

Локално компактні простори. Компактифікація. Кінці простору.

X - компактний, якщо $\forall$ відкрите покриття $\{U_i\}_{i \in I}$ існує скінченне підпокриття

X локально компактний якщо

① $\forall x \in X \ \forall$ околу $U_x \ \exists V \subset U_x$ V -компактний околу x

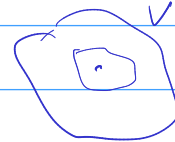
$$x \in \text{int} V \subset V \subset U_x$$

компактний

$\forall x$ має базу з компактних оточень

② $\forall x \in X \ \exists$ комп. оточ. V $x \in \text{int} V$

③ $\forall x \in X \ \exists$ базу оточень з компактними замиканнями



$$\forall x \ \exists V \quad x \in \text{int} V \subset \overline{V} \subset U$$

Лема X - хаусдорфів то ① $\Leftrightarrow$ ② - достатньо

① $\Rightarrow$ ② - очевидно

② $\Rightarrow$ ① $x \in X \ \exists$ комп. оточ. T $x \in \text{int} T$

U -добір відкритих оточень x

$W \subset U \cap \text{int} T$ - відкрит оточ. x

$$x \in W' : \overline{W'} \subset W \subset U \cap \text{int} T$$

замкн. підмнож. компактної $V \Rightarrow \overline{W'}$ -компактний



тоді $\overline{W'}$ - комп. оточ. x : $x \in \text{int} \overline{W'} \subset \overline{W'} \subset U$

Приклад $X = \mathbb{R}^n$ - хаусд., $\mathbb{R}^n$ локально компактний



$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists$ відк. мара $B_r(x)$ щоб $\overline{B_{r'}(x)} \subset B_r(x)$ $r' < r$

Лема Нехай X - хаусдорфів і локально компактний. Тоді $\forall$ відкритий підпростір $U \subset X$ існує база компактних оточень T $x \in U$, то

$\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ - база комп. оточень T $x \in U$, то

$\mathcal{B}_U = \{B_i \mid B_i \subset U\}$ - база оточень T $x \in U$

(не обов'язково хаусдорфів)

Наслідок $\forall$ множини X локально компактний

L

Прямая $\mathbb{R}$ с гомеоморфизмом

$$\textcircled{1} \mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim \text{ где } (x, 0) \sim (x, 1) \text{ если } x \neq 0$$

Склеиваем 2 копии $\mathbb{R}$ по тождеству $\text{id}_{\mathbb{R}}$ в точке 0. Получаем

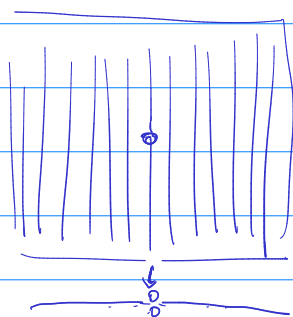
$\textcircled{2} (\mathbb{R}, \tau)$ - топология на $\mathbb{R}$ с $\bar{0}$ точка, $0 \notin \mathbb{R}$

$$L = \mathbb{R} \cup \{\bar{0}\}$$

$$\tau = \tau \cup \{ (U \setminus \{0\}) \cup \{\bar{0}\} \mid U \in \tau : 0 \in U \}$$



$\textcircled{3}$



$\mathbb{R}^2$

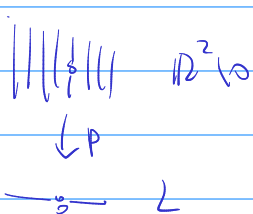
$\mathcal{F} = \{x \times \mathbb{R}\}$ - семейство "вертикалей" на евклидовой плоскости

$\mathcal{F}_L = \mathcal{F} / \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ - семейство на компактном пространстве $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim$, $\omega \in \mathcal{F}$

$$L = \mathbb{R}^2 / \mathcal{F}_L$$

Лемма
 $\Downarrow$

L - T_1 пространство, где не T_2 , кроме того L - компактно хаусдорфово в силу утверждения $\textcircled{1}$



Несомненно $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{p} L$ - график непрерывности

то есть $\forall x \in L \ p^{-1}(x)$ - не пусто $\mathcal{F}_L$ и имеет замкнутое множество в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Очевидно p - сюръекция, но $\{0\}$ - замкнуто $\Rightarrow L \neq T_2$.

