

Група гомотопій компактних нескінченно

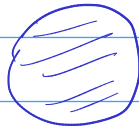
$$H(M)/H_0(M) = HCG(M) \quad M \text{ група гомотопій}$$

$$H(M)$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$$

Гомотопічний клас $H_0(M)$

$$M = D^2$$



$$H_0(M) = \left\{ h: D^2 \rightarrow D^2 - \text{гомотопія} \right. \\ \left. h|_{\partial D^2} = id_M \right\}$$

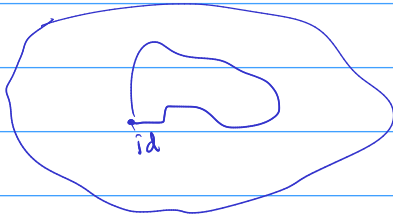
$$\pi_1(H_0(M), id_M)$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow H_0(M)$$

$$\gamma(0) = \gamma(1) = id_M$$

$$t \rightarrow M \xrightarrow{\gamma(t)} M$$

$H_0(M)$



$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(t) = z \cdot e^{2\pi i t} \quad t \in [0, 1] \\ \gamma(0) = z e^0 = z \\ \gamma(1) = z e^{2\pi i} = z \end{array} \right.$$

$$D^2 = \{ |z| \leq 1 \}$$



γ - клас в $H_0(M)$

Лема

Введемо $S^1 \hookrightarrow H_0(D^2) \hookrightarrow \text{гомотопічний клас еліпсоїдів}$

$$\omega \mapsto [D^2 \rightarrow D^2, z \mapsto z\omega]$$

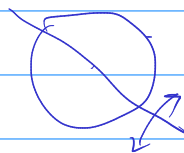
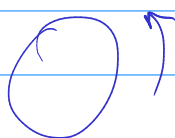
$\uparrow$
клас

$\nwarrow$ клас на класі ω

Більше за $O(2)$ - група обертань

$$O(2) \hookrightarrow H(D^2)$$

$O(2) \in \text{линійній групі перетворень } H(D^2)$



$$\pi_0 H(D^2) = \mathbb{Z}_2$$

$$\pi_1 H(D^2) = \pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$$

$$\pi_k H(D^2) = 0 \quad k \geq 2$$



переход на класі

$$H(D^2, \partial D^2) \xrightarrow{h} H(D^2) \xrightarrow{p} H(S^1 = \partial D^2)$$

створення $\approx$

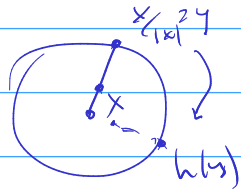
(за трюком Александера)



$$\begin{array}{ccccc}
 H(D^2, \partial D^2) & \longrightarrow & H(D^2) & \xrightarrow{s} & H(S^1) \\
 \downarrow & & \cup \text{ where } & & \cup \cong \text{ where } \\
 & & O(2) & = & O(2)
 \end{array}$$

$$\text{If we pick } p \Rightarrow H(D^2) \cong H(D^2, \partial D^2) \times H(S^1) \quad \uparrow$$

$$h: S^1 \rightarrow S^1 \Rightarrow h = p(\tilde{h}) \quad \tilde{h}: D^2 \rightarrow D^2 \quad \hat{h}(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{|x|} h\left(\frac{x}{|x|}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$

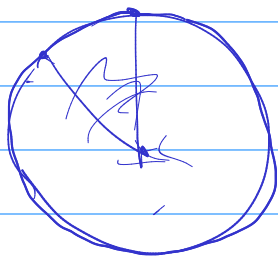


$$1 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{p} C \rightarrow 1$$

$$\boxed{p \circ s = \text{id}_C} \quad \text{surjective map}$$

$$A \times C \rightarrow B$$

$$\begin{aligned}
 (a, c) &\rightarrow a \cdot s(c) \\
 b &\rightarrow (b \cdot \text{sp}(b))^{-1} \cdot p(b)
 \end{aligned}$$



