M - компактна поверхня $H(M)$ - гомеоморфізми $H_0(M)$ - ізотопні до id_M

$H_0(M) \lhd H(M)$ нормальна підгрупа

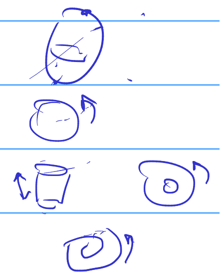
"ізотопні"

$H(M)/H_0(M)$ - група гомеотопій M або Mapping class group

$$\begin{matrix} h \circ g \\ \wr \quad \wr \\ h' \circ g' \end{matrix}$$

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\} = \{\pm 1\}$

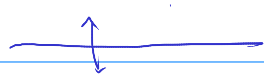
$\chi(M)$	M	гом. тип $H_0(M)$	$H(M)$	$H(M)/H_0(M)$
2	S^2	$SO(3)$	$O(3)$	$\mathbb{Z}_2$
1	D^2	$S^1 = SO(2)$	$O(2)$	$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$
0	$S^1 \times I$	$S^1 = SO(2)$	$O(2) \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
0	Mö	$S^1 = SO(2)$	$O(2)$	$\mathbb{Z}_2$
1	$\mathbb{R}P^2$	$SO(3)$	$SO(3)$	$\cdot$
0	$T^2 = S^1 \times S^1$	T^2	$T^2 \rtimes GL(2,\mathbb{Z})$ $\left\|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right\| = \pm 1$	$GL(2,\mathbb{Z})$ T^2 - ти група $\hookrightarrow H_0(T)$
0	K	S^1	$S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
<0	всіх інших поверхонь	стягувана		

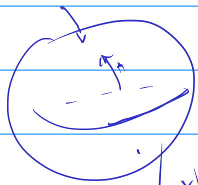


$\mathbb{R}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1$ - гомеом - непер. бієкція f^{-1} - непер.

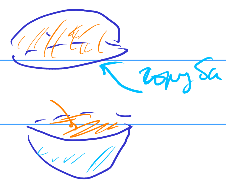
$f \in C^1$ зрост. $\iff f' > 0$ $(f'(x))$ - матриця Якобі f

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$ $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

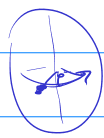




$(x, y, z) \to (x, y, -z)$

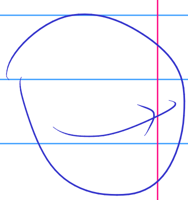


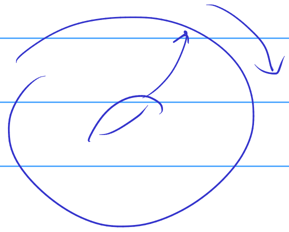
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

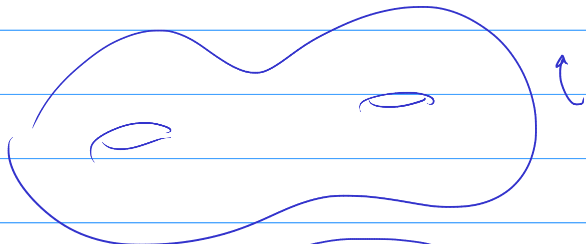


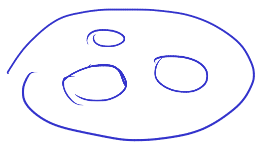
$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{ізом}} \mathbb{Z}$

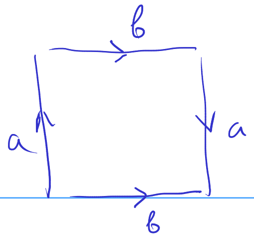
$x \qquad f(x)$

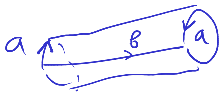


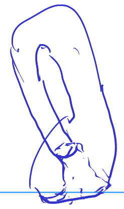


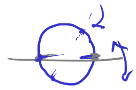


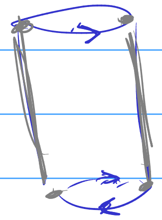


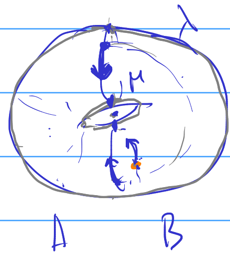


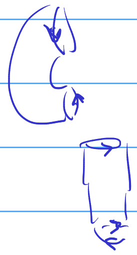












$$S^1\times S^1\times \mathbb{Z}_2 \to S^1\times S^1$$
$$(\lambda,\mu,0)\to(\lambda,\mu)$$
$$(\lambda,\mu,1)\to(-\lambda,\bar\mu)$$
$$(x,y,z)\to(-x,-y,-z)$$

