 165]). *Пусть M, N — многообразия, причем M — некомпактно. Предположим, что последовательность отображений $\{f_n\} \subset C^r(M, N)$ сходится в C^r_S-топологии к отображению f. Тогда все f_n совпадают между собой вне некоторого компактного множества.*

Доказательство. Заметим, что достаточно рассмотреть случай $N = \mathbb{R}$, т.е. когда каждое f_n является функцией $M \to \mathbb{R}$. Из него очевидно вытекает случай $N = \mathbb{R}^k$, а общий случай получится, если мы вложим N в некоторое $\mathbb{R}^k$.

Предположим, что последовательность $f_n : M \to \mathbb{R}$ сходится к f, но утверждение леммы не верно. Тогда найдется подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$ и локально конечное семейство[2] $K_i \subset M$ попарно непересекающихся компактов таких, что $|f_{n_i} - f| > \frac{1}{2^i}$ на K_i. Легко видеть, что существует такая непрерывная функция $\delta : M \to (0, \infty)$, что $\delta < \frac{1}{2^i}$ на K_i. Но это означает, что f_{n_i} не принадлежит окрестности $\mathcal{N}^{\delta}_{S,r}(f)$ функции f в сильной C^r_S-топологии, (см. формулу (4.26)), т.е. f_n не сходится к f. $\square$

Следствие 4.5. *Если M — некомпактно, то операция умножения на скаляры в $C^r(M, \mathbb{R})$* не является *непрерывной.*

4.1.4. Некоторые обозначения. Пусть A, B, A' и B' — многообразия, $\mathcal{X} \subset C^\infty(A, B)$ — подмножество и

$$F : \mathcal{X} \to C^\infty(A', B')$$

— отображение. Пусть каждый из символов T и T' обозначает либо "W", либо "S", и $r, r' = 0, 1, \ldots, \infty$.

Будем говорить, что $\mathcal{X}$ — C^r_T-*открыто* (C^r_T–*замкнуто*), если это множество открыто (замкнуто) в C^r_T-топологии $C^\infty(A, B)$. Назовем отображение F — $C^{r,r'}_{T,T'}$-*непрерывным*, ($C^{r,r'}_{T,T'}$-*гомеоморфизмом*, $C^{r,r'}_{T,T'}$-*вложением*), если оно становится непрерывным (гомеоморфизмом, или вложением)

[2] Семейство множеств $K_i \subset M$ называется *локально-конечным*, если у каждой точки $x \in M$ найдется окрестность пересекающаяся только с конечным числом этих множеств. Локально конечные семейства *компактных* множеств существуют только на некомпактных многообразиях.

как только мы наделим $C^\infty(A,B)$ и $C^\infty(A',B')$ соответственно топологиями C^r_T и $C^{r'}_{T'}$. Для простоты вместо символа $C^{r,r}_{T,T}$ будем использовать C^r_T. Типичные примеры C^r_T-непрерывных отображений приведены, например, в [11, 133].

4.2. Определения

Пусть M — m-мерное многообразие. Обозначим через $\mathcal{D}^r(M)$, $r = 1,\ldots,\infty$, $\mathcal{H}(M)$ и $\mathcal{PL}(M)$ — его группы C^r-диффеоморфизмов, гомеоморфизмов и $\mathcal{PL}$-гомеоморфизмов соответственно (если конечно они определены). В случае, когда неважно о какой из групп идет речь, мы будем использовать символ $\mathrm{Iso}(M)$ и называть соответствующие отображения *изоморфзимами*.

Для подмножества $X \subset M$ обозначим через $\mathrm{Iso}(M,X)$ группу изоморфизмов, *неподвижных на* X. Тогда

$$\mathrm{Iso}(M,\varnothing) = \mathrm{Iso}(M).$$

Если M ориентируемо, то $\mathrm{Iso}^+(M)$ будет обозначать группу изоморфизмов, сохраняющих ориентацию M.

Мы наделяем $\mathcal{D}^r(M,X)$ топологиями C^r_S, а $\mathcal{H}(M,X)$ и $\mathcal{PL}(M,X)$ — соответствующими топологиями C^0_S. Напомним, что для компактного M топология C^0_S на $C^0(M,M)$ совпадает с компактно-открытой.

Пускай $\mathrm{Iso}_0(M,X)$ — подгруппа в $\mathrm{Iso}(M,X)$, состоящая из всех изоморфизмов изотопных id_M в пространстве $\mathrm{Iso}(M,X)$. Если M компактно, то $\mathrm{Iso}_0(M)$ является компонентой линейной связности тождественного отображения id_M. Для некомпактного M это не так, см. 4.3.1.

Легко проверить, что $\mathrm{Iso}_0(M)$ является нормальным делителем в $\mathrm{Iso}(M)$, а фактор-группа $\mathrm{Iso}(M)/\mathrm{Iso}_0(M)$ — дискретна. Введем обозначения:

$$\mathcal{M}(M) = \mathrm{Iso}(M)/\mathrm{Iso}_0(M),$$
$$\mathcal{M}^+(M) = \mathrm{Iso}^+(M)/\mathrm{Iso}_0(M).$$

Группу $\mathcal{M}(M)$ называют *группой классов отображений* M. Если если M обладает изменяющим ориентацию изоморфизмом, то $\mathcal{M}^+(M)$ является нормальной подгруппой в $\mathcal{M}(M)$ индекса 2. В противном случае $\mathcal{M}^+(M)$ совпадает с $\mathcal{M}(M)$.

Отметим, что $\mathcal{D}(M)/\mathcal{D}_0(M)$ часто называют группой *диффеотопий*, а $\mathcal{H}(M)/\mathcal{H}_0(M)$ — группой *гомеотопий* M.

Пусть $\mathrm{Iso}_c(M)$ — подгруппа в $\mathrm{Iso}(M)$, состоящая из изоморфизмов, имеющих компактный носитель, и изотопных id_M при помощи изотопии с компактным носителем. Тогда $\mathrm{Iso}_c(M) \subset \mathrm{Iso}_0(M)$, причем для компактного M эти группы совпадают.

4.3. Локальная структура групп автоморфизмов

Теорема 4.6. *Группа $\mathcal{D}^r(M)$, $r = 1, \ldots, \infty$, является открытым подмножеством в $C^r(M, M)$.*

Этот результат фактически является следствием открытости группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ в пространстве всех $(n \times n)$-матриц, см. напр. [109].

Пусть X — топологическое пространство. Напомним, что X называется *абсолютным окрестностным ретрактом (ANR)*, соотв. *абсолютным ретрактом (AR)*, если для каждого вложения $f : X \to Y$ в качестве замкнутого подмножества в произвольное топологическое пространство Y образ $f(X)$ является ретрактом некоторой своей открытой окрестности, соотв. ретрактом всего пространства Y.

Теорема 4.7. *Предположим, что M компактно. Тогда группа $\mathcal{D}^r(M)$ при $1 \le r < \infty$ обладает структурой банахового многообразия, а группа $\mathcal{D}^\infty(M)$ — структурой ручного многообразия Фреше* [99, с. 85]. *В частности,*

$\mathcal{D}^r(M)$ для всех $1 \le r \le \infty$ является ANR и имеет гомотопический тип клеточного комплекса, см. напр. [152].

Теорема 4.8. *Пусть M — произвольное метризованное топологическое многообразие, возможно некомпактное и с краем. Тогда группа $\mathcal{H}(M)$ его гомеоморфизмов локально стягиваема в слабой и сильной C^0-топологиях, а также в равномерной топологии.*

Это утверждение, во всей общности, было получено А. В. Чернавским [38] (1968). Напомним, что, говоря о линейной связности в сильной топологии, мы имеем в виду связность в смысле изотопии, а не в смысле существования непрерывного отображения отрезка $I \to \mathcal{H}(M)$. Поэтому для того, чтобы придать точный смысл формулировке теоремы, введем следующие определения.

Напомним, что *изотопию* можно расматривать как такой гомеоморфизм

$$H : M \times [0,1] \to M \times [0,1],$$

что $H(M \times \{t\}) = M \times \{t\}$ для всех $t \in [0,1]$. Пусть $T(M)$ подгруппа в группе $\mathcal{H}(M \times [0,1])$, состоящая из изотопий. Под *локальной стягиваемостью* группы $\mathcal{H}(M)$ будем понимать следующее: для каждой точки $f \in \mathcal{H}(M)$ найдется такая ее окрестность $U_f \subset \mathcal{H}(M)$ и такое непрерывное отображение

$$\Gamma : U_f \to T(M) \subset \mathcal{H}(M \times [0,1]),$$

что $\Gamma(h)_0 = h$ и $\Gamma(h)_1 = \mathrm{id}_M$ для всех $h \in U_f$.

Гомотопическая структура групп изоморфизмов многообразий изучалась многоми авторами.

Основополагающей, в этом направлении, по-видимому, была статья J. W. Alexander [45] (1923), основанная на работах H. Tietze [178] (1914) и O. Veblen [182] (1917). В ней доказано, что всякий гомеоморфизм $h : D^n \to D^n$, неподвижный на границе $\partial D^n = S^{n-1}$, изотопен тождественному. Построенная изотопия между h и id_{D^n} была в некотором смысле "канонической". На современном языке это фактически означало стягиваемость группы $\mathcal{H}(D^n, S^{n-1})$. Метод доказательства оказался очень важным и в дальнейшем получил название *трюк Александера.*

Только через четверть столетия, после того, как были строго сформулированы определения топологий на пространствах отображений, изучение групп изоморфизмов многообразий получило новое развитие.

M. K. Fort [145] (1950) доказал, что группа $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ локально-линейно-связна. E. E. Floyd и M. K. Fort [88] (1953) показали, что группа $\mathcal{H}(S^2)$ является равномерно связной. M. Hamstrom и E. Dyer [102] (1958) установили, что группа гомеоморфизмов произвольной поверхности локально стягиваема.

J. M. Kister [111] (1959) использовал трюк Александера для доказательства следующего факта: если $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и норма $\|h(x) - x\| < C$ равномерно ограничена, то h изотопен $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Отсюда вытекает локальная стягиваемость $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ в равномерной топологии.

M. Brown [70] (1967) уточнил связь между методами Кистера и Александера, доказав, что условие

$$\|h(x) - x\| < C$$

равносильно тому, что $h = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$, где $\phi : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Int} D^n$ — "радиальный гомеоморфизм", т.е. $\phi(x)/\|\phi(x)\| = x/\|x\|$, а $g : D^n \to D^n$ — гомеоморфизм, неподвижный на крае S^{n-1}.

D. E. Sanderson [160] (1959) установил, что пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{PL}}(M^2, N^3)$ $\mathcal{PL}$-вложений 2-многообразия M^2 в 3-многообразие N^3 локально связно, и затем в [161] (1960) получил результаты, аналогичные содержащимся в работах [145] и [88] но уже для трехмерного случая: группа

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$ локально линейно связна в компактно открытой топологии и имеет 2 компоненты связности, а $\mathcal{H}(S^3)$ — равномерно локально линейно связна.

G. Fisher [87] (1960) показал, что для компактных многообразий размерности ≤ 3, компоненты связности группы $\mathcal{H}(M)$ совпадают с ее компонентами *линейной связности*. Кроме того, тождественная компонента связности открыта в $\mathcal{H}(M)$ и является простой группой. Независимо от него, в том же номере журнала J. Kister [112] (1960) установил локальную связность групы $\mathcal{H}(M^3)$ для произвольного трехмерного многообразия M^3.

Наконец, А. В. Чернавский [38] (1968) доказал, что для любого метризуемого многообразия M группа $\mathcal{H}(M)$ локальной стягиваема в каждой из следующих топологий — слабой, равномерной (в смысле метрики) и сильной.

Отметим, что вопрос о том, верно ли, что каждый гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}(M)$ имеет сколь угодно малые стягиваемые окрестности, по-видимому, до конца неразрешен, см. W. E. Haver [107] (1981).

Теорема 4.9. *Пусть M — произвольная поверхность, возможно некомпактная и с непустым краем. Тогда группа $\mathcal{H}(M, \partial M)$ гомеоморфизмов, неподвижных на крае, является топологическим l_2-многообразием.*

Этот результат получен в целом ряде работ разными авторами.

W. K. Mason [131] (1971) доказал, что $\mathcal{H}(D^2, \partial D^2)$ является абсолютным ретрактом.

Далее R. Luke и W. K. Mason [128] (1972) установили, что для произвольной компактной поверхности M группа $\mathcal{H}(M, \partial M)$ является ANR-пространством.

T. Dobrowolski и H. Toruńczyk [79] (1981) показали, что если полное метризуемое сепарабельное ANR-пространство допускает структуру топологической группы, то оно является либо группой Ли, либо l_2-многообразием. Так как для поверхности M группа $\mathcal{H}(M, \partial M)$ является ANR-пространством, то по этой теореме она также будет l_2-многообразием. Наконец, T. Yagasaki [188] (2000) показал, что $\mathcal{H}(M, \partial M)$ является ANR-пространством и для некомпактных поверхностей.

4.3.1. Особенности сильных топологий. Локальная структура группы гомеоморфизмов $\mathcal{H}(M)$ некомпактного многообразия M достаточно патологична.

Например, если последовательность гомеоморфизмов M сходится в сильной топологии, то все эти гомеоморфизмы совпадают вне некоторого компактного множества, см. лемму 4.4.

Отметим еще, что S. Seidman и J. Childress [165] (1974) доказали, что $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$ является тождественной компонентой связности группы $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ в сильной C^0-топологии. При этом подгруппа $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$ нигде не плотна в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и не удовлетворяет первой аксиоме счетности (наличие счетной базы в каждой точке). Само пространство $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ не удовлетворяет *свойству Фреше*[3], оно не метризуемо и не имеет открытых связных подмножеств. Кроме того, при $n \neq 4$ пространство $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ не является сепарабельным.

4.4. Группы изоморфизмов поверхностей

Пускай M — поверхность и $\gamma \subset \operatorname{Int} M$ — простая (т.е. без самопересечений) замкнутая кривая. Тогда ее регулярная окрестность гомеоморфна либо цилиндру $S^1 \times [-1, 1]$, либо листу Мёбиуса. В первом случае будем говорить, что γ — *двусторонняя*, а во втором случае — *односторонняя* кривая. Односторонние кривые имеются только на неориентируемых поверхностях.

[3] Топологическое пространство X удовлетворяет *свойству Фреше*, если для любого подмножества $A \subset X$ и любой предельной точки x множества A найдется последовательность точек в A, сходящаяся к x.

Рассмотрим следующие три типа гомеоморфизмов поверхностей.

4.4.1. Скручивание Дэна. Пусть γ — двусторонняя простая замкнутая кривая, $U \subset M$ — ее окрестность и $\phi : S^1 \times [0,1] \to U$ — такой гомеоморфизм, что

$$\phi(S^1 \times 0) = \gamma.$$

Рассматривая S^1 как единичную окружность в комплексной плоскости, определим гомеоморфизм

$$t : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$$

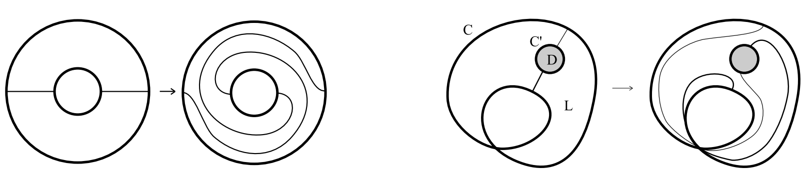
по формуле

$$t(z,t) = (ze^{2\pi i t}, t).$$

Он неподвижен на $S^1 \times \{0,1\}$, и поэтому индуцирует следующий гомеоморфизм $t_\gamma : M \to M$, неподвижный вне U:

$$t_\gamma(x) = \begin{cases} \phi \circ t(z,t), & x = \phi(z,t) \in U, \\ x, & x \in M \setminus U. \end{cases}$$

Гомеоморфизм t_γ называется *скручиванием Дена* вдоль γ. Наглядно его можно представить следующим образом: разрежем M вдоль γ, провернем одну из образовавшихся компонент края на 2π и склеим эти компоненты обратно, см. Рис. 4.1a).



a) b)

Рис. 4.1

4.4.2. Скольжение компоненты края. Пусть L — лист Мёбиуса, $C = \partial L$, $D \subset \operatorname{Int} L$ — замкнутый двумерный диск и $C' = \partial D$. Очевидно, что существует изотопия $b_t : L \to L$, неподвижная на C и "прогоняющая" D вдоль средней линии L так, что $b_1(D) = D$, причем b_1 меняет ориентацию D. Тогда b_1 индуцирует гомеоморфизм поверхности $L' = L \setminus \operatorname{Int} D$ на себя, неподвижный на C и меняющий ориентацию C', см. Рис. 4.1b).

Предположим, что поверхность L' вложена в M таким образом, что C' является некоторой компонентой края ∂M, а $C \subset \operatorname{Int} M$. Тогда гомеоморфизм b_1 индуцирует некоторый гомеоморфизм $b : M \to M$, неподвижный вне L' и меняющий ориентацию C'. Он называется *скольжением* компоненты края C'.

4.4.3. Y-гомеоморфизм. Пусть L_1 еще один лист Мёбиуса. Заметим, что существует гомеоморфизм

$$y : L_1 \to L_1,$$

меняющий ориентацию края $C_1 = \partial L_1$. С другой стороны, мы только что определили гомеоморфизм b_1 листа Мёбиуса L' с одной дыркой, меняющий ориентацию границы C' этой дырки, см. Рис. 4.1b). Заклеим C' листом Мёбиуса L_1 с помощью какого-нибудь гомеоморфизму $h : C_1 \to C'$ и обозначим полученную поверхность через K. Очевидно, что K является бутылкой Клейна с одной дыркой. Так как ограничения $y|_{C_1}$ и $b_1|_{C'}$ меняют ориентации, то можно считать, что они согласованы относительно h, т.е. $h \circ y = b_1 \circ h : C_1 \to C'$, а значит, индуцируют некоторый гомеоморфизм $\nu : Y \to Y$, неподвижный на крае ∂Y. Этот гомеоморфизм называется *Y-гомеоморфизмом.*

4.4.4. Обзор результатов. Скручивания Дэна определены в работе M. Dehn [77] (1938). Там же показано, что скручивания порождают группу классов отображений $\mathcal{M}^+(M)$ *замкнутой ориентируемой* поверхности M.

Y-гомеоморфизмы неориентируемой поверхности определены в работе W. B. R. Lickorish [124] (1939). Он также доказал, что группа гомеотопий *замкнутой неориентируемой* поверхности порождается скручиваниями Дена и Y-гомеоморфизмами, причем одних скручиваний Дена недостаточно. Затем в [125] (1964) W. B. R. Lickorish нашел конечное число скручиваний Дена, порождающих всю группу гомеотопий *замкнутой ориентируемой* поверхности[4], а в [126] (1965) показал, что для *замкнутой неориентируемой* поверхности M подгруппа в $\mathcal{M}(M)$, порожденная скручиваниями Дэна, имеет индекс 2.

D. R. J. Chillingworth [73] (1969) нашел конечное число образующих группы $\mathcal{M}(M)$ для замкнутой неориентируемой поверхности.

Затем J. S. Birman и D. R. J. Chillingworth [64] (1972) установили связь между группами гомеотопий замкнутой неориентируемой поверхности и ее двулистного ориентируемого накрытия[5].

Вместо поверхности с краем M часто удобно рассматривать замкнутую "пунктированную" поверхность $\hat{M}$, т.е. поверхность с выделенным конечным множеством точек Q, см. 4.4.7. J. Birman [62] (1969) нашла образующие группы гомеотопий $\mathcal{M}(\hat{M}, Q)$ для замкнутой пунктированной поверхности и установила глубокую связь этой группы с группой кос [63] (1969).

Образующие группы $\mathcal{M}(\hat{M}, Q)$ для неориентированной поверхности были выписаны M. Korkmaz [117] (2002).

Эти результаты сформулированы ниже в теоремах 4.10 и 4.11.

4.4.5. Образующие групп классов отображений компактных ориентируемых поверхностей. Пускай

[4] см. также Erratum [127] (1966)

[5] см. также Erratum [65] (2004)

M — ориентируемая поверхность рода g, имеющая n компонент края $V_1, \ldots, V_n$, см. Рис. 4.2a), где компоненты связности границы обозначены жирными точками. Тогда M является связной суммой g торов и сферы с n дырами.

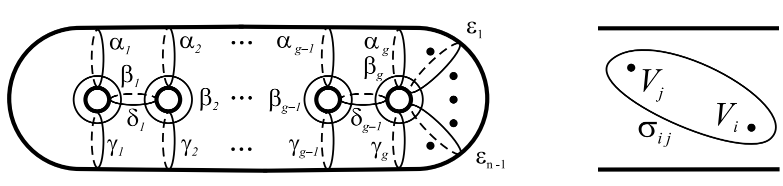
(1) Пусть O — обращающий ориентацию гомеоморфизм M.

(2) Пусть α_i, β_i, γ_i, δ_i и ϵ_i — простые замкнутые кривые, изображенные на Рис. 4.2a). Будем говорить, что эти кривые образуют *конфигурацию* $\mathcal{C}$. Обозначим через t_{α_i}, t_{β_i}, t_{γ_i}, t_{δ_j} и t_{ϵ_i} соответствующие скручивания Дэна.

(3) Для каждой пары $i < j = 1, \ldots, n$ пусть σ_{ij} — простая замкнутая кривая, разбивающая M на две компоненты так, что одна из этих компонент является сферой S с тремя дырками, а границы этих дыр — это σ_{ij} и компоненты V_i и V_j края ∂M, см. Рис. 4.2b). Обозначим через b_{ij} диффеоморфизм M, неподвижный вне S, переставляющий V_i и V_j и такой, что b_{ij}^2 изотопен скручиванию Дэна $t_{\sigma_{ij}}$ вдоль σ_{ij}.

Теорема 4.10. *Группа $\mathcal{M}(M) = \mathrm{Iso}(M)/\mathrm{Iso}_0(M)$ классов отображений ориентируемой поверхности порождается классами изотопий следующих изоморфизмов:*

(i) $\{O, b_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ *при* $g = 0$*;*
(ii) $\{t_l, O, b_{ij} : l \in \mathcal{C}, i, j = 1, \ldots, n\}$ *при* $g \geq 1$.



a) b)

Рис. 4.2. Конфигурация $\mathcal{C}$. Ориентируемый случай.

4.4.6. Образующие групп классов отображений компактных неориентируемых поверхностей. Пусть теперь M — неориентируемая поверхность рода g, имеющая n компонент края $V_1, \ldots, V_n$, т.е. M является связной суммой g проективных плоскостей и сферы с n дырами. Можно также считать, что M получается выбрасыванием из ориентируемой поверхности одного (при нечетном $g = 2r + 1$) или двух (при четном $g = 2r$) дисков и отождествлением противоположных точек границ каждого из них, см. Рис. 4.3.

Рассмотрим следующие четыре типа диффеоморфизмов M:

(1) Пусть y — Y-гомеоморфизм M. Если род $g \geq 3$, то будем дополнительно предполагать, что y^2 является скручиванием Дэна вдоль двусторонней разбивающей кривой, обе компоненты дополнения к которой являются неориентированными поверхностями.

(2-3) Как и в ориентируемом случае, определим конфигурацию $\mathcal{C}$, состоящую из простых замкнутых кривых α_i, β_i, γ_i, δ_i, ϵ_i и, изображенных на Рис. 4.3, кривых σ_{ij}. Тогда определены соответствующие скручивания Дэна и гомеоморфизмы b_{ij}.

(4) Обозначим через ν_i скольжение компоненты края V_i вдоль петли μ, если род g является нечетным, и вдоль петли μ_1, если род g — четный, см. Рис. 4.4. В случае четности рода g обозначим через ω_i скольжение компоненты края V_i вдоль петли μ_2.

Теорема 4.11. *Группа $\mathcal{M}(M) = \mathrm{Iso}(M)/\mathrm{Iso}_0(M)$ классов отображений неориентируемой поверхности порождается классами изотопий следующих изоморфизмов:*

(i) $\{\nu_k, b_{ij} : i, j, k = 1, \ldots, n, i < j\}$, *если* $g = 1$*;*
(ii) $\{t_{\beta_0}, y, \nu_k, b_{ij} : i, j, k = 1, \ldots, n, i < j\}$, *если* $g = 2$*;*
(iii) $\{t_l, y, \nu_k, b_{ij} : l \in \mathcal{C}, i, j, k = 1, \ldots, n, i < j\}$, *если* $g \geq 3$ *и является нечетным;*

(iv) $\{t_l, y, \nu_k, \omega_k, b_{ij} : l \in \mathcal{C}, i, j, k = 1, \ldots, n, i < j\}$, *если род* $g \geq 4$ *и является четным.*

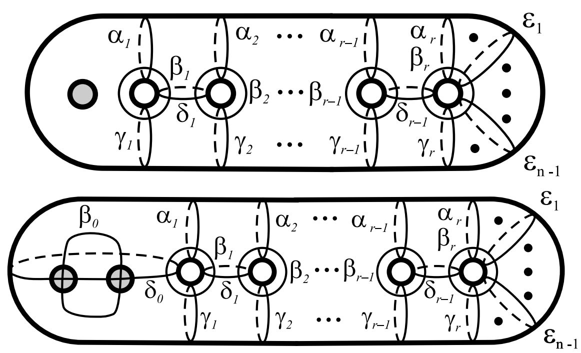


Рис. 4.3. Конфигурация $\mathcal{C}$ для $g = 2r + 1$ и $g = 2r + 2$. Неориентируемый случай.

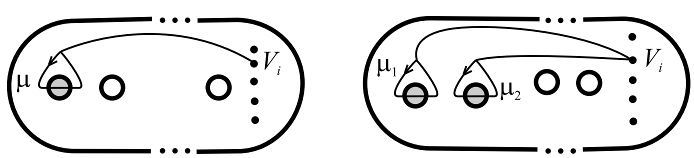


Рис. 4.4. Скольжения компонент края для $g = 2r + 1$ и $g = 2r + 2$.

4.4.7. Диффеоморфизмы поверхностей с краем. Пусть M — компактная поверхность, имеющая n компонент края $V_1, \ldots, V_n$. Обозначим через $\mathrm{Iso}^*(M, \partial M)$ группу изоморфизмов M, которые оставляют инвариантной каждую компоненту края с сохранением ее ориентации, а через $\mathrm{Iso}(M, \partial M)$ — группу изоморфизмов, неподвижных на ∂M. Очевидно, что $\mathrm{Iso}(M, \partial M)$ — нормальный делитель в $\mathrm{Iso}^*(M, \partial M)$.

Отметим, что фактор группа

$$\mathcal{M}^*(M) = \mathrm{Iso}^*(M, \partial M)/\mathrm{Iso}^*_0(M, \partial M)$$

состоит из классов изотопии изоморфизмов M, оставляющих инвариантной каждую компоненту края V_i, а группа

$$\mathcal{M}(M) = \mathrm{Iso}(M, \partial M)/\mathrm{Iso}_0(M, \partial M)$$

— из классов изотопии изоморфизмов M, неподвижных на ∂M.

Легко видеть, что вложение

$$\mathrm{Iso}(M, \partial M) \subset \mathrm{Iso}^*(M, \partial M)$$

индуцирует гомоморфизм $w : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}^*(M)$ являющийся эпиморфизмом. Другими словами, каждый изоморфизм $h \in \mathrm{Iso}^*(M, \partial M)$ изотопен изоморфизму, неподвижному на ∂M. Обозначим ядро $\ker w$ через $K(M)$. Фактически из теорем 4.10 и 4.11 вытекает, что ядро $K(M)$ порождается скручиваниями вдоль компонент края V_i. Поскольку эти скручивания коммутируют друг с другом и с образующими групп $\mathcal{M}(M)$, то имеет место следующая теорема:

Теорема 4.12. $\mathcal{M}(M) \approx K(M) \times \mathcal{M}^*(M)$. *При этом* $K(D^2) = 0$, $K(S^1 \times [0,1]) = \mathbb{Z}$ *и* $K(M) = \mathbb{Z}^n$ *для всех остальных поверхностей.*

Для двумерной сферы с n дырами эта теорема доказана D. Sprows [170] (1980), см. также [22].

4.4.8. Классы отображений пунктированной поверхности. Стянем каждую компоненту V_i поверхности M в точку q_i и обозначим через $\hat{M}$ полученную замкнутую поверхность с выделенным множеством $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ попарно различных точек. Пусть $\mathrm{Iso}(\hat{M}, Q)$ — группа изоморфизмов M, оставляющих неподвижной каждую точку $q_i \in Q$ и

$$\mathcal{M}(\hat{M}, Q) = \mathrm{Iso}(\hat{M}, Q)/\mathrm{Iso}_0(\hat{M}, Q)$$

— группа классов изотопии изоморфизмов M, оставляющих Q поточечно-неподвижным.

Очевидно, что каждый $h \in \mathrm{Iso}^*(M, \partial M)$ индуцирует некоторый изоморфизм $\hat{h} \in \mathrm{Iso}(\hat{M}, Q)$. При этом соответствие $h \mapsto \hat{h}$ является гомоморфизмом

$$\mathrm{Iso}^*(M, \partial M) \to \mathrm{Iso}(\hat{M}, Q),$$

который, в свою очередь, индуцирует гомоморфизм

$$\mathcal{M}^*(M) \to \mathcal{M}(\hat{M}, Q)$$

соответствующих групп классов отображений.

Теорема 4.13. *Гомоморфизм $\mathcal{M}^*(M) \to \mathcal{M}(\hat{M}, Q)$ является изоморфизмом.*

D. Sprows [169] (1975) установил этот факт для компактной поверхности M, а затем R. Tondra [179] (1979) доказал это для произвольной (возможно некомпактной) поверхности M, край которой состоит только из (возможно счетного числа) окружностей. В этом случае Q является локально-конечным подмножеством в $\hat{M}$.

4.4.9. Группы классов отображений некоторых поверхностей. H. Tietze [178] (1914) показал, что

$$\mathcal{M}(S^2) \approx \mathbb{Z}_2$$

Фактически он доказывал, что всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм 2-диска изотопен тождественному, т.е. что $\mathcal{M}(D^2) = \mathbb{Z}_2$. Метод его доказательства был затем упрощен H. L. Smith [168] (1917).

Далее, O. Veblen [182] (1917) доказал, что $\mathcal{M}(D^n) = \mathbb{Z}_2$ для всех размерностей.

Наконец, J. W. Alexander [45] (1923) показал, что доказательство O. Veblen можно модифицировать, для получения более сильного результата: каждый гомеоморфизм

n-диска D^n, неподвижный на своей границе S^{n-1}, "канонически" изотопен тождественному гомеоморфизму посредством неподвижной на S^{n-1} изотопии. Метод его доказательства называется "трюком Александера". Из "каноничности" построения вытекало, что группа $\mathcal{H}(D^n, S^{n-1})$ стягиваема. Этот результат сыграл ключевую роль в изучении групп гомеоморфизмов многообразий.