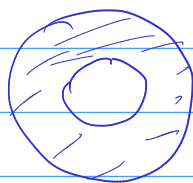
$$h \rightarrow \underbrace{h(\text{sp}(h))^{-1}}_{\in O(2)} \cdot \underbrace{\left(\text{"positive map of } h \text{ to } \partial D^2 \text{"} \right)}_{\substack{\text{sp}(h) \\ \in O(2)}}$$

$$A = S^1 \times [0,1]$$

Annulus, cylinder



$$S^1 \times [0,1]$$



$$A = \{1 \leq |z| \leq 2\}$$

$$t \rightarrow \begin{cases} S^1 \times [0,1] \rightarrow S^1 \times [0,1] \\ (z, s) \rightarrow (z e^{2\pi i t}, s) \end{cases}$$

$$t \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow A \\ z \rightarrow z e^{2\pi i t} \end{cases}$$

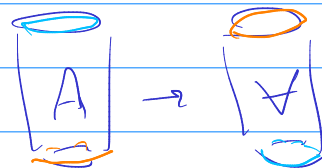
Lemma

Bei $S^1 \hookrightarrow H_1(A)$ - nat. embeddings

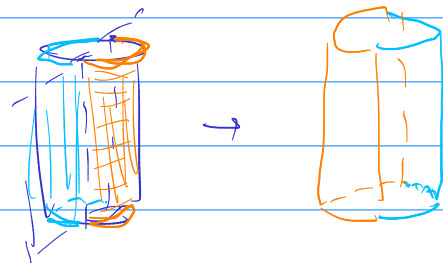
$$\omega \rightarrow [z \rightarrow z\omega]$$

odpa $\in$ unbound genp
resp. $H_0(A)$

$$H(A) \quad A \rightarrow A \quad \begin{matrix} S^1 \times [0,1] \\ (z, s) \mapsto (z, 1-s) \end{matrix}$$



$$(z, s) \mapsto (\bar{z}, s)$$



$$H(A \partial A) \rightarrow H(A) \xrightarrow[p]{p} H(\partial A = S^1 \sqcup S^1) \\ \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ h \rightarrow p(h) = h|_{\partial A}$$

Zu dyse p - cohomomorphism?

odpa p?

$$H(S^1 \sqcup S^1) \\ S_A \quad S_B$$

$$\bigcirc \longrightarrow$$

$$S_A \xrightarrow{\pm} S_A$$

$$S_B \xrightarrow{\pm} S_B$$

$$S_A \xrightarrow{\pm} S_B$$

$$S_B \xrightarrow{\pm} S_A$$

$H(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H(A) \xrightarrow{\beta} \text{Zeros. } S' \cup S'$
 δι' ομοιομορφίας
 από ξεχωριστά σημεία
 από κοινότητα

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \cup & \\
 \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Page

$$\pi_0 H(A) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$SO(2) \hookrightarrow H_0(A)$ — ιδιότητα
 zero. subman.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}(2) \times \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\text{2-fold cover}} H(S' \times [-1, 1]) \\
 (\varphi, s) & \mapsto [(z, t) \mapsto (\varphi(z), t)] \\
 \uparrow & \quad \quad \quad \uparrow \\
 \text{neglecting corners} & \quad \quad \quad \text{"} \\
 & \quad \quad \quad \text{"}
 \end{aligned}$$



$\mathbb{D}(2) \times \mathbb{Z}_2 \in$ union sep perp $H(A)$

$$\ker \sigma \rightarrow H(S_A \sqcup S_B) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}_2$$

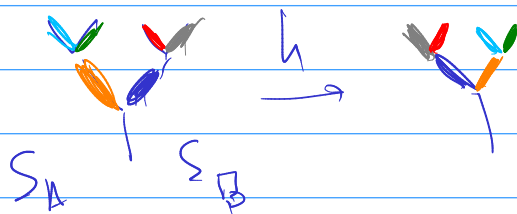
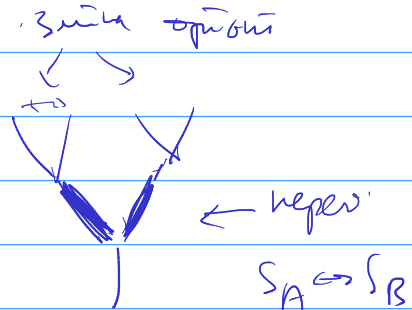
$$\begin{matrix} H(S_A) & \times & H(S_B) \\ \cong & & \cong \\ O(2) & & O(2) \end{matrix}$$

$$\sigma(h)_2 = \begin{cases} 0 & h(S_A) \geq S_A \\ 1 & h(S_A) \geq S_B \end{cases}$$

