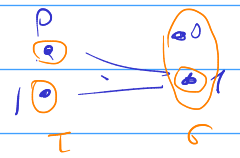


$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ - Факторне, якщо

$$B \subset Y \quad B \in \sigma \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \tau$$

$$f^{-1}(\sigma) = \tau \cap f^{-1}(2^Y) \quad \text{— якщо } f \text{ — сюр'єктивне}$$

$X = \{0, 1\} \quad \tau = 2^X \quad \sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$


$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma) \quad f(X) = \{1\}$
 f — не факторне, бо $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, але $\{0\} \notin$ біжуріву в σ
 $f^{-1}(\sigma) = \{\emptyset, X\} \equiv f^{-1}(2^Y) = \{\emptyset, X\} \quad \tau = \{\emptyset, \emptyset, 1, X\}$
 $\underline{f^{-1}(\sigma) = \tau \cap f^{-1}(2^Y)}$ f — не факторне, але
 факторне біжуріву в σ
 $f^{-1}(\sigma^c) = \{\emptyset, X\} \quad \tau^c = \tau$

$$X = \{0, 1\} \quad \tau = \sigma = 2^X \quad f(X) = \{1\}$$

$$f^{-1}(\sigma) = \{\emptyset, X\} = \tau \cap f^{-1}(2^Y)$$

але f не факторне, бо $\{0\} \in$ біжуріву в τ , але не $\in$ біжуріву в σ .

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ - Факторне, якщо

$$B \subset Y \quad B \in \sigma \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \tau$$

$$A \in \sigma^c \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \tau^c$$

$$\begin{cases} f^{-1}(\sigma) = \tau \cap f^{-1}(2^Y) \\ f^{-1}(\sigma^c) = \tau^c \cap f^{-1}(2^Y) \end{cases}$$

— якщо f — сюр'єктивне

Факторне сюр'єктивне $\xRightarrow{1}$ ін'єктивне

$$X, \tau \rightarrow Y, \sigma$$

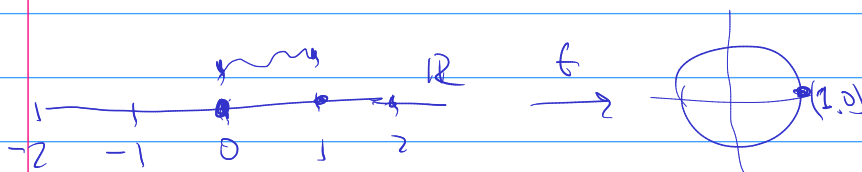
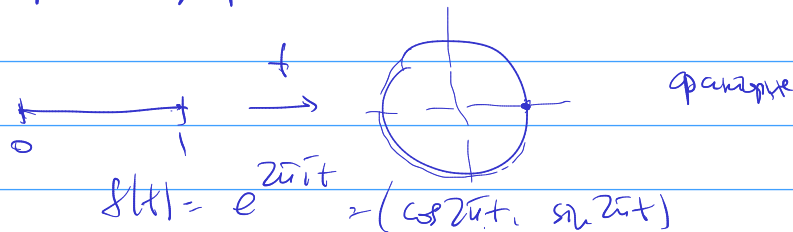


$\tau = 2^X$ — факторне, але не ін'єктивне
 $f^{-1}(\sigma) = \{\emptyset, X\}$

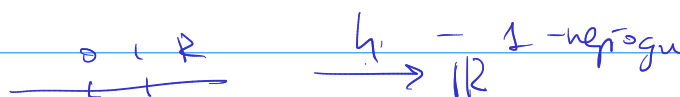
$$(X, \tau') \rightarrow (X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma) \rightarrow (Y, \sigma')$$

$\tau' > \tau$ $\sigma > \sigma'$

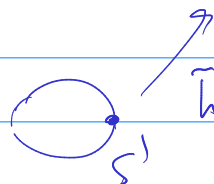
Фактори факторизация



1-непрерывность q -е $\mathbb{R}$ $h(x+1) = f(x)$



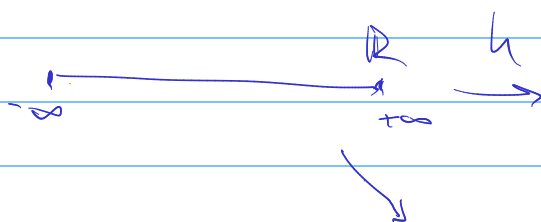
непрерывность f



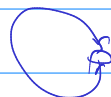
$$h(x) = \tilde{h}(e^{2\pi i x})$$

$$\text{Per}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \xrightarrow{f} C(S^1, \mathbb{R})$$

