

Теорема (Характеризация T_4 пространств)

(X, τ) — топ. пр. то (1) — (3) эквив:

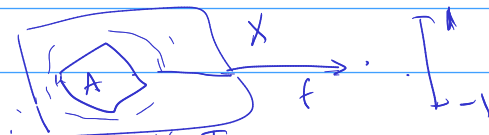
① $X - T_4 \quad \forall A, B - \text{замкнуты} \quad A \cap B = \emptyset \quad \exists U_A \cap U_B : U_A \cap U_B = \emptyset$

② $\forall A, B - \text{замк} \quad A \cap B = \emptyset \quad \exists \text{ непер. ф-е } f: X \rightarrow [0,1] : f(A) = 0 \quad f(B) = 1$

③ $\forall \text{ замк } A \subset X \quad \forall \text{ непер } f: A \rightarrow [0,1] \text{ продолжим до непер } g: X \rightarrow [0,1]$

Теорема Титуса

$\Downarrow$ ② $\Rightarrow$ ③



Лемма Неймана $\varphi: Y \rightarrow [-3a, 3a]$ — непер. ф-е где $a > 0$.
 $Y \subset X$ — замкнутая окрестность

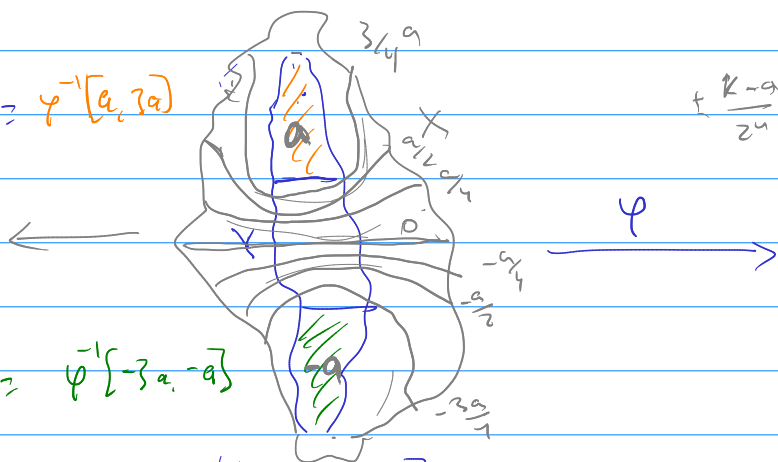
Тогда $\exists \psi: X \rightarrow [-a, a]$ такая, что $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq 2a \quad \forall x \in Y$

$\Downarrow$

$$A = \varphi^{-1}[a, 3a]$$



$$B = \varphi^{-1}[-3a, -a]$$



Тогда $\exists$ непер. ф-е $\psi: X \rightarrow [-a, a]$ $\psi(B) = -a, \psi(A) = a$

Тогда ψ — продолжением функции φ

$$x \in A \quad \varphi(x) \in [a, 3a] \quad \psi(x) = a \quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leq 3a - a = 2a$$

$$x \in B \quad \varphi(x) \in [-3a, -a] \quad \psi(x) = -a \quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leq (-a) - (-3a) = 2a$$

$$x \in Y \setminus (A \cup B) \quad \varphi(x) \in [-a, a] \quad \psi(x) \in [-a, a] \quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x)| + |\psi(x)| \leq a + a = 2a$$

$\Uparrow$

② $\Rightarrow$ ③

$$[-3a, 3a] \quad a = \frac{1}{3}$$

Лемма: $f: A \rightarrow [-1,1]$, $A \subset X$ — замкнут. Построим по условию функцию f на X
 $f: X \rightarrow [-1,1]$

Лемма $\varphi_1 = f$, $\exists$ лемма $\exists \psi_1: X \rightarrow [-a, a] = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ такая, что $|f(x) - \psi_1(x)| \leq 2a = \frac{2}{3}$ где $x \in A$

Положим $\varphi_2 = (f - \psi_1)|_A : A \rightarrow [-2a, 2a]$, тогда лемма $\exists \psi_2: X \rightarrow [-\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a]$
 такая, что $|\varphi_2(x) - \psi_2(x)| \leq \frac{4}{3}a$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - \psi_2 = f - \varphi_1 - \psi_2 : A \rightarrow [-\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a]$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{16}{27}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \varphi_n = f - \sum_{i=1}^n \varphi_i : A \rightarrow \underbrace{\left[-3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n a, 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n a\right]}_{\downarrow 0}$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$$

$$\varphi_n : X \rightarrow \underbrace{\left[-\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n a, \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n a\right]}_{\downarrow 0}$$

