

Загальна топологія

Дискретні
Андрєва

Неперервні
Топологія

Сітунга

Означення (Топологія)

Нехай X - мн-на. $\tau = \{U_i\}_{i \in I}$ - сім'я підмножин X
 τ називається топологією, якщо виконані 3 умови

- ① $\emptyset, X \in \tau$
- ② Якщо $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$
- ③ Якщо $\{U_i\}_{i \in I}$ підсім'я в τ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

$\emptyset, X \in \tau$ замкнена відносно - скінченних перетинів і
- довільних об'єднань.

При цьому елементи τ називають відкритими множинами
а доповнення до них замкненими

Лема

$$U, V, W \in \tau \Rightarrow U \cap V \cap W \in \tau$$

$$\Downarrow U \cap V \in \tau, W \in \tau \Rightarrow (U \cap V) \cap W \in \tau$$

$\searrow$
 $U \cap V \cap W$

$\tau = \{U_i\}_{i \in I}$ кожне U_i - "відкриті" в топ-і τ open
кожне $X \setminus U_i$ - замкнене в топ-і τ closed

clopen

Лема

$\emptyset, X$ - відкрито-замкнені

$\Downarrow \emptyset, X$ - відкриті за Акс. 1,
 $\emptyset = X \setminus X$ ↑ відкриті
 $X = X \setminus \emptyset$ ↑ замкнені

Приклади

① $\tau = \{\emptyset, X\}$ - топологія

• $\emptyset \cup X = X \in \tau$
 $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau$

Тривіальна
антимінімальна

② $\mathcal{T} = 2^X$ - муна в X и $\mathcal{T}$ мунах и X .
 Топология дискретна топология

↓

$$A, B \in 2^X$$

$$A, B \subset X$$

$$A \cap B \subset X$$

$$\emptyset, X \subset X$$

$$A, B \subset X \Rightarrow A \cap B \subset X$$

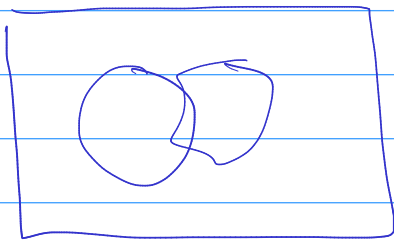
$$\{U_i\}_i \Rightarrow \cup U_i \subset X \quad \uparrow$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$2^X = \{ \emptyset, a, b, c, ab, ac, bc, abc \}$$

$$|2^X| = 2^{|X|}$$

③



$$X \supset A, B$$

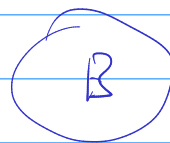
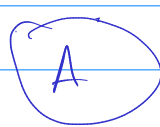
$$A \neq B$$

$$\mathcal{T} = \{ \emptyset, X, A, B \}$$

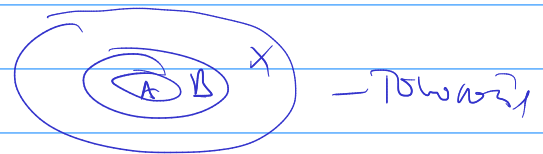
Кои $\mathcal{T}$ е топология на X ?

$$A \cup B = X$$

$$A \cap B$$



$$\{ \emptyset \subset A \subset B \subset X \}$$

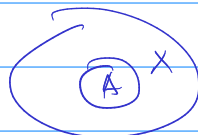


- топология

④

$$X \supset A$$

$$\mathcal{T} = \{ \emptyset, A, X \} - \text{топология}$$



Лема: $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - сума и $U_i \subset U_j$ ако $i < j$
 то $\mathcal{T} = \{ \emptyset, \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \}$ е топология

$$A \subset \mathbb{N}$$

$$A \text{ е сума } \exists n = \max A$$

$$\cup_{i \in A} U_i = U_n$$

$$\Lambda = \{ (-\infty; q) \mid q \in \mathbb{Q} \} \quad \sim \text{не топология}$$

$$(-\infty; \sqrt{2}) = \bigcup_{q < \sqrt{2}} (-\infty; q) \notin \Lambda$$

$$A \neq B \subset X$$

$$A \cap B \neq \emptyset$$

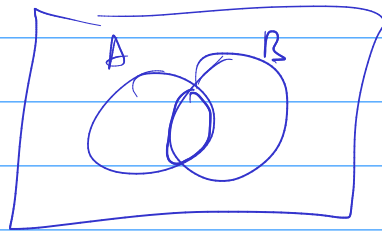
$$\tau = \{ \emptyset, A, B, X \}$$

$$A \not\subset B$$

$$A \not\supset B$$

— не топология, до тут також не вистає
як і $A \cap B, A \cup B$

$$\tau = \{ \emptyset, A \cap B, A, B, A \cup B, X \} \sim \text{топология}$$



Порівняння топологій

Означ.