факторизация f параметр =

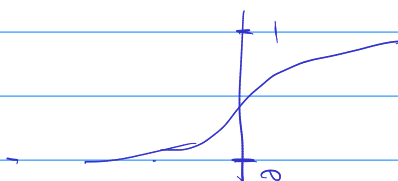


$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} h(x) = A < \infty$$



$$(\pm \infty) \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\left(\frac{1}{\pi} \arctan(x) + 1 \right) / 2} (0, 1) \xrightarrow{e^{2\pi i t}} e^{2\pi i t}$$

$-\infty \rightarrow 0$
 $+\infty \rightarrow 1$



$$\mathbb{R} \rightarrow e^{2\pi i \left(\frac{1}{\pi} \arctan(x) + 1 \right) / 2}$$

Лема

Нехай

$$(X, \tau) \xrightarrow{f} (Z, \eta)$$

визначення

$$f = h \circ g$$

$$g \searrow (Y, \zeta) \nearrow h$$

Припустимо, що g - рангове (не обов'язково сюр'єктивне)

Досі наступні умови еквівалентні

① f - неперервне

② h - неперервне

$\Downarrow$ g - рангове $\Rightarrow$ g - непер.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{не} \\ \text{пер.} \end{array} \right. \text{②} \Rightarrow \text{①} : f = h \circ g$$

① $\Rightarrow$ ② Припустимо, що f - неперервне $\checkmark$ $f = h \circ g$ ~~g - сюр'єктивне~~

Нехай $C \subset Z$ - відкрита підмнож. Попробуємо показати, що

$h^{-1}(C)$ - відкрита в Y !

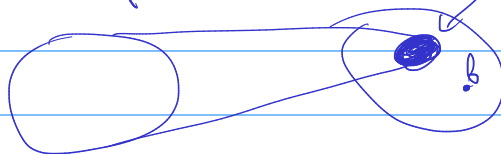
$$f = h \circ g \text{ - непер.} \Rightarrow f^{-1}(C) = (h \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}(h^{-1}(C)) \text{ - відкр. в } X$$

але оскільки g - сюр'єктивне, то $g(g^{-1}(C)) = h^{-1}(C)$

$g^{-1}(C) \in$ кільком взаємно відокремленим відкритим множинам $h^{-1}(C)$ в Y вважаючи що g сюр'єктивне $f^{-1}(C)$ - відкрита, а g - рангове то $h^{-1}(C)$ - відкрита в Y . $\Uparrow$

Нехай g - не сюр'єктивне.

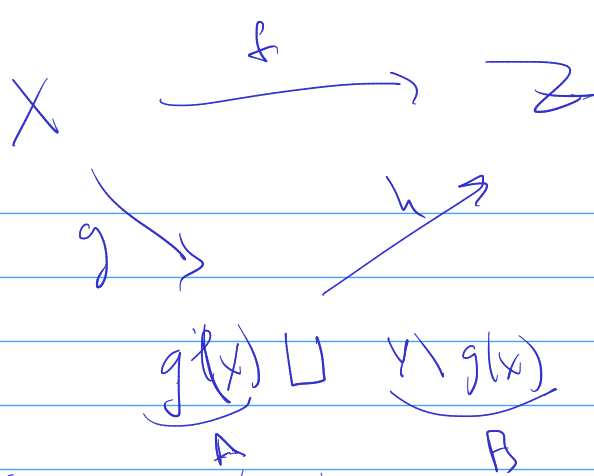
$$(X, \tau) \xrightarrow{g} (Y, \zeta) \text{ - ранг.}$$



$g^{-1}(g(x)) = X$ - відкр. і замкн. $\Rightarrow g(x)$ - відкр. і замкн.
 $\forall b \in Y \setminus \{g(x)\} \quad g^{-1}(b) = \emptyset$ - відкр. і замкн.
 $\Rightarrow \{b\}$ - відкр. і замкн.

$$Y = g(x) \sqcup Y \setminus g(x)$$

Візьмемо $(X, \tau) \longrightarrow (g(x), \sigma_{g(x)}) \leftarrow$ простіше топосі.
- рангове



