

Компаксність

Означення

Топол. простір (X, τ) - назив. компактним, якщо

• $\forall$ відкритого покриття $\{U_i\}_{i \in I}$ простору X $\exists$ скінченне підпокриття

$$\left. \begin{array}{l} - \{U_i\}_{i \in I} \quad U_i \in \tau - \text{відкриті в } X \\ - X = \bigcup_{i \in I} U_i \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{ скінченне змн. } U_1, \dots, U_n : i_j \in I \\ X \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

Приклад 1

Нехай (X, τ) - скінченний простір, тоді X - скінченне множина
Тоді X - компактним

$$\Downarrow \quad X = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \mathcal{L} = \{U_i\}_{i \in I} \quad \text{котре } x_k \in U_{i_k} \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \quad \Uparrow$$

$$\tau - \text{скінченне сім'я} \subset 2^X$$

Приклад 2

(X, τ) τ - скінченне сім'я $\Rightarrow (X, \tau)$ - компактним

Приклад 3

(X, τ) - τ - топологія Заріського $\tau = \{ \emptyset, U \subset X \mid |X \setminus U| < \infty \}$
Тоді (X, τ) - компактним

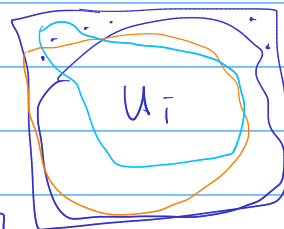
$\Downarrow$

$$\mathcal{L} = \{U_i\}_{i \in I}$$

Нехай $U_0 \in \mathcal{L}$ - найбільш елемент $\mathcal{L}$

Тоді, оскільки U_0 - відкрита, то $X \setminus U_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\forall x_i \exists U_i \in \mathcal{L} \quad x_i \in U_i \Rightarrow X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n \quad \Uparrow$$



Означення

Нехай $\mathcal{L} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ - послідовність точок.

$\alpha: \mathbb{N} \rightarrow X$ - те просто $\forall$ грає $\mathbb{N} \rightarrow X$

Скажемо, що $\mathcal{L}$ - збігається до $x \in X$.

Якщо $\forall$ оточу U т. x $\exists N > 0 : \{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \subset U$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$$

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad U_n = [n, \infty] = \{n, n+1, \dots\} \cup \{\infty\} - \text{хвіст}$$

$$\beta = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad U_n \cap U_m = U_{\max\{n, m\}}$$

$\beta \cup 2^{\overline{\mathbb{N}}}$ - база генері топології на $\overline{\mathbb{N}}$ - компактний τ .

Лема

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{u\}$ - бигүрүчү

Ошондо ∞ нуктуу үчүн $U_n \cup \infty$ айрым мүнөзү

$(\bar{N}, \tau)$

Лема $f: N \rightarrow X$ - көчүрүлбөс $\bar{f}(\infty) \in X$.

Топу нукт. үчүн ачык.

① f зыясызга ∞ $\lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = \infty$

② бигүрүчү

$$\bar{f}: \bar{N} \rightarrow X \quad \bar{f}(i) = \begin{cases} f(i) & i \in N \\ \infty & i = \infty \end{cases} \quad \bar{f}(i) = f(i) \quad \bar{f}(\infty) = \infty$$

$\dots \rightarrow \infty \rightarrow \dots \rightarrow \infty \rightarrow \dots$

$\Downarrow$ ① $\Rightarrow$ ② f - бигүрүчү мүнөзү.

$\bullet$ эг. $x \notin U \quad \bar{f}^{-1}(U) \subset N \quad \bar{f}^{-1}(U) \in \tau$

э. $x \in U \Rightarrow \exists N > 0 \quad \bar{f}(U_N) = \{N, N+1, \dots, \infty\} \subset U$

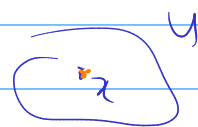
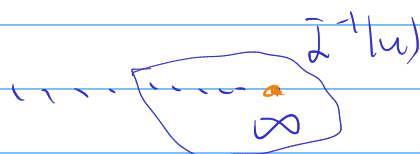
$\bar{f}^{-1}(U) = U_N \cup Q$ - бигүрүчү $\bar{N}$