$A \sim B$

$$T^2 \xrightarrow{p} T^2/\mathbb{Z}_2 = K$$
$$p(A)=p(B)=T^2/\mathbb{Z}_2$$

Лема $T^2/\mathbb{Z}_2 \cong K$ — пляшка Клейна

$\xi: T^2\to T^2$ $\quad \xi(\lambda,\mu)=(-\lambda,\bar\mu)$

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{F_t} & T^2 \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ K & \overset{\hat F_t}{\dashrightarrow} & K \end{array}$$

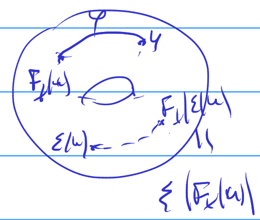
— повороти уздовж паралелей

$F: T^2\times[0,1]\to T^2$ $\quad F(\lambda,\mu,t)=(\lambda\cdot e^{2\pi i t},\mu)$

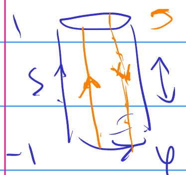
$\xi\circ F_t = F_t\circ\xi$

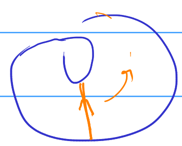
$\xi\circ F_t(\lambda,\mu)=\xi(\lambda e^{2\pi i t},\mu)=(-\lambda e^{2\pi i t},\bar\mu)$

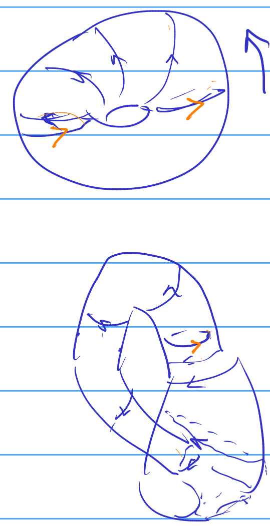
$F_t\circ\xi(\lambda,\mu)=F_t(-\lambda,\bar\mu)=(-\lambda e^{2\pi i t},\bar\mu)$



$u=(\lambda,\mu)$ $\qquad F_t(\xi(u))$







$\xi(\varphi,s)=(-\varphi,-s)$

Лема Ізотопія $F: T^2\times I\to T^2$ Ізотопія

Ізотопія $\hat F: K\times I\to K$

$\hat F_0 = id_K = \hat F_1$

$[0,1]\xrightarrow{\varphi} H(K)$

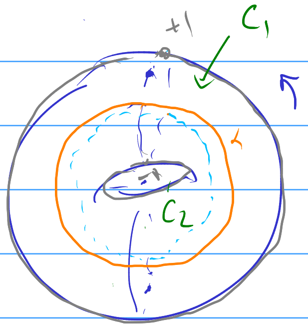
$t \to \hat F_t$

$\varphi(0)=\varphi(1)=id_K$ $\qquad \varphi$ — петля в $H(K)$

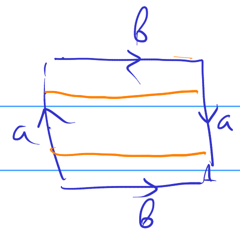
φ індукує відобр. $S^1 \to Hs(K)$

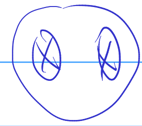
Теорема Вкладення $S^1 \to H_0(K)$ є гомот. еквівал.

$\varepsilon(\lambda,\mu) = (-\lambda, \bar{\mu})$



$\longrightarrow$

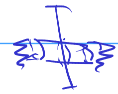




$T = S^1 \times S^1$

$\alpha = S^1 \times \{i\}$ $\varepsilon(\lambda, i) = (-\lambda, \bar{i}) = (-\lambda, -i)$

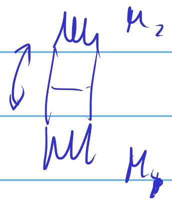
$\beta = S^1 \times \{-i\}$ $\varepsilon(\alpha) = \beta$

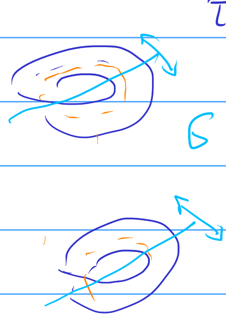


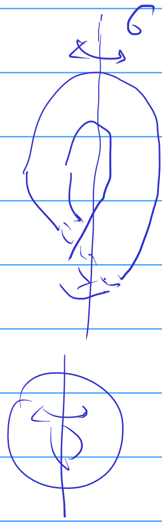
$\left[\begin{array}{ll} \varepsilon(C_1) = C_1 & \varepsilon(C_2) = C_2 \\ F_+(C_1) = C_1 & F_+(C_2) = C_2 \text{ — поворот} \end{array}\right.$