σ -перестановке коммутации

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$$

Зрительное восприятие
такого света



h имеет значение $S_A \cap S_B$

$S_A \rightarrow S_B$ - значение оптического

$S_B \rightarrow S_A$ - значение оптического

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$$

$$(a_0, a_1, k) \cdot (b_0, b_1, l) = \begin{cases} (a_0 b_0, a_1 b_1, kl) & k=0 \\ (a_0 b_1, a_1 b_0, kl) & k=1 \end{cases}$$

$$H_0(S' \times S') \rightarrow H(S' \sqcup S') \xrightarrow{\Psi} \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$$



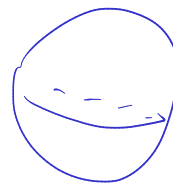
(координатное представление)

$$H(S' \sqcup S') = (H_0(S') \times H_0(S')) \rtimes \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$$

$\begin{matrix} \cong & & \cong \\ S' & & S' \end{matrix}$

$\bigsqcup_{S'} (S' \times S')$

$$M = S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$



Теорема

$$O(3) \subset H(S^2)$$

↑ группа орбитальных
преобразований $\mathbb{R}^3$

$O(3) \leftarrow$ симметрическая группа
преобразований $H(S^2)$

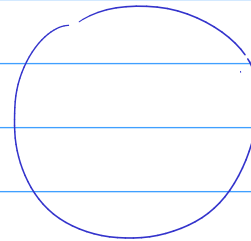
$$O(3) = SO(3) \sqcup$$

$$\det = -1$$

"повороты"



повороты +
группа симметрии



$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$H_2 S^2 \rightarrow H_2 S^2$$

$$u \rightarrow u$$

$$u \rightarrow -u$$

Лемма

$H_0(S^2)$ имеет 2 компонента

Решение

$h: S^2 \rightarrow S^2$ — гомеоморфизм. Тогда h изоморфизм либо $\text{id}_{S^2}: (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$
либо $-\text{id}_{S^2}: (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$

$\Downarrow$

• Т. Леруэ, для h задан ориентированный $\Rightarrow$
одним из способов Леруэ $L(h)$

$$H_0(S^2) \xrightarrow{h_*} H_0(S^2)$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \quad \boxed{1}$$

$$H_1(S^2) \xrightarrow{h_*} H_1(S^2)$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$H_2(S^2) \xrightarrow{h_*} H_2(S^2)$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \boxed{1}$$

$$u \mapsto \pm u \quad \pm u = \text{id}$$

$$L(h) = \text{tr}(h_0) - \text{tr}(h_1) + \text{tr}(h_2) = 1 - 0 + 1 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ непрерывная точка y на

$$\exists x \in S^2 : h(x) = x$$

$$h: S^2 \setminus \{x\} \rightarrow S^2 \setminus \{x\}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2$

$$g_0 \circ h = h$$

$$g_1 \circ h = g_0 \circ h$$

$$g_1 \circ h$$

$$g_0 = \text{id}_{S^2}$$

$$g_1 = g$$



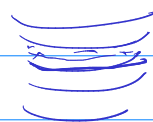
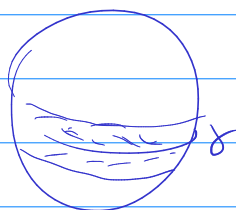
Несомненно δ -образная $\exists$ зона. $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $g(h(x)) = \delta$
 $\bar{g}$ непрерывна в окрестности $x = \infty$

$$\Rightarrow g \circ h|_{\mathbb{R}} = \delta$$

за теореме Александера g имеет id_{S^2}

$g \circ h \sim h$ тогда можно заменить h на $g \circ h$

Вспомогательная $h|_{\mathbb{R}} = \delta$



h имеет границу ∂ $h|_{\mathbb{R}} = \delta$ имеет границу $\delta \Rightarrow$

$h|_{\mathbb{R}} \simeq \text{id}_{\mathbb{R}} \Rightarrow$ уже есть. Криволинейная ∂ имеет S^1

$\Rightarrow$ можно уже вспомнить, что $h|_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$