$Q \subset \bar{N} \setminus U_N = \{1, \dots, N-1\}$

$\Leftarrow$ бигүрүчү $\bar{N}$

② $\Rightarrow$ ① f - көчүрүлбөс. $\bar{f}$ - $\forall$ бигүрүчү U x

Топу $\bar{f}^{-1}(U)$ - бигүрүчү мүнөзү. э. мүнөзү ∞



Ошондо $\bar{f}^{-1}(U)$ - бигүрүчү ∞ , $\forall \exists N > 0$

$U_N \subset \bar{f}^{-1}(U)$ $\bar{f}(U_N) \subset U$

$x_N, x_{N+1}, \dots$

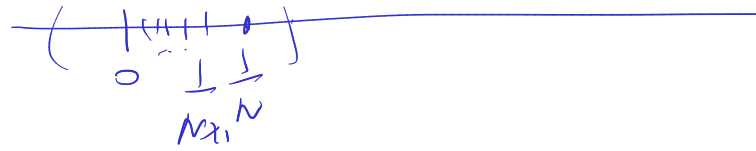
Ошондо f - зыясызга ∞ τ - x .

Лема $\varphi: \bar{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(n) = \frac{1}{n} \quad \varphi(\infty) = 0$

$\frac{0}{\text{point}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$\varphi(\bar{N}) = K = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$

Добегити, φ -
токуу көчүрүлбөс $\bar{N}$ на K .



$= N \cup \infty$

Лема

(N, τ) — компактний топос.

↓

Нехай $\gamma = \{U_i\}_{i \in \lambda}$ Тоді $\exists U_0 : \infty \in U_0$.

Обираємо U_0 -близькість то $\exists N > 0 : U_N \subset U_0$
 $\{N; N+1; \dots; \infty\} \subset U_0$

$\forall i = 1, \dots, N-1 \quad \exists U_i \in \gamma : i \in U_i$

$N = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{N-1}$

↑

Приклад

$N, \tau = 2^N$ Чи буде $(N, 2^N)$ — компактним?

Ні!

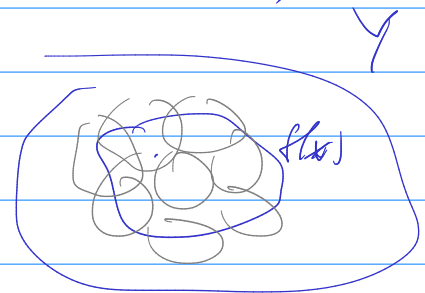
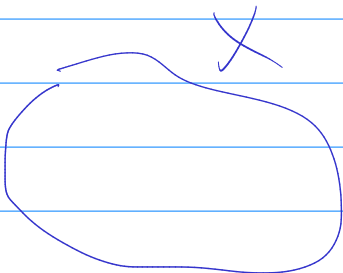
$\gamma = \{ \{i\} \}_{i \in N}$ — зліченна близькість покриття N
 але не можна знайти кінцеву близькість

Раніше компакт називали бікомпактним
 компакт — раундсгайр бікомпакт.

Лема

Нехай $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ — неперервне відображення
 Якщо X — компакт то $f(X)$ теж компакт. (в
 інтуїтивній топології)

↓



↓

Нехай $\gamma = \{V_i\}_{i \in \lambda}$ — близькість покриття $f(X)$

$V_i \in \sigma$

$\cup V_i \supset f(X)$

$V_i \cap f(X)$

Потрібно знайти скінченне множ $V_1 \dots V_n$:
 $f(x) \in V_1 \cup \dots \cup V_n$

$U_i = f^{-1}(V_i)$ - бігуні множини в X

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = X \Rightarrow \exists \text{ } X\text{-конт.} \quad U_1 = f^{-1}(V_1) \dots$$

$$U_n = f^{-1}(V_n)$$

а тоді $f(x) \in V_1 \cup \dots \cup V_n$ $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$

↑↑

Теорема. $I = [0, 1]$ є компактним (в інтегр. топ. $\mathbb{R}$)

↓

Нехай $\gamma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - бігуні покриття I .