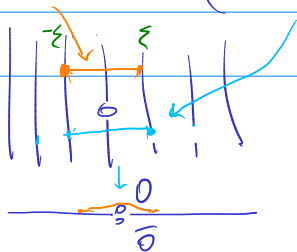


$\exists$ такое $\delta > 0$ $\forall$ $U \ni 0$ и $\bar{0} \in U$ - не выполняются $\Rightarrow L$ не T_2 - пространство.

$$[-\varepsilon, \varepsilon]$$

$([-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}) \cup \{\bar{0}\}$ - компакт на непрерывном образе

(компактно) непрерывно



$$[-\varepsilon, \varepsilon] \times \{1\}$$

$$[-\varepsilon, \varepsilon] \times \{-1\}$$

$$p([-\varepsilon, \varepsilon] \times \{1\}) =$$

$$= p([-\varepsilon, \varepsilon] \times \{1\}) \cup \{\bar{0}\}$$

$K \subset \mathbb{R}^2$ — замкнута и ограничена $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus K$ — открыта — 2-связна



$$\exists \mathbb{R}^2 \setminus K = \{ \text{компонент составляющих } (\mathbb{R}^2 \setminus K) \cap \omega \mid \omega \in \mathcal{F} \}$$

(|||||)



$$\hat{X} \xrightarrow{f} Y, \quad y \leftarrow \{y_i\}$$

$f^{-1}(y) \quad f^{-1}(y_i)$

Замкнута компактность (метрическая топология) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

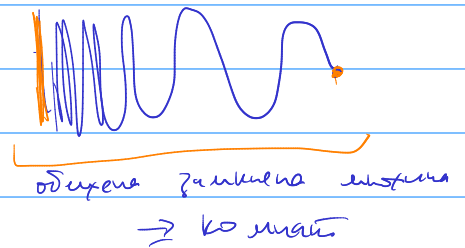
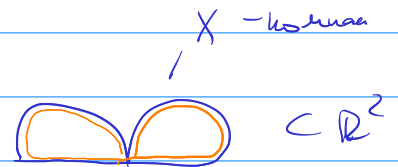
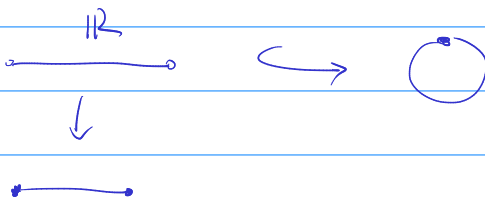
Задача компактификации:

то — непрерывное инъективное отображение

Несомненно A — топ. пространство. Значит вложение $f: A \rightarrow X$ в

пространство компактно, т.е. $f(\overline{A}) = X$

тогда $f(A)$ — плотное подпространство в X .



«Максимальная» компактификация — компактификация Гейла-Зейделя
топ. пространство X βX

$C(X, [0,1])$ — множество всех непрерыв. ф-ий в $[0,1]$

$Y = \prod_{\alpha \in C(X, [0,1])} [0,1]_\alpha$ — компакт (за теоремой Тихонова)

$\exists$ б-гомор. $X \xrightarrow{\varphi} Y \quad x \rightarrow \{ \chi(x) \}$

Припустимо, що $\forall x \neq y \in X \exists$ непер. ф-я $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) \neq \alpha(y)$
(наприклад $X = T_1 + T_4 =$ "кордановий")

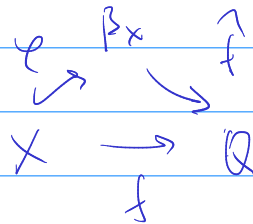
Возьмемо φ - ін'єктивне
(?) функц., за якою φ - гомеоморфізм на образ

$\beta_x := \overline{\varphi(x)}$ - замкнена підмножина Y (гаусс. комм.)

