

Означення

$X$  - компактний, якщо  $\forall$  біграте покриття  $X$   
 $\mathcal{L} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$  :  $U_i$  - біграти  $\cup U_i = X$   
містить скінченне підпокриття.

Скін. покриття дов. замкнуто  $[0,1]$   $x_1, x_2, \dots, x_n$   
Замкнені підмножини компактів  
Замкнені підмножини  $\mathbb{R}^n$   
 $\subseteq [-A, A]^n$

Означення

В термінах замкнених множин.

$\mathcal{L} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$  - біграте покриття

$$X \supseteq \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$$

$\mathcal{F} = \{F_i \subseteq X \setminus U_i\}_{i \in \Lambda}$  - замкнені підмножини.

$$\bigcap_{i \in \Lambda} F_i = \emptyset$$

$X$  - компакт:

$\exists$  скін. покриття  $U_1, \dots, U_n$   
 $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$

$X$  - компакт:  $\exists$  скін. покриття  $F_1, \dots, F_n = \emptyset$   
 $F_1 \cap \dots \cap F_n = \emptyset$

Лема

Сімейство множин  $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \Lambda}$  - замкнене, якщо  $\forall F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$   
 $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$

Лема

$X$  - компакт  $\Leftrightarrow \forall$  замкнене сімейство множин має непорожній перетин

$\Downarrow$  ...

$\Uparrow$

Приклад

$F_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$   $F_1 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \dots$

"Аксиома"

$\forall$  сімейство замкнених відрізків  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$   
має непорожній перетин

Теорема Вейєрштраса-Вейєрштраса

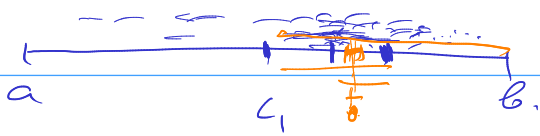
Нехай  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  - обмежена послідовність на  $\mathbb{R}$   
 $\{a_n\} \subseteq [a, b]$  тоді  $a_n$  має границю точки  $x$   
пер.

Границя

$\varepsilon > 0$  знай  $\{a_n\}$   $\textcircled{1}$   $\forall$  деякій  $U_x$   $\forall N > 0 \exists a_n : n > N$   
 $a_n \in U_x$

...  $\textcircled{2}$

②  $\exists$  монотонная  $\{a_n\} \rightarrow x$ , где  $x$  — заданное  $x$



Теорема Гейне-Вейерштрасса  $[0, 1]$  — компактно

$\Downarrow$  Вектор  $T_i$  и  $T$ -образная — непрерывна

Если  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U(a_i, b_i) \supset [0, 1]$ , то есть,  $\exists$  конечное покрытие  $[0, 1]$

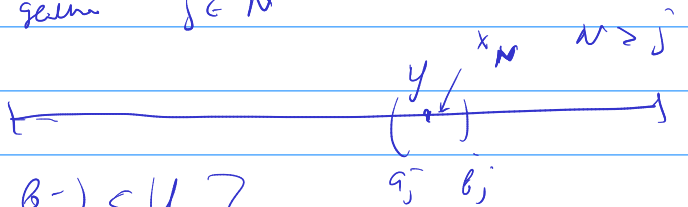
Если  $\otimes$  не верно. Попробуем:  $U_k = \bigcup_{i=1}^k U(a_i, b_i)$

Поскольку  $U_k \not\supset [0, 1]$  для  $\exists x_i \in [0, 1] \setminus U_k$

В результате открытого покрытия

$\{x_i\}_i \subset [0, 1] \Rightarrow \exists$  граница  $T$   $y \in [0, 1]$   
за  $T$  —  $b_i, T$

Аналогично  $y \in (a_j, b_j)$  где  $j \in \mathbb{N}$



Поскольку  $\exists N > j$  :  $x_N \in (a_j, b_j) \subset U_N$   
 $\exists$  такое  $x_N \in [0, 1] \setminus U_N$  — contradiction

$\mathbb{R}$  имеет закрытый шары  $(a_j, b_j)$   $a_j = b_j \in \mathbb{Q}$   
 $a_j < b_j$

$\{(a_i, b_i)\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_{i_j}, b_{i_j})$

$\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  — неограничен

замкнуто  $\Rightarrow$   $\{(a_{i_j}, b_{i_j})\}$

$\exists$  система счетной  $\{a_i\} \rightarrow \kappa$

$\forall$  одна  $\tau$ -х имеет все члены  $a_i$  хотя бы  
 одно место

то  $\tau$ -х можно "гнать" значением места кривой

$\exists$  система счетной  $\beta$  такая, где каждый элемент  
 является некоторым базисом

$(X, \tau)$   $\beta_x = \{U_i\}$  - счетная система  $\tau$ -х имеет  
 локальное базис в  $\tau$ -х  
 $\forall$  элемент  $\forall \tau$ -х  $(x \in V \in \tau) \quad \exists U_i \in \beta : x \in U_i \subset V$

$\mathbb{R}$   $\beta_0 = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  - базис около 0 в  $\tau$   $0 \in \mathbb{R}$

Означения Аксиомы связности

- Первая аксиома связности  $\sup \forall x \in X$  имеет связный локальный базис
- Другая аксиома  $X$  имеет связный базис

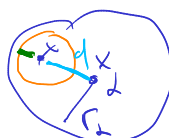
Прим  $(X, d)$  - метрический пространство.  $\tau$  - топология порождена метрикой.  
 $\beta = \{ B_r(x) \mid r > 0, r \in \mathbb{Q}, x \in X \}$  - базис  
 $\{U_i \mid d(x, y) < r\}$  ...

