

$$\prod_{i \in A} X_i$$

$$U_i \times \dots \times U_n \times \prod_{i \in A \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} X_i$$

$$\prod_{i \in I} \{0, 1\}$$

$$\{0, 1\}$$

$$+ \quad - \quad - \quad -$$

$$\prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{p_j^{-1}} (x_j, \tau_j)$$

$$\tau = \{p_i^{-1}(\tau_i)\}$$

$$U_j \times \prod_{i \neq j} X_i \quad U_j \in \tau$$

$$(U_j \times \prod_{i \neq j} X_i) \cap (U_k \times \prod_{i \neq k} X_i) = U_j \times U_k \times \prod_{i \neq j, k} X_i$$

Топологія на просторах неперервних відображень.
Експоненціальний закон.

$$(X, \tau), (Y, \varsigma)$$

$C(X, Y)$ — мн-ва всіх непер. відобр-х. $X \rightarrow Y$

- компактно відкрита
- сильна або поточна топологія

$$N(K, U) = \{h \in C(X, Y) \mid h(K) \subset U\}$$

$K \subset X$ — компактна, $U \subset Y$ — відкрита

$$\beta = \{N(K, U) \mid K \subset X \text{ компактна}, U \subset Y \text{ відкрита}\}$$

τ — топологія породжена β . (ли через базис)

$$\tau = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} N(K_i, U_{ji})$$

$$\{h: X \rightarrow Y \mid h(K_i) \subset U_{ji}\}$$

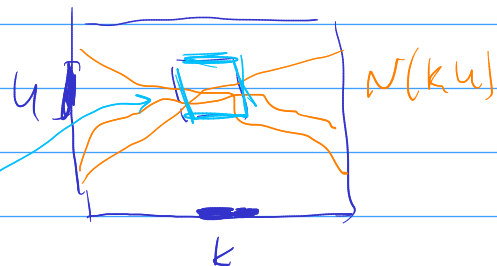
компактно відкрита
топологія на $C(X, Y)$

Примеры Кесар $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$
 $C([0,1], \mathbb{R})$

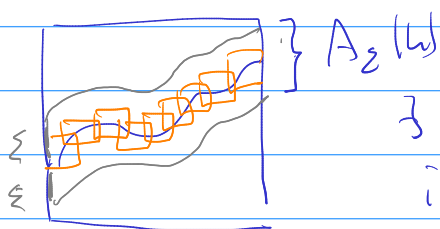


$$N(k, U) = \{h \mid h(k) \in U\}$$

записати $h \in N(k, U)$ означає
 значення h є U



$h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $A_\varepsilon(h) = \{g \mid |g(x) - h(x)| < \varepsilon\}$ - ε -окіл h
 в рівномірній топології



$\exists$ скінченне число бігінтів $k_1, \dots, k_n$
 і бігінт інтервалів $U_1, \dots, U_n$

$$\Gamma_h \subset \bigcup_{i=1}^n K_i \times U_i \subset A_\varepsilon(h)$$

$$h \in \bigcap_{i=1}^n N(k_i, U_i) \subset A_\varepsilon(h)$$

$\forall$ оскільки $A_\varepsilon(h)$ в рівномірній топ. на $C([0,1], \mathbb{R})$ $\exists$

оцінка $\eta = \bigcap_{i=1}^n N(k_i, U_i)$ в ком. бігінт топ. на $C([0,1], \mathbb{R})$

$$\text{Тоді } \exists h \in \mathcal{U} \subset A_\varepsilon(h)$$

Т. Вейерштрасса Кесар X -компакт і $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ - непер. ф-я

$$\text{Тоді } \exists \bar{x}, \bar{y} \in X \text{ такі, що } f(\bar{x}) = \min_{x \in X} f(x) \quad f(\bar{y}) = \max_{x \in X} f(x)$$

$\Downarrow$ $A = f(X) \subset \mathbb{R}$, A -компакт $\Leftrightarrow A$ -замкнене і обмежене

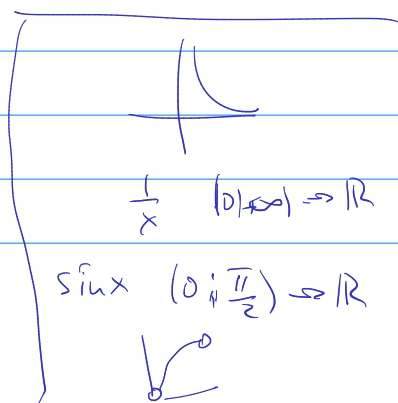
$$m = \inf A \quad M = \sup A \quad m, M \in A$$

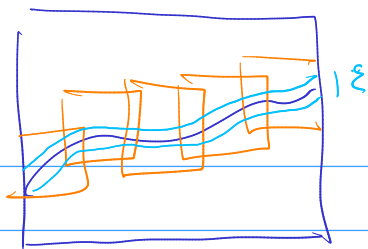
якщо A -замкнене

$$\text{Тоді } \exists x, y \in X:$$

$$f(x) = m$$

$$f(y) = M$$





Набравши $\forall \{K_i, U_i\}$

$$① \bigcup K_i = [0,1]$$

$$② \Gamma_h \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \times U_i$$

$\exists \varepsilon > 0$!