$p(C_1)$ — стрічка Мебіуса $p(C_2)$ — стр. Мебіуса

Теорема $H(K)/H_0(K) = MCG(K) \cong \underset{\tau}{\mathbb{Z}_2} \oplus \underset{\sigma}{\mathbb{Z}_2}$



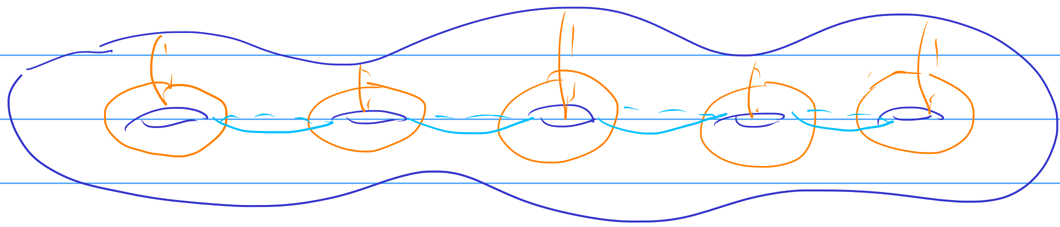




Теорема (Dehn, Lickorish, Hatcher–Thurston)

[Dehn] Нехай M — комп. орієнтовна поверхня, $\partial M = \varnothing$.
Тоді $H(M)/H_0(M)$ — $MCG(M)$ породжується скрученнями Дена

[Likorish] $\exists$ скінченна система твістів



$h: M \to M$ $h \simeq T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_k$ $T_k \circ \ldots \circ T_2 \circ T_1 \circ h \simeq id$

[H.T]

80

Знайшли копредставлення

$$MCG(M) = \langle \text{система твірних} \mid \text{співвідношення} \rangle$$

Нехай $K \subset M$ — підмножина

$$H(M,K) = \{ h \in H(M) \mid h \text{ - нерух. на } K \}$$

$$H_{inv}(M,K) = \{ h \in H(M) \mid h(K) = K \}$$

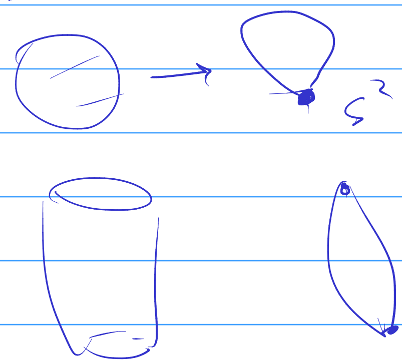
M - комп. мн. $\quad \hat{M} = M$ у якій кожна комп ∂M стягнута в точку