Лемма  $(X, d)$  - задано 1-ую аксиому связности

$\beta_x = \{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \}$  - локальный базис в  $\tau$   $x \in X$

Несомненно  $V$  - базисом одной  $\tau$ -х  $x \in V \in \tau$  

тогда  $\forall x \in \bigcup_{\lambda} B_{r_\lambda}(x_\lambda)$  тогда  $x \in B_{r_2}(x_2)$  где  $r_2 < \lambda$



$$d(x, x_2) = d < r_2$$

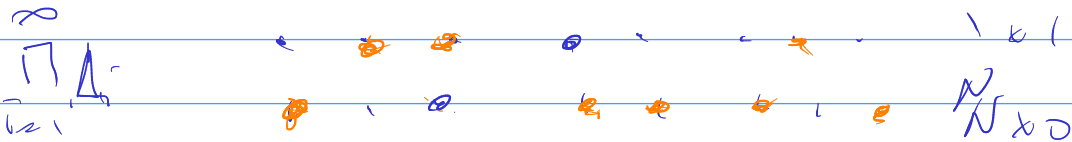
Несколько  $q \cdot \frac{1}{n} \subset \underbrace{r_2 - d}$

выс  $B_q(x) \subset B_{r_2}(x_2) \subset V$   
 $\uparrow$

Пример

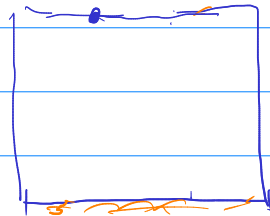
$I = [0, 1]$   $A = \{0, 1\}$  — граница отрезка

$X = \prod_{t \in [0, 1]} A_t$  — Покрытие отрезка гомотопией



$N \rightarrow \{0, 1\}$

$X = \prod_{t \in [0, 1]} A_t$



$I \rightarrow \{0, 1\}$



Вид сгруппировано  
(не непрерывно!)

$I \rightarrow \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$

$1+1 \geq 0+0 \geq 0$   
 $0+1 = 1+0 = 1$

Таким образом, топология в  $X$

$U_i$  — базис

$U^0 = \prod_{t \neq t_0} A_t \times \{0\}$

$U^1 = \prod_{t \neq t_0} A_t \times \{1\}$

универсальное  
множество  
непрерывности

Лемма Неск  $\{a_i\} \in X$  — последовательность.

для заданного  $x \in X$ . Тогда

$a_i = x$  где  $\forall i$  достаточно велико  $i$



$X$  — группа

$X \rightarrow X$  — автоморфизм

базисное покрытие

$y \rightarrow y - x$

$x \rightarrow (0 \dots 0 - 1)$

Можно было считать, что  $x = (0 \dots 0)$

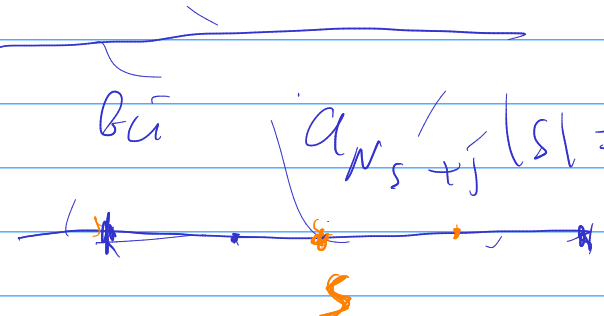
$\forall$  для  $\tau$   $x$  можно было считать  
 $\{a_i\}$  нормирован и имеет конечную

$$s \in I \quad U_s^0 - \text{открыт } x = (0 \dots 0) \\
\parallel \\
0 \times \prod_{t \neq s} A_t$$

$$\exists N_s \quad \underbrace{a'_{N_s+j}}_{\substack{\in U_s^0 \\ \forall j \geq 0}}$$

$$a_{N_s+j} : I \rightarrow \{0,1\} \quad a_{N_s+j}(s) = 0$$

$\forall s \in I \quad \exists N_s$  но для  $a_{N_s+j}(s) = 0$



$$I \supset \underbrace{B_N}_{B_{N+1}} = \left\{ s \mid a_{N+j}(s) = 0 \quad j \geq 0 \right\}$$

Нехай  $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$  - сім'я топологічних просторів.