Нехай $\mathcal{B}, \mathcal{T}$ — дві топології на X .

$\mathcal{B}$ — слабша від $\mathcal{T}$, якщо $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$,
тоді $\mathcal{T}$ — сильніша за $\mathcal{B}$.

Лема.

Нехай $\{\tau_j\}_{j \in J}$ — довільне сім'я топологій
на X .

Тоді перетин $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$ — це також
топология



$$\bullet \emptyset, X \in \tau_j \Rightarrow \emptyset, X \in \tau$$

$$\bullet \text{ якщо } \{U_i\} \subset \tau = \cap \tau_j \Rightarrow U = \bigcup U_i \in \tau_j \Rightarrow \Rightarrow U \in \tau.$$

$$\bullet \text{ якщо } A, B \in \tau = \cap \tau_j \Rightarrow A \cap B \in \tau_j \Rightarrow A \cap B \in \tau \quad \uparrow$$

Проблема Нехай $\mathcal{L} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$.

Чи існує топологія τ на X , така, що

$\mathcal{L} \subset \tau$,
тобто всі елементи $\mathcal{L}$ є відкритими в τ ?

$$|\emptyset, X| \subset \tau \subset 2^X$$

Нехай $\tau_{\mathcal{L}} = \bigcap \tau$ — мінімальна
топологія на X , яка
містить $\mathcal{L}$
 $\mathcal{L} \subset \tau_{\mathcal{L}} \subset 2^X$
топологія на X

$$\mathcal{L} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \quad \emptyset, X \rightarrow \mathcal{L} \quad \{A_i \cap A_j\} \cup \mathcal{L}$$

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

Лема Нехай $\bullet \mathcal{L} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — довільне сім'я підмножин
на множині $\emptyset, X$ $\mathcal{L}$ — передбачає топологію

$\bullet \mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — скінченне з'явлення $\mathcal{B}$ — база $\tau_{\mathcal{L}}$

скінченних перехідних елементів $\mathcal{L}$

$\tau = \{U_k\}_{k \in K}$ - скінченна з'біжність з
об'єктами елементів з β .

Тоді $\tau \equiv \tau_2$ - мінімальна збіжність на множині $\mathcal{L}$

$\Downarrow$

Зауважимо, що $\mathcal{L} \subset \beta \subset \tau$.

① $\emptyset, X \in \tau$ - за припущенням

② $A, B \in \tau$ $A = \bigcup_i \bigcap_{k=1}^{m_i} A_{ik}$ $B = \bigcup_j \bigcap_{l=1}^{n_j} B_{jl}$

причому $A_{ik}, B_{jl} \in \mathcal{L}$

$$A \cap B = \left(\bigcup_i \bigcap_{k=1}^{m_i} A_{ik} \right) \cap \left(\bigcup_j \bigcap_{l=1}^{n_j} B_{jl} \right) =$$

$$= \bigcup_i \bigcup_j \left(\underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{m_i} A_{ik} \right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{n_j} B_{jl} \right)}_{\in \beta} \right) \in \tau$$

$$(P \cup Q) \cap (R \cup S) = (P \cap R) \cup (P \cap S) \cup (Q \cap R) \cup (Q \cap S)$$

③ $\{U_i\}_{i \in I}$ - збіжність в τ

це збіжність

$$U_i = \bigcup_j \bigcap_{\substack{\beta \\ \uparrow}} V_{ij}$$

$$\Rightarrow \bigcup_i U_i = \bigcup_i \bigcup_j \bigcap_{\beta} V_{ij} \in \tau \quad \uparrow$$

що τ - збіжність $\Rightarrow \mathcal{L}$

$\Rightarrow \tau_2 \subset \tau$

Д/З Довести, що подібна τ - мінімальна

$$\tau \subset \tau_2 ?$$

Заму кожен перехідний β не X , тому, що $\mathcal{L} \subset \beta$
 $\Rightarrow \tau \subset \beta$

Quiz

Нехай τ - топологія на X .