$S^2 \setminus \delta = A \cup B$ - 2 зоны

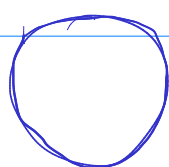


$h|_A$ и $h|_B$ - непрерывны на $\partial A = \partial B$

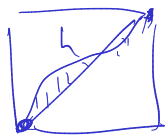
за 1. Александера $h|_A \simeq \text{id}_A$ rel $\partial A = \delta$

$h|_B \simeq \text{id}_B$ rel $\partial B = \delta$

уже есть id_{S^2} $h \simeq \text{id}_{S^2}$



$h: D^2 \rightarrow D^2$ $h|_{\partial D^2}$ - непрерывна
 $\Rightarrow h \simeq \text{id}_{D^2}$



$$h(x) \cdot (1-x) + x \cdot t$$

$$\mathcal{O}(3) \subset U(S^2) \text{ — not embed}$$

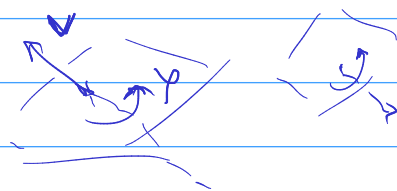
Тон сгруппа $\mathcal{O}(3)$

$$SO(3) \subset \mathcal{O}(3)$$

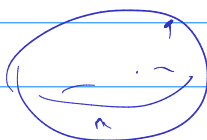
$$|A|=1$$

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \quad 1$$

$$SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$$



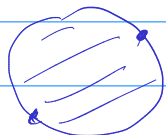
$$D^3$$



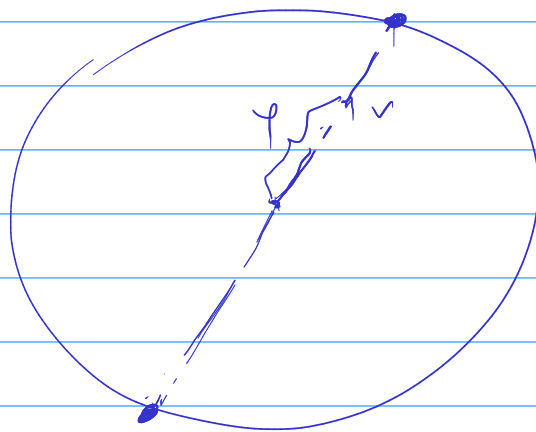
$$SO(3) \ni A \rightarrow v - \text{axis vector} \\ v \in (-v, v)$$

$$D^3 - \text{map} \text{ passing } \Pi$$

$$\mathbb{RP}^2$$



$$SO(3) \rightarrow D^3 / \sim \cong \mathbb{RP}^3 \\ x \sim -x \\ x \in D^3$$



$$\text{con. on } \mathbb{RP}^3 \cong SO(3)$$

$$\mathbb{RP}^3 = S^3 / \mathbb{Z}_2$$

$$p: S^3 \rightarrow S^3 / \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^3 \\ \text{natural}$$

$$\mathbb{R}^4 \supset S^3 \xrightarrow{\pi} S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z, t) \rightarrow (-x, -y, -z, t)$$

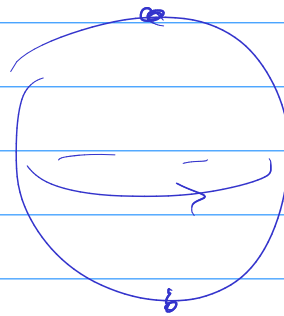
$$\begin{cases} \pi_k S^3 \rightarrow \pi_k \mathbb{R}P^3 = & \pi_2 = \mathbb{Z} \\ & \pi_3 = \mathbb{Z} \\ & \dots \\ \pi_1 \mathbb{R}P^3 = \mathbb{Z}_2 \end{cases}$$

