

$\mathbb{Q}$ - раціональний числа

$\leq$ - лінійно впорядковані

або "лінійне число"

Перевір! Дефініція $\mathbb{Q}$: це підмножина $\mathbb{Q} = A \cup B$, там, що

① $A < B$ $\forall a \in A; b \in B: a < b$

② B не має найменшого елемента

Множина всіх нер. Дефініція позначити $\overline{\mathbb{R}}$

$-\infty = \emptyset \cup \mathbb{R}$ $+\infty = \mathbb{R} \cup \emptyset$

$\overline{\mathbb{R}} \setminus \{\pm \infty\} = \mathbb{R}$ - множина раціональних чисел $= A \cup B$, $A \cap B \neq \emptyset$

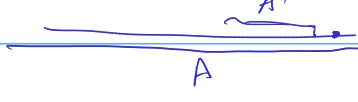
① $\exists$ "канонічне вираження" $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ $q \mapsto A_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\} \cup B_q = \{y \in \mathbb{Q} \mid q < y\}$

② Тото відрізок $\equiv$ 3 множини нерівностей $A \cup B$, $x \leq q < y$
у яких A має найбільший елемент $q \Rightarrow A = A_q$ $B = B_q$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ - ірраціонали, у яких A не має найб. елемента

③ Нехай $A \cup B \neq A' \cup B' \in \mathbb{R}$ тоді, що $A < A'$ або $A > A'$

$\Downarrow$ Припустимо, що $A \not\subset A'$ $\exists q \in A \setminus A' \Rightarrow q \in B' \Rightarrow q > A' \Rightarrow$

$A \not\subset B$  $\Rightarrow A' < q < B \Rightarrow$
 $\Rightarrow A' < \mathbb{Q} \setminus B = A$ 1

④ Наслідок з ③: На $\mathbb{R}$ $\exists$ лінійний порядок $\xi \in A \cup B$ ($\xi' \in A' \cup B'$) то $\xi < \xi' \Leftrightarrow A < A'$

$q < p$ як раціональні числа, то $A_q < A_p \Rightarrow q < p$ як дійсні числа

④.1 $-\infty < a < +\infty \forall a \in \mathbb{R}$ $\emptyset < A_a < \mathbb{R}$

⑤ Означення $X \subset \mathbb{R}$ обмежена зверху, якщо $\exists p \in \mathbb{Q} \forall y = A_y \cup B_y \in X: A_y \subset A_p$

позначити як $X \subset (-\infty; p]$

⑥ Лема, Нехай $X \subset \mathbb{R}$ - підмножина. Визначимо такі підмножини:

$(-\infty; p]$

$(p; +\infty)$

$A_X := \bigcap A_p$ $B_X = \mathbb{Q} \setminus A_X = \mathbb{Q} \setminus \bigcap A_p = \bigcup \mathbb{Q} \setminus A_p = \bigcup B_p$

$\forall y \in X: A_y \subset A_p$

$\forall y \in X: A_y \subset A_p$

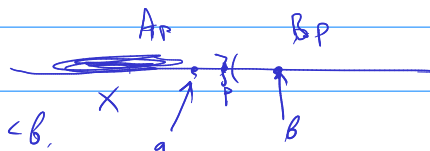
Тоді $A_X \cup B_X$ - нерозірваний Дефініція, тобто

$A_X < B_X$

B_X не має найм. елемента

$\Downarrow$

① Покажемо, що $A_X < B_X$



Нехай $a \in A_X$ $b \in B_X \Rightarrow a < b$

$b \in \bigcup B_p$

$\exists y \in X: A_y \subset A_p$

$B_y \supset B_p$

$\exists \hat{p}: b \in B_{\hat{p}} \Rightarrow$

$a \leq \hat{p} < b$

$\Rightarrow a < b$

$a \in A_X < A_{\hat{p}} \Rightarrow B_{\hat{p}} \subset B_X \Rightarrow b$

② Показано, что в B_X нет наименьшего элемента

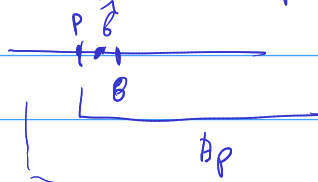
$$B_X \supseteq \bigcup B_P$$

$$\begin{array}{l} \text{If } y \in X: \quad A_y \subset A_p \\ \text{If } y \notin X: \quad A_y \supset A_p \end{array}$$