Скорее f -невер. то
 z заданно

$h|_{g(X)}$ - непрерывна
 где $g(x)$ - базис-элементы
 τ B -група

Несомн $C \in \tau$ (z, y)

$$(h|_A)^{-1}(c) = A_1 = h^{-1}(c) \cap A \quad h^{-1}(c) \cap B = B_1$$

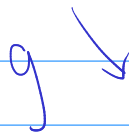
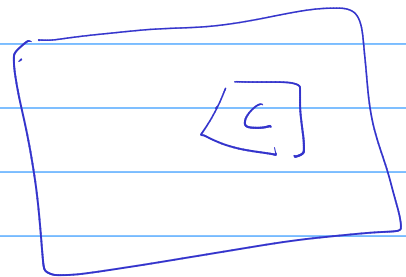
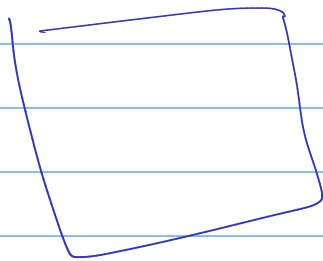
$h|_A$ - непрерывна то A_1 - базис-элементы A , A - базис-элементы Y
 $\Rightarrow A_1$ - базис-элементы Y

$$A_1 = A \cap U \in \tau$$

$B_1 = h^{-1}(c) \cap B$ - базис-элементы B то A -группа

A -замкн $\Rightarrow B$ - базис-элементы $Y \Rightarrow B_1$ - базис-элементы Y

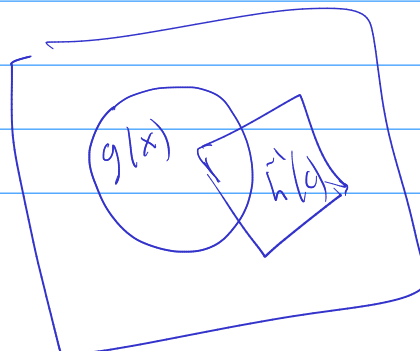
$h^{-1}(c) = A_1 \cup B_1$ - базис-элементы (Y, τ) и несомн
 топ-базис-элементы Y .



$$f^{-1}(c) = g^{-1}(h^{-1}(c))$$

$f^{-1}(c)$ - непусто множество

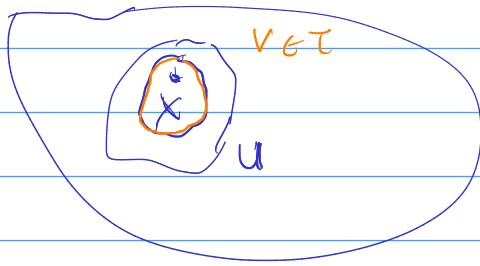
$$g(X) \cap h^{-1}(c)$$



Замкнений вузирнийсть неї і зовнішнійсть можна.

(X, τ) - топологічний простір.

Якщо $U \in \tau$ $U \in$ околом кожної своєї точки $x \in U$ визначення.

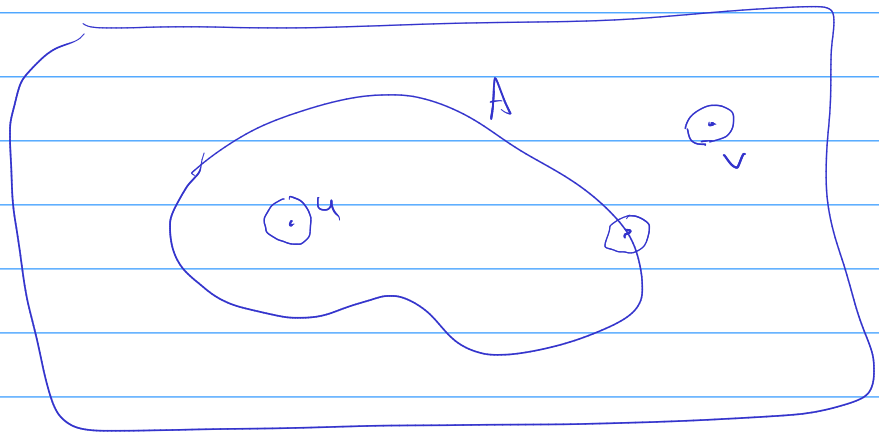


$U \in$ околом x $\Leftrightarrow x \in U$
якщо $\exists V \in \tau : x \in V \subset U$

U - замкнений одні x $\Leftrightarrow U$ - замкнений і $x \in$ околом x

$[0, 1]$ - $\in$ замкнений околом кожної точки $x \in (0, 1)$
але не $\in$ околом 0 або 1 .