Утверждение о том, что $\mathcal{M}(D^2) \approx \mathcal{M}(S^2) \approx \mathbb{Z}_2$, впоследствии передоказывалось многими авторами, см. напр. H. Kneser [115] (1926), R. Baer [53] (1928), J. Schreirer и S. Ulam [163] (1934), G. M. Fisher [87] (1960).

Отметим, что из теоремы Александера легко вытекает, что для проективной плоскости $\mathcal{M}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$.

Пусть $C = S^1 \times I$ — цилиндр. H. Gluck [93] (1962) доказал, что $\mathcal{M}(C, \partial C) \approx \mathbb{Z}$ и $\mathcal{M}(C) \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Таким образом, $\mathcal{M}(C, \partial C)$ порождается скручиванием Дэна вдоль одной из компонент края ∂C, а $\mathcal{M}(C)$ — классами изотопии изоморфизмов $a(\phi, t) = (\phi, 1-t)$ и $b(\phi, t) = (\pi - \phi, t)$.

J. P. Lee [122] (1973) установил, что для поверхности "шорты" S (сфера с тремя дырами) $\mathcal{M}(S, \partial S) \approx \mathbb{Z}^3$.

Группа $\mathcal{M}(T^2)$ классов отображений двумерного тора T^2 изоморфна группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ невырожденных целочисленных (2×2)-матриц и порождается скручиваниями Дэна вдоль паралели и меридиана. Заметим, что каждый изоморфизм $h : T^2 \to T^2$ индуцирует автоморфизм первой групппы целочисленных гомологий $H_1(T^2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это дает гомоморфизм $\mathcal{M}(T^2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, являющийся изоморфизмом.

Для бутылки Клейна W. B. R. Lickorish [124] (1963) показал, что $\mathcal{M}(K) \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Эта группа порождается скручиванием Дена и Y-изоморфизмом, см. теорему 4.11(ii).

Для проективной плоскости группа $\mathcal{M}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ тривиальна, а для листа Мёбиуса $\mathcal{M}(M\ddot{o}) \approx \mathbb{Z}_2$, см. теорему 4.11(i).

4.4.10. Копредставления групп $\mathcal{M}(M)$. Пусть M — замкнутая поверхность, а $q_1, \ldots, q_{m+n} \in M$ — $m+n$ попарно различных точек. Напомним, что n-е *конфигурационное пространство* топологического пространства M — это множество $\mathcal{F}_n(M)$ всех *упорядоченных* n-к попарно различных точек из M, т.е.

$$\mathfrak{F}_n(M) = \{(q_1, \ldots, q_n) \mid q_i \in M,\ q_i \neq q_j \text{ для } i \neq j\}.$$

Обозначим

$$\mathfrak{F}_{m,n}(M) = \mathfrak{F}_n(M \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}).$$

Фундаментальная группа $\pi_1 \mathfrak{F}_{m,n}(M)$ называется *n-й группой кос* поверхности $M \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}$.

J. Birman [62, 63] (1969) установила связь между группой $\mathcal{M}(M, n)$ и группой кос поверхности. Пусть $\mathcal{H}(M, n)$ — группа гомеоморфизмов M, оставляющих неподвижной каждую из точек $s_1, \ldots, s_m$ и

$$\mathcal{M}(M, n) = \mathcal{H}(M, n)/\mathcal{H}_0(M, n).$$

Имеется естественное отображение “вычисления”

$$e : \mathcal{H}(M, n) \to \mathfrak{F}_{m,n}(M),$$

которое сопоставляет каждому $h \in \mathcal{H}(M, n)$ точку с координатами $(h(s_{n+1}), \ldots, h(s_{n+m}))$. Легко проверить, что e является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathcal{H}(M, m+n)$. Из точной последовательности гомотопических групп этого расслоения J. Birman [62] (1969) получила образующие группы $\mathcal{M}(M, n)$ замкнутой ориентируемой поверхности M. Она также показала, что $\mathcal{M}(M, n)$ изоморфна группе автоморфизмов фундаментальной группы этой поверхности $M \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$, и выписала копредставление группы $\mathcal{M}(T^2, n)$ для 2-тора.

D. J. Sprows [171] (1983) получил копредставление группы $\mathcal{M}(M, n)$, где M — сфера с m-дырами.

A. Hatcher и W. Thurston [106] (1980), используя деформации функций Морса, выписали конечное копредставление группы $\mathcal{M}(M,n)$.

Пользуясь этим результатом, B. Wajnryb [183] (1983) получил копредставления групп $\mathcal{M}(M,0)$ и $\mathcal{M}(M,1)$ с наименьшим допустимым числом скручиваний Дена.

Для компактной ориентируемой поверхности с краем рода $g \geq 1$ в работе S. Gervais [91] (1996) получены два *бесконечных, но очень симметричных* копредставления группы $\mathcal{M}(M,n)$. В первом копредставлении образующими являются *все* скручивания Дэна, а во втором — скручивания Дена только вдоль неразбивающих кривых. В работе S. Gervais [92] (2001) построено уже конечное копредставление группы $\mathcal{M}(M,n)$.

4.4.11. Минимальное число образующих группы классов отображений. Пусть M_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g.

W. B. R. Lickorish [125] (1964) нашел $3g-1$ скручивание Дена, порождающее $\mathcal{M}^+(M_g)$, но при этом отметил, что если не требовать, чтобы образующие были только скручиваниями, то число образующих может быть уменьшено до четырех: 3 скручивания Дена и гомеоморфизм "циклически переставляющий ручки." S. Humphries [110] (1979) показал, что наименьшее возможное число скручиваний Дена, порождающих $\mathcal{M}^+(M_g)$, равно $2g+1$.

Наконец, B. Wajnryb [184] (1996) установил, что группа $\mathcal{M}^+(M_g)$ порождается всего двумя элементами.

4.4.12. Сечения $\pi_0 : \mathcal{H}(M) \to \mathcal{M}(M)$. Пусть M — замкнутая ориентируемая поверхность и $h : M \to M$ —

гомеоморфизм. Можно ли в каждом классе изотопии гомеоморфизмов M выбрать некоторый "канонический" представитель? Более сложный вопрос: можно ли эти представители выбрать таким образом, чтобы они образовывали некоторую подгруппу N в $\mathcal{H}(M)$, изоморфную $\mathcal{M}(M)$.

Другими словами, верно ли то, что естественный гомоморфизм групп $\pi_0 : \mathcal{H}(M) \to \mathcal{M}(M)$ обладает сечением-гомоморфизмом $s : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{H}(M)$, т.е. $\pi_0 \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{M}(M)}$.

Для сферы и тора такое сечение существует.

Пусть $M = S^2$. Тогда в качестве подгруппы $N \subset \mathcal{H}(S^2)$ можно выбрать подгруппу, состоящую из двух элементов: тождественного отображения id_{S^2} и антиподального $-\mathrm{id}_{S^2}$.

Пусть $M = T^2$. Поясним, как $\mathcal{M}(T^2)$ вкладывается в $\mathcal{H}(T^2)$. Напомним, что плоскость $\mathbb{R}^2$ является универсальным накрывающим пространством тора T^2, так что мы имеем отождествление $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Далее, имеется изоморфизм $\mathcal{M}(T^2) \approx \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, см. 4.4.9, который каждому $\hat{h} \in \mathcal{M}(T^2)$ сопоставляет автоморфизм группы гомологий $H_1(T^2, \mathbb{Z})$, т.е. некоторую целочисленную матрицу

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

с определителем ± 1. Заметим, что эта матрица также задает линейный автоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$, который, как легко видеть, коммутирует с действием группы скольжений $\mathbb{Z}^2$ и поэтому индуцирует некоторый единственный гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}(T^2)$. Соответствие $\hat{h} \mapsto h$ и задает вложение $\mathcal{M}(T^2) \subset \mathcal{H}(T^2)$.

В общем случае, эта задача не решена. Известно, что для произвольной конечной подгруппы $G \subset \mathcal{M}(M)$ существует сечение $\mathcal{H}(M) \leftarrow G \subset \mathcal{M}(M)$. Этот результат установлен Нильсеном и Фенхелем, см. также книгу [37].

S. Morita [144] (1984) показал, что для поверхностей достаточно большого рода гомоморфизм

$$\pi_0 : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{M}(M)$$

не имеет сечения. Идея доказательства основывалась на следующем замечании: если π_0 обладает сечением, то индуцированные гомоморфизмы групп гомологий

$$H_*(\mathcal{D}(M), F) \to H_*(\mathcal{M}(M), F)$$

и когомологий

$$H^*(\mathcal{M}(M), F) \to H^*(\mathcal{D}(M), F)$$

должны быть эпиморфизмами во всех размерностях и для произвольного кольца коэффициентов F. Морита установил, что если род g поверхности M достаточно большой (например, если $g \geq 86$), то для рациональных коэффициентов эти гомоморфизмы оказываются в некоторых размерностях не сюръективными. Следовательно, в этих случаях сечений отображения π_0 не существует.

4.4.13. Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону. Несмотря на сложности с построением сечения отображения $\pi_0 : \mathcal{H}(M) \to M$, выбрать в каждом классе изотопий по одному "каноническому" представителю все же оказывается возможным. Это описывается теорией Нильсена-Терстона.

J. Nielsen в серии работ [149–151] выделил три типа гомеоморфизмов поверхностей и описал свойства первых двух. Почти через полвека W. Thurston переоткрыл многие из этих результатов и выявил их глубокую связь с теорией динамических систем. В частности, он уточнил структуру третьего типа гомеоморфизмов, названных им *псевдоаносовскими*.

Пусть M — компактная ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$. Напомним, что тогда M обладает гиперболической структурой, т.е. на ней существует риманова метрика постояннной отрицательной кривизны -1, в которой компоненты края ∂M являются геодезическими.

Определение 4.14. *Гомеоморфизм* $h : M \to M$ *называется* ***периодическим****, если* h^n *изотопен* id_M *для некоторого* n.

Нильсен доказал, что в этом случае h изотопен такому периодическому гомеоморфизму g, что $g^n = \mathrm{id}_M$.

Назовем 1-подмногообразие $C \subset M$ *существенным*, если ни одна из его связных компонент не гомотопна нулю и никакие две его компоненты не гомотопны друг другу. Скажем, что 1-подмногообразие $C \subset M$ является *геодезическим*, если каждая его компонента является замкнутой геодезической.

Определение 4.15. *Гомеоморфизм* $h : M \to M$ *называется* ***приводимым****, если он изотопен гомеоморфизму* g*, оставляющему инвариантным некоторое существенное подмногообразие* C *в* M*, т.е.* $g(C) = C$.

Хорошо известно, что каждое существенное подмногообразие изотопно единственному *геодезическому* подмногообразию, см. напр. книгу [19]. Поэтому в определении можно считать, что C является *геодезическим* подмногообразием.

Отметим, что если h приводим и $h(C) = C$ для некоторого существенного геодезического 1-подмногообразия в M, то разрезав M вдоль C можно считать h неприводимым на, уже, вообще говоря, несвязной гиперболической поверхности с геодезическим краем.

3) Для того, чтобы описать третий тип гомеоморфизмов, определим понятие *трансверсальной меры*. Предположим, что на M задано гладкое одномерное слоение $\mathcal{F}$ с особенностями типа "вырожденное седло".

Трансверсальная мера для слоения $\mathcal{F}$ — это функция, сопоставляющая каждой дуге α, трансверсальной $\mathcal{F}$, неотрицательную борелевскую меру $\mu|_\alpha$ со следующими свойствами (a) и (b):

(a) если $\beta \subset \alpha$ — поддуга дуги α, то $\mu|_\beta$ есть ограничение меры $\mu|_\alpha$.

Предположим, что $\alpha_0, \alpha_1 : I \to M$ — две дуги, трансверсальные к $\mathcal{F}$ и связанные такой гомотопией $\alpha_t : I \to M$, при которой путь $\alpha_t(s)$, $t \in I$, при фиксированном $s \in I$ лежит в одном и том же слое. Тогда, в частности, мы имеем гомеоморфизм $\phi : \alpha_0 \to \alpha_1$, при котором для всех s точки $\alpha_0(s)$ и $\alpha_1(s)$ лежат в одном слое. Требуется, чтобы

(b) для любого борелевского подмножества $A \subset \alpha_1$ выполнялось условие:

$$\mu|_{\alpha_1}(A) = \mu|_{\alpha_0}(\phi^{-1}(A)).$$

Таким образом $\mu|_{\alpha_1}$ получается перенесением $\mu|_{\alpha_0}$ на α_1 с помощью гомеоморфизма ϕ, “действующего вдоль слоев”.

Определение 4.16. *Гомеоморфизм $h : M \to M$ называется* ***псевдоаносовским****, если он изотопен такому гомеоморфизму g, что*

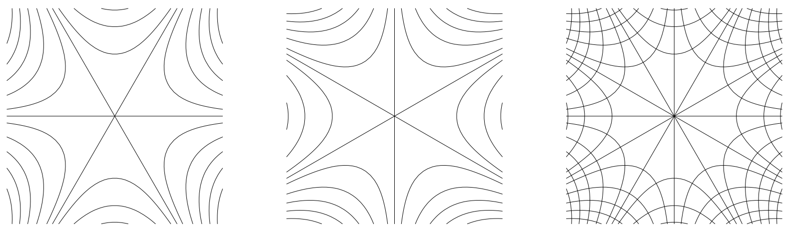
(1) *на M найдутся два гладких одномерных слоения $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{F}^u$ с конечным числом особенностей типа "вырожденное седло с n сепаратрисами", см. Рис. 4.5 для $n = 6$, причем каждое из слоений инвариантно относительно g, в том смысле, что образ каждого слоя — слой;*

(2) *особые точки слоений $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{F}^u$ совпадают, а в неособых точках слои $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{F}^u$ трансверсальны друг другу*

(3) *найдутся такие трансверсальные меры μ^s и μ^u для слоений $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{F}^u$ соответственно, и такое*

число $\lambda > 1$, *что*

$$g^*(\mu^s) = \lambda\mu^s \qquad \text{и} \qquad g^*(\mu^u) = \frac{1}{\lambda}\mu^u.$$



(a) слоение $\mathcal{F}^s$ (b) слоение $\mathcal{F}^u$ (c) оба слоения

Рис. 4.5. Слоения $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{F}^u$ для $n = 6$.

Таким образом h сжимает слои $\mathcal{F}^s$ и растягивает слои $\mathcal{F}^u$. Поэтому слоение $\mathcal{F}^s$ называют *устойчивым*, а $\mathcal{F}^u$ — *неустойчивым.* [6]

Теорема 4.17. [Нильсен-Терстон] *Пусть h гомеоморфизм компактной ориентируемой поверхности M. Тогда найдется существенное (возможно пустое) геодезическое 1-подмногообразие $C \subset \operatorname{Int} M$ и гомеоморфизм g поверхности M обладающие следующими свойствами.*

(1) *h изотопен g;*

(2) *$g(C) = C$;*

(3) *ограничение g на каждую из компонент связности $M \backslash C$ является либо приводимым, либо псевдоаносовским;*

(4) *пусть γ — компонента связности C. Предположим, что $g^k(\gamma) = \gamma$ для некоторого $k \neq 0$, и при этом g^k сохраняет ориентацию γ и оставляет инвариантными компоненты дополнения $N_\gamma \backslash \gamma$, где N_γ — окрестность γ. Тогда ограничение g^k на N_γ является некоторой степенью скручивания Дена вдоль γ.*

[6] Индексы происходят от английских слов *stable* и *unstable.*

Многообразие M	$\mathcal{M}(M)$	**Гомотопический тип** $\mathrm{Iso}_0(M)$
	$\dim M = 1$	
S^1, $\mathbb{R}^1$	$\mathbb{Z}_2$	S^1
	$\dim M = 2$	
S^2	$\mathbb{Z}_2$	$SO(3)$
$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$	0	$SO(3)$
D^2, $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{Z}_2$	точка
$S^1 \times I$, $S^1 \times (0,1)$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	S^1
$T^2 = S^1 \times S^1$	$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$	T^2
лист Мебиуса Mö и его внутренность	$\mathbb{Z}_2$	S^1
бутылка Клейна	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	S^1
остальные поверхности	теоремы 4.10 и 4.11	точка

Таблица 4.1.

Литература посвященная этой теореме настолько обширна, что мы ограничимся упоминанием только основных работ Нильсена [149–151] и Тёрстона [177], а также книг, посвященных детальному исследованию этих вопросов [19, 37, 52].

4.5. Гомотопические типы компонент связности групп изоморфизмов поверхностей

В таблице 4.1 собрана информация о группах классов отображений и гомотопических типах группы $\mathrm{Iso}_0(M)$ для некоторых многообразий размерностей 1 и 2.

Рассмотрим эти результаты подробнее.

4.5.1. Прямая $\mathbb{R}$**.** Группа $\mathcal{D}^r(\mathbb{R}), r = 0, 1, \ldots, \infty$, состоит из *сюръективных* C^r-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которых производная везде отлична от нуля. В сильных и слабых

C^r-топологиях при $1 \leq r < \infty$ группа $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет две связные компоненты, состоящие из функций со строго положительной и строго отрицательной производной. Очевидно, что эти компоненты *выпуклы* в $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и поэтому *стягиваемы* в C^r-топологиях при $1 \leq r < \infty$.

Аналогично, группы $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{PL}(\mathbb{R})$ состоят из непрерывных, соответственно, кусочно-линейных строго монотонных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, и имеют по две компоненты связности, каждая из которых также выпукла.

4.5.2. Окружность S^1. Очевидно, что ортогональная группа $O(2)$ (диффеоморфная $S^1 \times \mathbb{Z}_2$) вкладывается в $\mathrm{Iso}(S^1)$ и это вложение является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, $\mathrm{Iso}(S^1)$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомотопически эквивалентна S^1.

4.5.3. Поверхности. Из работы J. W. Alexander [45] вытекает, что группа $\mathcal{H}(D^2, S^1)$ стягиваема.

S. Smale [167] (1959) доказал гладкий аналог этой теоремы: группа диффеоморфизмов 2-диска D^2, неподвижных в некоторой окрестности края ∂D^2, стягиваема. Отсюда он вывел, что вложение $O(3) \subset \mathcal{D}(S^2)$ является гомотопической эквивалентностью.

Затем C. Earle и J. Eells [80] и [81] (1967) вычислили гомотопический тип групп $\mathcal{D}_0(M)$ для всех замкнутых поверхностей, а C. Earle и A. Schatz [82] (1970) получили результаты для поверхностей с краем. Независимо от них (и другими методами) те же утверждения были доказаны A. Gramain [95] (1973). Для компактной поверхности M вычисления гомотопического типа группы $\mathcal{H}_0(M)$ проведены M. E. Harmstrom [100] (1966), а для группы $\mathcal{PL}_0(M)$ — G. Scott [164] (1970), см. также M. E. Harmstrom [101].

Для некомпактных поверхностей — плоскости, открытого цилиндра и листа Мебиуса — результаты получены T. Yagasaki [188], [190] и [189] (2000-2003).

4.5.4. Сфера S^2. Если рассмотреть S^2 как единичную сферу в $\mathbb{R}^3$, то очевидно, что она инвариантна относительно действия ортогональной группы $O(3)$. Это дает вложение $O(3) \subset \mathcal{D}(S^2)$, которое является гомотопической эквивалентностью. В частности, $\mathcal{D}(S^2)$ имеет 2 компонетны связности. Напомним, что тождественная компонента $SO(3)$ группы $O(3)$ диффеоморфна 3-мерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, см. напр. [35]. Поэтому

$$\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2, \qquad \pi_k SO(3) = \pi_k S^3 = \pi_{k-1} S^2$$

(последнее равенство следует из точной последовательности расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ со слоем S^1). Отметим, что образующую группы $\pi_1 SO(3)$, т.е. изотопию

$$F : S^2 \times [0,1] \to S^2,$$

можно определить, например, как полный оборот S^2 вокруг оси z:

$$F_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t & 0 \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Эта изотопия порождает образующие в фундаментальных группах $\pi_1 \mathcal{H}_0(M)$ и для некоторых других поверхностей.

4.5.5. Диск D^2, цилиндр $S^1 \times [0,1]$ и их внутренности — плоскость $\mathbb{R}^2$ и открытый цилиндр $S^1 \times (0,1)$. Пусть M — одна из этих поверхностей. Тогда M можно так вкложить в S^2, что ее образ оказывается инвариантным относительно вращения F сферы S^2 вокруг оси z. Например,

$$D^2 \cong \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \leq 0\},$$

$$S^1 \times [0,1] \cong \{(x,y,z) \in S^2 \mid -0.5 \leq z \leq 0.5\}.$$

При этом внутренности $\mathrm{Int}\,(D^2) \cong \mathbb{R}^2$ и $S^1 \times (0,1)$ также инвариантны относительно изотопии F_t. Следовательно, F_t индуцирует вложение $S^1 \subset \mathcal{H}_0(M)$. Это вложение и является гомотопической эквивалентностью.

4.5.6. Проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, лист Мёбиуса и его внутренность — открытый лист Мёбиуса. Пусть $\hat{M}$ — одна из таких поверхностей и M — ее ориентируемое двулистное накрытие — либо сфера S^2, либо цилиндр $S^1 \times [0,1]$, либо открытый цилиндр $S^1 \times (0,1)$ соответственно.

Тогда для каждого $\hat{h} \in \mathcal{H}(\hat{M})$ существует ровно два поднятия $h_0, h_1 \in \mathcal{H}(M)$, причем h_0 сохраняет ориентацию (и следовательно, изотопен тождественному), а h_1 — обращает ее. Поэтому соответствие $\hat{h} \mapsto h_0$ дает вложение $\mathcal{H}(\hat{M}) \subset \mathcal{H}_0(M)$. Это вложение и является гомотопической эквивалентностью. Отсюда, в частности, вытекает, что группа $\mathcal{H}(\hat{M})$ связна.

Отметим также, что изотопия F_t поверхности M коммутирует с инволюцией $\xi(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ и поэтому индуцирует изотопию $\hat{F}_t$ соответствующего фактор-пространства $\hat{M}$. Эта изотопия $\hat{F}_t$ является образующей в группе $\pi_1\mathcal{H}_0(\hat{M})$.

4.5.7. Тор T^2. Заметим, что тор T^2 является связной группой Ли, а значит, действует на себе сдвигами, изотопными тождественному отображению. Это дает вложение $T^2 \subset \mathcal{H}_0(T^2)$, являющееся гомотопической эквивалентностью.

4.5.8. Бутылка Клейна K. Заметим, что K является тотальным пространством нетривиального расслоения над S^1 со слоем S^1. Рассмотрим изотопию $H_t : S^1 \to S^1$ *базы* S^1 этого расслоения, заданную формулой:

$$H_t(\phi) \;=\; \phi + t \mod 1.$$

Эта изотопия является нетривиальной петлей в $\pi_1\mathcal{H}_0(S^1)$. Образующая группы $\pi_1\mathcal{H}_0(K) \approx \mathbb{Z}$ получается поднятием этой петли в $\mathcal{H}_0(K)$.

Для остальных поверхностей группа $\mathcal{D}_0(M)$ — стягиваема.

4.6. Группы диффеоморфизмов некоторых 3-многообразий

4.6.1. Общие свойства.

Теорема 4.18. *Пусть M^3 — трехмерное многообразие. Тогда вложения групп $\mathcal{PL}(M^3)$ и $\mathcal{D}(M^3)$ в группу гомеоморфизмов $\mathcal{H}(M^3)$:*

$$\mathcal{D}(M^3),\ \mathcal{PL}(M^3)\ \subset\ \mathcal{H}(M^3).$$

Для группы $\mathcal{D}(M^3)$ это доказал J. Cerf [71] (1959), а для $\mathcal{PL}(M^3)$ утверждение вытекает из триангуляционных теорем R. H. Bing и E. E. Moise, см. [59, 141].

4.6.2. Сфера S^3 и диск D^3. Группы гомеотопий S^3 и D^3 изоморфны $\mathbb{Z}_2$. Это легко следует из трюка Александера.

Группы диффеотопий этих многообразий также изоморфны $\mathbb{Z}^2$, но этот результат далеко нетривиален. Его доказательству посвящена книга J. Cerf [72] (1968).

A. Hatcher [105] (1983) доказал, что вложение

$$O(4) \subset \mathcal{D}(S^3)$$

является гомотопической эквивалентностью, см. 4.6.9.

4.6.3. $S^1 \times S^2$. В работе A. Hatcher [104] (1981) установлено гомотопическую эквивалентность

$$\mathcal{D}(S^1 \times S^2) \approx \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(3) \times \Omega\mathrm{O}(3)$$

где $\Omega\mathrm{O}(3)$ — пространство петель группы $\mathrm{O}(3)$.

4.6.4. Многообразия Хакена: группа классов отображений. Пусть F^2 — поверхность и M^3 — трехмерное многообразие. Вложение поверхности $F^2 \subset M^3$ называется *собственным*, если $\partial F^2 = F^2 \cap \partial M^3$.

Многообразие M^3 называется *неприводимым*, если любая вложенная 2-сфера $S^2 \subset \operatorname{Int} M^3$ ограничивает 3-диск; M^3 называется *∂-неприводимым*, если любой собственно вложенный 2-диск $D^2 \subset M^3$ такой, что $\partial D^2 \subset \partial M^3$ ограничивает 3-диск.

Собственно вложенная поверхность $F^2 \subset M^3$ называется *несжимаемой*, если индуцированный гомоморфизм $\pi_1 F^2 \to \pi_1 M^3$ является мономорфизмом.

Неприводимое 3-многообразие M^3 называется *достаточно большим*, если оно не гомеоморфно 3-диску и содержит несжимаемую поверхность $F^2 \subset M^3$.

Можно доказать, что многообразие M^3 является достаточно большим, если выполнено одно из следующих двух условий

(a) $\partial M^3 \neq \varnothing$ или

(b) $\partial M^3 = \varnothing$, но либо группа $H_1(M)$ бесконечна, либо $\pi_1 M$ является нетривиальным свободным произведением с амальгаммой, т.е. $\pi_1 M \approx A *_C B$, где A, B и C — нетривиальные группы.

Трехмерное многообразие M^3 называется *многообразием Хакена*, если оно неприводимо, ∂-неприводимо и является достаточно большим, см. W. Haken [96] (1962).

Отметим, что существуют 3-многообразия с бесконечной фундаментальной группой не являющиеся достаточно большими. Не смотря на это класс многообразий Хакена все же очень широкий.

F.Waldhausen [186] (1968) доказал следующую теорему, которая позволяет вычислять группы гомеотопий многообразий Хакена.

Теорема 4.19. [186]. *Пусть M и N — неприводимые и ∂-неприводимые 3-многообразия, причем M является многообразием Хакена. Предположим, что существует изоморфизм $\psi : \pi_1 N \to \pi_1 M$, "сохраняющий периферическую структуру". Это означает, что для каждой компоненты G края ∂N найдется такая компонента F края ∂M и подгруппа $A \subset \pi_1 M$, что*

$$\psi(i_*(\pi_1 F)) \subset A \subset \pi_1 M$$

и подгруппа A сопряжена в $\pi_1 M$ с $i_*(\pi_1 G)$. Тогда существует такой гомеоморфизм $h : N \to M$, что

$$h_* = \psi : \pi_1 N \to \pi_1 M.$$

Предположим теперь, что M — многообразие Хакена, которое нельзя представить как тотальное пространство расслоения над поверхностью со слоем $[0,1]$. Пусть $\mathrm{Perif}(\pi_1 M)$ — группа автоморфизмов $\pi_1 M$, сохраняющих периферическую структуру, и $\mathrm{Inn}(\pi_1 M)$ — группа внутренних автоморфизмов $\pi_1 M$. Очевидно, что $\mathrm{Inn}(\pi_1 M)$ является нормальным делителем в $\mathrm{Perif}(\pi_1 M)$.

Из теоремы 4.19 вытекает, что

$$\mathcal{M}(M^3) \approx \mathrm{Perif}(\pi_1 M)/\mathrm{Inn}(\pi_1 M).$$

4.6.5. Многообразия Хакена: гомотопический тип группы $\mathrm{Iso}_0(M)$**.** Обозначим через $\mathcal{PL}(M, \partial M)$ — группу $\mathcal{PL}$-гомеоморфизмов M, неподвижных на ∂M, а через $G(M, \partial M)$ — множество отображений, являющихся гомотопическими эквивалентностями.

F. Waldhausen [186] (1968) также доказал, что если M — многообразие Хакена, не содержащее вложенной проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, имеющей тривиальное нормальное расслоение, то вложение

$$\mathcal{PL}(M, \partial M) \subset G(M, \partial M) \tag{4.27}$$

индуцирует биекцию между компонентами связности. Затем F. Laudenbach [121] (1974) установил, что оно также индуцирует изоморфизм фундаментальных групп

$$\pi_1\mathcal{PL}(M,\partial M) \approx \pi_1 G(M,\partial M).$$

Наконец, A. Hatcher [103] (1976) показал, что это вложение является гомотопической эквивалентностью.

Эта теорема впервые позволила вычислить гомотопические типы групп $\mathcal{PL}(M^3)$ для большого количества 3-многообразий. Вычисления основывались на простом замечании, что многобразия Хакена асферичны, т.е. $\pi_i M = 0$ для $i \geq 2$.

Из него вытекает, что множество компонент связности $\pi_0 G(M,\partial M)$ отождествляется с группой внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(\pi_1 M)$. Другими словами, всякий ψ автоморфизм $\pi_1 M$ реализуется некоторой гомотопической эквивалентностью $h : M \to M$, причем две гомотопические эквивалентности $g, h : M \to M$ гомотопны тогда и только тогда, когда автоморфизм $g_* \circ h_*^{-1}$ группы $\pi_1 M$ является внутренним.

Далее, $\pi_1(G(M,\partial M))$ изоморфна центру $\pi_1 M$, а все остальные гомотопические группы $\pi_i(G(M,\partial M)) = 0$ для $i \geq 2$. Таким образом, для вычисления гомотопического типа $\mathcal{PL}(M,\partial M)$ достаточно было вычислить группу классов $\mathcal{PL}$-гомеоморфизмов и центр группы $\pi_1 M$.

Предположим, что $\partial M = \varnothing$. F. Waldhausen [185] (1967) показал, что если центр группы $\pi_1 M$ нетривиален, и M — ориентируемо, то M является многообразием Зейферта. В частности, оно либо гомеоморфно 3-тору T^3, либо его центр изоморфен группе $\mathbb{Z}$.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 4.20. [103] *Пусть M — замкнутое ориентируемое многообразие Хакена, не содержащее вложенной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, у которой нормальное* *расслоение тривиально. Тогда тождественная компонента группы $\mathcal{PL}(M)$ содержит в качестве деформационного ретракта одну из следующих групп Ли*

$$\{1\}, \quad S^1, \quad \textit{или} \quad S^1 \times S^1 \times S^1.$$

Дальнейшие исследования были сосредоточены на изучении диффеоморфизмов таких 3-многообразий, которые не содержат несжимаемых поверхностей. Простейшие среди таких поверхностей это 2-торы и бутылки Клейна.