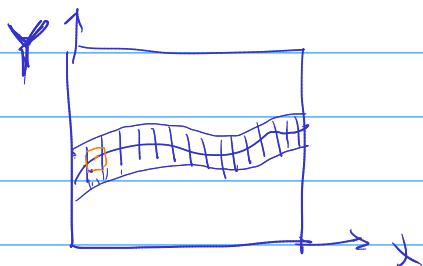
$$h \in \mathcal{F}_\varepsilon(h) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N(K_i, U_i)$$

Давем лему: Компактно бігнута топологія в $C([0,1], \mathbb{R})$ тоді ж рівноцінна.

бігом застосу

$C_{co}(X, Y)$ -
комп. бігнута топ.
Compact open
 $C_d(X, Y)$ - бігнута
 Y -непр.

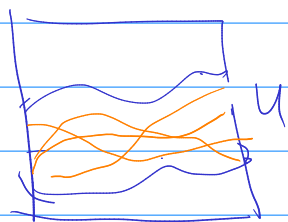
Лема. Нехай X ^{радіально} компакт і (Y, d) - метричний простір. Тоді комп. бігнута топологія і бігнута в $C(X, Y)$ топологія тотожні.



$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}$$

Сильне топологія. $C(X, Y)$

$$\forall U \subset X \times Y \text{ неск. } N(U) = \{g: X \rightarrow Y \mid \Gamma_g \subset U\}$$

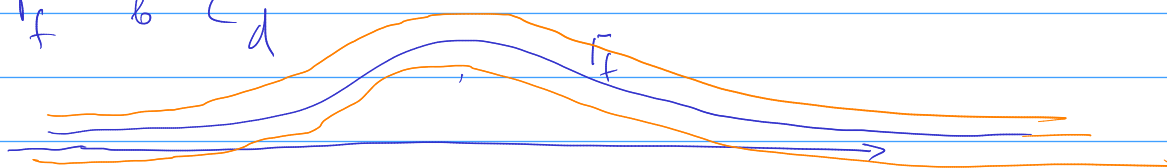


Лема. Лемо X - радіал. компакт
то $\forall Y$ комп. бігнута = сильна
в $C(X, Y)$

$$C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$f = \frac{1}{1+x^2}$$

origin f b C_d



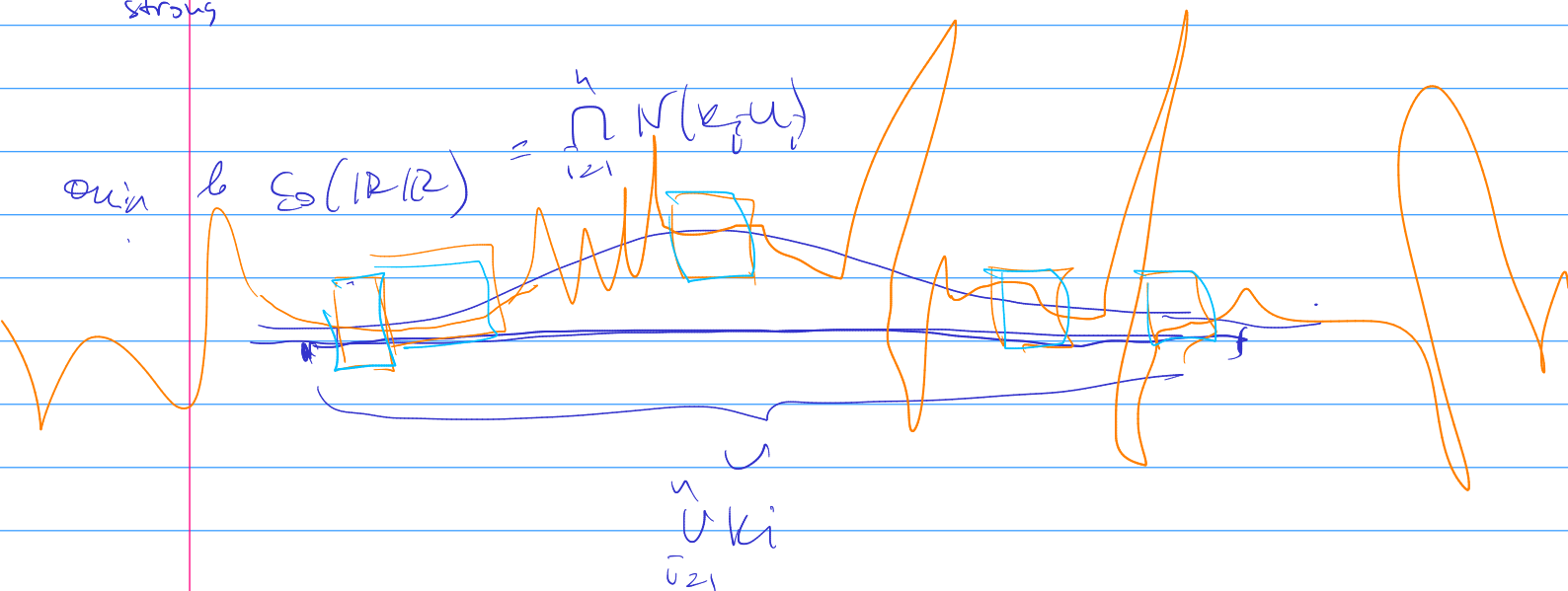
$$C_s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$C_d(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