11

k	$\pi_k \mathbb{R}P^3$
0	$\cdot$
1	$\mathbb{Z}_2$
2	0
3	$\mathbb{Z}$

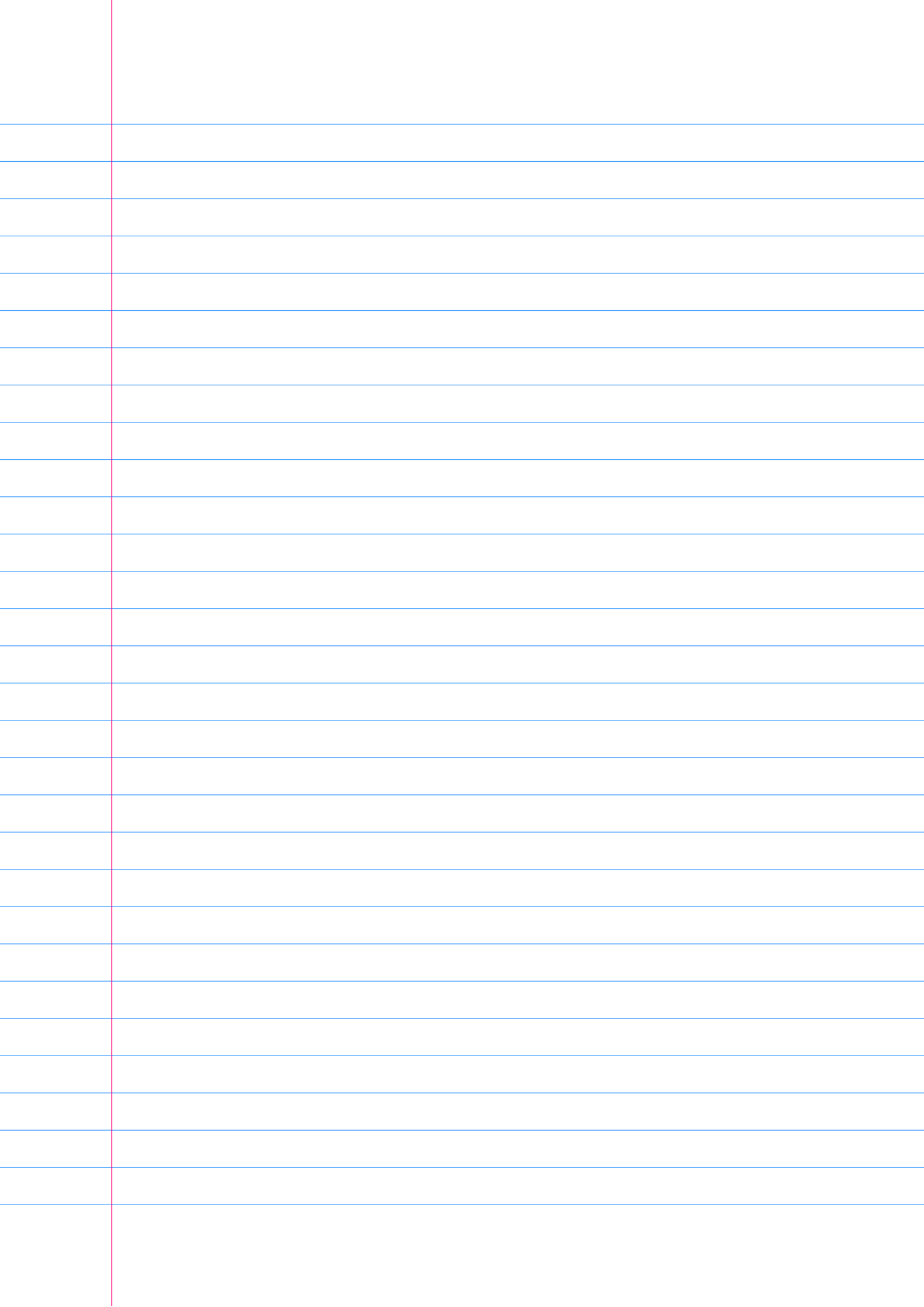
$$\gamma: [0,1] \rightarrow SO(3) \subset U(S^2)$$