4.6.6. Призм-многообразия. Пусть $N \to M\ddot{o}$ — ориентированное S^1-расслоение над листом Мебиуса. Очевидно, что границей ∂N является двумерный тор. Заклеим ∂N полноторием $D^2 \times S^1$ посредством какого-нибудь гомеоморфизма $\partial(D^2 \times S^1) = T^2 \to \partial N$ и обозначим полученное многообразие через M^3. Полученное многообразие называется *призм-многообразием*. Очевидно также, что 2-тор ∂N не является *несжимаемым* в M^3.

K. Asano [51] (1978) вычислил группы гомеотопий всех таких многообразий. В частности, если M — линзовое пространство вида $L(4n, 2n\pm1)$, см. ниже 4.6.8, то $\mathcal{M}(M) \approx \mathbb{Z}_2$ при $n = 1$ и $\mathcal{M}(M) \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ при $n \neq 1$.

4.6.7. Многообразия имеющие конечную фундаментальную группу и содержащие бутылку Клейна. J. H. Rubinstein [157] (1979) вычислил группы гомеотопий неприводимых 3-многообразий с указанным свойством. Каждое такое многообразие можно получить заклейкой бутылки Клейна K полноторием $D^2 \times S^1$ с помощью некоторого двулистного накрытия

$$p : \partial D^2 \times S^1 = T^2 \to K.$$

Напомним, что фндаментальная группа бутылки Клейна имеет корпедстваление

$$\pi_1(K, \mathbb{Z}) = \langle a, b | bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Пусть $\mu \in \pi_1 T^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ — меридиан полнотория, тогда $p(\mu) = a^m b^{2n}$ для некоторых m, n. Топологический тип M^3 однозначно определяется числами m и n. Более того, изменив, если нужно, ориентацию a и b, можно считать, что $m, n \geq 0$. Обозначим полученное многообразие через $Q(m, n)$.

Фундаментальная группа $Q(m, n)$ может быть задана копредставлением

$$\pi_1 Q(m,n) = \langle a, b | b^{-1}ab = a^{-1}, a^m b^{2n} = 1 \rangle.$$

J. H. Rubinstein доказал, что

$$\mathcal{M}(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{если } m \neq 2 \text{ и } n \neq 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{если } m \neq 2 \text{ и } n = 1, \\ S_3 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{если } m = 2 \text{ и } n \neq 1, \\ S_3 & \text{если } m = 2 \text{ и } n = 1, \end{cases}$$

где S_3 — группа перестановок трех элементов.

Н. В. Иванов [13] (1979) установил, что при $m, n \neq \pm 1$ группы $\mathcal{PL}(Q(m,n))$ и $\mathcal{H}(Q(m,n))$ — стягиваемы, группа $\mathcal{D}(Q(m,n))$ — связна. Он также показал, что $Q(m,1)$ гомеоморфно линзовому пространству $L(4m,1)$ и что группы $\mathcal{PL}(L(4m,1))$ и $\mathcal{H}(L(4m,1))$ гомотопически эквивилентны S^1.

4.6.8. Линзовые пространства $L(p,q)$. Пусть T_1 и T_2 — полнотория, то есть пространства, гомеоморфные $D^2 \times S^1$.

Линзовое пространство L — это 3-многообразие, полученное склейкой T_1 и T_2 по некоторому гомеоморфизму из границ $\phi : \partial T_1 \to \partial T_2$. Пусть $\mu_i, \lambda_i \in H_1(T_i, \mathbb{Z})$ — меридиан и параллель полнотория T_i, $i = 1, 2$. Тогда

$$\phi_*(\mu_1) \ = \ p\,\mu_2 \ + \ q\,\lambda_2$$

для некоторых *взаимно простых* $p, q \in \mathbb{Z}$. Изменением ориентации меридианов и параллелей, всегда можно добиться того, чтобы $p, q \geq 0$. Очевидно, что топологический тип многообразия L определяется этими числами, поэтому оно обозначается $L(p, q)$. Оказывается, что многообразия $L(p', q)$ и $L(p, q)$ диффеоморфны тогда и только тогда, когда

$$p' \equiv \pm p^{\pm 1} \mod q.$$

Отметим также, что $S^3 = L(0, 1)$ и $S^1 \times S^2 = L(1, 0)$.

В работе F. Bonahon [68] (1983) вычислены группы гомеотопий линзовых пространств. Он показал, что для каждого линзового пространства его группа гомеотопий изоморфна одной из следующих групп:

$$\mathbb{Z}_2, \qquad \mathbb{Z}_4, \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

4.6.9. Гипотеза Смейла. A. Hatcher [105] (1983) доказал выдвинутую С. Смейлом гипотезу о том, что вложение $SO(4) \subset \mathcal{D}_0(S^3)$ является гомотопической эквивалентностью. Пусть S^3 — единичная сфера в $\mathbb{R}^4$. Заметим, что индуцированная на S^3 метрика имеет постоянную кривизну, а группа изометрий $\mathrm{Isom}(S^3)$ в этой метрике изоморфна ортогональной группе $O(4)$. Это привело к формулировке следующей гипотезы, называемой *обобщенной гипотезой Смейла*: для риманова 3-многообразия M^3 постоянной кривизны вложение

$$\mathrm{Isom}(M^3) \subset \mathcal{D}(M^3) \tag{4.28}$$

является гомотопической эквивалентностью.

Как хорошо известно, группа изометрий компактного многообразия M обладает структурой конечномерной группы Ли. Поэтому, если гипотеза Смейла верна для многообразия M^3, то $\mathcal{D}(M^3)$ имеет гомотопический тип конечномерной группы Ли G, а группа классов отображений M^3 изоморфна группе $\pi_0 G$ компонент связности группы G.

D. Gabai [90] (2001) доказал гипотезу Смейла для произвольного замкнутого гиперболического 3-многообразия M^3. Кроме того, он установил, что группа $\mathcal{D}_0(M^3)$ — стягиваема.

Для большого класса 3-многообразий проверено, что вложение (4.28) индуцирует биекцию на компонентах связности, т.е. что произвольный диффеоморфизм такого многообразия изотопен изометрии, см. [51, 66–68, 72, 156, 157]. Отметим, что для многообразий постоянной положительной кривизны это доказано D. McCullough [140] (2002)

4.7. Другие многообразия.

Напомним, что для гладкого компактного многообразия M группа $\mathcal{D}_0(M)$ является многообразием Фреше, а значит имеет гомотопический тип некоторого клеточного комплекса, см. напр. [152]. Если $\dim M \leq 3$, то, как описано в предыдущих разделах, такие комплексы достаточно просты. Но для многообразий бóльших размерностей это далеко не так и о них известно намного меньше, см. [50]. Проблема описания усложняется еще и тем, что многомерные многообразия могут иметь несколько гладких структур и, что проблема перечисления многообразий размерности ≥ 5 вообще не разрешима.

4.7.1. n-мерная сфера S^n. Так как единичная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ инвариантна относительно действия ортогональной группы $O(n+1)$, то имеется вложение

$$O(n+1) \subset \mathcal{D}(S^n).$$

В размерностях $1, 2, 3$ оно оказывается гомотопической эквивалентностью. При $n = 1$ этот факт элементарен, для $n = 2$ это доказано S. Smale [167] (1959), а для $n = 3$ — A. Hatcher [105] (1983). Кроме того, в этих размерностях вложение

$$\mathcal{D}(S^n) \subset \mathcal{H}(S^n), \qquad n = 1, 2, 3$$

также является гомотопической эквивалентностью.

С. П. Новиков [26] (1965) доказал, что группа $\mathcal{D}(S^n)$ для достаточно больших n имеет больше компонент связности, чем ортогональная группа.

P. L. Antonelli, D. Burghelea и P. J. Kahn [50] (1972) показали, что для $n \geq 7$ группа $\mathcal{D}_0(S^n)$ не доминируется никаким *конечным* клеточным комплексом, и в частности, она не является гомотопически эквивалентной никакой конечномерной группе Ли.

4.7.2. n-мерный тор T^n. Пусть $n \geq 7$ и T^n — n-мерное многообразие, которое гомотопически эквивалентно n-мерному тору. Тогда, см. [50], T^n и группа $\mathcal{D}_0(T^n)$ имеют разные гомотопические типы.

4.8. Нормальные подгруппы групп $\mathrm{Iso}(M)$

Пускай M — связное паракомпактное многообразие. Легко видеть, что погруппа $\mathrm{Iso}_0(M)$ — нормальна в $\mathrm{Iso}(M)$ и, что фактор-группа $\mathrm{Iso}(M)/\mathrm{Iso}_0(M)$ — дискретна. Какие еще нормальные делители существуют в $\mathrm{Iso}(M)$?

Для некомпактного M обозначим через $\mathrm{Iso}_c(M)$ подгруппу в $\mathrm{Iso}_0(M)$, состоящую из изоморфизмов, имеющих компактный носитель и изотопных тождественному изоморфизму с помощью изотопии с компактным носителем. Очевидно, что $\mathrm{Iso}_c(M)$ также является нормальным делителем в $\mathrm{Iso}(M)$.

Предположим, что $\partial M \neq \varnothing$. Пусть $\mathrm{Iso}_c(M, \partial M)$ — подгруппа в $\mathrm{Iso}_c(M)$, состоящая из изоморфизмов, *неподвижных на* ∂M, а $\mathrm{Iso}_c^*(M, \partial M)$ подгруппа в $\mathrm{Iso}_c(M)$, состоящая из изоморфизмов, *неподвижных в окрестности* ∂M. Так как край ∂M инвариантен относительно $\mathrm{Iso}_c(M)$, то группа $\mathrm{Iso}_c(M)$ уже не будет транзитивной на M. Поэтому $\mathrm{Iso}_c(M, \partial M)$ и $\mathrm{Iso}_c^*(M, \partial M)$ являются нормальными подгруппами в $\mathrm{Iso}(M)$.

Следуя [87], будем говорить, что $h \in \mathrm{Iso}(M)$ *имеет носитель во внутренней клетке*, если его носитель содержится в некотором подмножестве $Q \subset \mathrm{Int}\,(M)$, гомеоморфном замкнутому m-мерному диску. Обозначим через $F\mathrm{Iso}(M)$ подгруппу в $\mathrm{Iso}(M)$, порожденную изоморфизмами с носителями во внутренних клетках. Эта подгруппа, очевидно, также нормальна, поэтому мы получаем следующую цепочку нормальных делителей:

$$F\mathrm{Iso}(M) \subset \mathrm{Iso}_c^*(M, \partial M) \subset \mathrm{Iso}_c(M, \partial M) \subset \\ \subset \mathrm{Iso}_c(M) \subset \mathrm{Iso}_0(M) \subset \mathrm{Iso}(M).$$

G. Fisher [87] (1960) показал, что группа $F\mathcal{H}(M)$ *проста* (не содержит собственных нормальных подгрупп) и является *наименьшей* нормальной подгруппой в $\mathcal{H}(M)$, т.е. содержится в любой другой собственной нормальной подгруппе из $\mathcal{H}(M)$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ пусть $F\mathrm{Iso}_\varepsilon(M)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Iso}(M)$, порожденную гомеоморфизмами с носителями во внутренних клетках, диаметра, меньшего чем ε. Ясно, что

$$F\mathrm{Iso}_\varepsilon(M) \subset F\mathrm{Iso}_{\varepsilon'}(M) \subset F\mathrm{Iso}(M)$$

при $\varepsilon < \varepsilon'$. M. Brown [69] (1962) доказал, что

$$F\mathcal{H}(M) = F\mathcal{H}_\varepsilon(M)$$

для произвольного ε, т.е. что каждый гомеоморфизм h из $F\mathcal{H}(M)$ является конечной композицией гомеоморфизмов с носителями сколь угодно малого диаметра. Этот же результат верен и для группы $F\mathcal{PL}(M)$ кусочно-линейных гомеоморфизмов.

4.8.1. Простота и совершенность групп $\mathrm{Iso}_c(M)$ для многообразий без края. Ниже, если не оговорено противное, будем предполагать, что $\partial M = \varnothing$.

ТЕОРЕМА 4.21. *Группа* $\mathcal{H}_c(M)$ *является простой, а следовательно, совершенной.*

S. Ulam и J. von Neumann [181] (1947) доказали, что $\mathcal{H}_c(S^2)$ является простой группой.

R. D. Anderson [46] (1958) показал, что группы сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов S^2 и S^3, а также группы гомеоморфизмов множества Кантора, множеств рациональных и иррациональных чисел, являются простыми. Но его метод не проходил для группы гомеоморфизмов окружности S^1.

G. Fisher [87] (1960) установил это для многообразий размерности ≤ 3, а затем R. D. Anderson [47] (1961) доказал простоту группы $\mathcal{H}_c(M)$ для произвольных многообразий.

J. Mather [134] (1971) доказал, что для топологического многообразия M его группа гомеоморфизмов $\mathcal{H}_c(M)$ — ациклична, т.е. все целочисленные группы гомологий тривиальны $H_i(\mathcal{H}_c(M), \mathbb{Z}) = 0$. Отсюда также вытекает, что $\mathcal{H}_c(M)$ — совершенна и проста.

T. Rybicki [159] (1996) обобщил его метод для доказательства совершенности (но не простоты) группы гомеоморфизмов многообразия с краем.

Пусть $\mathcal{H}(D^n, S^{n-1})$ — группа гомеоморфизмов, неподвижных на крае S^{-1}, а $\mathcal{H}^*(D^n, S^{n-1})$ — ее подгруппа, состоящая из гомеоморфизмов, неподвижных в некоторой окрестности S^{n-1}. J. V. Whittaker [187] (1973) доказал, для любой нормальной подгруппы $N \subset \mathcal{H}(D^n)$ выполняется одно из следующих двух условий: либо

$$\mathcal{H}^*(D^n, S^{n-1}) \subseteq N \subseteq \mathcal{H}(D^n, S^{n-1}),$$

либо

$$\mathcal{H}(D^n, S^{n-1}) \subseteq N.$$

В частности, $\mathcal{H}^*(D^n, S^{n-1})$ является *минимальной* нетривиальной нормальной подгруппой в $\mathcal{H}(D^n)$.

Теорема 4.22. *Группа $\mathcal{D}^r_c(M)$ проста и совершенна.*

В работе D. B. A. Epstein [84] (1970) даны достаточные условия которым должна удовлетворять группа гомеоморфизмов G, для того, чтобы ее коммутатор $[G,G]$ был простой группой.

Так как коммутатор $[G,G]$ всегда является нормальной подгруппой в G, то из этих условий вытекает, что G проста тогда и только тогда, когда $G=[G,G]$. D. B. A. Epstein также установил, что эти условия выполнены для $\mathcal{D}^r_c(M)$.

Более того, для $r=1$ коммутатор $[\mathcal{D}^1_c(M),\mathcal{D}^1_c(M)]$ всюду плотен в $\mathcal{D}^1_c(M)$ (в C^1-топологии), поэтому $\mathcal{D}^1_c(M)$ не имеет замкнутых нормальных подгрупп. Кроме этого, он показал, что группы $\mathcal{PL}$-гомеоморфизмов

$$\mathcal{PL}_c(\mathbb{R}^1) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{PL}_c(S^1)$$

просты.

M. Hermann [108] (1973), используя KAM-теорию, установил, что для n-мерного тора T^n группа $\mathcal{D}^\infty_c(T^n)$ — проста.

W. Thurston [176] (1974) дал очень сжатое доказательство простоты группы $\mathcal{D}^\infty_c(M)$ для произвольного многообразия. Подробному изложению этого результата посвящена книга A. Banyaga [55] (1997).

Независимо J. Mather (анонсировал в [136] и дал полные доказательства в [135]) (1974), используя условие Эпштейна, доказал, что если C^∞-многообразие имеет размерность n, то группа $\mathcal{D}^r_c(M)$ проста для $n+2\le r\le+\infty$.

Далее, J. Mather [137] (1975) доказал, что для каждого для $1\le r\le n$ группа $\mathcal{D}^r_c(M)$ также является простой. Что касается случая $r=n+1$, то он оставался неразобранным в течении 9 лет. Только в [138] (1984) J. Mather указал причины по которым его доказательство, а также доказательства Германа и Тёрстона, не проходят для случая $r=n+1$.

В том же номере журнала [85] Эпштейн привел еще одно доказательство совершенности группы $\mathcal{D}_c^\infty(M)$.

J. Mather [139] (1985) также показал, что группа C^1-диффеоморфизмов $\mathbb{R}^1$, у которых первая производная имеет ограниченную вариацию, не является совершенной (он построил эпиморфизм этой группы на коммутативную абелеву группу $\mathbb{R}$).

Пусть M — многообразие с краем. Обозначим через $G_r(M)$, $r = 1, \ldots, \infty$, группу диффеоморфизмов M, имеющих тождественным диффеоморфизмом id_M касание порядка r на ∂M. Очевидно, что G_r — нормальна подгруппа в $\mathcal{D}(M)$ и $G_{r'} \subset G_r$ для $r' > r$. В частности, $G_\infty \subset G_r$ для всех r. A. Masson [132] (1977) показал, что G_∞ является совершенной группа.

4.9. Группы диффеоморфизмов слоений

Пусть F — слоение (возможно с особенностями), заданное на многообразии M. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ группу C^∞-диффеоморфизмов M, которые имеют компактный носитель, оставляют инвариантным каждый слой этого слоения и кроме того, изотопны тождественному диффеоморфизму с помощью сохраняющей слои изотопии с компактным носителем.

Например, если F — тривиальное слоение, состоящее только из одного слоя M, то $\mathcal{D}_c(M) = \mathcal{D}(\mathsf{F})$.

Предположим, что $K \subset M$ — подмножество, являющееся объединением целых слоев F. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathsf{F}, K)$ подгруппу в $\mathcal{D}(\mathsf{F})$, состоящую из диффеоморфизмов, неподвижных на K. Тогда легко проверить, что $\mathcal{D}(\mathsf{F}, K)$ является нормальным делителем в $\mathcal{D}(\mathsf{F})$, причем, если K — замкнуто, то $\mathcal{D}(\mathsf{F}, K)$ также замкнуто в $\mathcal{D}(\mathsf{F})$. Таким образом, группа $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ уже не является простой. Но все же во многих случаях она совершенна. Положим

$$H_1(\mathcal{D}(\mathsf{F})) \;=\; \mathcal{D}(\mathsf{F}) \;/\; [\mathcal{D}(\mathsf{F}), \mathcal{D}(\mathsf{F})].$$

Теорема 4.23. *Если каждый слой* F *имеет положительную размерность* (≥ 1), *то* $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ *— совершенна. Если* F *имеет ровно* k *нульмерных слоев, т.е. точек, то*

$$H_1\mathcal{D}(\mathsf{F}) = \mathbb{R}^k.$$

Эта теорема доказана K. Fukui [89] (1980). Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, что z — нульмерный слой слоения F. Покажем, как можно построить нетривиальный гомоморфизм

$$\theta_z : \mathcal{D}(\mathsf{F}) \to \mathbb{R}.$$

Выберем локальные координаты $(x_1, \ldots, x_m)$ в окрестности z. Тогда $h(z) = z$ для каждого $h \in \mathcal{D}(\mathsf{F})$. Очевидно, что определитель $|J(h)|$ якобиана h в точке z не зависит от выбора локальных координат в точке z (так как при замене координат $J(h)$ заменяется матрицей вида $AJ(h)A^{-1}$).

Кроме того,

$$|J(h \circ g)| = |J(h)J(g)| = |J(h)|\,|J(g)|.$$

Поэтому соответствие $h \mapsto \log|J(h)|$ является корректно определенным гомоморфизмом $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ на абелеву группу $\mathbb{R}$.

Если слоение F имеет k нульмерных слоев $z_1, \ldots, z_k$, то получаем гомоморфизм $\theta = (\theta_{z_1}, \ldots, \theta_{z_k}) : \mathcal{D}(\mathsf{F}) \to \mathbb{R}^k$. K. Fukui [89] (1980) показал, что θ — эпиморфизм и что любой другой гомоморфизм $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ в абелеву группу пропускается через θ.

T. Rybicki [158] (1995) доказал, что группа $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ для p-мерного слоения является совершенной. Затем S. Haller и T. Rybicki [97] (1999) доказали совершенность группы $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ для произвольного (даже сингулярного) слоения, у которого все слои имеют размерность ≥ 1, т.е. не являются точками.

Используя теорему Неша–Мозера об обратной функции, см. [99], S. Haller и J. Teichman [98] (2003) дали другое доказательство совершенности группы $\mathcal{D}^\infty(M)$: всякий достаточно близкий к тождественному диффеоморфизм M можно представить как произведение коммутаторов. Их метод также позволил оценить минимальное количество необходимых коммутаторов.

Для случая, когда слоение F состоит из орбит некоторого векторного поля F, в работе [129] найдены достаточные условия, при которых группа $\mathcal{D}(\mathsf{F})$ либо стягиваема, либо гомотопически эквивалентна окружности. Эти результаты описаны в теореме 5.57.

4.9.1. G-эквивариантные изоморфизмы. Пусть G — компактная группа Ли, свободно действующая на топологическом многообразии M. Обозначим через $\mathrm{Iso}_G(M)$ группу G-эквивариантных изоморфизмов M, изотопных тождественному посредством G-эквивариантных изотопий с компактными носителями.

В препринте 2005 года T. Rybicki доказал, что $\mathcal{H}_G(M)$ — совершенная группа.

A. Banyaga [54] (1977) доказал совершенность группы $\mathcal{D}^r_G(M)$ для случая когда G является n-мерным тором T^n и $r = 1, \ldots, \infty$, но $r \neq \dim(M) + 1$.

K. Abe и K. Fukui [42] (1978) установили, что если G — группа Ли размерности q, гладко и свободно действующая на гладком m-мерном многообразии без края M, то группа $\mathcal{D}^r_G(M)$ является совершенной при $r \neq m-q+1$ и $m-q \geq 1$.

4.9.2. Сохранение счетных множеств. Пусть M — либо топологическое многообразие, либо Q-многообразие (т.е. хаусдорфово топологическое пространство, локально гомеоморфное счетному произведению замкнутых отрезков), либо многообразие Менгера. Пусть также $D \subset M$ — всюду плотное счетное подмножество. Обозначим через $\mathcal{H}(M, D)$ группу таких гомеоморфизмов $h : M \to M$, что

$h(D) = D$ и наделим эту группу компактно-открытой топологией.

J. J. Dijkstra и J. van Mill [78] (2004) доказали, что если M — одномерное топологическое многообразие, то группа $\mathcal{H}(M, D)$ гомеоморфна счетному произведению пространства рациональных чисел $\mathbb{Q}^\infty$. Во всех остальных случаях M группа $\mathcal{H}(M, D)$ гомеоморфна пространству Эрдёша $\mathfrak{E}$, состоящему из всех точек гильбертового пространства l^2 с рациональными координатами.

Отметим, см P. Erdös [86] (1940), что пространство $\mathfrak{E}$ имеет размерность 1.

ГЛАВА 5

Гладкие сдвиги вдоль орбит векторных полей

5.1. Введение

Пусть M — гладкое многообразие и F — слоение на M. В данной главе изучаются отображения $f : M \to M$, оставляющие инвариантными каждый слой заданного слоения на M.

5.1.1. Слоения. Пукай M — гладкое многообразие, $\dim M = m$. *Несингулярным слоением* F размерности p на M, сокращенно *p-слоением*, называется такое разбиение $M = \cup_i \mathsf{F}_i$ на попарно непересекающиеся *связные* подмножества F_i (называемые *слоями*), что для каждой точки $x \in M$ найдутся локальные координаты $(x_1, \dots, x_m)$, в которых каждое непустое пересечение $\mathsf{F}_i \cap U$ является p-мерной плоскостью $\{x_{p+1} = c_1, \ \dots, \ x_m = c_{m-p}\}$ для некоторого $(c_1, \dots, c_{m-p}) \in \mathbb{R}^{m-p}$.

Например, разбиение F^p пространства $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$ на плоскости вида $\mathbb{R}^p \times c$, где $c \in \mathbb{R}^{m-p}$ является несингулярным p-слоением на $\mathbb{R}^m$, и всякое p-слоение на m-мерном многообразии локально устроено так же как F^p.

Напомним, что гладкое отображение многообразий

$$i : N \to M$$

называется *иммерсией*, если i инъективно и для каждой точки $x \in N$ касательное отображение $i_* : T_x N \to T_{i(x)} M$

является мономорфизмом. Образ иммерсии $i(N) \subset M$ будем называть *иммерсированным подмногообразием* в M. Иммерсия, являющаяся гомеоморфизмом на свой образ, называется *вложением*. Если образ иммерсии замкнут в M, то она является вложением, но, очевидно, не у каждого вложения образ замкнут.

Отметим, что каждый слой p-слоения является иммерсированным в M многообразием, но *не обязательно является подмногобразием в* M. В качестве примера можно рассмотреть 1-слоение на n-мерном торе на орбиты *иррационального потока*. Каждая такая орбита является взаимно однозначным гладким образом $\mathbb{R}$, но, как подмножество тора, не гомеоморфна $\mathbb{R}$.

Пусть F — p-слоение на M. Для каждой точки $x \in M$ обозначим через F_x слой слоения F, содержащий x. Будем называть F_x слоем слоения, проходящим через x.

5.1.2. Распределения. *Распределением* D на многообразии M называется отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ некоторую плоскость D_x в касательном пространстве T_xM.

C^r-распределение $(0 \le r \le \infty)$ — это распределение, полученное следующим образом. Выберем на M некоторое, возможно бесконечное, множество векторных полей $\mathbb{V}$ класса C^r и для каждой точки $x \in M$ пусть

$$\mathsf{D}_x = \{F(x) : F \in \mathbb{V}\} \subset T_xM$$

— линейная оболочка всех векторов из $\mathbb{V}$ в данной точке. Тогда соответствие $x \mapsto \mathsf{D}_x$ является, вообще говоря, *сингулярным* распределением на M, то есть размерности плоскостей D_x могут меняться от точки к точке.

Говорят, что векторное поле F *принадлежит* распределению D, если $F(x) \in \mathsf{D}_x$ для всех $x \in M$. Следовательно, каждое распределение D на M определяет множество $\mathbb{V}(\mathsf{D})$ всех векторных полей, принадлежащих D.

Пусть $N \subset M$ — гладкое *иммерсированное* подмногообразие. Тогда N называется *интегральным* многообразием распределения D, если для каждой точки $x \in N$ ее касательная плоскость T_xN содержится в D_x. Если же $T_xN = \mathsf{D}_x$ для всех $x \in N$ и N не содержится ни в каком бо́льшем интегральном многообразии распределения, то N называется *максимальным* интегральным многообразием распределения D.

5.1.3. Связь между слоениями и распределениями. Очевидно, что всякое сингулярное слоение F естественным образом определяет единственное *касательное* распределение $\mathbb{T}(\mathsf{F})$ на M: точке $x \in M$ сопоставляется касательная плоскость $T_x\mathsf{F}_x \subset T_xM$ к слою F_x. Очевидно, что полученное распределение интегрируемо, а его максимальные интегральные подмногообразия — это слои слоения F.

Обратное соответствие не однозначно: не каждое распределение возникает как касательное к некоторому слоению, но оказывается, что всякое распределение можно расширить так, чтобы оно было касательным к некоторому *сингулярному* слоению.

Основная причина состоит в следующем. Пусть D — интегрируемое распределение, $x \in M$ и F_x — максимальное интегральное многообразие D, проходящее через x. Предположим, что векторное поле F принадлежит распределению D, и рассмотрим орбиту ω_x этого поля, проходящую через точку x. Тогда легко видеть, что $\omega_x \subset \mathsf{F}_x$. Таким образом, стартовав из точки x и двигаясь от точки к точке только вдоль орбит векторных полей, принадлежащих распределению D, мы никогда не выйдем за пределы максимального интегрального многообразия F_x.

Аналитически это означает, что для любых двух полей F, G, принадлежащих D, их скобка Ли $[F, G]$ также принадлежит D. Распределения с таким свойством называют *инволютивными*.

Это приводит к следующему определению. Пусть $\mathbb{V}$ — некоторое множество векторных полей на M (например, множество всех векторных полей, принадлежащих данному распределению). Следуя [175] будем говорить, что точки x и $x' \in M$ являются $\mathbb{V}$-*связанными* если найдутся такие векторные поля $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{V}$ и действительные числа $t_1, \dots t_k$, что

$$x' = \Phi_n^{t_n} \circ \Phi_{n-1}^{t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_1^{t_1}(x) \tag{5.29}$$

где $\Phi_i : \mathbb{R} \times M \to M$ — поток, порожденный F_i, а отображение $\Phi_i^t : M \to M$ задается формулой $\Phi_i^t(x) = \Phi_i(t, x)$.

Несложно проверить, что отношение связанности является отношением эквивалентности.

В работах [172–175] доказано, что для каждой точки $x \in M$ ее класс эквивалентности F_x является связным иммерсированным подмногообразием.

Таким образом, каждое распределение D определяет некоторое разбиение $\mathbb{F}(\mathsf{D})$ многообразия M на иммерсированные подмногообразия. Так как размерности слоев могут меняться от точки к точке, то такое разбиение называется *сингулярным слоением* или *слоением с особенностями*.

Отметим, что если $\mathsf{D} = \mathbb{T}(\mathsf{F})$ было касательным распределением для некоторого слоения F, то

$$\mathbb{F}(\mathsf{D}) = \mathbb{F}(\mathbb{T}(\mathsf{F})) = \mathsf{F}. \tag{5.30}$$

Сформулируем эти результаты в виде следующей теоремы, являющейся обощением теоремы Фробениуса для p-распределений.

Теорема 5.1. [174, 175], см. также [172, 173]. *Пусть M — гладкое многообразие и* D *— гладкое, вообще говоря, сингулярное распределение. Тогда следующие условия эквивалентны*

(1) $\mathsf{D} = \mathbb{T}(\mathbb{F}(\mathsf{D}))$

(2) D *инволютивно, то есть замкнуто относительно взятия скобки векторных полей, принадлежащих* D.

5.1.4. Слоениях с особенностями, определяемые гладкими отображениями. Теория слоений в основном занимается регулярными слоениями, у которых все слои имеют одинаковую размерность. Сингулярные слоения являются куда более сложными объектами.

Одним из очень важных примеров слоений с особенностями являются слоения на множества уровня гладких отображений. Точнее, пусть $f : M \to N$ гладкое отборажение между гладкими многообразиями. Тогда по теореме Сарда, см. напр. [36], почти все значения f (множество этих значений образует множество первой категории в N) являются регулярными. Поэтому пробраз $f^{-1}(c)$ каждой такой точки является гладким подмногообразием в M одной и той же размерности

$$d = \max\{0, \dim M - \dim N\}.$$

Если критические точки f являются *особенностями Тома-Боардмана*, см. [6], то критические уровни f, т.е. прообразы критических значений $f^{-1}(c)$ можно *стратифицировать*, т.е. специальным образом разбить на подмногообразия размерностей меньших чем d.

Таким образом, отображение $f : M \to N$ с особенностями Тома-Боардмана индуцирует на M слоение с особенностями, слои которого либо компоненты связности прообразов регулярных значений f, либо компоненты стратов в прообразах критических значений f.