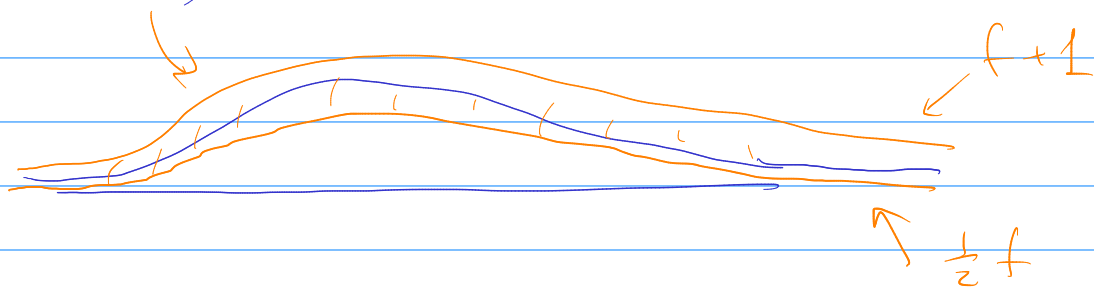
$$C_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

strong

origin b $C_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \bigcap_{i=1}^n N(x_i, u_i)$



origin b $C_s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

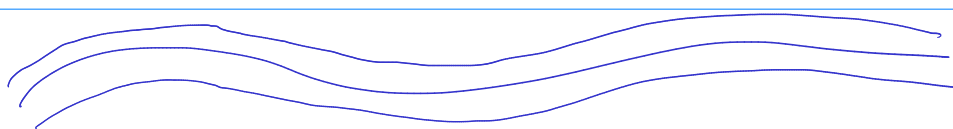


$$\mathcal{D}(\mu) \subset C^{\infty}(\mu, \mu)$$

biggesta mmm

$$\int C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$d(f, g) = \infty$$



$$X \times X \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{h} [0, 1]$$

$$X \rightarrow Y \quad Y^X$$

$$X = \{0, 1\} \rightarrow \{a, b, c\} = Y$$

$$|Y^X| = 3^2$$

A, B, C - monumen

$$A \times B \xrightarrow{f} C$$

$$A \xrightarrow{f} \text{Map}(B, C)$$

$$\text{Map}(A \times B, C) \cong C^{A \times B}$$

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} B \rightarrow C \\ b \rightarrow f(a, b) \end{pmatrix}$$

$$\text{Map}(A, \text{Map}(B, C)) \cong \text{Map}(A \times B, C)$$

$$(C^B)^A$$

$$f(a, b) : b \rightarrow f(a, b)$$

↑
gives

new

$$C^{A \times B} \xrightarrow{\text{exp}} (C^B)^A$$

- Stimmung

$$(a, b) \rightarrow f(a, b) \quad a \rightarrow (b \rightarrow f(a, b))$$

$$\Downarrow$$

$$A \xrightarrow{\Delta} \text{Map}(B, C) \xRightarrow{\text{exp}^{-1}} A \times B \rightarrow C$$