$\sum_{i=1}^n \varphi_i$ - рівномірна збірка на $X \rightarrow$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n : X \rightarrow [-1, 1] - \text{непер. ф-я}$$

$$(f - \varphi)|_A \equiv 0$$

тобто $f = \varphi$ на A

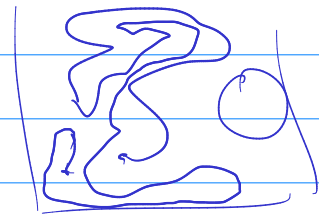
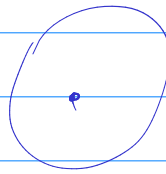
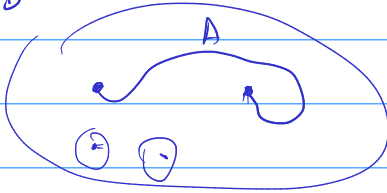
↑

Наступна

Нехай X -ТЧ простір і $A \subset X$ - замкнена вісностинна оболонка
лінійного $[0, 1]$. Тоді $A \in$ підпростору X , тобто $\exists r: X \rightarrow A$ - непер.
 $r(a) = a \quad \forall a \in A$.



$$\exists r: D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$$



↓

нехай
 $f: A \rightarrow [0, 1]$ звичайна. Тоді за ТЧТЧ f простеєє
непер. ф-ї $\hat{f}: X \rightarrow [0, 1] : \hat{f}(a) = f(a) \quad \forall a \in A$
 $r: X \rightarrow A \quad r = f^{-1} \circ \hat{f} : X \xrightarrow{\hat{f}} [0, 1] \xrightarrow{f^{-1}} A$
 $r(a) = f^{-1}(\underbrace{\hat{f}(a)}_{f(a)}) = f^{-1}(f(a)) = a.$

↑

$[0, 1] \in$ "абсолютний підпростір" где ТЧ простий

Тоді, крп A назив. абсолютним підпростором (AP) якщо
 $\forall$ вкладен $A \hookrightarrow X$ в імн ТЧ простієєє в експі
замкнені вісностині, A є підпростор X .

ANR абсолютний підпростір ABS. Neigh. Refract

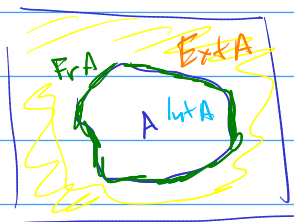
$$K = \{a, b\}$$

$$K \hookrightarrow X$$

$\exists$ оін U_K і підпростір $U_K \rightarrow K$
 X -простір

Всюди узгодні і ніде не узгодні множини.

$$A \subset X$$



$$\begin{aligned} & \text{Int } A \cup \text{Fr } A \cup \text{Ext } A \\ & \quad \quad \quad \bar{A} \\ & \text{Int } \bar{A} \cup \text{Fr } \bar{A} \cup \text{Ext } \bar{A} \\ & \quad \quad \quad \bar{X} \setminus \bar{A} = X \end{aligned}$$

Означення

$A \subset X$ ніде не узгодна.

• A ніде не узгодна, якщо $\bar{A} = X$

• A ніде не узгодна $\text{Int } \bar{A} = \emptyset$

$$\text{Int } A = \emptyset$$

якщо $x \in X$

то $x \in \bar{A}$ і $x \notin A$ ніде не узгодна

Приклади

• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ - всюди узгодна.

але $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$

• $K = \{5\} \subset \mathbb{R}$ $\bar{K} = K$ $\text{Int } \bar{K} = \emptyset$



• $K = (-2, 6) \subset \mathbb{R}$ $\bar{K} = [-2, 6] \neq \mathbb{R}$ $\text{Int } \bar{K} = (-2, 6) \neq \emptyset$

K не є всюди узгодною і не є ніде не узгодною.

Лема Нехай $A \subset (X, \tau)$ ніде не узгодна. Тоді наші умови еквівалентні.

① A - всюди узгодна $\bar{A} = X$

② $\text{Ext } A = \text{Ext } \bar{A} = X \setminus \bar{A} = \emptyset$

③ $\forall U$ - відкритої $U \cap A \neq \emptyset$

⇔ ① ⇔ ② очевидно

① ⇒ ③ Прип. що ③ не виконується.

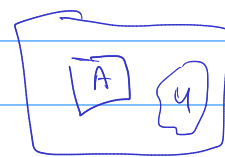
Тоді $\exists U \subset X$ відкритої, $U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \subset \text{Ext } A = X \setminus \bar{A} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \bar{A} \neq X$ тоді ① також не виконується.

③ ⇒ ① Нехай $\forall U \in \tau$ $U \cap A \neq \emptyset$

$\forall x \in X$, $\exists U$ $x \in U$ $U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

⇐



Лема Нехай $A \subset (X, \tau)$. Тоді A є всюди узгодною в $\bar{A}$.