Мы не будем формулировать определение отбражений Тома-Боардмана, упомянем только, что функции Морса $f : M \to \mathbb{R}$, см. напр. [23], являются наиболее простым примером таких отображений, а слоения многообразия M на множества уровня функций Морса (в особенности если M — симплектическое) играет очень важную роль в теории гамильтоновых систем, см. напр. [7].

5.1.5. Как строить диффеоморфизмы, которые сохраняют слои слоений. Пусть F — векторное поле на многообразии M и $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ — поток поля F. Рассмотрим слоение на M, образованное орбитами поля F. Тогда для каждой гладкой функции $\alpha : M \to \mathbb{R}$ отображение $f : M \to M$, определенное по формуле

$$f(x) = \Phi(\alpha(x), x), \tag{5.31}$$

является гладким и обладает следующими свойствами:

(i) f оставляет инвариантной каждую орбиту ω_x потока Φ, то есть $f(\omega_x) \subset \omega_x$;

(ii) f гомотопно тождественному отображению id_M, например посредством гомотопии $f_t = \Phi(t\,\alpha(x), x)$;

(iii) f есть локальный диффеоморфизм в каждой особой точке F.

Таким образом, соответствие $\alpha \mapsto f$ можно рассматривать как отображение

$$\phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, M),$$

заданное формулой (5.31). Будем называть ϕ отображением *сдвига* вдоль орбит векторного поля F. , см. [129].

Зафиксируем теперь k векторных полей $F_1, \ldots, F_k$, порождающих соответственно потоки

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_k : \mathbb{R} \times M \to M$$

и рассмотрим сингулярное слоение F, порожденное этими полями.

Тогда для каждого упорядоченного набора из k гладких функций $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ можно определить следующее отображение $f : M \to M$ посредством формулы

$$f(x) = \Phi_k\big(\cdots(\Phi_2(\Phi_1(x, \alpha_1(x)), \tag{5.32}$$

аналогичной (5.29).

Очевидно, что f гомотопно тождественному отображению и переводит каждый слой слоения F в себя. Заметим также, что это определение существенно зависит от порядка $F_1, \dots, F_k$, в котором берутся эти векторные поля. Формула (5.32) определяет некоторое отображение

$$\phi_{1,\dots,k} : \underbrace{C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \dots \times C^\infty(M, \mathbb{R})}_{k} \to C^\infty(M, M),$$

которое мы также будем называть отображением *сдвига* вдоль орбит векторных полей $F_1, \dots, F_k$.

Подчеркнем, что в формуле (5.32) значения каждой из функций α_i берутся *в начальной точке* x. Если обозначить через $\phi_i : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, M)$ отображение сдвига вдоль орбит векторного поля F_i, определенное по формуле (5.31), то отображение $\phi_{1,\dots,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, вообще говоря, не совпадает с композицией $\phi_k(\alpha_k) \circ \dots \circ \phi_2(\alpha_2) \circ \phi_1(\alpha_1)$. Например, при $n = 2$ имеем

$$\phi_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2)(x) = \Phi_2\big(\alpha_2(x), \Phi_1\big(\alpha_1(x), x\big)\big),$$

в то время как

$$\phi_2(\alpha_2) \circ \phi_1(\alpha_1)(x) = \Phi_2\big(\alpha_2 \circ \Phi_1\big(\alpha_1(x), x\big), \Phi_1\big(\alpha_1(x), x\big)\big).$$

В частности, несложно видеть, что если два потока с соседними индексами совпадают, скажем, $\Phi_i = \Phi_{i+1}$ для некоторого индекса i, то

$$\begin{aligned} \phi_{1,\dots,i,i,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_i', \alpha_i'', \dots, \alpha_n) &= \\ &= \phi_{1,\dots,i,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_i' + \alpha_i'', \dots, \alpha_n). \end{aligned} \tag{5.33}$$

5.2. Сдвиги, являющиеся диффеоморфизмами

Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — векторные поля на $\mathbb{R}^m$ и

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to \mathbb{R}^m$$

— соответствующие локальные потоки, порождаемые этими полями F_i в некоторой окрестности V начала координат $0 \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : V \to \mathbb{R}$ — такие гладкие функции, что отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, задаваемое формулой (5.32):

$$f(x) \;=\; \Phi_n\bigl(\alpha_n(x), \cdots \Phi_2\bigl(\,\alpha_2(x),\, \Phi_1(\alpha_1(x), x)\,\bigr) \cdots\bigr),$$

определено в некоторой окрестности $U \subset V$ начала координат.

Через $F.\alpha$ будем обозначать производную функции α вдоль векторного поля F:

$$F.\alpha = \sum_{i=1}^{m} F^i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \langle F, \nabla \alpha \rangle.$$

Составим следующий определитель

$$\begin{vmatrix} 1 + F_1.\alpha_1 & F_2.\alpha_1 & \cdots & F_n.\alpha_1 \\ F_1.\alpha_2 & 1 + F_2.\alpha_2 & \cdots & F_n.\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_1.\alpha_n & F_2.\alpha_n & \cdots & 1 + F_n.\alpha_n \end{vmatrix}. \tag{5.34}$$

и обозначим его через

$$D[F_1, \ldots, F_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n].$$

Заметим, что это выражение содержит *только* производные $F_j.\alpha_i$ функций α_i вдоль векторных полей F_j, а значит, не зависит от локальных координат.

Основной результат данного раздела составляет следующая теорема.

Теорема 5.2. [130] *Отображение*

$$f = \phi_{1,\ldots,n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

определяемое по формуле (5.32), *есть локальный диффеоморфизм в окрестности* $0 \in \mathbb{R}^m$ *тогда и только тогда, когда*

$$D[F_1, \dots, F_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n] \neq 0. \tag{5.35}$$

Если $D[F_1, \dots, F_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n] > 0$, *то* f *сохраняет ориентацию.*

Доказательство будет дано в разделе 5.2.3: мы покажем, что определитель якобиана отображения f задается формулой (5.34).

В разделе 5.2.4 будет рассмотрен случай отображений сдвига вдоль орбит одного потока и получены условия, при которых такие отображения являются диффеоморфизмами всего многообразия.

5.2.1. Два определения символа $D[-;-]$**.** Пускай $M(m,n)$ — пространство $(m \times n)$-матриц (m строк и n столбцов) над некоторым полем $\mathbb{F}$. При $m = n$ пространство $M(n,n)$ будем обозначать через $M(n)$. Для каждой матрицы $X \in M(n)$ пусть

$$\begin{aligned} P_X(\lambda) = |X - \lambda E_n| = \\ = (-\lambda)^m + (-\lambda)^{m-1}\mu_1 + (-\lambda)^{m-2}\mu_2 + \ldots + \mu_m \end{aligned} \tag{5.36}$$

— ее характеристический многочлен. Пусть также E_n — единичная матрица размера $n \times n$ и $0_{n,m}$ — нулевая матрица размера $n \times m$.

Отметим, что для пары векторов

$$F = \begin{Vmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \cdots \\ f^m \end{Vmatrix} \qquad \text{и} \qquad A = \begin{Vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \cdots \\ a^m \end{Vmatrix}$$

можно построить два произведения:

$$FA^t = \left\| \begin{matrix} f^1 \\ f^2 \\ \dots \\ f^m \end{matrix} \right\| \cdot \left\| a^1, \dots, a^m \right\| = \left\| \begin{matrix} f^1a^1 & f^1a^2 & \cdots & f^1a^m \\ f^2a^1 & f^2a^2 & \cdots & f^2a^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^ma^1 & f^ma^2 & \cdots & f^ma^m \end{matrix} \right\|$$

и

$$F^tA = \langle F, A \rangle = \sum_{i=1}^{m} f^i a^i \ \in \ \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $F_1, \dots, F_n$ и $A_1, \dots, A_n$ — два набора векторов в $\mathbb{F}^m$. Определим следующие матрицы при помощи формул:

$$X = F_1A_1^t + \dots + F_nA_n^t \tag{5.37}$$

и

$$Y = \left\| \begin{matrix} \langle F_1, A_1 \rangle & \langle F_2, A_1 \rangle & \cdots & \langle F_n, A_1 \rangle \\ \langle F_1, A_2 \rangle & \langle F_2, A_2 \rangle & \cdots & \langle F_n, A_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle F_1, A_n \rangle & \langle F_2, A_n \rangle & \cdots & \langle F_n, A_n \rangle \end{matrix} \right\|. \tag{5.38}$$

Очевидно, что если $F_i = A_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $|Y|$ является определителем Грамма $\mathbf{G}(F_1, \dots, F_n)$.

Пусть $F_i = (f_i^1, \dots, f_i^m)$ и $A_i = (a_i^1, \dots, a_i^m)$ — координаты соответствующих векторов и

$$\mathcal{F} = \left\| \begin{matrix} f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \cdots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^m & f_2^m & \cdots & f_n^m \end{matrix} \right\|, \qquad \mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{matrix} \right\|$$

— матрицы, столбцы которых состоят из координат F_i и A_i. Несложно проверить, что

(5.39)

$$X = \mathcal{F}\mathcal{A}^t = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{j=1}^m f_j^1 a_j^1 & \sum\limits_{j=1}^m f_j^1 a_j^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^m f_j^1 a_j^m \\ \sum\limits_{j=1}^m f_j^2 a_j^1 & \sum\limits_{j=1}^m f_j^2 a_j^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^m f_j^2 a_j^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^m f_j^m a_j^1 & \sum\limits_{j=1}^m f_j^m a_j^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^m f_j^m a_j^m \end{Vmatrix} \in M(m)$$

и

(5.40)

$$Y = \mathcal{F}^t\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{i=1}^m f_1^i a_1^i & \sum\limits_{i=1}^m f_1^i a_2^i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m f_1^i a_n^i \\ \sum\limits_{i=1}^m f_2^i a_1^i & \sum\limits_{i=1}^m f_2^i a_2^i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m f_2^i a_n^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^m f_n^i a_1^i & \sum\limits_{i=1}^m f_n^i a_2^i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m f_n^i a_n^i \end{Vmatrix} \in M(n).$$

Теорема 5.3. $|E_m + X| = |E_n + Y|$.

Доказательство будем дано в разделе 5.2.2.

Определение 5.4. *Для векторов*

$$F_1, \ldots, F_n \qquad \text{и} \qquad A_1, \ldots, A_n$$

в $\mathbb{R}^m$ *определим символ* $D[F_1, \ldots, F_n; A_1, \ldots, A_n]$ *посредством формулы:*

(5.41) $\quad D[F_1, \ldots, F_n; A_1, \ldots, A_n] := |E_m + X| = |E_n + Y|,$

где матрицы X *и* Y *определены с помощью формул* (5.37) *и* (5.38) *соответственно.*

Теперь можно перенести определение 5.4 на векторные поля и функции. Пусть M — гладкое многообразие, F — гладкое векторное поле и $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — гладкая функция.

Напомним, что через $F.\alpha$ мы обозначаем производную α вдоль F.

Пусть $F_1, \dots, F_n$ — векторные поля и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — гладкие функции на $\mathbb{R}^m$. Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$ получаем две системы векторов: векторы

$$F_1(x), \dots, F_n(x)$$

и градиенты функций α_i:

$$\nabla\alpha_1(x), \dots, \nabla\alpha_n(x).$$

Поэтому при помощи формулы (5.41) определено выражение:

$$D[F_1(x), \dots, F_n(x); \nabla\alpha_1(x), \dots, \nabla\alpha_n(x)],$$

которое, для простоты будем обозначать через

$$D[F_1, \dots, F_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n](x).$$

Замечание 5.5. Формула (5.41) предлагает два способа вычисления символа $D[F_1, \dots, F_n; A_1, \dots, A_n]$. Первое выражение, $|E_m + X|$, зависит от локальных координат, а второе, $|E_n + Y|$, — совпадает с (5.34) и содержит только производные функций α_i вдоль полей F_j, а значит, инвариантно относительно локальных координат. Таким образом, $D[F_1, \dots, F_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ является функцией на M, зависящей только то n-ки векторных полей и n-ки функций.

5.2.2. Доказательство теоремы 5.3. Это теорема является следствием следующего предложения 5.6. Вначале отметим, что если $A, B \in M(m, n)$, то матрица AB^t имеет размерность $m \times m$, а A^tB — размерность $n \times n$.

Предложение 5.6. *Пусть $A, B \in M(m, n)$. Тогда*

$$P_{AB^t}(\lambda) = (-\lambda)^{m-n} P_{A^tB}(\lambda).$$

Действительно, из предложения вытекает, что

$$|E_m + AB^t| = P_{AB^t}(-1) = P_{A^tB}(-1) = |E_n + A^tB|. \tag{5.42}$$

Теорема 5.3 доказана. □

Доказательство предложения 5.6. Необходимо рассмотреть три случая.

Случай 1. Пусть $m = n$. Нужно доказать, что тогда $P_{AB^t} = P_{A^tB}$. Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 5.7. *Для любых матриц $A, B \in M(n)$ имеем $P_{AB}(\lambda) \equiv P_{BA}(\lambda)$.*

Действительно,

$$P_{AB^t} = P_{(AB^t)^t} = P_{BA^t} \xlongequal{\text{Лемма 5.7}} P_{A^tB},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение леммы 5.7 известно специалистам по линейной алгебре, но обычно не упоминается в учебниках. Поэтому мы приводим даже два доказательства. Первое использует топологию пространств матриц, а второе[1] — проходит для матриц над произвольным полем.

Первое доказательство леммы 5.7. Пускай одна из матриц, скажем A, невырождена. Тогда тождество

$$A(BA) = (AB)A$$

показывает, что матрицы AB и BA подобны:

$$BA = A^{-1}(AB)A, \tag{5.43}$$

поэтому они имеют одинаковые характеристические многочлены.

С другой стороны, несложно найти две вырожденные матрицы A и B, для которых AB и BA не являются подобными. Например, если $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, то матрицы

$$AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{и} \qquad BA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

имеют разные ранги.

[1]Это доказательство сообщил нам В. М. Бондаренко

Несмотря на это, AB и BA всегда имеют одинаковые характеристические многочлены. Действительно, рассмотрим следующие отображения:

$$p : M(n) \to \mathbb{R}^n \qquad p(X) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n),$$
$$\delta : M(n) \times M(n) \to \mathbb{R}^n \qquad \delta(A, B) = p(AB) - p(BA),$$

где коэффициенты μ_i задаются формулой (5.36). Тогда соотношение (5.43) означает, что $\delta(A, B) = 0$, как только одна из матриц, A или B, невырождена. Так как δ непрерывно, а подмножество в $M(n) \times M(n)$, состоящее из пар (A, B), в которых обе матрицы A и B вырождены, нигде не плотно, то $\delta \equiv 0$ на всем $M(n) \times M(n)$. Следовательно, $P_{AB} = P_{BA}$ для любых $A, B \in M(n)$.

Второе доказательство леммы 5.7. (a) Если хотя бы одна из матриц A или B — невырождена, то так же как и выше доказывается, что $P_{AB} = P_{BA}$.

(b) Предположим, что

$$B = E_{k,n} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad A = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix},$$

где K — некоторая $(k \times k)$-матрица. Тогда

$$E_{k,n}A = \begin{pmatrix} K & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad AE_{k,n} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому легко видеть, что $P_{E_{k,n}A} = P_{AE_{k,n}}$.

(c) В общем случае матрицу B всегда можно представить в виде $B = XE_{k,n}Y$, где $X, Y \in M(n)$ — невырождены, а $k = rank\, B$. Тогда

$$P_{AB} = P_{AXE_{k,n}Y} \overset{(a)}{=\!=} P_{YAXE_{k,n}} \overset{(b)}{=\!=}$$
$$= P_{E_{k,n}YAX} \overset{(a)}{=\!=} P_{XE_{k,n}YA} = P_{BA}.$$

Случай 2. Предположим, что $m > n$. Допишем к матрицам A и B по $m-n$ нулевых столбцов и обозначим полученные *квадратные* $(m \times m)$-матрицы через $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Тогда несложно проверить, что

$$\bar{A}\bar{B}^t = AB^t \qquad \text{и} \qquad \bar{A}^t\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{A}\bar{B}^t & 0_{n,m-n} \\ 0_{m-n,n} & 0_{m-n,m-n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P_{AB^t}(\lambda) \ = \ P_{\bar{A}\bar{B}^t}(\lambda) \ \overset{\text{Случай 1}}{=\!=\!=} \ P_{\bar{A}^t\bar{B}}(\lambda) \ = \ (-\lambda)^{m-n} P_{A^tB}(\lambda).$$

Случай 3. Если же $m < n$, то доказательство сводится к случаю 2 заменой матриц A и B на их транспонированные. Предложение 5.6 доказано. $\square$

5.2.3. Доказательство теоремы 5.2. Не теряя общности, можно считать, что

$$\alpha_i(0) = 0 \qquad \text{для всех} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В противном случае положим $C_i = \alpha_i(0)$. Рассматривая $C_i : V \to \mathbb{R}$ как постоянную функцию, видим, что сдвиг $g = \phi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ при помощи этих функций всегда является диффеоморфизмом. Поэтому f будет диффеоморфизмом окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда диффеоморфизмом будет отображение

$$g^{-1} \circ f = \phi(\alpha_1 - C_1, \alpha_2 - C_2, \ldots, \alpha_n - C_n),$$

являющееся гладким сдвигом вдоль полей F_j при помощи функций, обращающихся в нуль в начале координат.

Таким образом, пусть $\alpha_i(0) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $f(0) = 0$, и все что нужно доказательства — это вычислить Якобиан $J(f, 0) = |\frac{df}{dx}(0)|$ отображения f в точке $0 \in \mathbb{R}^m$. Наша теорема вытекает из следующей леммы.

Лемма 5.8. *Пусть E_m — единичная $(m \times m)$-матрица. Тогда*

$$J(f,0) \ = \ |E_m + F_1 \cdot \nabla\alpha_1^t + \cdots + F_n \cdot \nabla\alpha_n^t| \ \overset{(5.41)}{=\!=\!=} \\ = D[F_1, \ldots, F_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n].$$

Доказательство. Чтобы не слишком усложнять изложение, предположим, что $n = 2$ и упростим обозначения.

Будем считать, что нам заданы два векторных поля F, G на $\mathbb{R}^m$, порождающие локальные потоки

$$\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^a),\ \ \Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^b) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to \mathbb{R}^m,$$

и две гладкие функции $\alpha, \beta : V \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ такие, что

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0.$$

Тогда

$$f(x) = \phi(\alpha, \beta)(x) = \Psi(\beta(x), \Phi(\alpha(x), x)).$$

Дифференцируя координатные функции f по переменным $x_1, \dots, x_n$, получаем:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \nabla \alpha \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \nabla \beta,$$

где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \right) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial x^j} \right)$$

— $(m \times m)$-матрицы,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial t} \right) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial t} \right)$$

— m-векторы,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \nabla \alpha = \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial t} \right) \cdot \nabla \alpha^t \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \nabla \beta = \left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial t} \right) \cdot \nabla \beta^t.$$

Отметим также, что производные отображения Φ берутся в точке $(\alpha(x), x)$, а производные отображения Ψ — в точке $(\Phi(\alpha(x), x), \beta(x))$. Для $x = 0 \in \mathbb{R}^m$ обе эти точки совпадают с точкой $(0, 0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$, так как Φ и Ψ — потоки и $\alpha(0) = \beta(0) = 0$.

Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, 0) = E_m,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,0) = F(0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0,0) = G(0),$$

то

$$\frac{df}{dx} \;=\; E_m \;+\; F \cdot \nabla \alpha^t \;+\; G \cdot \nabla \beta^t.$$

Следовательно, $\left|\frac{df}{dx}\right| = D[F, G; \alpha, \beta]$.

Аналогичные аргументы проходят и для случая $n \geq 3$. Лемма 5.8 и теорема 5.2 доказаны. □

Следствие 5.9. *Пусть $\sigma \in \Sigma_n$ — перестановка индексов $\{1, \ldots, n\}$. Тогда*

$$D[F_1, \ldots, F_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \\ = D[F_{\sigma(1)}, \ldots, F_{\sigma(n)}; \alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}].$$

В частности, отображение сдвига

$$\phi_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})$$

вдоль $\Phi_{\sigma(1)}, \ldots, \Phi_{\sigma(n)}$, будет сохраняющим (обращающим) ориентацию диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда таким же свойством обладает и $\phi_{1,\ldots,n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Доказательство. Из формулы (5.37) для матрицы X вытекает, что одновременная перестановка соответствующих векторных полей и функций не изменяет матрицу $E_m + X$, а значит и $D[-;-]$:

$$E_m + X = E_m + \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \nabla \alpha_i^t = E_m + \sum_{i=1}^{n} F_{\sigma(i)} \cdot \nabla \alpha_{\sigma(i)}^t.$$

Утверждение следствия можно также доказать при помощи матрицы Y. Достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma = (ij)$ — транспозиция. Тогда σ индуцирует одновременную перестановку i-го и j-го столбцов и i-й и j-й строк. Эта процедура дважды меняет знак определителя $|E_n + Y|$. □

Следствие 5.10. *Для* произвольных *векторных полей* F_1, F_2 *и* произвольных *гладких функций* α_1, α_2 *"коммутатор"*
$$f = \phi_{1,2,1,2}(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2)$$
всегда *является диффеоморфизмом, даже если эти поля не коммутируют между собой.*

Доказательство. Из следствия 5.9 вытекает, что f является локальным диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда локальным диффеоморфизмом будет отображение
$$\phi_{1,1,2,2}(\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2) \overset{(5.33)}{\equiv} \phi_{1,2}(0,0) \equiv \mathrm{id}. \quad \square$$

5.2.4. Сдвиги вдоль орбит одного потока. Пусть задано только одно векторное поле F, порождающее *глобальный* поток Φ на M. Тогда мы имеем отображение сдвига вдоль орбит F
$$\phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, M),$$
определенное по формуле $\phi(\alpha)(x) = \Phi(\alpha(x), x)$. В этом случае можно охарактеризовать те функции α, для которых $\phi(\alpha)$ является диффеоморфизмом M.

Лемма 5.11. *Пусть* $\alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. *Предположим, что*
$$D[F; \alpha] = 1 + F.\alpha \neq 0$$
на всем M. *Тогда отображение* $f = \phi(\alpha) : M \to M$ *является вложением.*

Пусть ω *— непостоянная орбита* F.

(a) *Если* ω *не замкнута, то* $f|_\omega : \omega \to \omega$ *— строго монотонное отображение, возрастающее или убывающее в зависимости от знака* $1 + F.\alpha$.

(b) *Если же* ω *замкнута, то ограничение* $f|_\omega$ *является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом. Следовательно,* $F.\alpha > -1$ *на всем* M. *Поэтому если* $F.\alpha < -1$ *на всем* M, *то* F *не имеет замкнутых орбит.*

Доказательство. Если $F.\alpha \neq -1$, то из теоремы 5.2 вытекает, что f — локальный диффеоморфизм. Поэтому ограничение $f|_\omega : \omega \to \omega$ отображения f на каждую непостоянную орбиту ω не имеет критических точек и гомотопно тождественному отображению id_ω.

(a) Если ω — не замкнута, то $f|_\omega : \omega \to \omega$ — монотонное, а значит, инъективное отображение.

(b) Если же ω — замкнутая орбита, то $f|_\omega$ — накрывающее отображение некоторой степени d. Но так как $f|_\omega$ гомотопно id_ω, то $d = 1$, то есть $f|_\omega$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Поэтому $F.\alpha > -1$. $\square$

Теорема 5.12. *Пусть $\alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Отображение $f = \phi(\alpha)$ является диффеоморфизмом M тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

(1) f — собственное, *то есть прообраз любого компакта — компакт,*

(2) $D[F; \alpha] = 1 + F.\alpha \neq 0$ *на всем* M.

Доказательство. Предположим, что f — диффеоморфизм. Тогда условие (1) очевидно, а условие (2) вытекает из теоремы 5.2.

Обратно, предположим, что (1) и (2) выполняются. Тогда по лемме 5.11 f — вложение, биективное на постоянных и замкнутых орбитах. Остается доказать, что

$$f(\omega) = \omega$$

для каждой незамкнутой орбиты ω. Но это легко следует из того, что f — собственное отображение. $\square$

Лемма 5.13. *Пусть z — особая точка F, то есть $F(z) = 0$. Тогда для любой функции $\alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ отображение $\phi(\alpha)$ является локальным диффеоморфизмом в точке z.*

Доказательство. Так как $F(z) = 0$, то

$$D[F; \alpha](z) = 1 + F.\alpha(z) = 1 + 0 > 0.$$

Остается применить теорему 5.2. □

Рассмотрим множество

$$\Gamma_\Phi = \phi^{-1}(\mathcal{D}(M)) \subset C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций, сдвиги вдоль F с помощью которых, являются диффеоморфизмами. Из теоремы 5.2 вытекает, что Γ_Φ является дизъюнктным объединением следующих множеств, Γ_Φ^+ и Γ_Φ^-:

$$\Gamma_\Phi^+ = \{\alpha \in \Gamma_\Phi \mid F.\alpha(x) > -1, \forall x \in M\},$$
$$\Gamma_\Phi^- = \{\alpha \in \Gamma_\Phi \mid F.\alpha(x) < -1, \forall x \in M\}.$$

Лемма 5.14. *Для каждого $r = 1, 2, \ldots, \infty$ множества Γ_Φ^+ и Γ_Φ^- являются C^r_S-открытыми и* выпуклыми *подмножества в $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Напомним, что группа $\mathcal{D}(M)$ является C^r_S-открытой в $C^\infty(M, M)$, а ϕ и дифференцирования вдоль векторных полей C^r_S-непрерывны. Поэтому Γ_Φ^+ и Γ_Φ^- также открыты. Докажем, что Γ_Φ^+ выпукло. Доказательство для Γ_Φ^- аналогично.

Пусть $\alpha_0, \alpha_1 \in \Gamma_\Phi^+$, $\alpha_s = s\alpha_0 + (1-s)\alpha_1$, и $f_s = \phi(\alpha_s)$ для $s \in [0, 1]$. Тогда

$$F.\alpha_s \;=\; s\, F.\alpha_0 \;+\; (1-s)\, F.\alpha_1 \;>\; -1.$$

Следовательно, f_s является локальным диффеоморфизм для всех $s \in [0, 1]$. Аргументы, аналогичные доказательству достаточности теоремы 5.12, показывают, что f_s является вложением $M \to M$, биективным на постоянных и замкнутых орбитах F. Пусть ω — незамкнутая орбита F. Докажем сюръективность ограничения $f_s|_\omega$.

Пусть $x \in \omega$. Тогда из определения функции α_s вытекает, что точка $f_s(x)$ лежит на орбите ω между точками $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Но так как ограничения f_0 и f_1 на ω сюръективны, то $f_s|_\omega$ также будет сюръекцией ω на себя. □

Пример 5.15. Пусть $\Phi(t,x) = t + x$ — поток на $\mathbb{R}$, порожденный векторным полем $F(x) = \frac{d}{dx}$. Посмотрим,как выглядят утверждения теоремы 5.2 и леммы 5.14 для этого потока.

Пусть $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда $f = \phi(\alpha)$ задается формулой

$$f(x) = \Phi(\alpha(x), x) = \alpha(x) + x.$$

Так как производная α вдоль Φ совпадает с обычной производной α', то неравенство $\alpha'(x) \neq -1$ эквивалентно тому, что $f'(x) \neq 0$ (сравн. с теоремой 5.2). Заметим, что $\mathbb{R}$ — единственная траектория Φ. Поэтому пространство диффеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих (обращающих) ориентацию этой траектории, совпадает с пространством всех монотонных функций с положительной (отрицательной) производной. Очевидно, что эти пространства открыты и выпуклы в $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (сравн. с леммой 5.14).

5.3. Отображение сдвига вдоль орбит действия группы Ли

Определение 5.16. *Пусть $U \subset M$ — открытое связное множество, $\mathcal{G}$ — группа Ли и $\mathcal{J} \subset \mathcal{G}$ — открытая связная окрестность единицы $e \in \mathcal{G}$. Гладкое отображение*

$$\Phi : \mathcal{J} \times U \to M \tag{5.44}$$

называется локальным действием *группы $\mathcal{G}$, если выполнены следующие условия:*

1. $\Phi(e,x) = x$ *для всех* $x \in U$,
2. $\Phi(s,\Phi(t,x)) = \Phi(st,x)$ *для* $x \in U$ *и* $s,t \in \mathcal{J}$, *как только* $\Phi(t,x) \in U$ *и* $st \in \mathcal{J}$.

В случае, когда $U = M$ и $\mathcal{J} = \mathcal{G}$, действие $\mathcal{G}$ называется глобальным. *Действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ обычно называют* потоком.

Для каждого $g \in \mathcal{J}$ ограничение действия Φ на множество $\{g\} \times U$

$$\Phi|_{\{g\}\times U} : U \to M$$

будет обозначаться через Φ_g.

Орбитой точки $z \in U$ называется подмножество

$$\Phi(\mathcal{J} \times \{z\}) \subset M.$$

Точка $z \in U$ называется *неподвижной* относительно действия Φ, если

$$\Phi(g, z) = z \qquad \forall g \in \mathcal{J}.$$

Каждое локальное действие (5.44) индуцирует следующее *отображение сдвига вдоль орбит этого действия*

$$\phi : C^\infty(U, \mathcal{J}) \to C^\infty(U, M),$$

определяемое по формуле

$$\phi(\alpha)(z) = \Phi(\alpha(z), z), \tag{5.45}$$

где $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{J})$ и $z \in M$. Если $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{J})$, то $\phi(\alpha)$ будем называть *сдвигом вдоль орбит действия* Φ *при помощи функции* α. В свою очередь, α будет называться *функцией сдвига* для f.

Замечание 5.17. Пусть $v_1, \dots, v_n \in T_e\mathcal{G}$ — базис алгебры Ли группы $\mathcal{G}$, то есть касательного пространства к $\mathcal{G}$ в единице e. Тогда можно определить лево-инвариантные векторные поля $F_1, \dots, F_n : M \to TM$ на M при помощи следующих формул. Так как $\Phi(e, x) = x$, то Φ индуцирует касательное отображение:

$$d_1\Phi(e, x) : T_e\mathcal{G} \to T_xM$$

Определим $F_i(x)$ как образ вектора v_i при $d_1\Phi(e, x)$:

$$F_i(x) = d_1\Phi(e, x)(v_i).$$

Для каждого $i = 1, \dots, n$ пусть $\Phi_i : \mathbb{R} \times M \to M$ — поток, порожденный полем F_i. Тогда очевидно, что

$$\Phi_i(t, x) \; = \; \Phi(\, \exp(tv_i), \, x\,) \; \equiv \; \exp(tv_i) \cdot x$$

для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$, где $\exp : T_e\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ — экспоненциальное отображение.

Взяв n функций $\alpha_1, \dots, \alpha_n : M \to \mathbb{R}$, теперь можно определить отображение сдвига

$$\phi_{1,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : M \to M$$

вдоль орбит полей F_i.