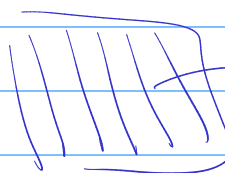
$$(a, b) \rightarrow \Delta(a)(b)$$

$$\Uparrow$$

Prüfung

$$f(x, t) = tx^2 \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_x(t) = tx^2$$

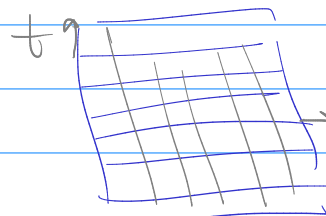


$$t \rightarrow tx^2$$

kurve



$$x \times \mathbb{R}$$

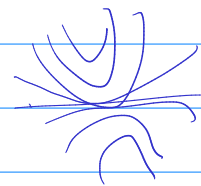


$$x \rightarrow tx^2$$



$$t \times \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow tx^2$$



Теорема (Естественный закон)

$\forall X, Y, Z : X \times Y$ — топос, который комм. конечно непрерывно Гомоморфизм

$$C_{\omega}(X \times Y, Z) \longrightarrow C_{\omega}(X, C_{\omega}(Y, Z))$$

$$(a, b) \mapsto F(a, b) \implies a \mapsto [b \mapsto F(a, b)]$$

$$Z^{X \times Y} \xrightarrow{\exp} (Z^Y)^X$$

① Доказать конечно exp. (для непрерывных на X, Y, Z)

Несколько $F: X \times Y \rightarrow Z$ — непрерыв. отображ. Покажем, что тогда конечно непрерывное отображ. $X \rightarrow C_{\omega}(Y, Z)$ $x \mapsto [y \mapsto F(x, y)]$

$\forall x \in X : f_x: Y \rightarrow Z, f_x(y) = F(x, y)$ — непрерывна
 $Y \xrightarrow{f_x} X \times Y \xrightarrow{F} Z$ — коммутативная непрерыв. диаграмма
 $y \mapsto (x, y) \mapsto F(x, y)$

те следует, что $f_x \in C(Y, Z)$, тогда мы определим конечно непрерывное отображ. $X \rightarrow C_{\omega}(Y, Z)$ $x \mapsto f_x$

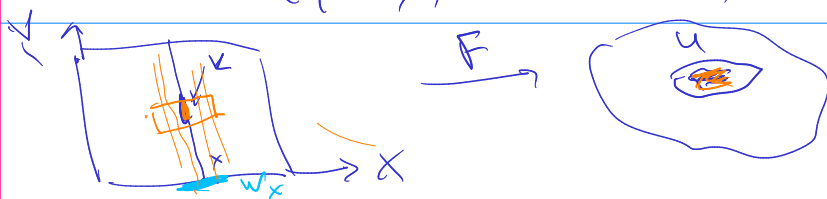
• Покажем, что $x \mapsto f_x : X \xrightarrow{\varphi} C_{\omega}(Y, Z)$ — непрерывное

Несколько $F: X \times Y \rightarrow Z$ — непрерыв. $f_x(y) = F(x, y)$

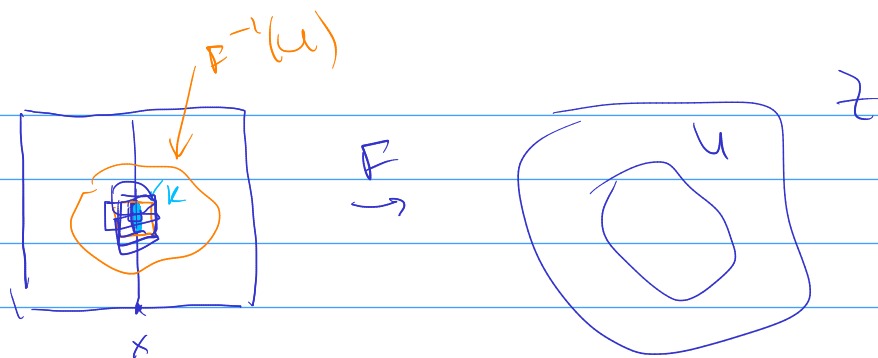
$N(K, U) = \{h: Y \rightarrow Z \mid h(K) \subset U\}$ — окр. f_x

Заметим, $f_x(K) \subset U$. Попробуем найти окр. $W_x \subset X$ т.ч. $x' \in W_x$ тогда $F(x', \cdot) = f_{x'} \in N(K, U)$

$$\varphi(W_x) \subset N(K, U)$$



Треба знать W_x $F(W_x \times K) \subset U$.