Лема. Нехай $A \subset (X, \tau)$. Тоді унаслідок (1)-(3) еквівалентно:

- (1) A - міже не утворює $\text{Int } \bar{A} = \emptyset$
- (2) $\text{Fr } \bar{A} = \bar{A} \setminus \text{Int } \bar{A} = \bar{A}$
- (3) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{Int } \bar{A} = X$
- (4) $\forall U \neq \emptyset \subset \tau \exists V \neq \emptyset \subset U$: $V \cap A = \emptyset$
 $\Downarrow$
 $V \cap \bar{A} = \emptyset$

$$\underbrace{\text{Int } A \cup \text{Fr } A \cup \text{Ext } A}_{\bar{A}}$$

$$\underbrace{\text{Int } \bar{A} \cup \text{Fr } \bar{A} \cup \text{Ext } \bar{A}}_{\bar{A}}$$

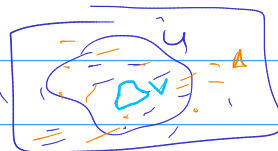
$\emptyset''$ $\overline{X \setminus A} = X$

$\Downarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

(1) $\Rightarrow$ (4) Нехай $\text{Int } \bar{A} = \emptyset$

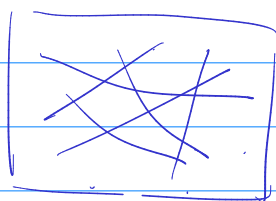
Нехай U - довільна, оскільки $\text{Int } \bar{A} = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow U$ не міститься в $\bar{A}$, $V = U \setminus \bar{A} \neq \emptyset$, але тоді V - довільна, $V \subset U$
 $V \cap \bar{A} = \emptyset$
 $U \cap (X \setminus \bar{A})$
 $\uparrow$
 довільна



(1) $\Rightarrow$ (4) Нехай $\text{Int } \bar{A} \neq \emptyset$. Розглянемо $U = \text{Int } \bar{A}$, тоді згідно (4) $\exists V \subset U$
 $V \cap \bar{A} = \emptyset$, що неможливо, бо $V \subset \bar{A}$ $\uparrow$

Приклад

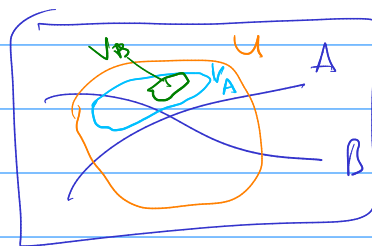


Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$ скінченне число прямих
 Тоді A - міже не утворює.

Лема. Нехай A, B - міже не утворює в X . Тоді $A \cup B$ теж міже не утворює.

$\Downarrow$ Нехай U - довільна в X . Тоді $\exists V_A \subset U$ - довільна $V_A \cap A = \emptyset$
 Тоді $\exists V_B \subset V_A : V_B \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow V_B \cap (A \cup B) = \emptyset$



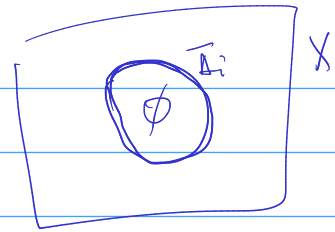
Зауваження Існують приклади, коли об'єднання зліченно множин міже не утворює множини, але жоден з них не є міже не утворює, і може бути безліччю міже не утворює.
 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Означення Тоді, якщо X називається континуальним топологічним простором, якщо $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, де $A_i \neq \emptyset$ - замкнені і міже не утворює інакше X називається континуальним топологічним простором зліченно багатьох міже не утворює.

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad A_i = \bar{A}_i - \text{замк}$$

$$G_i = X \setminus A_i = \text{открыт}, \text{взаимно непересекающиеся}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Leftrightarrow \overline{X \setminus A_i} = X \setminus \text{int } A_i = X$$



Лемма

$$A = \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad A - \text{замк и связн} \Leftrightarrow X \setminus A - \text{открыт}$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i =$$

$$\emptyset = X \setminus X = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \emptyset$$

$$C^k(X, Y) \supset C^{k+1}(X, Y) =$$

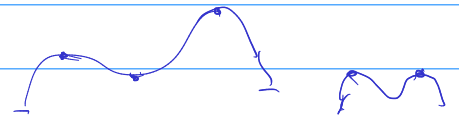
$$\supset C^\infty(X, Y) \quad \exists f \in C^\infty(X, Y)$$

$$\bigcap G_i \neq \emptyset$$

Тупиковый - связный
Граничный - открытый

$$\bigcap G_i \neq \emptyset$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad C^k$$



X - связн
(топ. связн)
- имеет открыт.

$$A \subset X$$

A связн $\Rightarrow$ "Тупиковый" открыт, следовательно A - связн и открыт $\bar{A} = X$

$A \subset X$ - связн

"открыт" 3 гранич. "открыт"

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \neq \emptyset$$

$\bar{A} = X$
 A - связн