$\exists U_0 : 0 \in U_0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad [0, \varepsilon) \subset U_0 \Rightarrow [0, \frac{\varepsilon}{2}]$ - покриття U_0
 $\varepsilon/2 \in A \quad \sup A > 0$

Нехай $A \subset [0, 1]$:

$A = \{t \in [0, 1] : \text{бігуні } [0, t] \text{ покриваються скінченною множиною елементів } \gamma\}$

Треба довести, $\sup A = 1$



Нехай $a = \sup A$ і припустимо, що $a < 1$

Тоді $\exists V \in \gamma : a \in V \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$

Тоді $[0, a - \frac{\varepsilon}{2}]$ - покривається скінченною множиною елементів γ
 $U_1 \dots U_k$

але тоді $[0, a + \frac{\varepsilon}{2}] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup V$ - скінченна множ

$\Rightarrow a = \sup A \geq a + \frac{\varepsilon}{2}$ - суперлише. Тоді $a = 1$

↑↑

Лема 5 Нехай (X, τ) -компакт і $F \subset X$ - замкнена множина

Тоді F - компактна

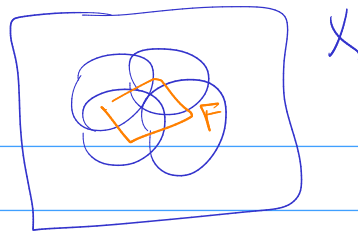
↓

Нехай $\gamma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - бігуні покриття F

$U_i \in \tau \quad F \subset U_i$ - Потрібно знайти скінченну

нижележащая F

$\hat{\gamma} = \gamma \cup \{X \setminus F\}$ -
большая топология X



Тогда $\exists$ такая мера $\mu = \{U_1, \dots, U_n\}$:

$$X \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$$

Если $X \setminus F \in \beta$, то $X \setminus F = U_n$ тогда $F \subset U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$
Если $X \setminus F \notin \beta$ то $U_i \in \gamma$ $F \subset X \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$ $\square$

Пример

$$I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$$

K - замкнутая подм. в $I \Rightarrow$ компактна

"
 $\overline{K}$

Лемма 6 Если X - топологическое пространство, $F \subset X$ - компактное
замкнутое. Тогда F - замкнутое.

$\Downarrow$

Покажем, что $U = X \setminus F$ - открыта.

Пусть $U = \bigcup U_i$, где

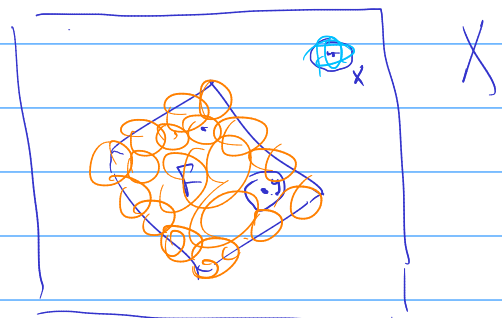
$\forall x \in U \exists$ открытая окр. V_x

$$V_x \subset U = X \setminus F$$

Фиксируем $x \in U$.

$\forall y \in F \exists$ такая U_y $\begin{matrix} U_y \\ y \in y \end{matrix}$ $\begin{matrix} V_{x,y} \\ x \in x,y \end{matrix}$

$\gamma = \{U_y\}_{y \in F}$ - большая топология F



$$U_y \cap V_{x,y} = \emptyset$$

Поскольку F - компакт то $\exists$ такая нижележащая

$$U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} \supset F$$

$$V_x = \bigcap_{i=1}^n V_{x,y_i}$$

$$U_F = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$$

$\uparrow$
 V_x - біжж. ан x

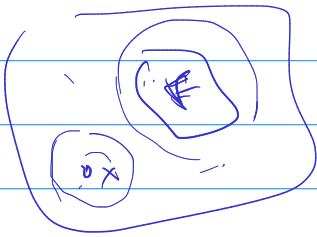
$\uparrow$
 U_F - біжж. ан F

$$V_x \cap U_F = \emptyset$$

Задана $V_x \subset U$.

$\uparrow$

$\exists X - T_2$ ан $u \in T_3$



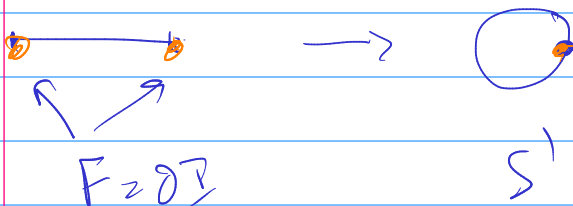
Нам $X - T_2$ ан $F \subset X$ изолирует

$$X/F = \{F\}, \{x \mid x \notin F\}$$

$$X \xrightarrow{p} X/F - \text{пространство}$$

$$x \rightarrow [x]$$

Т.е. $X/F - T_2$



Лемма ① Если X - ком. топос. протоп.