$F^{-1}(U)$ - не гиперплоск. или $x \times K$. $\Rightarrow \exists$ окр. $W_x \subset X$ т.ч.

$$W_x \times K \subset F^{-1}(U) \Rightarrow F(W_x \times K) \subset U$$

т.е. $f_{x'}(K) \subset U$ $\forall x' \in W_x$ т.е. $\varphi(W_x) \subset N(KU)$.

$$C_\omega(X \times Y, Z) \longrightarrow C_\omega(X, C_\omega(Y, Z))$$

$$(a, b) \mapsto F(ab) \quad \Rightarrow \quad a \mapsto [b \mapsto F(a, b)]$$

$$Z^{X \times Y} \xrightarrow{\exp} (Z^Y)^X$$

② Докажем, что $\exp$ - непрерывное.

тогда пусть $\varphi: X \rightarrow C_\omega(Y, Z)$ - непрерывное

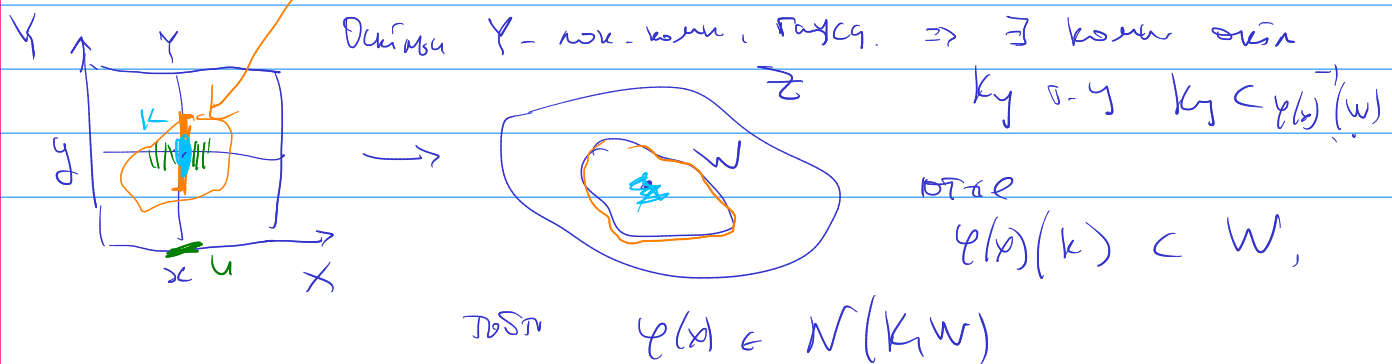
Треба показать, что отображение $F: X \times Y \rightarrow Z$, $F(x, y) = \varphi(x)(y)$ - непрерывное $\Leftrightarrow \varphi = \exp(F)$

Пусть $(x, y) \in X \times Y$; W - окр. т. $F(x, y)$ в Z

Потребно знать окр. U_x и V_y так, что $F(U_x \times V_y) \subset W$

Рассм. гиперпл. $\varphi(x): Y \rightarrow Z$ - непрерыв. $\left(\begin{array}{l} Y \rightarrow W \\ F(x, y) \in W \\ \varphi(x)(y) \end{array} \right)$

$\varphi(x)^{-1}(W)$ - окр. т. y



Sei p - Koppelung, $\pi \rightarrow \text{sein } U_x \cap \pi^{-1}(x) \subset X$

$$\varphi(U_x) \subset N(KW), \text{ mit } \varphi(x')(v) \subset W \Rightarrow \underbrace{F(U_x \times K) \subset W}$$

$\forall x' \in U_x$
 $\varphi(x')(v) \subset W$
 $\Rightarrow$

$\varphi(x')(v)$

Sei i - Schnittmenge
 $F \cap \pi^{-1}(xy)$ ↑

Задание. Пусть X - CW-комплекс, Y - топ. прор.

Тогда $\exists$ гомотопия, Y - $\neq$ топ. прор.

$$C([0,1] \times X, Y) \xrightarrow[\text{гомотопия}]{\text{exp}} C([0,1], C(X, Y))$$

↑
гомотопия

Комп. Гомотопия $\equiv$ путь в пространстве $C([0,1] \times X, Y)$

$\{f: X \rightarrow X \mid f \sim \text{id}_X\}$ - ком. минимальный элемент $C(X, X)$

бл $f \in (X, X)$ см. гомотопия
к id_X

или ком. мин. $\pi_0 C(X, X)$

$$\begin{matrix} \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1} \\ D^2 \xrightarrow{f} S^2 \rightarrow C(X, Y) \end{matrix} \Leftrightarrow D^2 \times X \rightarrow Y$$

$C(S^2, C(X, Y))$ $C(S^2 \times X, Y)$

$\pi_2(C(X, Y), f)$