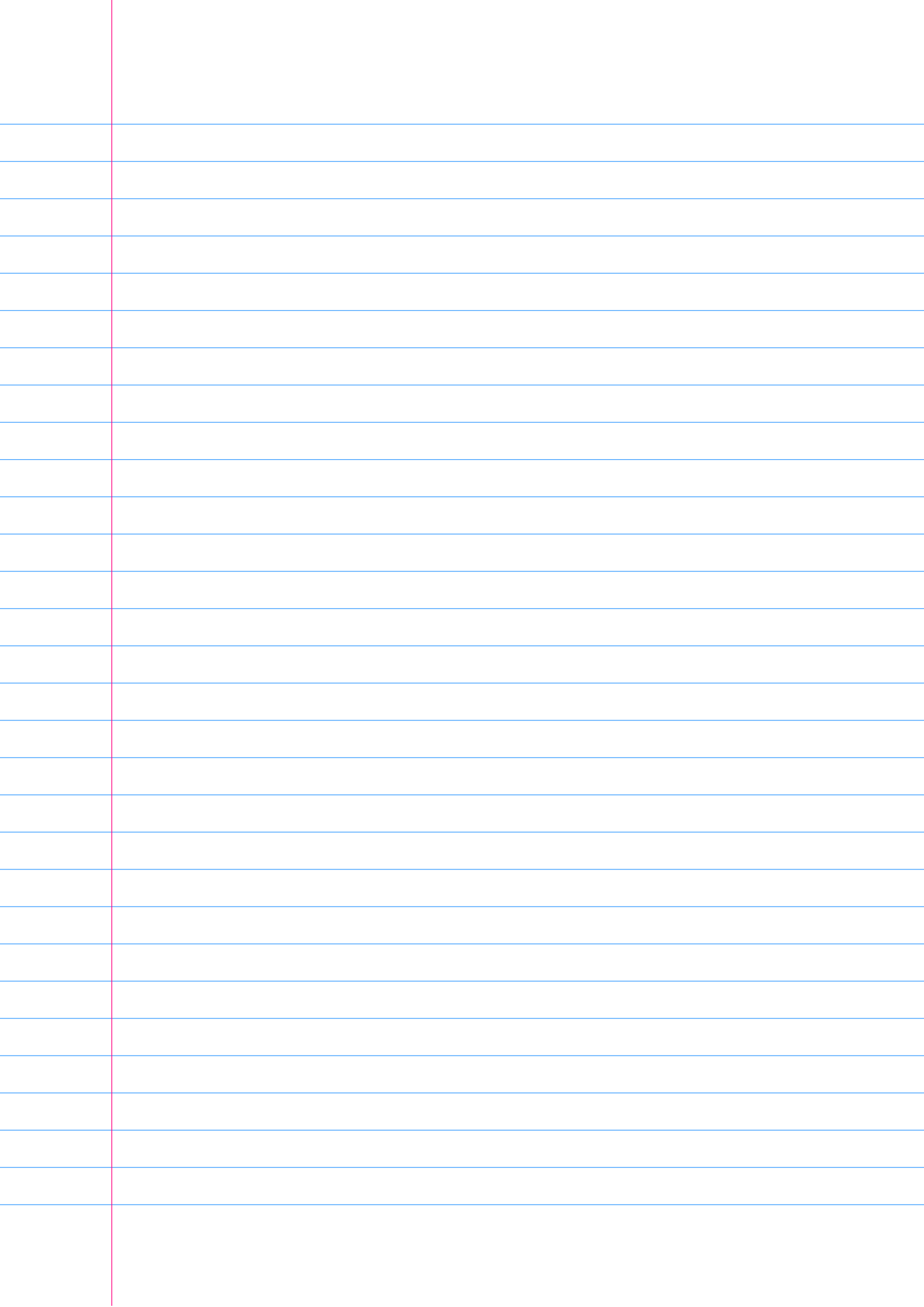
$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t & 0 \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\gamma \text{ - loop in } \pi_1 \mathbb{R}P^3 = \mathbb{Z}_2$$

$$\gamma * \gamma = \rho \text{ in } \pi_1 \mathbb{R}P^3$$





	M-индексы	Гом. для $H_0(M)$	$H(M)$	$H_0 H(M)$
$X(M)^{op}$	D^2	$S^1 = SO(2)$	$O(2)$	$\mathbb{Z}_2$
	$S^1 \times [0,1]$	$S^1 = SO(2)$	$O(2) \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	S^2	$SO(3)$	$O(3)$	$\mathbb{Z}_2$
	$M\ddot{o}$			
	$\mathbb{R}P^2$			
	T^2			
	K Клейн			
	Степень			