$$M \xrightarrow{p} \hat{M} \ldots$$

$\cup$

$\partial M \qquad p(\partial M) = K$

D^2

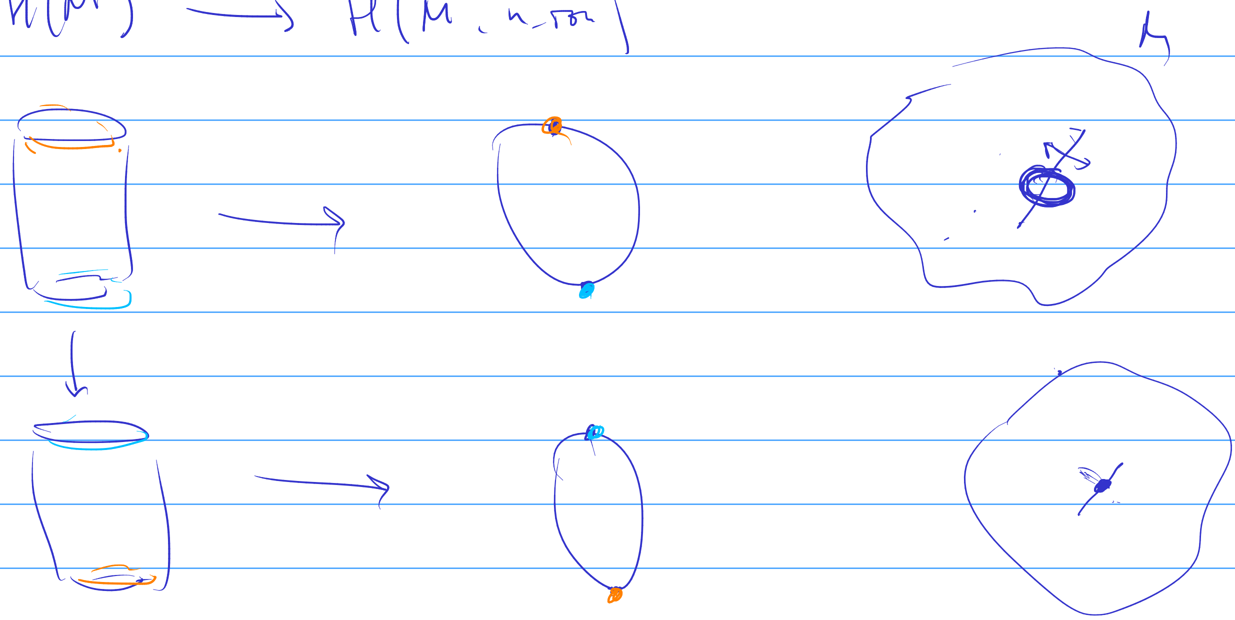


Теорема $\quad MCG(M) \cong MCG(\hat{M}, \text{n.точок})$

∂M — має n-компонент

$$H(M) / H_0(M) \cong H_{inv}(\hat{M}, \text{n точ}) \big/ H_0^{inv}(\hat{M}, \text{n.т})$$

$$H(M) \longrightarrow H(\hat{M}, \text{n.точ})$$



$X \not\approx Y$ зв'язні і не гомеоморфні

$H(X \sqcup Y) = H(X) \times H(Y)$

Конфігураційні простори

Група кіс
braid group

$\mathbb{R}$ простір впорядкованих попарно різних пар точок $\mathbb{R}$ — $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(p, q) $p \neq q$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

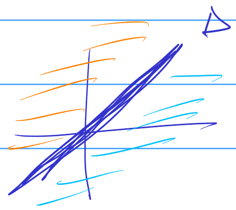
X — топ простір

простір впорядкованих n-к попарно різних точок з X

$\Delta^n = \{(x_1 \dots x_n) \mid$ деякі $x_i = x_j\} \subset X^n$

$C^n(X) = X^n \setminus \Delta^n = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$

n-й конфігураційний простір X.

- $C^1(X) = X$
- $C^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta^2 =$ 
- $C^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \setminus \Delta^3$ $\quad \Delta^3 = \{x = y\} \cup \{y = z\} \cup \{x = z\}$

(x, y, z)

O_1 $x < y < z$

O_2 $x < z < y$

O_3 $y < x < z$

O_4 $y < z < x$

O_5 $z < x < y$

O_6 $z < y < x$

$x < y < z$
$x' < y' < z'$

$tx + (1-t)x'$

$ty + (1-t)y'$

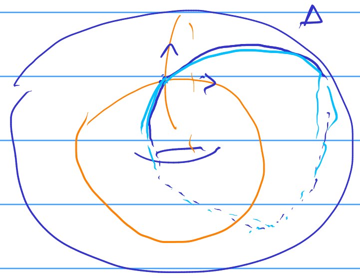
$tz + (1-t)z'$

Тв $C^3(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^{6} O_i$

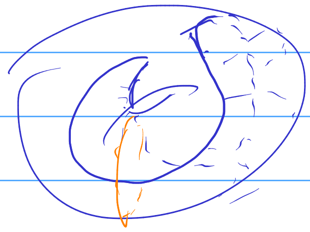
- кожн O_i — компоненти лінійної зв'язності $C^3(\mathbb{R})$
- кожне O_i + опуклою в $\mathbb{R}^3$

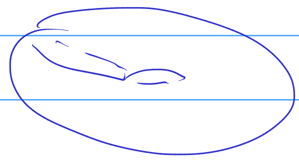
Д/З. Довести, що компоненти звʼязності $C^n(\mathbb{R})$ є опуклими. Скільки компонент має $C^n(\mathbb{R})$

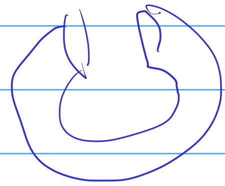
$$C^2(S^1) = (S^1 \times S^1) \setminus \Delta \simeq S^1 \times (0,1)$$



Δ $\quad T = S^1 \times S^1$







$$h : T^2 \to T^2$$

$$h(T^2 \setminus \Delta) \longrightarrow T^2 \setminus h(\Delta)$$