① $\beta = \{U_i\}$ - сім'я підмножин в X .
Тоді β називається базисом топ. τ

якщо $\tau = \{ \text{довільних об'єднань елементів } \beta \}$

② $\alpha = \{A_i\}$ назв перебазис топології τ ,
якщо сім'я

$\beta = \{ \text{довільні скінченні перетини елементів } \alpha \}$
 $\in$ базис топології τ ,

$\{(a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q}\} \subset \{(a_i, b_i)\}$ - базис
а $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ топології

Приклад: Стандартна топологія на $\mathbb{R}$

$\tau = \{ \text{довільні об'єднання інтервалів } U(a_i, b_i) \}$
включає порожню
 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

Лема

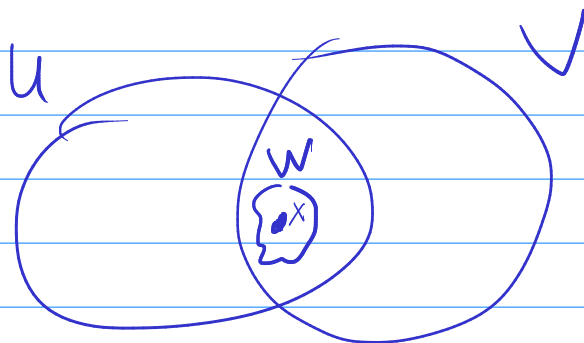
Нехай $\beta = \{U_i\}_{i \in I}$ - сім'я підмножин в X

$\tau = \{ \text{довільні об'єднання елем. } \beta \}$

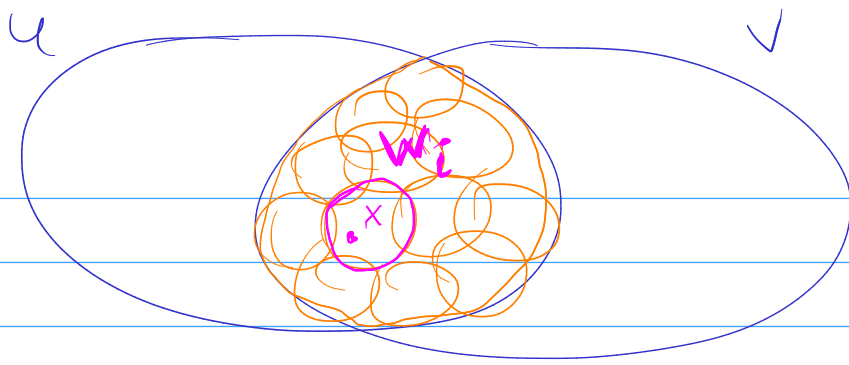
Тоді наслідний умови еквівалентні

① τ - топологія

② $\forall U, V \in \tau \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \beta: \quad x \in W \subset U \cap V$



$\Downarrow$ ① $\Rightarrow$ ② $U \cap V \in \tau \Rightarrow U \cap V = \bigcup_{i \in I} W_i \quad \forall x \in W_i \quad \exists i \in I \quad x \in W_i$
 $x \in W_i \subset U \cap V$



$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1} \quad U, V \in \tau \stackrel{?}{\Rightarrow} U \cap V \in \tau$$

$$U = \bigcup_i U_i \quad V = \bigcup_j V_j \quad U_i, V_j \in \beta$$

$$U \cap V = \bigcup_i U_i \cap \bigcup_j V_j = \bigcup_i \bigcup_j (U_i \cap V_j)$$

$$\forall x \in U_i \cap V_j \quad \exists W_{x, i, j} \in \beta : x \in W_{x, i, j} \subset U_i \cap V_j$$

$$\Rightarrow U_i \cap V_j = \bigcup_{x \in U_i \cap V_j} W_{x, i, j} \stackrel{\in \beta}{\Rightarrow} U \cap V = \bigcup_i \bigcup_j \bigcup_{x \in U_i \cap V_j} W_{x, i, j} \in \tau \quad \uparrow \uparrow$$

Пункт Если $\mathcal{L} = \{A_i\}$ - finite family замкнутых
 топологических подпространств

$$\tau = \{U \mid \text{finite union of elements of } \mathcal{L}\}$$

то верно, что β - топология?