$\Rightarrow \beta_x$ - комм. і $\varphi(x)$ - його член в $\beta_x \ni \varphi(x)$

Характеризація β_x

$\forall$ комм. Q і непер. відкр. $f: X \rightarrow Q$
 $\exists!$ відкр. $\hat{f}: \beta_x \rightarrow Q$, таке, що має місце комм. діаграма



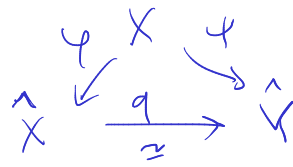
$\beta_x \setminus \varphi(x)$ - корена

"Мінімальна" комматизація. Александрова

Теорема X - локально комм., Гаусдорфові протір.
Тоді $\exists$ топ. протір. $\hat{X}$ і відкрите вбижжє $\varphi: X \hookrightarrow \hat{X}$ такі, що

- ① $\hat{X}$ - Гаусдорфові комм.
- ② $\hat{X} \setminus \varphi(x)$ - одне точка
- ③ $\overline{\varphi(x)} = \hat{X}$ φ - "комматизація" X

Якщо $\varphi: X \hookrightarrow \hat{Y}$ відкрите вбижжє в Гаусдорф. комм. $\hat{Y}$, таке, що $\hat{Y} \setminus X$ - одне точка, то $\exists!$ гомеоморфізм $q: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ такі, що



"(гипотеза) о непрерывности
конечных отображений"

$$\hat{X} = \varphi(x) \cup \{a\}$$

$$\hat{Y} = \varphi(x) \cup \{b\}$$

$$q|_{\varphi(x)}: \varphi(x) \rightarrow \varphi(x) = \varphi \circ \varphi^{-1}$$

$$q(a) = b$$

$$\hat{X} \setminus \varphi(x) = \{a\}$$

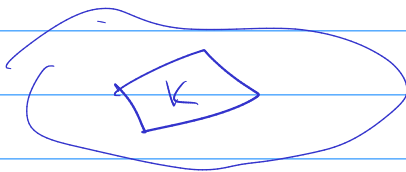
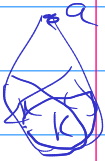
"непрерывность"

↓. Пусть a - любое число, $a \notin X$, τ - топология на X
 $\hat{X} = X \cup \{a\}$

σ - самая минимальная в $\hat{X}$ топология такая!

$$\sigma = \tau \cup \left\{ (X \setminus K) \cup \{a\} \mid \text{где } K - \text{открытый компакт} \right\}$$

$K \subset X$



$K \subset X$ - компакт, X - хаусдорф $\Rightarrow K$ - замкнут
 $\Rightarrow X \setminus K$ - открытое множество

① σ - топология на $\hat{X}$

пересечение

$$u, v \in \sigma$$

$$\bullet u, v \in \tau \Rightarrow u \cap v \in \tau \subset \sigma$$

$$\bullet u \in \tau, v = (X \setminus K) \cup \{a\} \in \sigma$$

$$u \cap v = u \cap (X \setminus K) \in \tau \subset \sigma$$

$$\bullet u = (X \setminus K) \cup \{a\}, v = (X \setminus L) \cup \{a\}, K, L - \text{компакты}$$

$$u \cap v = X \setminus (K \cup L) \cup \{a\} \in \sigma.$$

← компакт

объединение

$$\gamma = \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \sigma$$

$$\gamma_1 = \{u_1\} \subset \tau$$

$$\gamma_2 = \{(X \setminus K_i) \cup \{a\}\}_{i \in \mathbb{N}}$$

K_i - компакт

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\bigcup u_i = \bigcup \gamma_1 \cup \bigcup \gamma_2$$

$$\bullet \bigcup \gamma_1 = \bigcup u_1 = u \in \tau$$

$$\cup \delta_2 = \bigcup_{\beta} [(X \setminus K_{\beta}) \cup \{a\}] = X \setminus \bigcap_{\beta} K_{\beta} \cup \{a\} = (X \setminus K) \cup \{a\}$$

$$\cup \delta_1 \cup \cup \delta_2 = U \cup (X \setminus K) \cup \{a\} =$$

$$\{a\} \cup \underbrace{X \setminus (X \setminus K) \cup X \setminus K}_{\text{компл}} = X \setminus ((X \setminus K) \cap K) \cup \{a\}$$