С другой стороны, для этих же функций $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ можно задать функцию сдвига $\alpha : M \to \mathcal{G}$ вдоль орбит действия Φ:

$$\alpha(x) = \exp(\alpha_n(x)\, v_n) \cdot \ldots \cdot \exp(\alpha_1(x)\, v_1).$$

Тогда легко видеть, что $\phi_{1,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \phi(\alpha)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\phi_{1,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(x) = \\ &\qquad \Phi_n\big(\alpha_n(x), \cdots \Phi_2\big(\,\alpha_2(x), \, \Phi_1(\alpha_1(x), x)\,\big) \cdots\big) = \\ &\qquad\quad \big[\exp(\alpha_n(x)\, v_n) \cdot \ldots \cdot \exp(\alpha_1(x)\, v_1)\big] \cdot x = \phi(\alpha)(x). \end{aligned}$$

Лемма 5.18. *Отображение ϕ — C^r_T-непрерывно для каждого $r = 0, 1, \dots, \infty$ и $T =$ “W” или “S”.*

Доказательство. Пусть

$$* \; : \; C^\infty(U, \mathcal{J}) \; \to \; \mathrm{id}_U \; \in \; C^\infty(U, M)$$

— постоянное отображение, где $\mathrm{id}_U : U \subset M$ — тождественное вложение. Тогда ϕ можно разложить в композицию следующих C^r_T-непрерывных отображений:

$$\begin{aligned} C^\infty(U, \mathcal{J}) \xrightarrow{\mathrm{id}_{C^\infty(U,\mathcal{J})} \times *} C^\infty(U, \mathcal{J}) \times C^\infty(U, M) \xrightarrow{\approx} \\ \xrightarrow{\approx} C^\infty(U, \mathcal{J} \times M) \xrightarrow{\Phi_*} C^\infty(U, M), \end{aligned}$$

где первая стрелка — произведение постоянного отображения $*$ и тождественного отображения $C^\infty(U,\mathcal{J})$, вторая — естественный C^r_T-гомеоморфизм, а третья — отображение, индуцированное потоком Φ. $\square$

Лемма 5.19. *Образ* $\operatorname{im}\phi$ *является подполугруппой в* $C^\infty(M,M)$. *Более того, пересечение* $\operatorname{im}\phi\cap\mathcal{D}(M)$ — *подгруппа в* $\mathcal{D}(M)$.

Доказательство. Пусть $\alpha,\beta,\gamma\in C^\infty(M,\mathcal{G})$ и

$$f=\phi(\alpha),\quad g=\phi(\beta),\quad h=\phi(\gamma)\ \in\ C^\infty(M,M)$$

их образы при ϕ. Предположим также, что h — диффеоморфизм. Для доказательства леммы достаточно построить такие отображения

$$\sigma_{f\circ g},\sigma_{h^{-1}}:M\to\mathcal{G},$$

что $f\circ g=\phi(\sigma_{f\circ g})$ и $h^{-1}=\phi(\sigma_{h^{-1}})$. Несложно убедиться, что указанными условиям удовлетворяют следующие отображения:

$$\sigma_{f\circ g}(z)=\alpha(g(z))\cdot\beta(z), \tag{5.46}$$

$$\sigma_{h^{-1}}(z)=\left[\gamma\left(h^{-1}(z)\right)\right]^{-1}. \tag{5.47}$$

Здесь h^{-1} обозначает *диффеоморфизм*, обратный к h, а $[t]^{-1}$ — элемент группы $\mathcal{G}$, обратный к $t\in\mathcal{G}$.

Проверим (5.46):

$$f\circ g(z)=\alpha(g(z))\cdot g(z)=\alpha(g(z))\cdot\beta(z)\cdot z=\sigma_{f\circ g}(z)\cdot z.$$

Для доказательства (5.47), используем очевидное тождество $h\left(h^{-1}(z)\right)=z$, из которого следует, что

$$\gamma\left(h^{-1}(z)\right)\cdot h^{-1}(z)=z,$$

откуда вытекают равенства

$$h^{-1}(z)=\gamma\left(h^{-1}(z)\right)^{-1}\cdot z=\sigma_{h^{-1}}(z)\cdot z.\quad\square$$

5.3.1. Ядро отображения сдвига ϕ. Предположим, что действие $\mathcal{G}$ является глобальным. Обозначим через $Z_{\mathrm{id}}(\Phi)$ прообраз тождественного отображения:

$$Z_{\mathrm{id}}(\Phi) := \phi^{-1}(\mathrm{id}_M). \tag{5.48}$$

Таким образом, $\mu(z) \cdot z = z$ для всех $\mu \in Z_{\mathrm{id}}(\Phi)$ и $z \in M$. Будем называть Z_{id} *ядром* отображения ϕ.

Заметим, что хотя ϕ и не является гомоморфизмом (см. формулы (5.46) и (5.47)), все же имеет место следующее предложение, объясняющее термин "ядро".

Предложение 5.20. *Множество $Z_{\mathrm{id}} = Z_{\mathrm{id}}(\Phi)$ обладает следующими свойствами:*

(1) *Z_{id} есть подгруппа в $C^\infty(M, \mathcal{G})$.*
(2) *Для любых α и $\beta \in C^\infty(M, \mathcal{G})$, $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1} \cdot \beta \in Z_{\mathrm{id}}$. Таким образом, имеется естественная биекция между множеством смежных классов $C^\infty(M, \mathcal{G})/Z_{\mathrm{id}}$ и образом $\mathrm{im}\,\phi$.*

Доказательство. См. формулы (5.46) и (5.47). □

Лемма 5.21. *Пусть F — множество неподвижных точек действия Φ. Предположим, что его внутренность непуста, то есть $\mathrm{Int}\,F \neq \varnothing$. Рассмотрим два отображения $\alpha, \beta \in C^\infty(M, \mathcal{G})$, совпадающих на дополнении к $\mathrm{Int}\,F$:*

$$\alpha|_{M \setminus \mathrm{Int}\,F} = \beta|_{M \setminus \mathrm{Int}\,F}.$$

Тогда $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. В частности, если $\alpha(z) = e \in \mathcal{G}$ для всех $z \in M \setminus \mathrm{Int}\,F$, то $\alpha \in Z_{\mathrm{id}}$.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\alpha(z) \cdot z = \beta(z) \cdot z$$

для всех $z \in M$. Если $z \in M \setminus \mathrm{Int}\,F$, то $\alpha(z) = \beta(z)$, а значит $\alpha(z) \cdot z = \beta(z) \cdot z$.

Предположим теперь, что $z \in \mathrm{Int}\,F$. Тогда $t \cdot z = z$ для каждого $t \in \mathcal{G}$. Следовательно, $\alpha(z) \cdot z = \beta(z) \cdot z = z$. □

Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.22. *Постоянное отображение $\mu : M \to \mathcal{G}$ принадлежит Z_{id} тогда и только тогда, когда его образ принадлежит ядру неэффективности действия Φ.* $\square$

5.4. Ядро отображения сдвига вдоль орбит одного потока

В этом разделе для случаев $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ и S^1 мы опишем структуру множества Z_{id}. Основные результаты содержатся в теоремах 5.29 и 5.31. В качестве следствия мы также получаем новое доказательство одного из вариантов известной теоремы М. Ньюмана [148] (теорема 5.32) о неподвижных точках действий групп Ли (см. также [142,143]).

5.4.1. Регулярные точки потоков. Начиная с этого момента, если не оговорено противное, будем предполагать, что $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ и, что действие Φ является локальным (см. определение 5.16). Таким образом,

$$\Phi : \mathcal{J} \times U \to M \tag{5.49}$$

– локальный поток, где U — открытое подмножество в M, а $\mathcal{J} = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Обозначим через F множество неподвижных точек этого потока. Пусть также $\operatorname{Int} F$ и $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} F)$ обозначают, соответственно, внутренность множества F в M и границу этой внутренности.

Точки, не являющиеся неподвижными для Φ, будем называть *регулярными*. Регулярная точка x — *периодична*, если $\Phi(t, x) = x$ для некоторого $t > 0$. Наименьшее такое t называется *периодом* точки x и обозначается через $\operatorname{Per}(x)$. Орбита периодической точки называется *замкнутой*, а орбита регулярной, но не периодической точки — *незамкнутой*.

Напомним, что Φ индуцирует отображение сдвига

$$\phi : C^\infty(U, \mathcal{J}) \to C^\infty(U, M), \tag{5.50}$$

определяемое по формуле $\phi(\alpha)(z) = \Phi(\alpha(z), z)$ для $z \in U$ и $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{J})$.

Рассмотрим тождественное вложение $\mathrm{id}_U : U \to M$ и введем обозначение

$$Z_{\mathrm{id}} := \phi^{-1}(\mathrm{id}_U).$$

Лемма 5.23. *Пусть ω — непостоянная орбита потока Φ и $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$. Если ω — незамкнута, то $\mu|_\omega = 0$. Если ω — замкнутая орбита периода θ, то $\mu|_\omega = n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Напомним, что условие $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$ означает, что

$$\Phi(\mu(x), x) = x \qquad \text{для всех} \qquad x \in U.$$

Рассмотрим незамкнутую орбиту ω потока Φ. Тогда для любой пары точек $x, y \in \omega$ существует *единственное* число $t \in \mathcal{J}$ такое, что $\Phi(t, x) = y$. В частности, $t = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Следовательно, $\mu(x) = 0$ для всех точек $x \in \omega$.

Пусть теперь ω — замкнутая орбита периода θ. Тогда для $x \in \omega$ соотношение $\Phi(t, x) = x$ эквивалентно тому, что $t = n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\mu(x) = n(x)\theta$ для всех $x \in \omega$, где $n = \mu/\theta : \omega \to \mathbb{Z}$ — *непрерывная*, а значит, постоянная функция. Таким образом, $\mu|_\omega = n\theta$. □

Следующая лемма гарантирует локальную единственность функций из Z_{id} в окрестности регулярной точки потока.

Лемма 5.24. *Пусть C — компонента связности множества регулярных точек потока Φ и пусть*

$$\alpha, \beta \in C^\infty(U, \mathcal{J})$$

— такие функции, что $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. *Если* $\alpha(y) = \beta(y)$ *для некоторой точки* $y \in C$, *то* $\alpha|_C = \beta|_C$. *В частности, если* $\alpha \in Z_{\mathrm{id}}$ *и* $\alpha(y) = 0$, *то* $\alpha|_C = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что из условий леммы вытекает, что $\alpha = \beta$ в некоторой окрестности точки $y \in C$. Получим точные формулы, локально обращающие ϕ. Они дают выражение функции α через $\phi(\alpha)$ в окрестности регулярной точки Φ.

Пусть $f = \phi(\alpha)$ и $a = \alpha(y)$. Так как точка

$$z = f(y) = \Phi_a(y)$$

— регулярна, то существуют такие ее окрестность W и система координат $(x_1, \dots, x_n)$ в W, что $z = 0$ и

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = (t + x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Рассмотрим следующую окрестность

$$V = f^{-1}(W) \cap \Phi_{-a}(W)$$

точки y. Очевидно, что

$$\alpha(x) = p_1 \circ \phi(\alpha) \circ \Phi(a, x) - p_1 \circ \Phi(a, x), \quad \forall x \in V. \tag{5.51}$$

где $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — проекция на первую координату.

Если теперь $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ и $\alpha(y) = \beta(y) = a$, то из формулы (5.51) следует, что α и β совпадают в некоторой окрестности точки y, состоящей из регулярных точек потока. Лемма доказана. □

5.4.2. Периоды линейных потоков. Здесь мы доказываем лемму, которая оценивает нижние границы периодов орбит линейных потоков.

Обозначим через $M(n)$ пространство действительных квадратных $n \times n$-матриц и пусть $\exp : M(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ — экспоненциальное отображение.

Лемма 5.25. *Пусть $A \in M(n)$ и $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{r}$ — множество ее ненулевых чисто мнимых собственных значений. Линейный поток $\Phi(t,x) = e^{At}x$ обладает замкнутой орбитой тогда и только тогда, когда $\Lambda \neq \varnothing$. В этом случае период любой замкнутой орбиты потока Φ не меньше чем $\min\limits_{j=1..r} \frac{2\pi}{|\lambda_j|}$.*

Доказательство. Заметим, что если A — жорданова клетка, то поток Φ имеет замкнутую орбиту в том и только в том случае, когда

$$A = J^p\left(\left\| \begin{smallmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{smallmatrix} \right\|\right)$$

для некоторого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, см. формулу (1.1). В этом случае все собственные значения A равны $\pm i\beta$. Более того, по формуле (1.4) для действительной жордановой формы матрицы, все замкнутые орбиты потока Φ лежат в инвариантном подпространстве, порожденном последними двумя координатами и имеют один и тот же период $\frac{2\pi}{|\beta|} = \frac{2\pi}{|\lambda|}$.

Рассмотрим общий случай. Можем предполагать, что A имеет действительную нормальную жорданову форму вида (1.3). Пусть Λ состоит из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $(r \leq c)$. Положим $m = c + d$ и обозначим через

$$V_i \subset \mathbb{R}^n, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

инвариантное подпространство, соответствующее клетке $J_{p_i}(\lambda_i)$ или $J_{p_i}(R(\lambda_i))$. Тогда $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$.

Пусть $p_i : \mathbb{R}^n \to V_i$ — естественная проекция, и пусть $\Phi^i = \Phi|_{V_i}$ — ограничение потока Φ на V_i. Тогда для каждой орбиты ω потока Φ и каждого $i = 1, \ldots, m$ множество $\omega_i = p_i(\omega)$ является орбитой потока Φ^i. Более того, ω замкнута тогда и только тогда, когда все ω_i либо замкнуты, либо постоянны, и хотя бы для одного $j = 1, \ldots, r$, орбита ω_j замкнута. Следовательно, Φ имеет замкнутую орбиту тогда и только тогда, когда $\Lambda \neq \varnothing$.

Пускай теперь ω — замкнутая орбита потока Φ, имеющая период θ и пусть $\omega_j = p_j(\omega)$ — ее проекция, являющаяся замкнутой обритой потока Φ^j для некоторого $j = 1, \dots, r$. Тогда период ω_j равен $\theta_j = \frac{2\pi}{|\lambda_j|}$. Так как проекция p_j факторизует поток Φ на Φ^j, то $\theta = s\theta_j$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. В частности, $\theta \geq \theta_j \geq \min\limits_{k=1..r} \frac{2\pi}{|\lambda_k|}$. $\square$

Следствие 5.26. *Пусть $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M(n)$ — такая последовательность матриц, что для всех $i \in \mathbb{N}$ линейный поток $\Phi_i(t,x) = e^{A_i t}x$ имеет замкнутую орбиту. Пусть θ_i равно минимуму периодов орбит потока Φ_i. Если $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = 0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i = \infty$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_i \subset \Lambda$ — множество собственных значений матрицы A_i, соответствующих замкнутым орбитам потока Φ_i (см. лемму 5.25). По предположению, $\Lambda_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Обозначим $\widetilde{\lambda}_i = \max\limits_{\lambda\in\Lambda_i} |\lambda|$. Тогда $\theta_i = 2\pi/\widetilde{\lambda}_i$, а так как $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = 0$, то из теоремы о непрерывности спектра матриц вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty} \widetilde{\lambda}_i = 0$. Тогда по лемме 5.25 $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i = \lim\limits_{i\to\infty} 2\pi/\widetilde{\lambda}_i = \infty$. $\square$

5.4.3. Неподвижные и периодические точки потоков.

Предложение 5.27. *Пусть $R = U \setminus F$ — множество регулярных точек потока Φ, V — некоторая компонента множества R и z — точка, принадлежащая $F \cap \overline{V}$. Если функция $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$ такова, что $\mu(z) = 0$, то $\mu \equiv 0$ на $\overline{V}$.*

Доказательство. Отметим, что компоненты множества R могут быть разбиты на две части: те, которые содержат хотя бы одну незамкнутую орбиту, и те, которые состоят исключительно из периодических орбит. Объединение компонент первого типа обозначим через N, а объединение компонент второго типа — через P. Таким образом,

$$R = N \cup P.$$

Пусть теперь $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$. Тогда из лемм 5.23 и 5.24 вытекает, что $\mu|_{\overline{N}} = 0$. Из этого следует, что наше утверждение достаточно доказать, для компоненты $V \subset P$.

Рассмотрим последовательность $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ периодических точек потока Φ, сходящуюся к z. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть θ_i обозначает период точки z_i. Тогда из леммы 5.23 следует, что $\mu(vz_i) = n_i\theta_i$ для некоторого $n_i \in \mathbb{Z}$. Из непрерывности функции μ вытекает, что

$$\mu(z_i) = n_i\theta_i \to \mu(z) = 0. \tag{5.52}$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать, что существует некоторый конечный или бесконечный предел $\theta = \lim\limits_{i\to\infty}\theta_i \geq 0$. Из следствия 5.26 вытекает, что $\theta > 0$. Поэтому, в силу (5.52), $n_i = 0$ для достаточно больших $i \in \mathbb{N}$. В частности, $\mu(z_i) = 0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Так как $z_i \in V_\lambda$, то из леммы 5.24 получаем, что $\mu \equiv 0$ на V_λ. □

Предложение 5.28. *Пусть* $\mathrm{Fr}\,(F) = F\setminus(\mathrm{Int}\,F)$ *— граница множества неподвижных точек потока и пусть* $z \in \mathrm{Fr}\,(F)$. *Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) $z \in \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Int}\,F) \subset \mathrm{Fr}\,(F)$, *то есть* z *принадлежит даже границе внутренности множества* F*;*
(2) *касательный линейный поток в точке* z *тривиален, то есть*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,z) = E_n, \qquad \textit{для всех} \qquad t \in \mathcal{J}.$$

Тогда для любой функции $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$ *имеем, что* $\mu \equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* z *в множестве* $U \setminus \operatorname{Int} F$.

Доказательство. Не теряя общности, можно предполагать, что $M = \mathbb{R}^m$ и что $z = 0$ — это начало координат.

Определим отображение $\Psi : \mathcal{J} \times U \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ при помощи формулы

$$\Psi(t,x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x).$$

Так как $\Psi(0,x) = E_n$ для всех $x \in U$, то отображение

$$\nu = \exp^{-1} \circ \Psi : \mathcal{J} \times U \to M(n)$$

определено в некоторой окрестности точки $(0,z)$ в $\mathcal{J} \times U$. Таким образом, $\Psi(t,x) = e^{\nu(t,x)}$.

Отметим, что для каждого $x \in U$ ограничение

$$\Psi(*,x) : \mathcal{J} \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$$

является локальным гомоморфизмом, а значит индуцирует линейный поток на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, матрица

$$A(t,x) = \nu(t,x)/t$$

не зависит от $t \in \mathcal{J}$, то есть

$$\Psi(t,x) = e^{A(x)t}.$$

Более того, для каждой периодической точки x поток $\Psi(*,x)$ имеет замкнутые траектории. В самом деле, рассмотрим векторное поле $F(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,x)$, порождающее поток Φ. Применяя к обеим частям следующего тождества

$$\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(t, \Phi(s,x))$$

оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ и затем полагая $s = 0$, мы получим, что

$$\tfrac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \Phi(t,x)) = \tfrac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x) \tfrac{\partial \Phi}{\partial t}(0,x),$$

то есть $F(\Phi(t,x)) = \Psi(t,x) F(x)$. Это означает, что векторы $F(\Phi(t,x))$ и $F(x)$ принадлежат одной и той же орбите потока $\Psi(*, x)$. Отсюда вытекает, что если x — периодическая точка потока Φ, то $F(x)$ является периодической точкой потока $\Psi(*, x)$, причем $\operatorname{Per}(x) \geq \operatorname{Per}(F(x))$.

Теперь можем перейти к доказательству предложения. Очевидно, что условие (2) выполняется в каждой внутренней точке множества F. Следовательно, оно верно также и для точек границы $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} F)$. Поэтому (1) влечет (2) и можно предполагать, что условие (2) выполнено.

Рассмотрим последовательности векторов

$$F_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, z_i)$$

и матриц

$$A_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, z_i),$$

зависящие от параметра $t \in \mathcal{J}$.

Так как точка z_i является периодической для потока Φ, то, как было только что замечено, каждый вектор $F_i(t)$ также периодичен и его период $\leq \operatorname{Per}(z_i) = \theta_i$. Поэтому из условия (2) вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty} A_i(t) = E_n$. Тогда из следствия 5.26 получаем, что

$$\theta \;=\; \lim_{i\to\infty} \theta_i \;\geq\; \lim_{i\to\infty} \operatorname{Per}(F_i(t)) \;=\; \infty.$$

Так как значение $\mu(z) = \lim\limits_{i\to\infty} n_i\theta_i$ конечно, то $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = 0$. Следовательно, $\mu(z) = 0$. $\square$

Теорема 5.29. *Предположим, что $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ — глобальный поток на M.*

(1) *Если* $\operatorname{Int} F \neq \varnothing$, *то*

$$Z_{\mathrm{id}} = \{\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \mu|_{M\setminus \operatorname{Int} F} = 0\}.$$

(2) *Пусть* $\operatorname{Int} F = \varnothing$. *Тогда имеем две возможности: либо $Z_{\mathrm{id}} = \{0\}$, либо существует такая строго положительная C^∞-функция $\mu : M \to (0, \infty)$, что*

$$Z_{\mathrm{id}} = \{n\mu \mid n \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}.$$

В этом случае каждая регулярная точка z потока периодична и $\mu(z)$ равно ее периоду.

Доказательство. (1) Предположим, что $\operatorname{Int} F \neq \varnothing$. Обозначим

$$Z'_{\mathrm{id}} := \{\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \mu|_{M \setminus \operatorname{Int} F} = 0\}.$$

Тогда из леммы 5.21 вытекает, что $Z'_{\mathrm{id}} \subset Z_{\mathrm{id}}$. Остается показать, что $Z'_{\mathrm{id}} \supset Z_{\mathrm{id}}$.

Пусть $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$. Покажем, что $\mu \in Z'_{\mathrm{id}}$. Согласно утверждению (1) предложения 5.28 $\mu(z) = 0$ для каждой точки $z \in \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} F)$. Тогда из предложения 5.27 следует, что $\mu = 0$ на компоненте множества $M \setminus \operatorname{Int} F$, содержащей z.

Из связности многообразия M вытекает, что каждая компонента множества $M \setminus \operatorname{Int} F$ пересекается с $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} F)$. Следовательно, $\mu = 0$ на $M \setminus \operatorname{Int} F$, то есть $\mu \in Z'_{\mathrm{id}}$.

(2) Пусть $\operatorname{Int} F = \varnothing$. Предположим, что $Z_{\mathrm{id}} \neq \{0\}$. Нам необходимо показать, что существует такая гладкая функция $\mu > 0$, что $Z_{\mathrm{id}} = \{n \cdot \mu\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Рассмотрим вначале произвольную функцию $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$. Если $\mu(z) = 0$ хотя бы для одной точки $z \in M$, то из предложения 5.27 получаем, что $\mu \equiv 0$ на множестве

$$M \setminus \operatorname{Int} F = M.$$

Значит, если $\mu(z) \neq 0$, то $\mu \neq 0$ на M. Поэтому можем считать, что $\mu > 0$ на M.

Для каждой точки $z \in M$ определим отображение

$$\tau_z : Z_{\mathrm{id}} \to \mathbb{R}$$

по формуле: $\tau_z(\nu) = \nu(z)$. Несложно убедиться, что τ_z является *гомоморфизмом.* Из предложения 5.27 следует, что его ядро тривиально: $\ker \tau_z = 0$.

Далее предположим, что z — регулярная точка потока Φ. Тогда из леммы 5.23 вытекает, что $\operatorname{im} \tau_z$ является замкнутой подгруппой в $\mathbb{R}$. Так как $Z_{\mathrm{id}} \neq \{0\}$, то $\operatorname{im} \tau_z$ имеет вид $\{nr\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для некоторого $r > 0$. Тогда функция

$\mu = \tau_z^{-1}(r)$ является строго положительной образующей группы Z_{id}. Теорема 5.29 доказана. $\square$

Пример 5.30. Вычислим группы Z_{id} для следующих потоков, заданных на комплексной плоскости:

$$\Phi(t, \mathbf{z}) = e^{2\pi i(1+|\mathbf{z}|^2)\cdot t}\mathbf{z}, \qquad \text{и} \qquad \Psi(t, \mathbf{z}) = e^{2\pi i|\mathbf{z}|^2\cdot t}\mathbf{z}.$$

Очевидно, что Φ и Ψ имеют одинаковые траектории — концентрические окружности с центром в точке $0 \in \mathbb{C}$, но при этом соответствующие линейные потоки в точке 0 у них разные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}}(t, 0)\xi = e^{2\pi i t}\xi, \qquad\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{z}}(t, 0)\xi = \xi,$$

где ξ — касательный вектор в точке 0. Последнее равенство означает, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{z}}(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из предложений 5.27 и 5.28 вытекает, что

$$Z_{\mathrm{id}}(\Psi) = \{0\}$$

Рассмотрим функцию

$$\mu(\mathbf{z}) = \frac{1}{1 + |\mathbf{z}|^2}.$$

Очевидно, что $\mu \in Z_{\mathrm{id}}(\Phi)$. Поэтому $Z_{\mathrm{id}}(\Phi) \neq \{0\}$. Так как множество $\operatorname{Fix}\Phi = \{0\}$ нигде не плотно в $\mathbb{C}$, то по теореме 5.29, $Z_{\mathrm{id}} \approx \mathbb{Z}$. Также очевидно, что для любой точки $\mathbf{z} \neq 0$ значение $\mu(\mathbf{z})$ равно периоду этой точки. Следовательно, по той же теореме, μ является образующей группы

$$Z_{\mathrm{id}}(\Phi) = \{n \cdot \mu(\mathbf{z})\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

5.4.4. Действия окружности. В этом разделе мы получим доказательство известной теоремы М. Ньюмана о множестве неподвижных точек действия компактной группы Ли, см. [20].

Теорема 5.31. *Пусть $\Phi : S^1 \times M \to M$ — действие окружности на многообразии M и пусть K — ядро неэффективности этого действия на M, то есть ядро индуцированного гомоморфизма $S^1 \to \mathcal{D}M$. Если действие нетривиально, то $\operatorname{Int} F = \varnothing$ и Z_{id} состоит из постоянных отображений $M \to K \subset S^1$. Следовательно, Z_{id} изоморфна K и является конечной циклической группой.*

Доказательство. Пусть $p : \mathbb{R} \to S^1$ — универсальное накрывающее отображение окружности. Определим отображение

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{R} \times M \to M$$

при помощи формулы $\widetilde{\Phi}(t, z) = \Phi(p(t), z)$. Тогда $\widetilde{\Phi}$ есть действие прямой $\mathbb{R}$ на M, которое накрывает действие Φ. Положим

$$\widetilde{Z_{\mathrm{id}}} = Z_{\mathrm{id}}(\widetilde{\Phi}) = \{\widetilde{\alpha} \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \widetilde{\alpha}(z) \cdot z = z \forall z \in M\}$$

и рассмотрим какую-нибудь функцию $\alpha : M \to S^1$, принадлежащую Z_{id}. Таким образом, $\Phi(\alpha(x), x) = x$ для всех $x \in M$. Пусть $z \in M$ — произвольная точка и U — ее достаточно малая окрестность. Тогда α поднимается до такого отображения $\widetilde{\alpha} : U \to \mathbb{R}$, что $p(\widetilde{\alpha}(x)) = \alpha(x)$ для всех $x \in U$. Отсюда

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}(x), x) = \Phi(p(\widetilde{\alpha}(x)), x) = \Phi(\alpha(x), x) = x.$$

Это означает, что "локально" $\widetilde{\alpha}$ принадлежит $\widetilde{Z_{\mathrm{id}}}$. Отметим также, что $\widetilde{\alpha}$ всегда можно выбрать таким, чтобы $\widetilde{\alpha}(z) \neq 0$.

Теперь предположим, что $z \in \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Int}\,\mathrm{Fix}\,\Phi)$. Тогда, применяя теорему 5.29 к локальному потоку, индуцированному потоком Φ на U, получаем, что $\widetilde{\alpha}(z) = 0$. Это противоречит выбору $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, такой точки z не существует, то есть $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Int}\,F) = \varnothing$.

Последнее возможно только в двух случаях — либо $\mathrm{Int}\,F = M$, либо $\mathrm{Int}\,F = \varnothing$. В первом случае действие $\widetilde{\Phi}$ тривиально, поэтому $\mathrm{Int}\,F = \varnothing$.

Заметим, что так как $p(\mathbb{Z}) = 1 \in S^1$, то $\widetilde{Z_{\mathrm{id}}}$ содержит все постоянные функции $M \to \mathbb{Z}$. Значит, она имеет больше чем один элемент, и, по утверждению (2) теоремы 5.29, $\widetilde{Z_{\mathrm{id}}} \approx \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{Z_{\mathrm{id}}}$ состоит из постоянных отображений из M в некоторую подгруппу P в $\mathbb{R}$, причем $P \approx \mathbb{Z}$. Тогда из леммы 5.22 получаем, что P совпадает с ядром неэффективности $\widetilde{K}$ действия $\widetilde{\Phi}$.

Следовательно, подгруппа $p(\widetilde{K}) \subset S^1$ является ядром неэффективности K действия Φ, и Z_{id} состоит из постоянных отображений $M \to K$. Более того, так как ядро гомоморфизма p бесконечно, то $Z_{\mathrm{id}} \approx K \approx \widetilde{K}/\ker p$ есть конечная циклическая группа. □

Теорема 5.32. (М. Ньюман, см. [142, 143, 148]). *Предположим, что группа Ли $\mathcal{G}$ имеет S^1-подгруппу (это всегда верно, если $\mathcal{G}$ компактна). Если $\mathcal{G}$ гладко и нетривиально действует на конечномерном многообразии M, то множество неподвижных точек этого действия нигде не плотно.*

Доказательство. Заметим, что если группа $\mathcal{G}$ компактна, то замыкание каждой однопараметрической подгруппы в $\mathcal{G}$ — есть связная компактная абелева подгруппа, то есть тор, который, по определению, содержит S^1-подгруппы.

Пускай $S \subset \mathcal{G}$ — S^1-подгруппа и $\mathrm{Fix}\,S$ — множество неподвижных точек индуцированного действия S на M.

Тогда $\mathrm{Fix}\,\mathcal{G} \subset \mathrm{Fix}\,S$. По теореме 5.31 $\mathrm{Fix}\,S$ нигде не плотно, поэтому нигде не плотно и $\mathrm{Fix}\,\mathcal{G}$. □

5.5. Локальные сечения отображения сдвига ϕ

Пусть $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ — глобальный поток. Тогда из следствия 5.20 получаем, что ϕ можно представить как композицию следующих отображений:
(5.53)

$$\phi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\widetilde{\phi}} C^\infty(M,\mathbb{R})/Z_{\mathrm{id}} \xrightarrow{j} \mathrm{im}\,\phi \subset C^\infty(M,M),$$

где $\widetilde{\phi}$ — фактор-отображение, а j — биекция, определяемая по формуле

$$\{\alpha + Z_{\mathrm{id}}\} \mapsto \phi(\alpha).$$

Предположим теперь, что на $C^\infty(M,\mathbb{R})$ и $C^\infty(M,M)$ заданы какие-нибудь топологии. Тогда соответствующая *фактор-топология* на $C^\infty(M,\mathbb{R})/Z_{\mathrm{id}}$ определяется таким образом: подмножество $W \subset C^\infty(M,\mathbb{R})/Z_{\mathrm{id}}$ открыто тогда и только тогда, когда $\widetilde{\phi}^{-1}(W)$ открыто в $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Отсюда следует, что j непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно ϕ. Таким образом, j является только *непрерывной биекцией*, но, вообще говоря, не обязано быть гомеоморфизмом.