$F \subset X$ - топос. Тогда F -замкн. $\Leftrightarrow F$ -компакт

• F -замкн. по за лемме $\delta \Rightarrow F$ -компакт
(X -компакт)



• F -компакт за лемме $\delta' \Rightarrow F$ -замкн.
(X -топос. протоп.)

② X - ком. протоп.

Для $f: X \rightarrow Y$ - непрерывн. функц. и Y - топос. протоп.
то f -замкн. (за лемме факт.)



$F \subset X$ - замкн. $\Rightarrow F$ -ком. $\Rightarrow f(F)$ -ком.
 $\Rightarrow f(X)$ -замкн. в Y .
 Y -топос.



(X, τ)

$\tau' \subset \tau \subset \tau''$ - топос.

Для τ -компактн. $\Rightarrow \tau'$ -ком.

$\text{id}: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ - непрерывн.

Для τ -топос. протоп. $\Rightarrow \tau''$ -топос. протоп.

Лемма Если τ, τ' - топос. протоп. топос. на X
то $\tau \subset \tau'$.

Тогда $\tau = \tau'$.



$\tau \subset \tau' \Leftrightarrow \text{id}: (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ - непрерывн.

$\Rightarrow \text{id}$ -замкн. $\Rightarrow \text{id}$ -гомеоморфизм

за лемме

$\Rightarrow \tau = \tau'$



Лемма

$\Downarrow$

Несколько X, Y - топологические пространства.

Пусть $X \times Y$ - компакт.

Несколько $\mathcal{U} = \{U_i\}$ - базис топологии на $X \times Y$

Несколько $x \in X$ Пусть $x \times Y$

Несколько $y \in Y$ $(x, y) \in U_{xy} \in \mathcal{U}$

То есть

$\exists V_{x,y} W_y : V_{x,y} \times W_y \subset U_{xy} \in \mathcal{U}$

$\{W_y\}_{y \in Y}$ - покрытие $Y \Rightarrow \exists$ конечно много W_{y_i}

$$W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n} = Y$$

$$V_x = \bigcap_{i=1}^n V_{x,y_i} \Rightarrow V_x \times Y \subset U_{x,y_1} \cup \dots \cup U_{x,y_n}$$

$\forall x \in X \exists$ окр. V_x

Таким образом, $V_x \times Y$ покрывается конечно много элементов $\mathcal{U}$

$\{V_x\}_{x \in X}$ - базис топологии на X

$$\exists V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m} = X$$

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \times Y$$

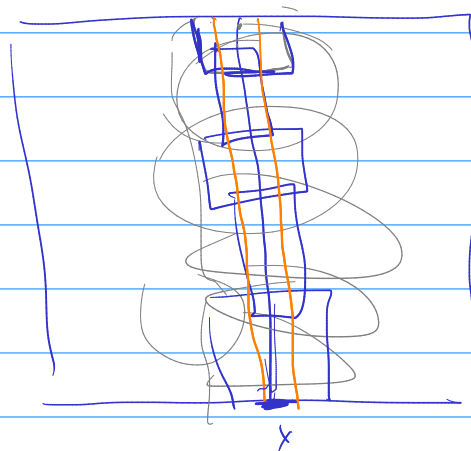
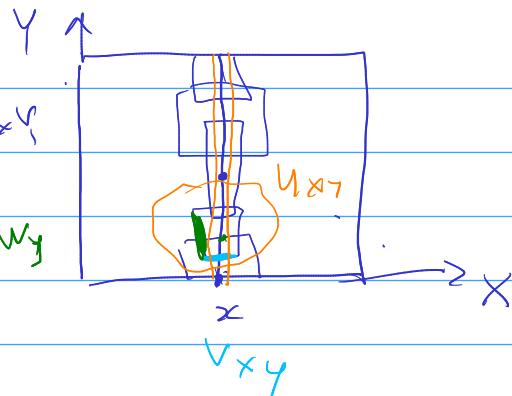
покрывающее $X \times Y$