Wenn $b \in B_x$ Dann gilt $\exists \tilde{b} \in B_x : \tilde{b} < b$

Ditans, sup $b \in B_x \Rightarrow b \in B_p$ ^{pc6} : $B_p \subset B_y \quad \forall y \in X$

$$\hat{b} = \frac{p+b}{2}$$



$B_x > B_p \Rightarrow \overset{1}{b} \quad \overset{1}{b} < b$

Тогда b B_x имеет наим. значение.

Ozimek

Skizze $X \subset \mathbb{R}$

$A_X \sqcup B_X$ - пересечение называемое тоже верхней частью множеств X

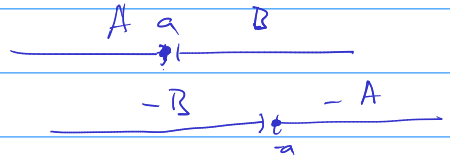
$$A_{x=2} \cap A_p$$

$\forall x: A(x) \rightarrow \exists x: A(x)$

і позначати $\delta_{\alpha} X$,

7

X - σ -u. zlozony $\Leftrightarrow A_X \cup B_X = +\infty = \mathbb{R} \cup \emptyset$



Будем считать $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Heur $\dot{x}_2$ A LB

$$\varphi(x) = \begin{cases} -B \sqcup -A \\ -(B \cup \{a\}) \sqcup -(A \setminus \{a\}) \end{cases}$$

Skoro A не имеет наибольшего элемента, то

ΣΚΥΟ Α κατ κεντρ. επιμ. α

$\varphi(x)$ — ~~измерено~~ — ~~*~~

$$A_k = (-\infty, x] \cup (-\infty, x+y]$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\delta_a} \mathbb{R}$$

$$X \supseteq A_x \cup B_x$$

$$y \models A_y \sqcup B_y$$

$$x < x'$$

$$y < y'$$

$$x+y \geq (A_x + A_y) \cup (B_x + B_y)$$

період Держави

$$xty < xty'$$

Om.

$$X \subset \mathbb{R} \quad \inf X = - \sup (-X)$$

Поиск минимума графа X

$$\sup(\emptyset) = \emptyset \sqcup \mathbb{R} = -\infty$$

$$\inf(\emptyset) = -\sup(\emptyset) = -(-\infty) = +\infty$$



Теорема

⇓

Вспомогательная $I = [0, 1]$ — замкнутый топ. интервал

Примутся, что $I = A \cup B$ — разложение отрезка A, B — фигуры
поэтому делаем, что если $A \neq \emptyset$ то $B = \emptyset$

Можно вложить, что $0 \in A$ покажем, что $A = I$ и $B = \emptyset$

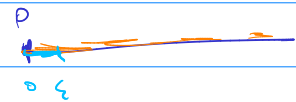
Поскольку $0 \in A$ и A — фигура, то $\exists \varepsilon > 0 : [0, \varepsilon) \subset A$

Рассмотрим такую совокупность:

$$[0, \varepsilon_2] \subset [0, \varepsilon) \subset A$$

$$X = \{t \in [0, 1] \mid [0, t] \subset A\}$$

Поскольку делаем, что $X = [0, 1] \subset A = I$



$\exists q = \sup X \quad \forall y \in [0, q) : [0, y] \subset A$, Заметим, что $q \geq 0$
Покажем, что $q = 1 \Rightarrow X = I = A$

Примутся, что $q < 1$

$$[0 < q - \varepsilon, q + \varepsilon < 1]$$

• Если мы не знаем, что $q \in A$ и B ?