В этом разделе для случая $\mathrm{Int}\,\mathrm{Fix}\,\Phi = \varnothing$ мы дадим достаточное условие, при котором j является гомеоморфизмом в соответствующих сильных топологиях Уитни. Требование состоит в существовании слабо непрерывных локальных сечений ϕ в окрестности каждой неподвижной точки потока Φ. Тогда из теоремы 5.29 будет следовать, что отображение $\phi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathrm{im}\,\phi$ является либо гомеоморфизмом, либо накрывающим отображением с группой скольжений $\mathbb{Z}$.

5.5.1. Потоки, зависящие от параметра. Пусть Φ — частичный поток и D^k — открытый k-мерный диск с центром в начале координат в $\mathbb{R}^k$. Определим следующий частичный поток $\widetilde{\Phi}$ как произведение потока Φ на тождественный поток на D^k:

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{J} \times (U \times D^k) \to M \times D^k, \qquad \widetilde{\Phi}(t, x, \tau) = (\Phi(t, x), \tau),$$

где $(t, x), \tau) \in \mathcal{J} \times U \times D^k$.

Для каждого открытого подмножества $V \subset U \times D^k$ можно определить *отображение сдвига*

$$\phi_V : C^\infty(V, \mathcal{J}) \to C^\infty(V, M)$$

вдоль траекторий $\widetilde{\Phi}$ по формуле:

$$\phi_V(\alpha)(x, \tau) = \widetilde{\Phi}(\alpha(x, \tau), x, \tau) = \big(\, \Phi(\, \alpha(x, \tau),\, x),\, \tau\, \big),$$

где $(x, \tau) \in V$ и $\alpha \in C^\infty(V, M)$.

Лемма 5.33. *Отображение ϕ* локально инъективно *в C^r_S-топологии $C^\infty(U, \mathcal{J})$ для всех $r = 0, 1, \ldots, \infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Int} F = \varnothing,$$

то есть когда множество F неподвижных точек потока нигде не плотно. В этом случае существует такая непрерывная функция $\delta : U \to (0, \infty)$, что для любого открытого подмножества $V \subset U \times D^k$ и $\alpha \in C^\infty(V, \mathcal{J})$ ограничение ϕ_V на следующую C^0_S-окрестность

$$\mathcal{M}^\delta_V = \{\beta \in C^\infty(V, \mathcal{J}) \mid |\alpha(x, \tau) - \beta(x, \tau)| < \delta(x)\} \tag{5.54}$$

функции α в $C^\infty(M, \mathbb{R})$ — инъективно, причем

$$\mathcal{M}^\delta_V \cap \{\mathcal{M}^\delta_V + \mu\} = \varnothing$$

если $\mu \in Z_{\mathrm{id}}$ и $\mu \neq 0$. Таким образом, если поток Φ глобален, то проекция

$$\widetilde{\phi} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})/Z_{\mathrm{id}}$$

является накрывающим отображением.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Int} F \neq \varnothing$. Рассмотрим функцию $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{J})$ и пусть $\mathcal{N}$ — произвольная C^r_S-окрестность α в $C^\infty(U, \mathcal{J})$. Тогда существует такая функция $\beta \in \mathcal{N}$, что $\alpha \neq \beta$, но $\alpha \equiv \beta$ на $M \setminus \operatorname{Int} F$. Из леммы 5.21 вытекает, что $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. Следовательно, ϕ не является локально инъективным.

Обратно, пусть $\operatorname{Int} F = \varnothing$. Нам необходимо построить функцию δ, удовлетворяющую утверждению леммы. Из доказательства предложения 5.27 следует, что для каждой точки $x \in U$ найдется такая ее окрестность W_x и такое число $\tau_x > 0$, что τ_x не превышает половины периода произвольной замкнутой траектории потока Φ, проходящей через W_x. Если W_x вообще не пересекает периодических траекторий, то положим $\tau_x = 1$. Так как M — паракомпактно, то существует такая непрерывная функция $\delta : U \to (0, 1)$, что $\delta(x) < \tau_x$ для всех $x \in U$. Тогда легко проверить, что δ является искомой функцией. □

Определение 5.34. *Пусть* $\operatorname{Int} F = \varnothing$ *и* $z \in U$. *Скажем, что* z *является* $(\mathrm{S})^k$*-точкой*[2] *потока* Φ, *если для произвольно малой окрестности* $V \subset U \times D^k$ *точки* $(z, 0)$ *с компактным замыканием* $\overline{V}$ *и произвольной функции* $\alpha \in C^\infty(V, \mathcal{J})$ *найдется такая* C^0_W*-окрестность*

$$\mathcal{M} \subset C^\infty(V, \mathcal{J})$$

функции α, *что ограничение* ϕ_V *на* $\mathcal{M}$ *— инъективно, а обратное отображение*

$$(\phi_V)^{-1} : \phi_V(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

— C^r_W*-непрерывно для всех* $r \geq 0$.

Скажем, что точка z *удовлетворяет условию* (S), *если она является* $(\mathrm{S})^k$*-точкой для каждого* $k \geq 0$.

[2]Обозначение “S” происходит от слова *section* — сечение

Поясним данное определение детально. Из леммы 5.33 мы знаем, что для любой открытой окрестности

$$V \subset U \times D^k$$

точки $(z, 0)$ существует C^0_W-окрестность $\mathcal{M} \subset C^\infty(V, \mathcal{J})$ функции α такая, что ограничение ϕ_V на $\mathcal{M}$ инъективно. Например, можно положить $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\delta_V$.

Таким образом, на $\mathcal{M}$ соотношение

$$g(x, \tau) = \big(\, \Phi(\, \beta(x, \tau),\, x),\, \tau\,\big)$$

эквивалентно соотношению вида $\beta(x, \tau) = \Psi(g, x, \tau)$, где Ψ — некоторое отображение. В этом случае точка z является $(\mathrm{S})^k$-точкой тогда и только тогда, когда Ψ индуцирует C^r_S-непрерывное отображение $\phi_V(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$. В частности, это условие выполняется, если Ψ является гладкой функцией по переменным (x, τ) и непрерывно зависит от всех частных производных g до порядка r включительно в окрестности $(z, 0)$.

Например, следующая лемма является прямым следствием формулы (5.51).

Лемма 5.35. *Каждая регулярная точка потока является* (S)*-точкой.* $\square$

Теорема 5.36. *Предположим, что* $\operatorname{Int} F = \varnothing$ *и каждая неподвижная точка* $z \in F$ *потока* Φ *является* $(\mathrm{S})^0$*-точкой. Для* $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{J})$ *пусть*

$$\mathcal{M}^\delta = \mathcal{M}^\delta(\alpha) = \{\beta \in C^\infty(U, \mathcal{J}) \mid |\beta(x) - \alpha(x)| < \delta(x)\}$$

— такая C^0_S*-окрестность* α *в* $C^\infty(U, \mathcal{J})$*, что ограничение* $\phi|_{\mathcal{M}^\delta}$ *— инъективно. Тогда обратное отображение*

$$\phi^{-1} : \phi(\mathcal{M}^\delta) \to \mathcal{M}^\delta$$

является C^r_S*-непрерывным для всех* $r = 0, 1, \ldots, \infty$*. Следовательно, если* Φ *— глобальный поток, то для каждого* *такого r отображение*

$$\phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \operatorname{im} \phi$$

является накрывающим отображением в соответствующих C^r_S-топологиях.

Для доказательства нам будет необходима лемма.

Лемма 5.37. *Пусть M и N — гладкие многообразия, $f \in C^\infty(M, N)$ и $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ — локально конечное семейство открытых подмножеств из M. Зафиксируем $r \geq 0$ и для каждого $i \in \Lambda$ выберем какую-нибудь C^r_W-окрестность $\mathcal{U}_i$ ограничения $f|_{U_i}$ в пространстве $C^\infty(U_i, N)$. Определим отображение "ограничения"*

$$p_i : C^\infty(M, N) \to C^\infty(U_i, N), \qquad p_i(f) = f|_{U_i},$$

где $f \in C^\infty(M, N)$, и положим $\widetilde{\mathcal{U}}_i = p_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Тогда

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcap_{i\in\Lambda} \widetilde{\mathcal{U}}_i$$

является C^r_S-окрестностью f в $C^\infty(M, N)$.

Доказательство. Так как p_i — C^r_W-непрерывно, то для каждого $i \in \Lambda$ множество $\widetilde{\mathcal{U}}_i$ содержит базисную C^r_W-окрестность

$$\mathcal{N}^{\varepsilon_i}_{K_i}(f|_{U_i})$$

ограничения $f|_{U_i}$ вида (4.25), где $K_i \subset U_i$ — компактное подмножество и $\varepsilon_i > 0$. Заметим, что семейство $\{K_i\}_{i\in\Lambda}$ является локально конечным, а многообразие M — паракомпактно. Поэтому существует такая непрерывная функция $\delta : M \to (0, \infty)$, что $\delta(x) < \varepsilon_i$ для $x \in K_i$. Пусть $\mathcal{N}^\delta(f)$ — открытая C^r_S-базисная окрестность f в $C^r(M, N)$ вида (4.26). Тогда легко проверить, что $\mathcal{N}^\delta(f) \subset \widetilde{\mathcal{U}}$. □

Доказательство теоремы 5.36. Из условий теоремы и леммы 5.35 вытекает, что каждая точка $z \in U$ является (S)^0-точкой для потока Φ. Зафиксируем $r \geq 0$. Пусть

d — какая-нибудь метрика на $J^r(U,\mathcal{J})$ и $\widehat{\delta}: U \to (0,\infty)$ — такая непрерывная функция, что базисная C^r_S-окрестность

$$\mathcal{M}^{\widehat{\delta}} = \{\beta \in C^\infty(U,\mathcal{J}) \mid d([\alpha]^r_x, [\beta]^r_x) < \widehat{\delta}(x), \forall x \in U\}$$

функции α (см. формулу (4.26)) содержится в $\mathcal{M}^\delta$. Тогда ограничение $\phi|_{\mathcal{M}^{\widehat{\delta}}}$ инъективно.

Покажем, что $\phi(\mathcal{M}^{\widehat{\delta}})$ содержит C^r_S-окрестность отображения $f = \phi(\alpha)$ в $\operatorname{im}\phi$, то есть найдется такая открытая окрестность $\widetilde{\mathcal{N}}$ отображения f в $C^\infty(U,M)$, что

$$\operatorname{im}\phi \cap \widetilde{\mathcal{N}} \subset \phi(\mathcal{M}^{\widehat{\delta}}).$$

Так как $\widehat{\delta}$ можно выбрать сколь угодно малой, то ϕ^{-1} является C^r_S-непрерывным на $\phi(\mathcal{M}^\delta)$.

Из паракомпактности U вытекает, что найдется два не более чем счетных локально-конечных покрытия $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ и $\{K_i\}_{i\in\Lambda}$ множества U таких, что для каждого $i \in \Lambda$ множество U_i — открыто, K_i — компактно и $K_i \subset U_i$. Более того, используя свойство $(\mathrm{S})^0$ точек потока, можно также предполагать, что для каждого $i \in \Lambda$ найдется такая C^0_W-окрестность $\mathcal{M}_i$ ограничения $\alpha|_{U_i}$ в $C^\infty(U_i,\mathcal{J})$, что ограничение ϕ_{U_i} на $\mathcal{M}_i$ является C^r_W-вложением для всех $r \geq 0$.

Обозначим

$$\varepsilon_i = \inf_{x\in K_i} \widehat{\delta}(x).$$

Выберем какую-нибудь метрику d_i на $J^r(U,\mathcal{J})$ и определим C^r_W-окрестность $\mathcal{N}^{\varepsilon_i}_{K_i}(\alpha|_{U_i})$ ограничения $\alpha|_{U_i}$ по формуле (4.25) для $d = d_i$. Положим

$$\mathcal{M}'_i = \mathcal{N}^{\varepsilon_i}_{K_i}(\alpha|_{U_i}) \cap \mathcal{M}_i.$$

Тогда образ $\mathcal{N}_i = \phi_{U_i}(\mathcal{M}'_i)$ является C^r_W-окрестностью ограничения $f|_{U_i}$ в $C^\infty(U_i,M)$ для всех $r \geq 0$.

Пусть $p_i : C^\infty(U,M) \to C^\infty(U_i,M)$ — отображение ограничения на U_i и $\widetilde{\mathcal{N}}_i = p_i^{-1}(\mathcal{N}_i)$. Так как покрытие $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$

локально конечно, то из леммы 5.37 вытекает, что пересечение $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} \widetilde{\mathcal{N}}_i$ содержит некоторую C^r_S-открытую окрестность $\widetilde{\mathcal{N}}$ отображения f.

Несложно проверить, что $\widetilde{\mathcal{N}} \cap \operatorname{im}\phi \subset \phi(\mathcal{M}^{\widehat{\delta}})$. Это доказывает теорему.

Для удобства читателя приведем следующую коммутативную диаграмму, которая иллюстрирует нашу конструкцию:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{M}^{\widehat{\delta}} & \subset C^\infty(U,\mathcal{J}) & \longrightarrow & C^\infty(U_i,\mathcal{J}) & \supset \mathcal{M}'_i & = \mathcal{N}^{\varepsilon_i}_{K_i}(\alpha|_{U_i}) \cap \mathcal{M}_i \\
{\scriptstyle\phi}\big\downarrow & {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\phi_{U_i}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\phi_{U_i}}\big\downarrow \\
\phi(\mathcal{M}^{\widehat{\delta}}) & \subset C^\infty(U,M) & \xrightarrow{p_i} & C^\infty(U_i,M) & \supset & \phi_{U_i}(\mathcal{M}'_i) = \mathcal{N}_i.
\end{array}$$

5.6. Описание образа $\operatorname{im}\phi$

Пусть Φ — *глобальный* поток на M. Обозначим через

$$\mathcal{E}(\Phi) \subset C^\infty(M,M)$$

подмножество, состоящее из отображений f, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $f(\omega) \subset \omega$ для каждой траектории ω потока Φ,

(2) для каждой точки $z \in \operatorname{Fix}\Phi$ касательное отображение $T_z f : T_z M \to T_z M$ является изоморфизмом, т.е. f является локальным диффеоморфизмом в точке z.

Положим

$$\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{E}(\Phi) \cap \mathcal{D}(M)$$

и пусть $\mathcal{E}_0(\Phi)$ и $\mathcal{D}_0(\Phi)$ — компоненты линейной связности пространств $\mathcal{E}(\Phi)$ и $\mathcal{D}(\Phi)$ относительно C^0_W-топологий, содержащие id_M. Таким образом, $\mathcal{E}_0(\Phi)$ состоит из всех отображений $f \in \mathcal{E}(\Phi)$, *гомотопных в* $\mathcal{E}(\Phi)$ *тождественному* *отображению* id_M, а $\mathcal{D}_0(\Phi)$ — из отображений, *изотопных* id_M в $\mathcal{E}(\Phi)$ посредством такой *непрерывной* изотопии $H : I \times M \to M$, что каждое из отображений

$$H_t = H(t, *) : M \to M$$

принадлежит $\mathcal{D}_0(\Phi)$. Таким образом от $H(t, x)$ требуется гладкость по x, но не по t.

Следующее утверждение вытекает из определений и леммы 5.13.

Лемма 5.38. $\mathrm{im}\,\phi \subset \mathcal{E}_0(\Phi)$ *и* $\phi(\Gamma^+_\Phi) \subset \mathcal{D}_0(\Phi)$. □

Определение 5.39. *Для* $k \geq 0$ *обозначим через* D^k — k*-мерный диск. Скажем, что* $z \in \mathrm{Fix}\,\Phi$ *является* $(\mathrm{E})^k$*-точкой*[3] *потока* Φ*, если у нее найдется такая открытая окрестность* V*, что выполняется следующее условие: пусть*

$$\alpha : (V \setminus \mathrm{Fix}\,\Phi) \times D^k \to \mathbb{R}$$

— такая C^∞*-функция, что отображение сдвига*

$$f : (V \setminus \mathrm{Fix}\,\Phi) \times D^k \to M,$$

определяемое по формуле $f(t, x) = \Phi(\alpha(t, x), x)$*, гладко продолжается на* $V \times D^k$*. Тогда* α *также гладко продолжается на* $V \times D^k$*.*

Точка z *будет называться* (E)*-точкой потока, если она является его* $(\mathrm{E})^k$*-точкой для каждого* $k \geq 0$*.*

Теорема 5.40. *Предположим, что* $\mathrm{Int}\,\mathrm{Fix}\,\Phi = \varnothing$ *и каждая неподвижная точка* Φ *является* $(\mathrm{E})^0$*-точкой. Тогда*

$$\mathrm{im}\,\phi = \mathcal{E}_0(\Phi), \tag{5.55}$$

$$\phi(\Gamma^+_\Phi) = \mathcal{D}_0(\Phi). \tag{5.56}$$

---

[3] Обозначение происходит от слова *extension* — расширение

Доказательство. Несложно видеть, что (5.55) влечет (5.56). Поэтому достаточно доказать (5.55). Так как C^0_W-топологии на пространствах $C^\infty(M,\mathbb{R})$ и $C^\infty(M,M)$ совпадают с компактно открытыми, то вместо отображений отрезка в эти пространства, можно рассматривать гомотопии.

Пусть $f \in \mathcal{E}_0(\Phi)$. Мы покажем, что найдется такая функция $\alpha \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, что $f = \phi(\alpha)$. По определению пространства $\mathcal{E}_0(\Phi)$ найдется такое непрерывное отображение

$$\nu : I \to C^\infty(M,M),$$

что $\nu(0) = \mathrm{id}_M$ и $\nu(1) = f$. Нам нужно построить такое отображение $\tilde{\nu} : I \to C^\infty(M,\mathbb{R})$, что $\nu = \phi \circ \tilde{\nu}$. Тогда, в частности, получим, что

$$f \;=\; \nu(1) \;=\; \phi \circ \tilde{\nu}(1) \;\in\; \operatorname{im}\phi.$$

Если использовать "гомотопический" язык, то предыдущий параграф можно переформулировать следующим образом: существует такая гомотопия

$$F : I \times M \to M,$$

что $F(t,x) = \nu(t)(x)$, $F(0,x) = x$ и $F(1,x) = f(x)$. Наша цель — построить такую гомотопию $\tilde{\Lambda} : I \times M \to \mathbb{R}$, что

$$F(t,x) \;=\; \phi(\tilde{\nu}(t))(x) \;=\; \Phi(\tilde{\Lambda}(t,x),x).$$

Определим отображение $\tilde{\Lambda}$ на $0 \times M$ по формуле

$$\tilde{\Lambda}(0,x) = 0.$$

Остается его продолжить на все $I \times M$.

Пусть ω — регулярная траектория Φ, $x \in \omega$, и $p : \mathbb{R} \to \omega$ — проекция, определяемая формулой $p(t) = \Phi(t,x)$. Заметим, что $F(I \times x) \subset \omega$ и $F(0,x) = x$.

Лемма 5.41. *Существует* единственная *функция*

$$\tilde{\Lambda}_x : I \to \mathbb{R}$$

такая, что $\tilde{\Lambda}_x(0) = 0$ *и*

$$F(t,x) = p \circ \tilde{\Lambda}_x(t) = \Phi(\tilde{\Lambda}_x(t), x)$$

для всех $t \in I$.

Доказательство. Действительно, предположим, что траектория ω гомеоморфна окружности S^1. Тогда p является накрывающим отображением и наше утверждение следует из аксиомы о накрывающей гомотопии для p.

Пусть теперь ω — незамкнутая траектория. Тогда p — непрерывная биекция, которая, вообще говоря, может не быть гомеоморфизмом. Отметим, что ограничение p на произвольное компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом как непрерывная инъекция из компактного множества K в хаусдорфово пространство M. Поэтому положим $\tilde{\Lambda}_x = p^{-1} \circ F$. Лемма доказана. □

Определим теперь $\tilde{\Lambda}$ на $I \times (M \setminus \operatorname{Fix}\Phi)$ по формуле

$$\tilde{\Lambda}(t,x) = \tilde{\Lambda}_x(t).$$

Тогда из (5.51), где α может зависеть от параметра, вытекает, что $\tilde{\Lambda}(t,x)$ гладкое по x при каждом $t \in I$.

Значит, для всех $t \in I$ гладкое отображение F_t обладает частичной гладкой функцией сдвига $\tilde{\Lambda}_t$, определенной на $M \setminus \operatorname{Fix}\Phi$.

Пусть $x \in \operatorname{Fix}\Phi$. Тогда из условия $(\mathrm{E})^0$ для точки x следует, что $\tilde{\Lambda}_t$ может быть гладко продолжено до функции сдвига F_t в некоторой окрестности x. Так как $\operatorname{Fix}\Phi$ нигде не плотно в M, то все эти продолжения согласованы и определяют единственную гладкую функцию сдвига для F_t. В частности, $f = F_1 = \phi(\Lambda_1)$. Теорема доказана. □

5.6.1. Пример точки, не удовлетворяющей условию $(\mathrm{E})^0$**.** Рассмотрим дифференциальное уравнение на прямой $\mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = x^n, \quad n \geq 1$$

и пусть Φ — соответствующий локальный поток, определенный на некотором интервале $\mathcal{I} = (-a, a)$, $a > 0$. Очевидно, что Φ имеет ровно три траектории: $(-a, 0)$, 0 и $(0, a)$. Для полноты отметим, что

$$\Phi(t,x) = xe^t, \qquad \text{если} \quad n = 1,$$

$$\Phi(t,x) = \frac{x}{1-tx}, \qquad \text{если} \quad n = 2$$

и

$$\Phi(t,x) = \frac{x}{\sqrt[n-1]{1-(n-1)tx^{n-1}}}, \qquad \text{если} \quad n \geq 3.$$

Последние две формулы мы нигде использовать не будем.

Предложение 5.42. *Для $n \geq 2$ точка 0 не является $(\mathrm{E})^0$-точкой для потока Φ.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}(\Phi, 0)$ — множество ростков отображений $\mathcal{I} \to \mathbb{R}$ в точке $0 \in \mathbb{R}$, сохраняющих ростки орбит потока Φ в окрестности этой точки. Таким образом, $\mathcal{E}(\Phi, 0)$ состоит из ростков гладких функций f в $0 \in \mathbb{R}$, которые сохраняют знак и имеют положительную производную $f'(0) > 0$. Поэтому $\mathcal{E}(\Phi, 0)$ линейно связно в C^0_W-топологии, а значит, совпадает с компонентой линейной связности $\mathcal{E}_0(\Phi, 0)$ тождественного отображения $\mathrm{id}_{\mathcal{I}}$.

Пусть $f \in \mathcal{E}(\Phi, 0)$. Так как $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$, то из хорошо известной леммы Адамара (см. формулу (5.65) на стр. 306) вытекает, что $f(z) = zg(z)$, где g — единственная гладкая функция на $\mathcal{I}$ такая, что $g(0) = f'(0) > 0$.

Вычислим время $\alpha(z)$ между точками z и $f(z)$.

$$\alpha(z) = \int_z^{f(z)} dt = \int_z^{f(z)} \frac{dx}{x^n} = \frac{z^{n-1} - f(z)^{n-1}}{(n-1)f(z)^{n-1}z^{n-1}} =$$
$$= \frac{1-g(z)^{n-1}}{(n-1)f(z)^{n-1}} = \frac{1-g}{z^{n-1}} \cdot \frac{1+g+g^2+\cdots+g^{n-2}}{(n-1)g^{n-1}}.$$

Очевидно, что α будет гладкой в точке 0 тогда и только тогда, когда $f = z + z^n h(z)$ для некоторой гладкой функции

h на $\mathbb{R}$ или, что то же самое, когда

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f^{(k)}(0) = 0, \ (2 \le k \le n-1).$$

Следовательно, $\operatorname{im}\phi \neq \mathcal{E}_0(\Phi, 0)$ при $n \ge 2$. $\square$

Заметим, что при $n \ge 2$ поток Φ нелинеен. В следующем разделе мы установим, что для произвольного линейного потока Φ на $\mathbb{R}^n$ выполняется условие $\operatorname{im}\phi = \mathcal{E}_0(\Phi, 0)$.

5.7. Регулярные факторы и расширения потоков

В этом разделе мы покажем, что неподвижные точки "регулярных" расширений линейных потоков удовлетворяют условиям (S) и (E).

Представим пространство $\mathbb{R}^{m+n}$ в виде произведения $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Тогда каждая точка из $\mathbb{R}^{m+n}$ имеет вид (x, y), где $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $U^m \subset \mathbb{R}^m$, $U^n \subset \mathbb{R}^n$ — открытые диски с центрами в соответствующих началах координат и положим $U^{m+n} = U^m \times U^n \subset \mathbb{R}^{m+n}$.

Определение 5.43. Пусть

$$\Phi : \mathcal{J} \times U^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n} \qquad \text{и} \qquad \Psi : \mathcal{J} \times U^m \to \mathbb{R}^m$$

— два частичных потока. Назовем поток Ψ *регулярным фактором* потока Φ, а поток Φ, в свою очередь — *регулярным расширением* потока Ψ, если для каждого $t \in \mathcal{J}$ следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{m+n} \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[d, "p_m"'] & \mathbb{R}^{m+n} \arrow[d, "p_m"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\Psi_t"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}, \qquad \text{т.е.} \quad p_m \circ \Phi_t = \Psi_t \circ p_m, \tag{5.57}$$

где $p_m : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ — естественная проекция, определяемая по формуле $p(x, y) = x$.

Скажем, что потоки Φ и Ψ *регулярно эквивалентны*, если каждый из них является регулярным фактором другого. Назовем поток Φ *регулярно минимальным*, если он непостоянен и каждый его регулярный фактор регулярно эквивалентен Φ.

Пусть $\Phi(t,x,y) = (A(t,x,y), B(t,x,y))$ — координатная запись потока Φ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. Тогда из (5.57) вытекает, что

$$A(t,x,y) = p_m\circ\Phi(t,x,y) = \Psi_t\circ p_m(x,y) = \Psi_t(x).$$

Поэтому (5.57) равносильно условию:

$$\Phi(t,x,y) = (\Psi(t,x), B(t,x,y))\,. \tag{5.58}$$

Значит, Ψ является “первой” координатной функцией потока Φ и не зависит от y.

Замечание 5.44. Из леммы Адамара вытекает, что каждое гладкое отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ такое, что $f(0)=0$, можно представить в виде: $f(x) = A(x)\cdot x$, где $x\in\mathbb{R}^n$, и $A(x)$ — гладкая $(m\times n)$-матрица. Поэтому, если в определении 5.43 точка $0\in\mathbb{R}^{m+n}$ является неподвижной точкой Φ, то формулу (5.58) можно представить таким образом:

$$\Phi(t,x,y) = \left\| \begin{matrix} P(t,x) & 0 \\ Q(t,x,y) & R(t,x,y) \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|, \tag{5.59}$$

где P,Q,R — гладкие матрицы размерностей соответственно $m\times m$, $m\times n$ и $n\times n$, причем P не зависит от y. Следовательно, $\Psi(t,x) = P(t,x)x$.

Теорема 5.45. *Пусть* $\Phi:\mathcal{J}\times U^{m+n}\to\mathbb{R}^{m+n}$ *— нетривиальный частичный поток, для которого начало координат* $z_{m+n}=0\in\mathbb{R}^{m+n}$ *является неподвижной точкой. Предположим, что существует такой линейный поток* $\Psi(t,x)=e^{At}x$ *на* $\mathbb{R}^m$, *что* Φ *является регулярным расширением потока* Ψ *в точке* z_{m+n}. *Тогда* z_{m+n} *является* (S)- *и* (E)-*точкой для* Φ.

Доказательство. Сначала покажем, что условия (S) и (E) остаются верными при регулярных расширениях (см. леммы 5.46 и 5.47), а затем проверим, что они выполняются для линейных потоков (лемма 5.48).

Рассмотрим потоки Φ и Ψ из определения 5.43. Пусть D^k — открытый k-диск,

$$U^{n+k} = U^n \times D^k \qquad \text{и} \qquad U^{m+n+k} = U^m \times U^n \times D^k.$$

Лемма 5.46. *Предположим, что начало координат $z_m = 0 \in \mathbb{R}^m$ является (S)-точкой для Ψ. Тогда z_{m+n} будет (S)-точкой для Φ.*

Доказательство. Пусть $V \subset U^{m+n+k}$ — открытая окрестность точки $(z_{m+n}, 0)$ с компактным замыканием $\overline{V}$ и $\alpha \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} C^\infty(V,\mathbb{R}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\phi"'] & C^\infty(V,\mathbb{R}) \arrow[d, "\psi"] \\ C^\infty(V,\mathbb{R}^{m+n}) \arrow[r, "P_m"] & C^\infty(V,\mathbb{R}^m) \end{tikzcd}$$

где

$$\phi(\alpha)(x,y,s) = \Phi(\alpha(x,y,s), x, y),$$
$$\psi(\alpha)(x,y,s) = \Psi(\alpha(x,y,s), x)$$

и $P_m(h) = p_m \circ h$ для $\alpha \in C^\infty(V,\mathbb{R})$ и $h \in C^\infty(V,\mathbb{R}^{m+n})$.