$\prod_{i \in \Lambda} X_i$   $j \in \Lambda$  "узагальнений множина"

$j \in \Lambda \quad \forall i \in j \quad U_i \in \tau_i$

$$C_j(\{U_i\}) = \prod_{i \in j} U_i \times \prod_{i \in \Lambda \setminus j} X_i =$$

$$p: \prod_{i \in \Lambda} X_i \rightarrow \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j$$

$$C_j(\{U_i\}) = p^{-1} \left( \prod_{i \in j} U_i \right)$$

$\beta = \{ C_j(\{U_i\}) \mid j \in \Lambda - \text{сінтезна підмножина} \}$

$\mathcal{L} = \{ C_j(U_i) \mid j \in \Lambda \}$

Лема  $\mathcal{L}$  - перегрид  $\beta$  - сім'я сім'ї просторів на  $X = \prod_{i \in \Lambda} X_i$

Тухоліська теорема

$$C_j(\{U_i\}) \cap C_k(\{V_i\}) = C_j(\{U_i \cap V_i\})$$

$$C_j(\{U_i\}) \cap C_k(\{V_i\}) =$$

$$C_{j \cup k} \left( U_i \cap \bigcap_{k \in k \setminus j} X_k \right) =$$

Теорема Тухолі  $\forall$  сім'ї топологічних просторів

$$\{X_i\}_{i \in \Lambda} \quad \prod_{i \in \Lambda} X_i \text{ - є компактним}$$

Висновок Аксиому вибору  $\Rightarrow$

T-критерій - T-Тухолі  $\Rightarrow$  аксіома вибору

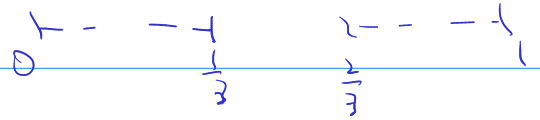
$$A = \{0, 1\}$$

↑ группа  $\pi_0$

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

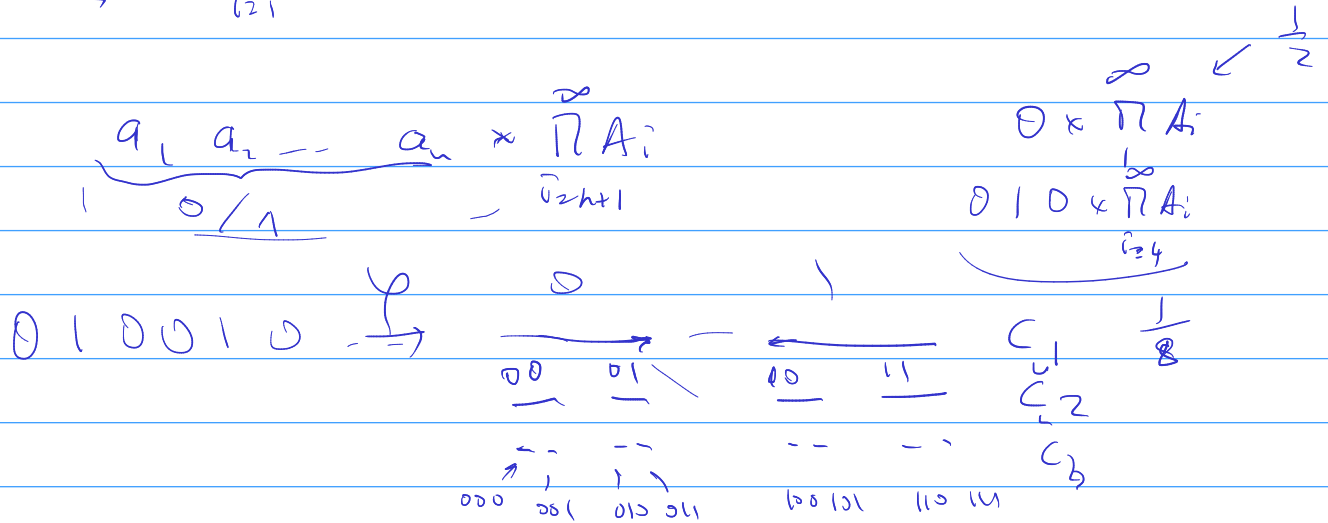
$$\{0, 1\}$$

Канторовское множество  $C$



Вспомогательное  $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$  в топологии прямого произведения  $C$ .

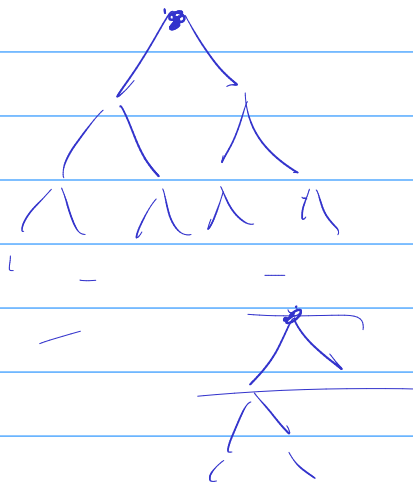
↓



Каждая последовательность  $\{0, 1, \dots\} \rightarrow$  бесконечная последовательность цифр  $0$  и  $1$ .  
 $\gamma$  - сечение  
 обратным образом  $\rightarrow 0$   
 и так далее.

$$x = 0.1010\dots$$

$2.x \dots \rightarrow 0.2020\dots$  - тогда в  $\{0, 1\}$  модели  
 не существует



-----