$\uparrow$
 $\in \sigma$
 компл

$$\boxed{\emptyset} \in \tau$$

$$\hat{X} = X \cup \{a\} = (X \setminus \emptyset) \cup \{a\} \in \sigma$$

$\uparrow$
 компл

Отже σ -топологія на $\hat{X}$.

② $\hat{X}$ - компакт!

Нехай $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - безперервна покриття $\hat{X}$

$$\exists U_i : a \in U_i \text{ або } U_i = (X \setminus K) \cup \{a\}$$

$$K \subset \hat{X} \quad \exists \text{ чим менше } U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$$

$$K \subset \bigcup_{q \in \mathbb{N}} U_{i_q}$$

$$\hat{X} \subset U_0 \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

③ $\hat{X}$ - рахунковий

$$\bullet x, y \in X \Rightarrow \text{отже } X\text{-рахунок } \exists U_x \cap U_y = \emptyset$$

$\bullet a, x \in X$ отже X - рахунок, то

$$\exists \text{ компл отже } \bigvee \tau = x$$

$$x \in \text{int } V \subset \bigvee = \overline{V}$$

$\uparrow$
 компл

$$\text{int } V \quad (X \setminus V) \cup \{a\} - \text{це густинний отримок}$$

$$\tau = x \quad \tau = a$$

④

$$\psi: X \hookrightarrow X \sqcup \{a\} = \hat{X}$$

Несомненно $\psi: X \hookrightarrow \hat{Y}$ - непрерывное отображение

$$\hat{Y} - \text{компакт} \quad \psi(X) = \hat{Y} \quad \hat{Y} \setminus \psi(X) = \{b\}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{q} & Y = \psi(X) \cup \{b\} \end{array}$$

$$q: \hat{X} \rightarrow Y \quad q|_{\psi(X)} = \psi \circ \psi^{-1}(x) \\ q(a) = b$$

Покажем, что q - непрерывное отображение непрерывности в τ - q

Несомненно V - непрерывно открыт τ - b

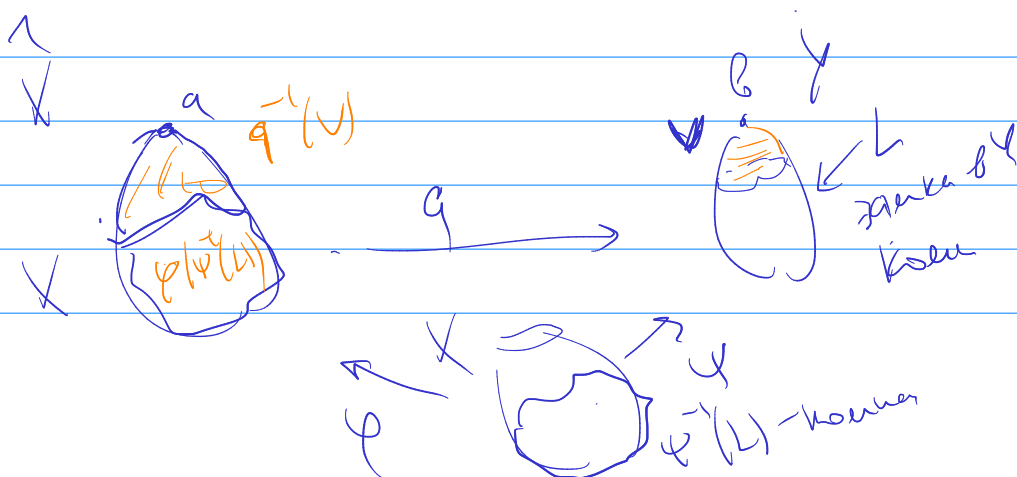
Покажем, что $q^{-1}(V)$ - непрерывно открыт в $\hat{X}$