Выберем функции

$$\delta_\phi : U^{m+n} \to (0,\infty) \qquad \text{и} \qquad \delta_\psi : U^m \to (0,\infty),$$

удовлетворяющие утверждению леммы 5.33 для потоков Φ и Ψ соответственно так, чтобы

$$\delta_\phi(x,y) \le \delta_\psi(x).$$

Определим следующие две C^0_S-окрестности функции α в пространстве $C^\infty(V,\mathbb{R})$:

$$\mathcal{M}_\psi = \{\beta \in C^\infty(V,\mathbb{R}) \mid |\alpha(x,y,s) - \beta(x,y,s)| < \delta_\psi(x)\},$$
$$\mathcal{M}_\phi = \{\beta \in C^\infty(V,\mathbb{R}) \mid |\alpha(x,y,s) - \beta(x,y,s)| < \delta_\phi(x,y)\}.$$

Тогда $\mathcal{M}_\phi \subseteq \mathcal{M}_\psi$, а ограничения $\psi|_{\mathcal{M}_\psi}$ и $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ инъективны. Значит обратное отображение $\phi^{-1} : \phi(\mathcal{M}_\phi) \to \mathcal{M}_\phi$ совпадает с $\psi^{-1} \circ P_m$. Из условия $(\mathrm{S})^{n+k}$ для z_m относительно потока Ψ вытекает, что обратное отображение

$$\psi^{-1} : \psi(\mathcal{M}_\psi) \to \mathcal{M}_\psi$$

является C^r_W-непрерывным для всех $r \geq 0$. Так как P_m также C^r_W-непрерывно, то C^r_W-непрерывным будет и отображение $\phi^{-1} = \psi^{-1} \circ P_m$. $\square$

Лемма 5.47. *Предположим, что начало координат $z_m = 0 \in \mathbb{R}^m$ является* (E)*-точкой для Ψ. Тогда z_{m+n} будет* (E)*-точкой для Φ.*

Доказательство. Пусть $\alpha : (U^{m+n} \setminus \operatorname{Fix} \Phi) \times D^k \to \mathcal{J}$ — такая гладкая функция, что отображение сдвига

$$f(x, y, s) = \Phi(\alpha(x, y, s), x, y) = \big(\Psi(\alpha(x, y, s), x), B(x, y, s)\big)$$

гладко продолжается на все U^{m+n+k}. Покажем, что тогда α гладко продолжается на U^{m+n+k}. Заметим, что

$$(5.60)\quad (U^m \setminus \operatorname{Fix} \Psi) \times U^{n+k} \subset \\ \subset (U^{m+n} \setminus \operatorname{Fix} \Phi) \times D^k \subset U^{m+n+k}.$$

Действительно, легко проверить, что $\operatorname{Fix} \Phi \subset \operatorname{Fix} \Psi \times U^n$. Тогда

$$(U^m \setminus \operatorname{Fix} \Psi) \times U^n \subset U^{m+n} \setminus \operatorname{Fix} \Phi.$$

Умножая обе части этого соотношения на D^k, получаем формулу (5.60).

Остается заметить, что поскольку z_m является $(\mathrm{E})^{n+k}$-точкой потока Ψ, то функция α гладко продолжается на U^{m+n+k}. $\square$

Таким образом, остается проверить, что для каждого нетривиального линейного потока Ψ на $\mathbb{R}^m$ начало координат z_m является (E)- и (S)-точкой. Из лемм 5.46 и 5.47 вытекает, что достаточно рассмотреть только регулярно минимальные потоки. Они описываются следующей простой леммой, доказательство которой предоставим читателю.

Лемма 5.48. *Непостоянный линейный поток*

$$\Psi(t,x) = e^{At}x$$

является регулярно минимальным тогда и только тогда, когда матрица A *сопряжена с одной из следующих матриц:*

(1) $J_1(\lambda) = \|\lambda\|$, $(\lambda \neq 0)$. *Тогда*

$$\Psi(t,x) = xe^{\lambda t},\ x \in \mathbb{R}.$$

(2) $R(\alpha,\beta) = \left\| \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} \right\|$, $(\beta \neq 0)$. *Тогда*

$$\Psi(t,z) = ze^{(\alpha+\beta i)t},\ z \in \mathbb{C}.$$

(3) $J_2(0) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$. *Тогда*

$$\Psi(t,x,y) = (x+ty,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, U — открытая окрестность точки $0 \in F$ и $\mathring{U} = U \setminus \{0\}$ — “проколотая” окрестность 0. Пусть Ψ — линейный поток на F, порожденный одной из матриц (1)-(3) леммы 5.48 (в случае (3) мы рассматриваем $\mathbb{R}^2$ как комплексную плоскость $F = \mathbb{C}$), и ψ — соответствующее отображение сдвига для Ψ.

Пусть $\sigma : \mathring{U} \times D^k \to \mathbb{R}$ — такая гладкая функция, что отображение

$$h(x,\tau) = \psi(\sigma)(x,\tau) = \Psi(\sigma(x,\tau),x,\tau)$$

является гладким на $U \times D^k$. Покажем, что σ можно гладко продолжить на $U \times D^k$ и получим точные формулы, выражающие σ в терминах h. Из этих формул будут вытекать свойства (S) и (E).

Доказательство основывается на следующих двух леммах.

Лемма 5.49. *Отображение*

$$Z : C^{\infty}(U \times D^k, F) \to C^{\infty}(U \times D^k, F),$$

заданное формулой $Z(h)(z,\tau) = z \cdot h(z,\tau)$, *является* C^r_W-*вложением, то есть гомеоморфизмом на свой образ в* C^r_W-*топологии, для каждого* $r \geq 0$.

Лемма 5.50. *Пукай* Ψ — *поток типа* (1) *или типа* (2) *из леммы 5.48. Тогда существует единственная гладкая функция* $\gamma : U \times D^k \to F$ *такая, что* $h(z,\tau) = z \cdot \gamma(z,\tau)$ *и* $\gamma(0,\tau) \neq 0$ *для всех* $\tau \in D^k$.

Доказательства лемм 5.49 и 5.50 будут даны в параграфах 5.7.1 и 5.7.2.

Предполагая, что обе эти леммы уже доказаны, сначала завершим доказательство теоремы 5.45. Рассмотрим потоки Ψ, порожденные матрицами (1)-(3) из леммы 5.48.

(1) В первом случае

$$h(x,\tau) = \Psi(\sigma(x,\tau), x) = xe^{\lambda\sigma(x,\tau)}$$

для всех $x \neq 0$. Так как $0 \in \operatorname{Fix}\Psi$, то $h(0,\tau) = 0$. Тогда из леммы 5.50 вытекает, что

$$h(x,\tau) = x\gamma(x,\tau),$$

а значит, $\gamma(x,\tau) = e^{\lambda\sigma(x,\tau)}$ и $\gamma(0,\tau) = h'_x(0,\tau) > 0$. Таким образом,

$$\sigma(x,\tau) = \frac{1}{\lambda}\ln\gamma(x,\tau). \tag{5.61}$$

(2) Обозначим $\omega = \alpha + i\beta$. Тогда

$$h(z,\tau) = ze^{\omega\sigma(z,\tau)} \qquad \text{для} \qquad z \neq 0.$$

По лемме 5.50 $h(z,\tau) = z\gamma(z,\tau)$ для некоторой гладкой функции γ. Следовательно, $\gamma(z,\tau) = e^{\omega\sigma(z,\tau)}$.

Рассмотрим теперь два случая: $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Если $\alpha \neq 0$, то

$$\sigma(z,\tau) = \frac{1}{2\alpha}\ln\left(\gamma(z,\tau)\overline{\gamma(z,\tau)}\right) = \frac{1}{2\alpha}\ln|\gamma(z,\tau)|^2. \tag{5.62}$$

Если же $\alpha = 0$, то $\gamma(z,\tau) = e^{i\beta\sigma(z,\tau)}$. Следовательно, σ определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого:

$$\sigma(z,\tau) = \frac{1}{\beta}\arg(\gamma(z,\tau)) + \frac{2\pi k}{\beta},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{5.63}$$

(3) В этом случае $\operatorname{Fix}\Psi = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ и

$$h(x,y,\tau) = \Psi(\sigma(x,y,\tau),x,y) = (x + y\sigma(x,y,\tau),\, y)$$

для $y \neq 0$. Пусть $h_1(x,y,\tau) = x + y\sigma(x,y,\tau)$ — первая координатная функция h. Тогда

$$\sigma = \frac{h_1 - x}{y} \qquad \text{для} \qquad y \neq 0.$$

Заметим, что функция $H(x,y,\tau) = h_1(x,y,\tau) - x$ является гладкой и $H(x,0,\tau) \equiv 0$. Тогда из леммы Адамара вытекает, что $H(x,y,\tau) = y\gamma(x,y,\tau)$ для некоторой единственной гладкой функции $\gamma : U \times D^k \to \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\sigma(x,y,\tau) = \frac{h_1(x,y,\tau) - x}{y} = \gamma(x,y,\tau). \tag{5.64}$$

Формулы (5.61)–(5.64) показывают, что во всех случаях функция σ гладко продолжается на некоторую окрестность $0 \in F$. Из них следует свойство (E) для Ψ в точке $0 \in F$.

Проверим свойство (S) для Ψ в этой точке. Пусть V — достаточно малая открытая окрестность 0 в F. Тогда из леммы 5.49 и тех же формул (5.61)–(5.64) вытекает существование такой C^0_W-окрестности ограничения $h|_V$ в пространстве $C^\infty(V,\mathbb{R})$, что соответствие

$$h|_V \mapsto \gamma|_V \mapsto \sigma|_V$$

является C^r_W-непрерывным. Таким образом, начало координат является (S)-точкой для Ψ. Для завершения теоремы 5.45 остается доказать леммы 5.50 и 5.49.

5.7.1. Доказательство леммы 5.49. Очевидно, что Z — инъективное линейное отображение, являющееся C^r_W-непрерывным для всех $r \geq 0$. Проверим, что обратное Z^{-1} отображение также C^r_W-непрерывно.

Для каждого компактного подмножества $K \subset U \times D^k$ и $r \geq 0$ определим норму $\|\cdot\|_{r,K}$ на $C^\infty(U \times D^k, F)$ по формуле

$$\|h\|_{r,K} = \sum_{i=0}^{r} \sup_{x \in K} |D^i h(x)|,$$

где $|D^i h(x)|$ — сумма модулей производных h порядка i. Если K пробегает множество всех компактных подмножеств в $U \times D^k$, то нормы $\|\cdot\|_{r,K}$ порождают C^r_W-топологию в $C^\infty(U \times D^k, F)$. Пусть $h \in C^\infty(U \times D^k, F)$ и $\gamma = Z(h) = zh$. Лемма вытекает из следующего легко проверяемого неравенства:

$$\|\gamma\|_{r,K} \leq |z| \|h\|_{r-1,K} + \|h\|_{r,K} \leq (1 + |z|) \|h\|_{r,K} \leq (1 + \mathrm{diam} K) \|h\|_{r,K}. \quad \square$$

5.7.2. Доказательство леммы 5.50. Случай (1). В этом случае лемма 5.50 вытекает из леммы Адамара. Действительно, так как $h(x, \tau) = e^{\lambda \sigma(x,\tau)} x$ — гладкая функция, то $h(0, \tau) = 0$ для всех τ. Поэтому

$$h(x, \tau) = \int_0^x \frac{\partial h}{\partial t}(x, \tau) dt = x \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t \cdot x, \tau) dt. \tag{5.65}$$

Обозначая последний интеграл через $\gamma(x, \tau)$, получаем, что

$$h(x, \tau) = x \gamma(x, \tau),$$

где γ — гладкая функция и $\gamma(0,\tau) = h'(0,\tau) \neq 0$ для каждого $\tau \in D^k$.

Случай (2). Пусть $\omega = \alpha + i\beta$. Тогда $h(z,\tau) = e^{\omega\sigma(z,\tau)}z$. Поэтому мы положим

$$\gamma(z,\tau) = e^{\omega\sigma(z,\tau)} \quad \forall z \neq 0. \tag{5.66}$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{1}{2\alpha} \ln |\gamma|^2 = \frac{1}{\beta} \arg \gamma \quad \forall z \neq 0. \tag{5.67}$$

Лемма 5.51. *Функция γ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\operatorname{im}(\omega\, \gamma\, d\bar{\gamma}) = 0. \tag{5.68}$$

Доказательство. Из формулы (5.66) вытекает, что

$$d\gamma = \omega\gamma d\sigma.$$

Умножая обе стороны этой формулы на $d\bar{\gamma}$ и учитывая, что выражения $d\sigma$ и $d\gamma d\bar{\gamma}$ — действительные, получаем, что $\omega\, \gamma\, d\bar{\gamma}$ также действительное число. □

Чтобы закончить доказательство леммы, рассмотрим два случая, когда $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Лемма 5.52. *Если $\alpha \neq 0$, то функции σ и γ — гладкие.*

Доказательство. Достаточно установить, что функция $|\gamma(z)|^2$ — гладкая. Так как h — диффеоморфизм в 0, то существуют такие константы c и C, что

$$0 < c < |h(z)|/|z| = |\gamma(z)| < C$$

в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{C}$. Если $|\gamma|^2$ является гладкой, то из формул (5.67) и (5.66) вытекает гладкость функций σ и γ.

Заметим, что формулу (5.68) можно представить в следующем виде:

$$\omega\,\gamma\,d\bar\gamma = \omega\ \frac{h}{z}\ d\left(\frac{\bar h}{\bar z}\right) = \frac{\omega\,h}{z}\cdot\frac{\bar z\,d\bar h - \bar h\,d\bar z}{\bar z^2} = \\ = \frac{z\bar z\cdot\omega\,h\,d\bar h - h\bar h\cdot\omega\,z\,d\bar z}{(z\bar z)^2}\,.$$

Так как $z\bar z$ и $h\bar h$ — действительные числа, то соотношение (5.68) эквивалентно такому:

$$h\bar h\cdot\mathrm{im}\,(\omega\,z\,d\bar z) = z\bar z\cdot\mathrm{im}\,(\omega\,h\,d\bar h),$$

поэтому

$$|\gamma|^2\cdot\mathrm{im}\,(\omega\,z\,d\bar z) = \mathrm{im}\,(\omega\,h\,d\bar h). \tag{5.69}$$

Подставляя $d\bar z = \bar\omega = \alpha - i\beta$ в (5.69) получаем, что

$$\mathrm{im}\,(\omega\,z\,\bar\omega) = y|\omega|^2.$$

Таким образом, левая часть уравнения (5.69) равна

$$|\gamma(x,y)|^2\cdot y|\omega|^2.$$

Очевидно, что эта функция гладкая. Поэтому гладкой является и правая часть (5.69). Из леммы Адамара теперь вытекает, что $|\gamma|^2$ — также гладкая функция. □

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Тогда $\Psi(t,z) = e^{i\beta t}z$ причем $\beta \neq 0$. Следовательно,

$$z\bar z = h\bar h. \tag{5.70}$$

Предложение 5.53. $\dfrac{\partial^n h}{\partial\bar z^n}(0) = 0$ *для каждого* $n \geq 1$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.54. *Пусть* $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *— диффеоморфизм класса* C^1 *такой, что* $h(0) = 0$, *и пусть* $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *— непрерывная* однородная функция степени k, *то есть* $g(tx) = t^k g(x)$ *для* $t > 0$ *и* $x\in\mathbb{R}^n$. *Предположим, что*

$g = g \circ h$. Тогда $g = g \circ Th(0)$, где $Th(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — касательное отображение h в 0.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$. Тогда

$$g(x) = \frac{g(tx)}{t^k} = \frac{g(h(tx))}{t^k} = g\left(\frac{h(tx)}{t}\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g \circ h'(0)(x). \qquad \square$$

Доказательство предложения 5.53. Пусть

$$h(z) = p(z) + iq(z), \qquad \text{где} \qquad p, q \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R}).$$

Проведем доказательство индукцией по n.

Пусть $n = 1$. Заметим, что соотношение (5.70) означает, что h сохраняет однородный многочлен $\beta(x, y) = x^2 + y^2$. Тогда из леммы 5.54 вытекает, что линейное отображение $h'(0)$ также сохраняет β. Значит, $h'(0)$ является ортогональной матрицей и $\frac{\partial h}{\partial \bar z}(0) = 0$. Таким образом, $h'_z(0)$ совпадает с умножением на e^{ia} для некоторого $a \in [0, 2\pi)$. Поэтому

$$h(z) = e^{ia} z + \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_2 = o(|z|^2)$. Положим $\gamma(0) = e^{ia}$. Тогда γ становится непрерывным в точке 0.

Предположим, что мы доказали лемму для $n-1$. Тогда

$$h(z) = e^{ia} z + Az + B\bar z^n + \varepsilon_{n+1},$$

где A — многочлен от переменных z и $\bar z$, $1 \le \deg A \le n-1$, и

$$B = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n h}{\partial \bar z^n}(0).$$

Подставляя h в формулу (5.70) получаем:

$$z\bar z = h\bar h = z\bar z + Az\bar z + B\bar z^{n+1} + \bar A z\bar z + \bar B z^{n+1} + \theta_{n+2},$$

где $\theta_{n+2} = o(|z|^{n+2})$. Отсюда,

$$Az\bar z + B\bar z^{n+1} + \bar A z\bar z + \bar B z^{n+1} = -\theta_{n+2}.$$

Обозначим левую часть этого соотношения через η. Это не что иное как многочлен порядка $\le n+1$ от переменных

z и $\bar{z}$. С другой стороны, $\eta = -\theta_{n+2} = o(|z|^{n+2})$. Следовательно,

$$\eta = \bar{B}z^{n+1} + (A + \bar{A})z\bar{z} + B\bar{z}^{n+1} \equiv 0,$$

т.е. все коэффициенты η равны нулю. Так как первые два слагаемые содержат множитель z, мы видим, что коэффициент при $\bar{z}^n$ равен B. Значит, $B = 0$. □

Следующая лемма легко проверяется. Доказательство предосталяем читателю.

Лемма 5.55. *Пусть $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — такая гладкая функция, что $\varepsilon = o(|z|^k)$. Определим функцию $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ при помощи формулы $\tau(z) = \varepsilon(z)/z$ для $z \neq 0$ и $\tau(0) = 0$. Тогда τ принадлежит классу C^{k-2}.* □

Теперь мы можем завершить доказательство случая (2) леммы 5.50. Из предложения 5.53 вытекает, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ многочлен Тейлора степени n функции h в точке 0 имеет вид

$$h(z) = \gamma_{n-1}z + \varepsilon_{n+1},$$

где γ_{n-1} — многочлен степени $n-1$ от переменных z и $\bar{z}$, а $\varepsilon_{n+1} = o(|z|^{n+1})$. Отсюда

$$\gamma(z) = h(z)/z = \gamma_{n-1} + \varepsilon_{n+1}/z.$$

Применяя лемму 5.55 к остатку ε_{n+1}/z мы видим, что эта функция принадлежит классу C^{n-1}. Поэтому γ принадлежит классу C^{n-1} для всех $n \in \mathbb{N}$, то есть $\gamma \in C^\infty$. Лемма 5.50 доказана. □

5.8. Гомотопический тип множеств $\mathcal{E}_0(\Phi)$ и $\mathcal{D}_0(\Phi)$

Определение 5.56. Пусть F — векторное поле на многообразии M. Будем говорить, что F принадлежит классу $\mathcal{ES}$, если каждая неподвижная точка потока Φ удовлетворяет условиям (E) и (S).

Скажем, что F принадлежит классу $\mathcal{L}$ (является *локально линейным*), если поток Φ этого поля является регулярным расширением некоторого *нетривиального* линейного потока Ψ_z в окрестности каждой своей неподвижной точки z. Подчеркнем, что в определении класса $\mathcal{L}$

(a) требуется наличие *какой-нибудь* локальной системы координат в некоторой окрестности U_z точки z, в которой поток Ψ_z — линеен;
(b) найдется такая окрестность $U'_z \subset U_z$ точки z, что факторизация Φ на Ψ_z, то есть соотношение (5.57), выполняется *на всей* окрестности U'_z;
(c) для разных неподвижных точек z_1 и z_2 линейные потоки Ψ_{z_1} и Ψ_{z_2} могут быть различными.

Отметим, что теорема 5.45 фактически утверждает, что класс $\mathcal{L}$ содержится в классе $\mathcal{ES}$.

Предположим, что векторное поле F порождает глобальный поток $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ и пусть

$$\phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, M), \qquad \phi(\alpha)(x) = \Phi(\alpha(x), x)$$

— отображение сдвига вдоль орбит Φ.

Возьмем какое-нибудь $r = 0, 1, \ldots, \infty$ и зададим на пространствах $C^\infty(M, \mathbb{R})$ и $C^\infty(M, M)$ сильные C^r-топологии Уитни, а на их подпространствах $\operatorname{im}\phi$, $\mathcal{D}_0(\Phi)$, и $\mathcal{E}_0(\Phi)$ — соответствующие индуцированные топологии.

Следующая теорема объединяет результаты, полученные в предыдущих разделах.

Теорема 5.57. [129] *Пусть Φ — глобальный поток на многообразии M, принадлежащий классу $\mathcal{ES}$. Предположим, что* $\operatorname{Int}\operatorname{Fix}\Phi = \varnothing$ *(это условие выполнено, если Φ принадлежит классу $\mathcal{L}$). Тогда*

(A) $\operatorname{im}\phi = \mathcal{E}_0(\Phi)$ *и* $\phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{E}_0(\Phi)$ *является либо гомеоморфизмом, либо накрывающим отображением с* *группой скольжений, изоморфной $\mathbb{Z}$. Более того, множество $\Gamma^+_\Phi = \phi^{-1}(\mathcal{D}_0(\Phi))$ — открыто и* выпукло *в линейном пространстве $C^\infty(M,\mathbb{R})$.*

(B) *Если M компактно, то вложение $\mathcal{D}_0(\Phi) \subset \mathcal{E}_0(\Phi)$ является гомотопической эквивалентностью, и оба эти пространства либо стягиваемы, либо гомотопически эквивалентны окружности.*

(C) *Предположим, что либо Φ имеет по крайней мере одну незамкнутую траекторию, либо касательный линейный поток хотя бы в одной неподвижной точке потока Φ тождественен. Тогда $\phi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_0(\Phi)$ — гомеоморфизм. Поэтому если M — компактно, то $\mathcal{D}_0(\Phi)$ и $\mathcal{E}_0(\Phi)$ стягиваемы.*

Доказательство. Вначале заметим, что если Φ принадлежит классу $\mathcal{L}$, то $\operatorname{Int}\operatorname{Fix}\Phi = \varnothing$, так как для линейных потоков это условие выполняется.

(A) Пусть теперь Φ — поток класса $\mathcal{ES}$ на M. Тогда из теорем 5.36 и 5.40 вытекает, что $\operatorname{im}\phi = \mathcal{E}_0(\Phi)$, а отображение $\phi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \operatorname{im}\phi$ — либо гомеоморфизм, либо $\mathbb{Z}$-накрытие. Наконец, из теоремы 5.40 и леммы 5.14 следует, что множество $\Gamma^+_\Phi = \phi^{-1}(\mathcal{D}_0(\Phi))$ является выпуклым подмножеством в $C^\infty(M,\mathbb{R})$.

(B) Предположим, что M компактно. Пусть X обозначает либо $C^\infty(M,\mathbb{R})$, либо Γ^+_Φ. Тогда его образ $Y = \phi(X)$ — соответственно либо $\mathcal{E}_0(\Phi)$ либо $\mathcal{D}_0(\Phi)$. Очевидно, что X — многообразие Фреше (как открытое подмножество в многообразии Фреше $C^\infty(M,\mathbb{R})$). Поэтому, его образ Y при накрывающем отображении ϕ также является многообразием Фреше. Значит, Y имеет гомотопический тип CW-комплекса (см. напр. [152]). Так как X — стягиваемо, то Y — асферично, то есть $\pi_n(Y) = 0$ для $n \geq 2$. По теореме 5.29 $\pi_1(Y)$ либо 0, либо $\mathbb{Z}$. Следовательно, Y — либо стягиваемо, либо гомотопически эквивалентно окружности.

Так как $\mathrm{id}_M \subset \mathcal{D}_0(\Phi)$, то $Z_{\mathrm{id}} = \phi^{-1}(\mathrm{id}_M) \subset \Gamma^+_\Phi$. Отсюда вытекает, что вложение $\mathcal{D}_0(\Phi) \subset \mathcal{E}_0(\Phi)$ индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп. Поэтому оно является гомотопической эквивалентностью.

(C) Предположим, что либо Φ имеет хотя бы одну незамкнутую траекторию, либо касательный поток в какой-то одной из неподвижных точек Φ тривиален. Тогда по предложению 5.28 $Z_{\mathrm{id}} = 0$, а значит ϕ является гомеоморфизмом $C^\infty(M, \mathbb{R})$ на $\mathcal{E}_0(\Phi)$. Если же M — компактно, то пространство $C^\infty(M, \mathbb{R})$ является пространством Фреше, и значит, стягиваемо. Поэтому $\mathcal{D}_0(\Phi)$ и $\mathcal{E}_0(\Phi)$ — также стягиваемы. □

5.9. Замыкание множества $\mathcal{E}_0(\Phi)$

Из теоремы 5.57 вытекает, что большого класса потоков соответствующие множества $\mathcal{E}_0(\Phi)$ и $\mathcal{D}_0(\Phi)$ стягиваемы. Однако замыкание $\mathcal{E}_0(\Phi)$ в пространстве $C^\infty(M, M)$ может иметь достаточно сложную структуру.

Заметим, что для каждого замкнутого подмножества $K \subset M$ множество

$$\mathrm{Inv}(K) = \{f \in C^\infty(M, M) \mid f(K) \subset K\}$$

замкнуто в $C^\infty(M, M)$ с топологией поточечной сходимости. Поэтому оно также замкнуто во всех топологиях Уитни на $C^\infty(M, M)$. Отсюда следует, что для произвольного глобального потока Φ на M множество

$$\mathrm{Inv}(\Phi) = \bigcap_{\omega \text{ — орбита } \Phi} \mathrm{Inv}(\overline{\omega})$$

также замкнуто во всех топологиях Уитни на $C^\infty(M, M)$. Очевидно, что $\mathcal{E}(\Phi) \subset \mathrm{Inv}(\Phi)$, поэтому $\mathcal{E}_0(\Phi) \subset \mathrm{Inv}_0(\Phi)$, где $\mathrm{Inv}_0(\Phi)$ — компонента линейной связности $\mathrm{Inv}(\Phi)$ в компактно-открытой топологии. Следующая лемма доказывается несложно и мы оставляем ее читателю.

Лемма 5.58. *Пусть* Φ — глобальный *поток, определенный на* связном *подмножестве* $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$\overline{\mathcal{E}_0(\Phi)} = \mathrm{Inv}_0(\Phi)$$

Однако установить в общем случае, что $\mathrm{Inv}_0(\Phi)$ — замкнуто, является нетривиальной задачей.

Пример 5.59. Рассмотрим иррациональный поток Φ на n-мерном торе T^n. Хорошо известно, что у этого потока каждая орбита является всюду плотной в T^n, откуда $\mathrm{Inv}(\Phi) = C^\infty(T^n, T^n)$.

Выберем на пространстве отображений $C^\infty(T^n, T^n)$ какую нибудь метрику d, которая индуцирует компактно-открытую топологию. Так как T^n — абсолютный окрестностный ретракт, то любые два достаточно близкие отображения $f, g : T^n \to T^n$ гомотопны между собой. Следовательно, каждая компонента связности $C^\infty(T^n, T^n)$ — открыта. Поэтому она также и замкнута как дополнение к объединению остальных. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Inv}_0(\Phi)$ — замкнуто.

Отметим, что так как поток Φ не имеет неподвижных точек, то он принадлежит классу $\mathcal{ES}$. Тогда по теореме 5.57 $\mathrm{im}\,\phi = \mathcal{E}_0(\Phi)$. Таким образом, утверждение

$$\overline{\mathcal{E}_0(\Phi)} = \mathrm{Inv}_0(\Phi)$$

означало бы, что замыкание образа $\overline{\mathrm{im}\,\phi}$ является компонентой линейной связности пространства $C^\infty(T^n, T^n)$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ произвольное гладкое отображение $f : T^n \to T^n$, которое гомотопно id_{T^n}, можно было бы ε-аппроксимировать в метрике d сдвигом вдоль орбит потока Φ, то есть посредством отображения вида $f_\varepsilon(x) = \Phi(\alpha_\varepsilon(x), x)$, где $\alpha_\varepsilon \in C^\infty(T^n, \mathbb{R})$.

Авторам не известно, справедливо ли последнее утверждение.

Одна из основных трудностей, возникающая в предыдущем примере для построения α_ε, состоит в том, что если $f(x)$ не принадлежит орбите точки x, то, грубо говоря, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon(x)=\infty$.

Предложение 5.60. *Пусть Φ — глобальный поток на M. Предположим, что существует орбита ω, плотная в каком-то непустом открытом подмножестве в M, то есть $\operatorname{Int}\overline{\omega}\neq\varnothing$. Пусть также*

$$f\in\overline{\operatorname{im}\phi}\setminus\operatorname{im}\phi \qquad \text{и} \qquad x\in\operatorname{Int}\overline{\omega}$$

такие, что $f(x)$ на принадлежит орбите ω_x точки x. Тогда для любой последовательности действительных чисел $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такой, что $\lim\limits_{i\to\infty}\Phi(x,t_i)=f(x)$, выполняется условие: $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что ω_x — незамкнутая орбита. Положим $y=f(x)$ и $y_i=\Phi(x,t_i)$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Для каждого $A>0$ обозначим

$$\omega_A=\Phi(x\times[-A,A])\subset\omega_x.$$

Тогда $y\notin\omega_A$. Так как ω_A — компактно, то найдется окрестность U точки y, не пересекающая ω_A.

Теперь из того, что $\lim\limits_{i\to\infty}y_i=y$ и $y_i\in\omega$, вытекает, что

$$y_i=\Phi(x,t_i)\in\omega_x\setminus\omega_A.$$

Поэтому $t_i>A$ для всех достаточно больших i. Полагая A произвольно большим, получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$. □

5.10. Представление сохраняющих слои отображений в виде гладких сдвигов

5.10.1. Слоение без особенностей. Пусть F — стандартное n-слоение в $\mathbb{R}^m$, слои которого — n-мерные плоскости, определяемые следующей системой уравнений:

$$x_{n+1}=c_{n+1}, \qquad x_{n+2}=c_{n+2}, \qquad \ldots \qquad x_m=c_m,$$

для всех $(c_{n+1}, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Тогда F порождается векторными полями $F_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$. Очевидно, что поток $\Phi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ поля F_i задается следующей формулой:

$$\Phi_i(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = (x_1, \dots, t + x_i, \dots, x_m). \tag{5.71}$$

Лемма 5.61. *Пусть*

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

— отображение, сохраняющее каждый слой слоения F. *Тогда f является гладким сдвигом вдоль орбит $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ посредством функций $\alpha_i(x) = f_i(x) - x_i$ для $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Так как f сохраняет слои, то

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$$

для $n + 1 \le i \le m$, а при $1 \le i \le n$ — имеем

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = (f_i(x) - x_i) + x_i = \alpha_i(x) + x_i. \tag{5.72}$$

Значит,

$$f(x) = \Phi_n\bigl(\alpha_n(x), \cdots \Phi_2\bigl(\,\alpha_2(x),\, \Phi_1(\alpha_1(x), x)\,\bigr) \cdots\bigr). \quad \square$$

Применяя теорему 5.2 к отображению f, видим, что если $f(0) = 0$, то якобиан f в точке 0 можно выразить через частные производные функций

$$\alpha_i(x) = f_i(x) - x_i, \ (i = 1, \dots, n)$$

по первым n координатам $x_1, \dots, x_n$.

Заметим также, что если $n = m$, то слоение F состоит из единственного слоя $\mathbb{R}^m$, а f может быть произвольным диффеоморфизмом $\mathbb{R}^m$. В этом случае утверждение теоремы 5.2 тривиально. Действительно,

$$D[F_1, \dots, F_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n] = |E_n + Y| = \\ = \left|\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i}(f_j - x_j)\right| = \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right| = J(f).$$

5.10.2. Слоения, порожденные произведениями локальных потоков. Пусть $\mathbb{R}^m$ представлено в виде произведения $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$, где $m = m_1 + \ldots + m_n$ и $m_i \geq 0$. Тогда каждая точка $x \in \mathbb{R}^m$ может быть записана в виде: $x = (x_1, \ldots, x_m)$, где $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$.