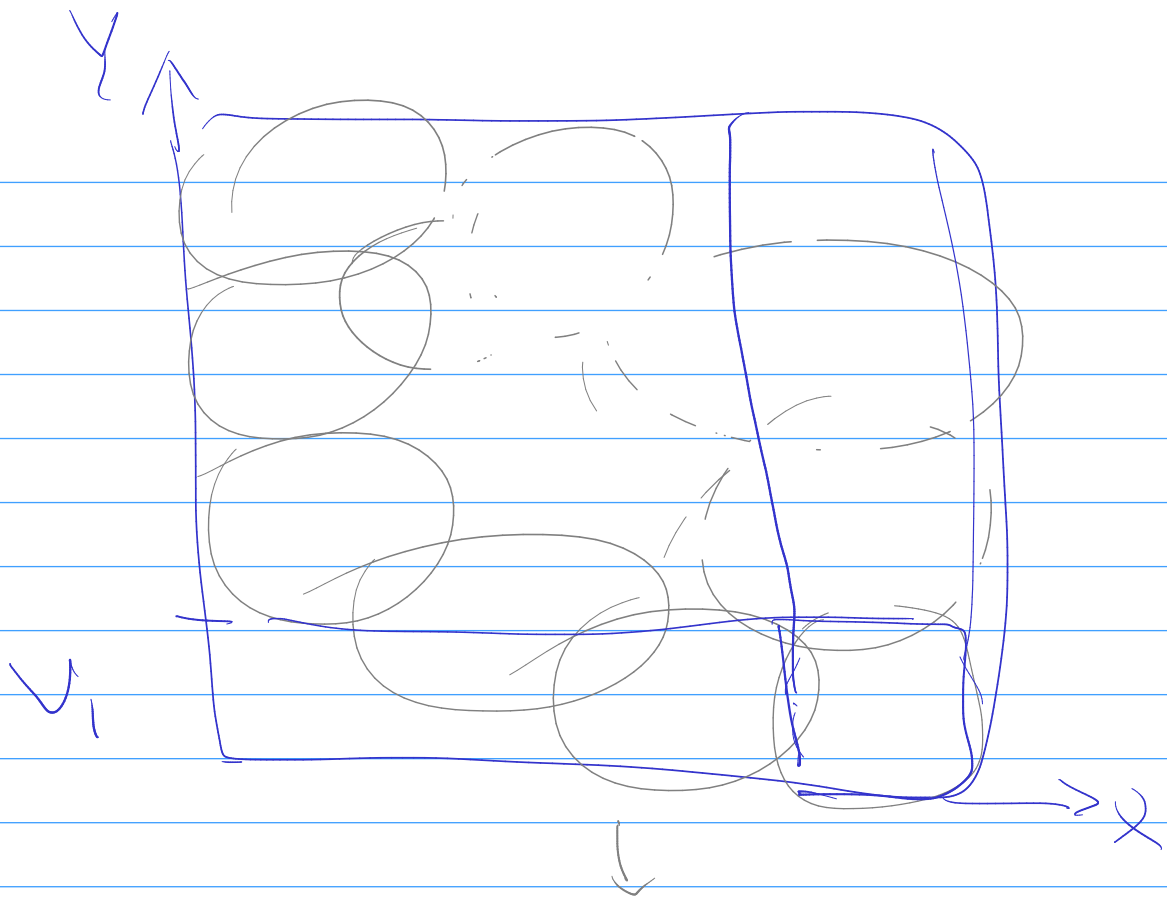
много элементов $\mathcal{U}$

$\Rightarrow X \times Y$ компактно.

Следствие: если X компактно, а Y - топологическое пространство, то $X \times Y$ компактно.

$\Uparrow$





Лемма $I^n = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ — ограниченная
в $\mathbb{R}^n$
компакт.

Теорема

$A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная

① A — компактна

② A замкнута и ограничена.

То же ① $\Leftrightarrow$ ②

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}$$

A осн.

$$A \subset \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i] - \text{ком}$$

$$A\text{-замк} \Rightarrow A\text{-ком}$$

$$\overline{\textcircled{2}} \Rightarrow \overline{\textcircled{1}}$$

$$A \text{ неосн} \Rightarrow A\text{-не замк.}$$