$L = Y \setminus V$ - замкнутое множество в топологической компактной Y
 $\Rightarrow L$ - компакт. $\Rightarrow \psi^{-1}(L)$ - компакт в X , до

$$q^{-1}(V) = \hat{X} \setminus \psi^{-1}(L) \cup \{a\}$$

ψ - непрерывно открыт
не образ

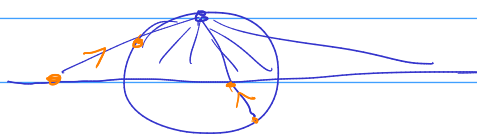
$$q^{-1}(V) = q^{-1}(Y \setminus L) = \hat{X} \setminus \underbrace{q^{-1}(L)}_{\psi^{-1}(L)} = a \cup \hat{X} \setminus \psi^{-1}(L)$$



Примеры

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} S^1 \quad (\text{сгруппировать окружность})^{-1}$$

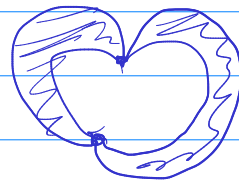
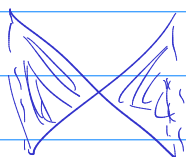
Гомеоморфизм компакта
 $S^1 \setminus \varphi(\mathbb{R})$ — одно связно



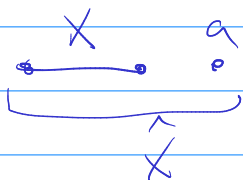
S^1 — компактификация
 Александры
 (з. связности компакта)

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \cup 0$$

$\mathbb{R}^n$ — односвязно компактно $\mathbb{R}^n \rightarrow S^n$

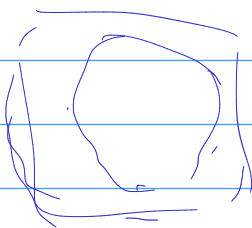


X — гомеоморфизм компакта то $\hat{X} = X \sqcup \{a\}$



X — метризуемо $\{a\}$ — точка
 $\{a\} = (X \setminus X) \cup \{a\}$

Кінці топологічного простору



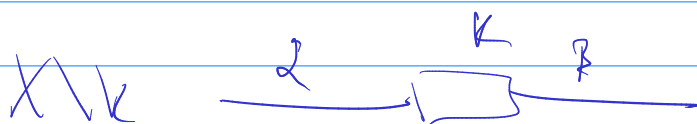
Нерви X -топ. простір

$X \setminus K$ - k -компонентна підмножина

$\pi_0 X \setminus K$ - множина компонент $X \setminus K$ (підмножин)

$K \subset L$ - компакт
 $X \setminus K \supset X \setminus L$

$$\pi_0(X \setminus K) \xleftarrow{i_0} \pi_0(X \setminus L)$$



$$A \xrightarrow{f} B$$



$$\pi_0(X \setminus L) \rightarrow \pi_0(X \setminus K)$$

$$\{\gamma, \delta, \epsilon\} \rightarrow \{\alpha, \beta\}$$

$$\gamma, \delta \rightarrow \alpha$$

$$\epsilon \rightarrow \beta$$

$$\gamma \subset \alpha$$

$$\delta \subset \alpha$$

$$\epsilon \subset \beta$$

A -комп. зв'язок $X \setminus L$, γ баче місце в

$X \setminus K$, а зв'язок в генері комп. зв'язу β

множини $X \setminus K$. Тоді $i_0(A) \supset B$.

L

~~_____~~

i_{KL}

K

$K \subset L$

$\varinjlim_{K \subset L}$

$$\pi_0(X/K) \longleftarrow \pi_0(X/L)$$

$$Y := \varprojlim_{\substack{K \subset X \\ \text{compact}}} \pi_0(X/K)$$

$$\prod_{\substack{K \subset X \\ \text{compact}}} \pi_0(X/K) \supset Y = \{a_k\}$$

$$K \subset L$$

$$i_{KL}(a_k) = a_L$$