(X, τ)



$x \in X$

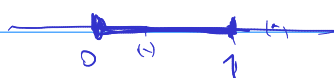
$A \subset X$

x не обов'язково належить до A .

Класифікація "поведінки" точок x по відношенню до множини A .

		x	Множина Точки x
①	$\exists$ одні $U \in \tau$ x такі, що $U \subset A$	Внутрішня	$\text{Int}(A)$
②	$\forall$ одні $W \in \tau$ x перетинає A і $X \setminus A$	Межа	$\text{Fr}(A)$
③	$\exists$ одні $V \in \tau$ x : $U \cap A = \emptyset$ $V \subset X \setminus A$	Зовнішня	$\text{Ext}(A)$

Приклад $A = [0, 1]$



$\text{Int } A = (0, 1)$

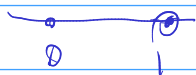
$\text{Fr } A = \{0, 1\}$

$\text{Ext } A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Замкнутость A и $\overline{A}$ не связаны

Closure $|A|$ $cl(A)$

$$X = \overbrace{\text{Int}(A) \cup \text{Fr}(A) \cup \text{Ext}(A)}$$



Примеры

$$A = [0, 1)$$

$$\text{Int } A = (0, 1)$$

$$\text{Fr}(A) = \{0, 1\}$$

$$\text{Ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$\overline{A} = [0, 1]$$

$$Q \subset \mathbb{R}$$

$$\text{Int } Q = \emptyset$$

$$\text{Fr}(Q) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ext}(Q) = \emptyset$$

$$\overline{Q} = \mathbb{R}$$

$$X, \tau = \{\emptyset, X\}$$

$$A \subset X$$

$$\text{Int } A = \emptyset$$

$$\overline{A} = X$$

$$X = \mathbb{R}$$

$$A = [0, 1]$$

$$\text{Fr } A = X$$

$$\text{Ext}(A) = \emptyset$$

$$A = \mathbb{R} = X$$

$$\text{Int } X = X$$

$$\text{Fr}(X) = \emptyset$$

$$\text{Ext}(X) = \emptyset$$

$$\overline{X} = X$$

$$X, \tau = 2^X$$

$$X = \mathbb{R}$$

$$A = [0, 1]$$

$$x \in A \cup x \notin A$$

$$\text{Int } A = A$$

$$\forall x \in A, \{x\} \in \tau$$

$$\text{Fr } A = \emptyset$$

$$\text{Ext } A = X \setminus A$$

$$\overline{A} = A$$

$$X = \mathbb{R} - \text{звучит странно}$$

$$A = [0, 1] \cup \{2\}$$



$$\text{Int}(A) = (0, 1)$$

$$\text{Fr}(A) = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$$

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \hline
 X = \text{Int}(A) \sqcup \text{Fr}(A) \sqcup \text{Ext}(A) \\
 \begin{array}{ccc}
 \text{"} & & \text{"} \\
 \text{Ext}(X \setminus A) & \sqcup & \text{Fr}(X \setminus A) \sqcup \text{Int}(X \setminus A) \\
 & & \hline
 & & X \setminus A
 \end{array}
 \end{array}$$

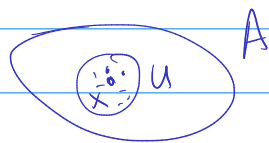
Lemma 1 $A \subset X, (X, \tau)$

- ① $\text{Int}(A)$ - біжкція
- ② $\text{Ext}(A)$ - біжкція $\text{Ext}(A) = \text{Int}(X \setminus A)$
- ③ $\text{Fr}(A) = X \setminus (\text{Int}(A) \cup \text{Ext}(A))$ - закрита
- ④ $\bar{A} = X \setminus \text{Ext}(A)$ - ^{біжкція} закрита

↓

$$\text{① } \text{Int}(A) = \left\{ x \in A \mid \exists U \in \tau: \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ U \subset A \end{array} \right\} = \bigcup_x U_x - \text{біжкція}$$

$x \in U \subset A \qquad U \subset \text{Int}(A)$



U дуже малий біжкція (біжкція) x