• Если $q \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (q - \varepsilon, q + \varepsilon) \subset A \Rightarrow [0, q + \varepsilon/2] \subset A$ —
те утверждение верно, что $q = \sup X$

Тогда $q \in B$

примутся, что $q \in B$

Покажем: $q \notin B$. Поскольку B — фигура, то $\exists \varepsilon > 0 : (q - \varepsilon, q + \varepsilon) \subset B$,

тогда если $[0, q - \varepsilon/2] \cap B = \emptyset$ тогда $[0, q - \varepsilon/2]$ не имеет в A
те утверждение верно $q = \sup X = \sup \{t \mid [0, t] \subset A\} \Rightarrow [0, t] \cap B = \emptyset$

Тогда $q \notin A \cup B = I$ что невозможно, $\Rightarrow q = 1$ ↑

Таким образом $q = 1 \Rightarrow [0, 1] \subset A$. Поскольку $q \notin B \Rightarrow 1 \in A$

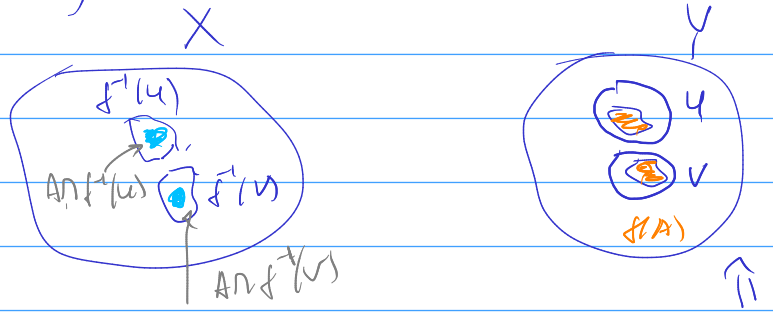
$$\Rightarrow [0, 1] \subset A$$

Лема

Несколько $f: X \rightarrow Y$ - непрерывные. $\bar{A} \subset X$ - замкнутая окрестность

Тогда $f(A)$ - замкнуто (в Y)

↓



Определение

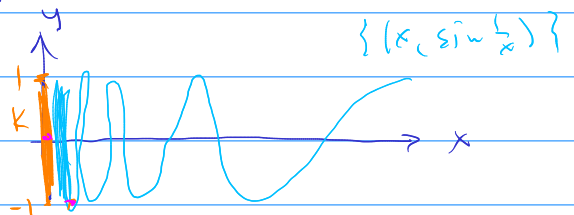
Топ. пространство X называется замкнутым, если $\forall x, y \in X$
 $\exists$ непрерывное отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ $\gamma(0) = x$ $\gamma(1) = y$
 или $x \sim y$

Наследствие

Линейно замкнутые пространство X - замкнуто
 ↓ $\forall x, y \in X$ накрывающая замкнутая окрестность $\gamma([0, 1])$ ↑

Компактность замкнуто $\nRightarrow$ линейно замкнуто

$$X = [0, 1] \cup \sin \frac{1}{x}$$



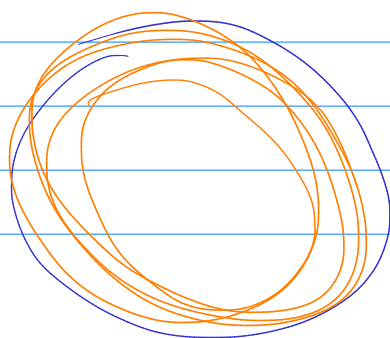
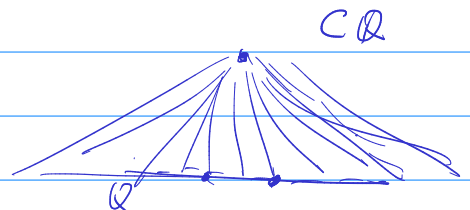
Задача: доказать, что X - замкнуто, но не линейно замкнуто.

$$e^{\sin \frac{1}{2n}}$$

Псевдометрика $d_n(x, y) = |x - y|$

100

$$|\sin(1000000 \cdot n + 5)|$$



(линейно)
 локально замкнуто
 компактно
 не замкнуто