Пусть F_i, $i = 1, \ldots, n$, — векторное поле на $\mathbb{R}^{m_i}$. Мы можем также считать, что F_i определено на всем пространстве $\mathbb{R}^m$, но зависит только от x_i, то есть

$$F_i(x) \equiv (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, F_i(x_i), 0, \ldots, 0).$$

Векторные поля F_i определяют на $\mathbb{R}^m$ некоторое (вообще говоря, сингулярное) слоение F, слои которого — это произведения орбит полей F_i. Таким образом, если $\omega_i(x_i)$ — орбита F_i, проходящая через точку $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, то множество

$$\mathsf{F}_x = \omega_1(x_1) \times \cdots \times \omega_n(x_n) \subset \mathbb{R}^m$$

является слоем F точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что F_x — подмнообразие в $\mathbb{R}^m$ и его размерность равна общему количеству индексов $i = 1, \ldots, n$ для которых $F_i(x_i) \neq 0$.

Лемма 5.62. *Предположим, что либо каждое из полей F_i линейным, либо $F_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, либо $F_i \equiv 0$. Тогда каждое сохраняющее слои гладкое отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ является гладким сдвигом вдоль $F_1, \ldots, F_n$ при помощи некоторых гладких функций $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

Доказательство. Пусть $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m_i}$ — i-я “координатная функция” f и $\Phi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$ — поток, порождаемый F_i. Так как f сохраняет слои F, являющиеся произведениями орбит Φ_i, то f_i можно рассматривать как семейство гладких сдвигов

$$f_{(x_1, \ldots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \ldots, x_n)} : \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}^{m_i} \tag{5.73}$$

вдоль орбит потока Φ_i. Это семейство зависит от параметра, пробегающего

$$\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_{i-1}} \times \mathbb{R}^{m_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}.$$

Если F_i — линейно, то из условий (S) и (E) для линейных потоков получаем, что существует такая гладкая функция $\alpha_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, что $f_i(x) = \Phi_i(\alpha_i(x), x_i)$.

Если $F_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, то Φ_i задается формулой (5.71), а α_i — формулой (5.72). Наконец, если $F_i \equiv 0$, то Φ_i — постоянный поток,

$$f_i(x) = x_i,$$

а в качестве α_i можно взять произвольную функцию. $\square$

Литература

[1] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.

[2] *Алексеев В. М.* Символическая динамика. — Киев.: Издание Института математики АН УССР, 1976. — С. 212.

[3] *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Международный симпозиум по нелинейным колебаниям. Тезисы докладов. — Киев, 1969.

[4] *Аносов Д. В.* Грубые системы // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*. — 1985. — Т. 169. — С. 59–93.

[5] *Аносов Д. В., Солодов В. В.* Гиперболические множества // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Динамические системы – 9. — ВИНИТИ, 1991. — С. 12–99.

[6] *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности диффферернцируемых отображений, I. — Москва, Наука, 1982.

[7] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. — М. Наука, 1997.

[8] *Власенко И. Ю., Максименко С. И.* Корни из гомеоморфизмов и диффеоморфизмов многообразий // *Препринт 2004.8.* — 2004.

[9] *Власенко И. Ю., Полулях Е. А.* Об итерационной устойчивости центра Биркгофа // *Препринт 2005.7.* — 2005.

[10] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

[11] *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. — Москва, Мир, 1977.

[12] *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: Изд-во иностр. лит, 1948.

[13] *Иванов Н. В.* Гомотопии пространств автоморфизмов некоторых трехмерных многообразий // *Докл. Акад. Наук СССР*. — 1979. — Т. 244. — С. 274–277.

[14] *Кадец М. И.* О сильной и слабой сходимости // *Докл. Акад. Наук СССР*. — 1958. — Т. 122. — С. 13–16.

[15] *Кадец М. И.* Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха // *Функ. анал. и прил.* — 1967. — Т. 1, № 1. — С. 61–70.

[16] *Кадец М. Й.* Про зв'язок між сильною та слабкою збіжністю // *Допов. Акад. Наук Укр. РСР.* — 1959. — С. 949–952.

[17] *Келли Д. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — С. 432.

[18] *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1969.

[19] *Кэссон Э., Блейлер С.* Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону. — Москва, Фазис, 1998.

[20] *Максименко С.* Сечения действий групп Ли и теорема М. Ньюмана // "Фундаментальная математика сегодня", Сборник работ посвященный 10-летию Московского независимого университета. — 2003. — С. 246–258.

[21] *Масси У., Столлингс Д.* Алгебраическая топология, введение. — М.: Мир, 1977.

[22] *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. — Изд. Моск. Унив., 1991.

[23] *Милнор Д.* Теория Морса. — Москва, Мир, 1965.

[24] *Немыцкий В. В.* Топологические вопросы теории динамических систем // *Успехи Мат. Наук.* — 1949. — Т. IV, № 6 (34). — С. 90–153.

[25] *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.

[26] *Новиков С. П.* Дифференцируемые пучки сфер // *Изв. Акад. наук СССР.* — 1965. — Т. 29. — С. 1–96.

[27] *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев, Наукова Думка, 1974.

[28] *Плыкин Р. В.* Источники и стоки а-диффеоморфизмов поверхностей // *Математический сборник.* — 1974. — Т. 94(196), № 2(6). — С. 243–264.

[29] *Полулях Е. А.* Об одном расслоении над окружностью со слоем канторово множество // *Укр. мат. журн.* — 1997. — № 11. — С. 1567–1571.

[30] *Полулях Е. А.* О топологических свойствах динамических систем понтрягина (части i, ii) // Некоторые вопросы современной математики. — Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. — Т. 25 из *Праці Інституту математики НАН України.* — С. 194–304.

[31] *Постников М. М.* Семестр 4. Дифференциальная геометрия. Лекции по геометрии. — М.: Наука, 1988. — С. 496.

[32] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии, геометрические главы. — Москва: Наука, 1977. — С. 488.

[33] *Рурк К., Сандерсон Б.* Введение в кусочно линейную топологию. — Москва: Мир, 1970.

[34] *Сибирский К. С.* Введение в топологическую динамику. — Кишинев, 1970.

[35] *Стинрод Н.* Топология косых произведений. — М.: ИЛ., 1953.

[36] *Хирш М.* Дифференциальная топология. — Мир, Москва, 1979.

[37] *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевей Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы. — М. Наука, 1988.

[38] *Чернавский А. В.* Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия // *Мат. сборн.* — 1968. — Т. 79, № 3. — С. 307–356.

[39] *Шарковский А. Н.* Про одну теорему Дж. Біркгофа // *Доповіді АН УРСР.* — 1967. — Т. 5. — С. 429–432.

[40] *Шарковский А. Н.* Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем. — Диссертация на соискание уч. степ. доктора физ.-мат. наук, 1996.

[41] *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — Киев. Наук. думка, 1980.

[42] *Abe K., Fukui K.* On commutators of equivariant diffeomorphisms // *Proc. Japan Acad. Series A.* — 1978. — Vol. 54. — Pp. 53–54.

[43] *Ahlfors L. V., Sario L.* Riemann surfaces. — Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1960.

[44] *Akin E., Hurley M., Kennedy J. A.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms // *Mem. Amer. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 164, no. 783. — Pp. viii+130.

[45] *Alexander J. W.* On the deformation of n-cell // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1923. — Vol. 9, no. 12. — Pp. 406–407.

[46] *Anderson R. D.* The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms // *Amer. J. Math.* — 1958. — Vol. 80. — Pp. 955–963.

[47] *Anderson R. D.* On homeomorphisms as products of conjugates of a given homeomorphism and its inverse // *Topology of 3-manifolds and related topics.* — 1961. — Pp. 231–234.

[48] *Anderson R. D.* Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1966. — Vol. 72. — Pp. 515–519.

[49] *Anderson R. D., Bing R. H.* A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 74. — Pp. 771–792.

[50] *Antonelli P. L., Burghelea D., Kahn P. J.* The non-finite homotopy type of some diffeomorphism groups // *Topology.* — 1972. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 1–49.

[51] *Asano K.* Homeomorphisms of prism manifolds // *Yokohama Math. J.* — 1978. — Vol. 26. — Pp. 19–25.

[52] *A. Fathi F. Laudenbach V. P.* Travaux de Thurston sur les surfaces // *Astérisque.* — 1979. — Vol. 66-67.

[53] *Baer R.* Isotopie von Kurven auf orientbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen // *J. Reine Angew. Math.* — 1928. — Vol. 159. — Pp. 101–116.

[54] *Banyaga A.* On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms // *Topology.* — 1977. — Vol. 16. — Pp. 279–283.

[55] *Banyaga A.* The structure of classical diffeomorphism group. — Kluwer Acad. Publ., 1997.

[56] *Bessaga C.* On topological classification of complete linear metric spaces. // *Fund. Math.* — 1964/1965. — Vol. 56. — Pp. 251–288.

[57] *Bessaga C., Pełczyński A.* Some remarks on homeomorphisms of Banach spaces // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* — 1960. — Vol. 8. — Pp. 757—761.

[58] *Bessaga C., Pełczyński A.* A topological proof that every separable Banach space is homeomorphic to a countable product of lines // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* — 1969. — Vol. 17. — Pp. 487—493.

[59] *Bing R. H.* An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated // *Ann. of Math. (2).* — 1959. — Vol. 69. — Pp. 37–65.

[60] *Birkhoff G.* Dynamical systems // *Colloquium Publications. V. 9, AMS, Providence, RI.* — 1927.

[61] *Birkhoff G., Smith P.* Structure analysis of surface transformations // *J. Math.* — 1928. — Vol. 7. — Pp. 357–369.

[62] *Birman J. S.* Mapping class group and their relation to braid groups // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1969. — Vol. 22. — Pp. 213–238.

[63] *Birman J. S.* On braid groups // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1969. — Vol. 22. — Pp. 41–72.

[64] *Birman J. S., Chillingworth D. R. J.* On the homeotopy group of a non-orientable surface // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1972. — Vol. 71. — Pp. 437–448.
[65] *Birman J. S., Chillingworth D. R. J.* Erratum to "On the homeotopy group of a non-orientable surface" // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 2004. — Vol. 136. — P. 441.
[66] *Birman J., Rubinstein J. H.* One-sided Heegaard splittings and homeotopy groups of some 3-manifolds // *Proc. London Math. Soc. (3).* — 1984. — Vol. 49. — Pp. 517–536.
[67] *Boileau M., Otal J.-P.* Scindements de Heegaard et groupe des homéotopies des petites variétés de Seifert // *Invent. Math.* — 1991. — Vol. 106. — Pp. 85–107.
[68] *Bonahon F.* Difféotopies des espaces lenticulaires // *Topology.* — 1983. — Vol. 22. — Pp. 305–314.
[69] *Brown M.* On a theorem of Fisher concerning the homeomorphism group of a manifold // *Michigan. Math. J.* — 1962. — Vol. 9, no. 4. — Pp. 403–405.
[70] *Brown M.* A note on Kister's isotopy // *Michigan. Math. J.* — 1967. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 95–96.
[71] *Cerf J.* Groupes d'automorphismes et groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension 3 // *Bull. Soc. Math. Fr.* — 1959. — Vol. 87. — Pp. 319–329.
[72] *Cerf J.* Sur les difféomorphismes de la sphére de dimension trois ($\Gamma^4 = 0$). — Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968. — Vol. 53.
[73] *Chillingworth D. R. J.* A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1969. — Vol. 65. — Pp. 409–430.
[74] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. — Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1978. — Vol. 38 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* — Pp. iii+89.
[75] *Coven E., Nitecki Z.* Nonwandering sets of the powers of maps of the interval // *Ergodic Theory & Dynamical Systems.* — 1981. — Vol. 1. — Pp. 9–31.
[76] *C. B.* Generic Dynamics // *Lectures. Albus Salam ICTP, SMR 1573.* — 2004. — Vol. 11.
[77] *Dehn M.* Die Gruppe der Abbildungsklassen // *Acta Mathematica.* — 1938. — Vol. 69. — Pp. 135–206.
[78] *Dijkstra J. J., van Mill J.* Homeomorphism groups of manifolds and Erdös space // *Electronic Research announcements of the A.M.S.* — 2004. — Vol. 10. — Pp. 29–38.

[79] *Dobrowolski T., Toruńczyk H.* Separable complete ANRs admitting a group structure are Hilbert manifolds // *Top. Appl.* — 1981. — Vol. 12. — Pp. 229–235.
[80] *Earle C. J., Eells J.* The diffeomorphism group of a compact riemann surface // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1967. — Vol. 73, no. 4. — Pp. 557–559.
[81] *Earle C. J., Eells J.* A fibre bundle description of Teichmüller theory // *J. Diff. Geom.* — 1969. — Vol. 3. — Pp. 19–43.
[82] *Earle C. J., Schatz A.* Teichmüller theory for surfaces with boundary // *J. Diff. Geom.* — 1970. — Vol. 4. — Pp. 169–185.
[83] *Eells J.* On the geometry of function spaces // *On the geometry of function spaces, Mexico.* — 1958. — Pp. 303–307.
[84] *Epstein D. B. A.* The simplicity of certain groups of homeomorphisms // *Compositio Math.* — 1970. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 165–173.
[85] *Epstein D. B. A.* Commutators of C^∞-diffeomorphisms. Appendix to “A curious remark concerning the geometric transfer map” by John N. Mather // *Comm. Math. Helv.* — 1984. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 111–122.
[86] *Erdös P.* The dimension of the rational points in Hilbert space // *Ann. of Math.* — 1940. — Vol. 41. — Pp. 734–736.
[87] *Fisher G. M.* On the group of homeomorphisms of a manifold // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1960. — Vol. 97. — Pp. 193–212.
[88] *Floyd E. E., M. K. Fort J.* A characterization theorem for monotone mappings // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1953. — Vol. 4. — Pp. 828–830.
[89] *Fukui K.* Homologies of the group $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ and its subgroups // *J. Math. Kyoto Univ.* — 1980. — Vol. 20. — Pp. 475–487.
[90] *Gabai D.* The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $\mathrm{Isom}(M^3) \cong \mathrm{Diff}(M^3)$ // *J. Diff. Geom.* — 2001. — Vol. 58. — Pp. 113–149.
[91] *Gervais S.* Presentation and central extension of mapping class groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1996. — Vol. 348, no. 8. — Pp. 3097–3132.
[92] *Gervais S.* A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface // *Topology.* — 2001. — Vol. 40. — Pp. 703–725.
[93] *Gluck H.* The embedding of two-spheres in the four-sphere // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1962. — Vol. 104. — Pp. 308–333.

[94] *Gottschalk W. H.* Powers of homeomorphisms with almost periodic properties // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1944. — Vol. 50. — Pp. 222–227.

[95] *Gramain A.* Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte // *Ann. scient. éc. norm. sup.* — 1973. — Vol. 6. — Pp. 53–66.

[96] *Haken W.* Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten. I. // *Math. Z.* — 1962. — Vol. 80. — Pp. 89–120.

[97] *Haller S., Rybicki T.* On the perfectness of non-transitive groups of diffeomorphisms. — 1999. — http://xxx.lanl.gov/math.DG/9902095.

[98] *Haller S., Teichman J.* Smooth perfectness through decomposition of diffeomorphisms into fiber preserving ones // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2003. — Vol. 23. — Pp. 53–63.

[99] *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1982. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 65–222.

[100] *Hamstrom M. E.* Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold // *Illinois J. Math.* — 1966. — Vol. 10. — Pp. 563–573.

[101] *Hamstrom M. E.* Homotopy in homeomorphisms spaces TOP and PL // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80, no. 2. — Pp. 207–230.

[102] *Hamstrom M. E., Dyer E.* Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold // *Duke J. Math.* — 1958. — Vol. 25. — Pp. 521–531.

[103] *Hatcher A.* Homeomorphisms of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds // *Topology.* — 1976. — Vol. 15. — Pp. 343–347.

[104] *Hatcher A.* On the diffeomorphism group of $S^1 \times S^2$ // *ProcAMS.* — 1981. — Vol. 83, no. 2. — Pp. 427–430.

[105] *Hatcher A.* A proof of Smale Conjecture: $\mathrm{Diff}(S^3) \cong O(4)$ // *Ann. of Math.* — 1983. — Vol. 117. — Pp. 553–607.

[106] *Hatcher A., Thurston W.* A representation for the mapping class group of a closed orientable surface // *Topology.* — 1980. — Vol. 19. — Pp. 221–237.

[107] *Haver W. E.* Contractible neighborhoods in the group of homeomorphisms of a manifold // *The Proceedings of the 1981 Topology Conference (Blacksburg, Va., 1981). Topology Proc.* — 1981. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 311—316.

[108] *Herman M. R.* Sur le groupe des difféomorphismes du tore // *Ann. Inst. Fourier.* — 1973. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 75–86.

[109] *Hirsch M. W.* Differential topology. — Springer-Verlag, 1976. — Vol. 33.

[110] *Humphries S.* Generators for the mapping class group of a closed orientable surface // *Lect. Notes in Math.* — 1979. — Vol. 722. — Pp. 44–47.

[111] *Kister J. M.* Small isotopies in euclidean spaces and 3-manifolds // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1959. — Vol. 65, no. 6. — Pp. 371–373.

[112] *Kister J. M.* Isotopies in 3-manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1960. — Vol. 97. — Pp. 213–224.

[113] *Klee V. L.* Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1953. — Vol. 74, no. 1. — Pp. 10–43.

[114] *Klee V. L.* Mappings into normed linear spaces // *Fund. Math.* — 1960/1961. — Vol. 49. — Pp. 25–34.

[115] *Knezer H.* Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen // *Math. Z.* — 1926. — Vol. 25. — Pp. 362–372.

[116] *Kopell N.* Commuting diffeomorphisms, Global Analysis // *Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.* — 1970. — Vol. 14. — Pp. 165–184.

[117] *Korkmaz M.* Mapping class group of nonorientable surfaces // *Geom. Dedicata.* — 2002. — Vol. 89. — Pp. 109–133.

[118] *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. Monografie Matematyczne, Tom 46. — Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1968. — P. 383 pp. (errata insert).

[119] *Kuratowski K.* Topology. Vol. I. New edition, revised and augmented. Translated from the French by J. Jaworowski. — New York: Academic Press, 1966. — Pp. xx+560.

[120] *Kuratowski K., Mostowski A.* Set theory. — revised edition. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1976. — Pp. xiv+514. — With an introduction to descriptive set theory, Translated from the 1966 Polish original, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 86.

[121] *Laudenbach F.* Topologie de la dimension troi: homotopie et isotopie // *Astérisque.* — 1974. — Vol. 12.

[122] *Lee J. P.* Homeotopy groups of orinetable 2-manifolds // *Fund. Math.* — 1973. — Vol. 77. — Pp. 115–124.

[123] *Leslie J.* On a differential structure for the group of diffeomorphisms // *Topology.* — 1967. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 263–271.

[124] *Lickorish W. B. R.* Homeomorphisms of non-orientable two manifolds // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1963. — Vol. 59. — Pp. 307–317.

[125] *Lickorish W. B. R.* A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1964. — Vol. 60. — Pp. 769–778.

[126] *Lickorish W. B. R.* On the homeomorphisms of non-orientable surface // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1965. — Vol. 61. — Pp. 61–64.

[127] *Lickorish W. B. R.* On the homeotopy group of a 2-manifold (corrigendum) // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1966. — Vol. 62. — Pp. 679–681.

[128] *Luke R., Mason W. K.* The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 164. — Pp. 275–285.

[129] *Maksymenko S.* Smooth shifts along trajectories of flows // *Top. Appl.* — 2003. — Vol. 130. — Pp. 183–204.

[130] *Maksymenko S.* Consecutive shifts along orbits of vertor fields // Proceedings of the conference "Foliations-2005", Poland, Lòdz, 2005 / Ed. by PawełWalczak et al. — World Scientific, Singapore, 2006. — Pp. 327–340.

[131] *Mason W. K.* The space of all self-homeomorphisms of a 2-cell which fix the cell's boundary is an absolute retract // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1971. — Vol. 161. — Pp. 185–205.

[132] *Masson A.* Sur la perfection du groupe des difféomorphismes d'une variété à bord infiniment tangent à l'identité sur le bord // *C. R. Acad. Sc. Paris, Serie A* . — 1977. — Vol. 258. — Pp. 837–839.

[133] *Mather J.* Stability of C^∞-mappings, II: Infinitesimal stability implies stability // *Ann. of Math.* — 1969. — Vol. 89. — Pp. 254–291.

[134] *Mather J.* The vanishing of the homology group of certain groups of diffeomorphisms // *Topology.* — 1971. — Vol. 10. — Pp. 297–298.

[135] *Mather J.* Commutators of diffeomorphisms // *Comm. Math. Helv.* — 1974. — Vol. 49. — Pp. 512–528.

[136] *Mather J.* Simplicity of certain groups of diffeomorphisms // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 271–273.

[137] *Mather J.* Commutators of diffeomorphisms: II // *Comm. Math. Helv.* — 1975. — Vol. 50. — Pp. 33–40.

[138] *Mather J.* A curious remark concerning the geometric transfer map // *Comm. Math. Helv.* — 1984. — Vol. 59. — Pp. 86–110.

[139] *Mather J.* Commutators of diffeomorphisms, III: a group whith is not perfect // *Comm. Math. Helv.* — 1985. — Vol. 60. — Pp. 122–124.

[140] *McCullough D.* Isometries of elliptic 3-manifolds // *J. London Math. Soc. (2).* — 2002. — Vol. 65. — Pp. 167–182.

[141] *Moise E. E.* Affine structures in 3-manifolds. IV. Piecewise linear approximations of homeomorphisms // *Ann. of Math. (2).* — 1952. — Vol. 55. — Pp. 215–222.

[142] *Montgomery D.* Finite dimensionality of certain transformation groups // *Illinois J. Math.* — 1957. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 28–35.

[143] *Montgomery D., Samelson H., Zippin L.* Singular points of a compact transformation group // *Ann. of Math.* — 1956. — Vol. 63, no. 1. — Pp. 1–9.

[144] *Morita S.* Characteristic classes of surface bundles // *BULLAMS.* — 1984. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 386–388.

[145] *M. K. Fort J.* A proof that the group of all homeomorphisms of the plane is locally arcwise connected // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1950. — Vol. 1. — Pp. 59–62.

[146] *Newhouse S. E.* Hyperbolic limit sets // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 167. — Pp. 125–150.

[147] *Newmann M. H. A.* Topology of Plain Sets of Points. — Cambridge: Cambridge Univ. press, 1964. — P. 216.

[148] *Newman M. H. A.* A theorem on periodic transformation of spaces // *Quart. J. Math., Oxford Series.* — 1931. — Vol. 2. — Pp. 1–8.

[149] *Nielsen J.* Untersuchungen zur Topologie der geschlosenen zweiseitigen Fläschen, I // *Acta Mathematica.* — 1927. — Vol. 50. — Pp. 189–358.

[150] *Nielsen J.* Untersuchungen zur Topologie der geschlosenen zweiseitigen Fläschen, II // *Acta Mathematica.* — 1929. — Vol. 53. — Pp. 1–76.

[151] *Nielsen J.* Untersuchungen zur Topologie der geschlosenen zweiseitigen Fläschen, III // *Acta Mathematica.* — 1931. — Vol. 58. — Pp. 87–167.

[152] *Palais R. S.* Homotopy theory of infinite dimensional manifolds // *Topology.* — 1966. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 1–16.

[153] *Palis J., de Melo W.* Geometric theory of dynamical systems. — Springer-Verlag, N.Y., 1982.

[154] *Palis J., Yoccoz J.-C.* Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4).* — 1989. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 99–108.

[155] *Palis J., Yoccoz J.-C.* Rigidity of centralizers of diffeomorphisms // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4).* — 1989. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 81–98.

[156] *Rubinstein J. H.* One-sided Heegaard splittings of 3-manifolds // *Pacific J. Math.* — 1978. — Vol. 76. — Pp. 185–200.

[157] *Rubinstein J. H.* On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles // *TRAMS.* — 1979. — Vol. 251. — Pp. 129–137.

[158] *Rybicki T.* The identity component of the leaf preserving diffeomorphism group is perfect // *Monatsh. Math.* — 1995. — Vol. 120, no. 3-4. — Pp. 289–305.

[159] *Rybicki T.* Commutators of homeomorphisms of a manifold // *Univ. Iagel. Acta Math.* — 1996. — Vol. 33. — Pp. 153–160.

[160] *Sanderson D. E.* Isotopy in 3-manifolds, II. Fitting homeomorphisms by isotopy // *Duke J. Math.* — 1959. — Vol. 26. — Pp. 387–396.

[161] *Sanderson D. E.* Isotopy in 3-manifolds, III. Connectivity of spaces of homeomorphisms // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1960. — Vol. 11. — Pp. 171–176.

[162] *Savada K.* On the iterations of diffeomorphisms without C^0-Ω-explosions: an example // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1980. — Vol. 79, no. 1. — Pp. 110–112.

[163] *Schreirer J., Ulam S.* Über topologische Abbildungen der euklidischen Sphären // *Fund. Math.* — 1934. — Vol. 23. — Pp. 102–118.

[164] *Scott G. P.* The space of homeomorphisms of 2-manifold // *Topology.* — 1970. — Vol. 9. — Pp. 97–109.

[165] *Seidman S. B., Childress J. A.* Topological properties of the space of homeomorphisms of n-dimensional euclidean space // *Michigan Math. J.* — 1974. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 397–402.

[166] *Singer I.* The problem of homeomorphism of separable infinite-dimensional Banach spaces // *Acad. R. P. Romîne. An. Romîno-Soviet. Ser. Mat.-Fiz. (3).* — 1958. — Vol. 12, no. 4 (27). — Pp. 5–24.

[167] *Smale S.* Diffeomorphisms of the 2-sphere // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1959. — Vol. 10. — Pp. 621–626.

[168] *Smith H. L.* On continuous representations of a square upon itself // *Ann. of Math.* — 1917. — Vol. 19. — Pp. 137–141.

[169] *Sprows D. J.* Homeotopy groups of compact 2-manifolds // *Fund. Math.* — 1975. — Vol. 90. — Pp. 99–103.
[170] *Sprows D. J.* Subhometopy groups of the 2-sphere with n holes // *Fund. Math.* — 1980. — Vol. 108. — Pp. 1–5.
[171] *Sprows D. J.* Homeotopy groups of punctured spheres with holes // *Fund. Math.* — 1983. — Vol. 115. — Pp. 207–212.
[172] *Stefan P.* Accesibility and foliations with singularities // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 1142–1145.
[173] *Stefan P.* Integrability of systems of vector fields // *J. Lond. Math. Soc.* — 1980. — Vol. 21. — Pp. 544–556.
[174] *Sussmann H. J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1973. — Vol. 180. — Pp. 171–188.
[175] *Sussmann H. J.* Orbits of families of vector fields and integrability of systems with singularities // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1973. — Vol. 79. — Pp. 197–199.
[176] *Thurston W.* Foliations and groups of diffeomorphisms // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 304–307.
[177] *Thurston W.* On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1988. — Vol. 19(2). — Pp. 417–431.
[178] *Tietze H.* Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst // *Rend. circ. Mat. Palermo.* — 1914. — Vol. 38. — Pp. 247–304.
[179] *Tondra R.* Homeotopy groups of surfaces whose boundary is the union of 1-spheres // *Fund. Math.* — 1979. — Vol. 105. — Pp. 79–85.
[180] *Toruńczyk H.* Characterizing Hilbert space topology // *Fund. Math.* — 1981. — Vol. 111. — Pp. 247–262.
[181] *Ulam S., von Neumann J.* On the group of homeomoprhisms of the surface of a sphere // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1947. — Vol. 53. — P. 506.
[182] *Veblen O.* On the deformation of an n-cell // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1917. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 654–656.
[183] *Wajnryb B.* A simple representation for the mapping class group of an orientable surface // *Israel J. Math.* — 1983. — Vol. 45. — Pp. 157–174.
[184] *Wajnryb B.* Mapping class group of a surface is generated by two elements // *Topology.* — 1996. — Vol. 35, no. 2. — Pp. 377–383.
[185] *Waldhausen F.* Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten // *Topology.* — 1967. — Vol. 6. — Pp. 505–517.

[186] *Waldhausen F.* On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // *Ann. of Math. (2).* — 1968. — Vol. 87. — Pp. 56–88.

[187] *Whittaker J. V.* On normal subgroups of differentiable homeomorphisms // *Pacif. J. Math.* — 1973. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 595–613.

[188] *Yagasaki T.* Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds // *Top. Appl.* — 2000. — Vol. 108, no. 2. — Pp. 123–136.

[189] *Yagasaki T.* The groups of PL and Lipschitz homeomorphisms of noncompact 2-manifolds // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics.* — 2003. — Vol. 51 (4). — Pp. 445–466.

[190] *Yagasaki T.* Homotopy types of diffeomorphism groups of noncompact 2-manifolds. — arXiv.math.GT/0109183.

Перечень условных обозначений

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{R}^n$	n-мерное Евклидово пространство
S^n	n-мерная сфера
T^n	n-мерный тор
Γ	Канторово множество
$C^r(M,N)$	пространство отображений класса C^r многообразия M в многообразие N
$C^r(M)$	пространство C^r функций $M \to \mathbb{R}^1$
$\mathcal{D}(M)$	группа диффеоморфизмов многообразия M
$d(x,y)$	расстояние между x и y
$\operatorname{sign} y$	знак числа y
$IntX$	внутренность множества X
$clX, \overline{X}$	замыкание множества X
$\operatorname{Fr} X$	граница множества X
∂M	край многообразия M
$\operatorname{card} X$	мощность множества X
$\omega(p)$	ω-предельное множество точки p
$\alpha(p)$	α-предельное множество точки p
$BC(f)$	центр Биркгофа отображения f
$\mathcal{C}(f)$	множество цепно-рекуррентных точек f
$\operatorname{Fix}(f)$	множество неподвижных точек f
$\operatorname{Lim}(f)$	множество предельных точек f
$\Omega(f)$	множество неблуждающих точек f
$O_f(p)$	траектория точки p под действием f
$\operatorname{Per}(f)$	множество периодических точек f
$\operatorname{Rec}(f)$	множество рекуррентных точек f
$\operatorname{Reg}(f)$	множество регулярных точек f
$W(f)$	множество блуждающих точек f
$W^s(p)$	устойчивое многообразие точки p
$W^u(p)$	неустойчивое многообразие точки p

Оглавление

Наукове видання

Власенко Ігор Юрійович
Максименко Сергій Іванович
Полулях Євген Олександрович

ТОПОЛОГІЧНІ МЕТОДИ У ВИВЧЕННІ ГРУП
ПЕРЕТВОРЕНЬ МНОГОВИДІВ

(Рос. мовою)

Комп'ютерний набір та верстка
І. Ю. Власенко, С. І. Максименко, Е. О. Полулях

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 09.10.2006. Формат 60 × 84/16. Папір тип.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 21.35. Ум. друк арк. 19.80.
Тираж 300 пр. Зам. 162.

Ін-т математики НАН України
01601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3