

Головні розшарування
 $P: X \rightarrow X/G$

$$G \curvearrowright X$$

$$K \rightarrow G \xrightarrow{P} H$$

Ліва діє групи G на множині X

це відображення $\mu: G \times X \rightarrow X \quad (g, x) \mapsto \mu(g, x) = g \cdot x$

① $\mu(e, x) = x \quad \forall x \in X \quad e \cdot x = x$

② $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x) \quad g(hx) = (gh)x$

Приклад ① $GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Ag = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$
 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $A(Bg) = (AB)g$

② X -множина Σ_X - це всі дії групи $X \xrightarrow{f} X$ (перестановки)
 $\mu: \Sigma_X \times X \rightarrow X$
 $f \quad x \quad f(x)$
 існує в Σ_X - id_X
 $id(x) = x$
 $g(h(x)) = (gh)(x)$

③ X -под. простір $H(X) \subset \Sigma_X$ - група гомеоморфізмів
 $\mu|_{H(X) \times X}: H(X) \times X \rightarrow X$ - та ж ліва діє

• Інгуновані дії

Нехай $\mu: G \times X \rightarrow X$

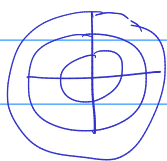
• $H \subset G$ - підгрупа, то $\mu|_{H \times X}: H \times X \rightarrow X$ - та ж ліва діє

• $Y \subset X$ - G -інваріантна підмножина $g(Y) = Y \quad \forall g \in G$.

тоді $\mu|_{G \times Y}: G \times Y \rightarrow Y$ - та ж ліва діє

Приклад • $O(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

при чому кождо S^1 - інваріантна
 $O(2) \times S^1 \rightarrow S^1$



• Нехай G -група і $\mu: G \times G \rightarrow G$ - відображення множення в G

то μ - ліва діє G на собі

① $eg = g$ ② $g(hx) = (gh)x$

$Ax = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
 то $A = E$ тільки при
 єдиний.

Лема

Нека $\varphi: G \rightarrow \Sigma_X$ - хомоморфизм γ групи G , в групі Σ_X переадаюче елемент X .

Визначимо бігдорфазм $\mu: G \times X \rightarrow X$ $\mu(g, x) := \varphi(g)(x)$

Тоді ① μ - ліва діє групи G на X

② $\varphi = \hat{\mu}$

$\Downarrow$

① $\mu(e, x) = x$?

$$\textcircled{a} \mu(e, x) = \varphi(e)(x) \quad \left| \begin{array}{l} \text{оскільки } \varphi - \text{хомоморфизм, то } \varphi(e) = \text{id}_X \\ = \text{id}_X(x) = x \end{array} \right.$$

$$\textcircled{b} \mu(g, \mu(h, x)) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) \quad \left| \begin{array}{l} \varphi - \text{хомоморфизм} \quad \varphi(g) \circ \varphi(h) = \varphi(gh) \\ = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) \\ = \varphi(gh)(x) = \\ = \mu(gh, x) \end{array} \right.$$

② $\hat{\mu}(g)(x) = \mu(g, x) = \varphi(g)(x)$, тобто $\hat{\mu}(g) = \varphi(g)$ на всьому X . $\Uparrow$

Означення

Ліва діє групи G на множині X .

$\gamma: X \times G \rightarrow X$ - бігдорфазм

① $\gamma(x, e) = x \quad \forall x \in X$

② $\gamma(\gamma(x, h), g) = \gamma(x, hg)$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(e, x) = x \\ \mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x) \end{array} \right\} \text{ліва}$$

$$\begin{array}{l} xe = x \\ (xh)g = x(hg) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ex = x \\ g(hx) = (gh)x \end{array}$$

Приклад

Нехай $X = \text{Map}(A, B)$

$G = \Sigma_A$ - множина бієкцій $A \rightarrow A$
 $H = \Sigma_B$ - " " " " $B \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccc} G \times \text{Map}(A, B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Map}(A, B) \\ (g, \alpha: A \rightarrow B) & \mapsto & \alpha \circ g \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H \times \text{Map}(A, B) & \xrightarrow{\gamma} & \text{Map}(A, B) \\ (h, \beta: A \rightarrow B) & \mapsto & h \circ \beta \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{h} B \\ A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{h} B \end{array} \right\}$$

перекресток
 γ - ліва

Чи будуть μ і γ - діями групи?

$$\begin{array}{l} h(g \circ \alpha) = (h \circ g) \circ \alpha \\ A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{h} B \end{array}$$

upaba
gile

$$G \times \text{Map}(A, B) \xrightarrow{\mu} \text{Map}(A, B)$$

$$(g, \alpha: A \rightarrow B) \mapsto \alpha \circ g$$

$$A \xrightarrow{h} A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{\alpha} B$$

$$\mu(h, \mu(g, \alpha)) = \mu(h, \alpha \circ g) = \alpha \circ g \circ h = \mu(g \circ h, \alpha)$$

$h \cdot (g \cdot \alpha) = (hg) \cdot \alpha$ - upaba gile

$(\alpha \circ g) \circ h = \alpha \circ (g \circ h)$

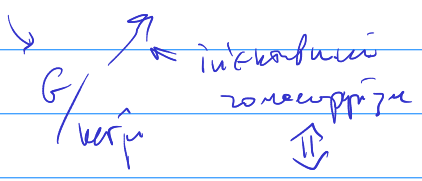
liba

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot \alpha) &= (hg) \cdot \alpha \\ h(g \cdot \alpha) &= (gh) \cdot \alpha \end{aligned}$$

$(\alpha \circ g) \cdot h = \alpha \cdot (gh)$ upaba

Harizma

$$\hat{\mu}: G \rightarrow \Sigma_X$$



- gila egeruvchi
- $\ker \hat{\mu} = \{e\}$
 - $\hat{\mu}$ - intekstsiya

gila $G/\ker \hat{\mu} \cong \Sigma_X$

$$G \rightarrow G^{\text{op}}$$

$$g \rightarrow g^{-1}$$

$$g^{-1}(gx)$$

Lemma

Harbi $\mu: G \times X \rightarrow X$ - liba gile. Buzuruvchi boshqaruvchi

$$\partial: X \times G \rightarrow X, \partial(x, g) = \mu(g^{-1}, x)$$

(1) ∂ - upaba gile. $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$

$\Downarrow$

- $\partial(xe) = \mu(e^{-1}, x) = \mu(e, x) = x$
- $\partial(\partial(x, g), h) = \mu(h^{-1}, \mu(g^{-1}, x)) = \mu(h^{-1}g^{-1}, x) = \mu((gh)^{-1}, x) = \partial(x, gh)$

(2) $\hat{\partial}: G \rightarrow \Sigma_X, \hat{\partial}(g)(x) = \partial(x, g)$ - ayni xarakterizatsiya

$\hat{\partial}(gh) = \hat{\partial}(h) \circ \hat{\partial}(g)$

$$G \times X \rightarrow X \text{ - gila}$$

$$G \times \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$$

$$g \quad \alpha \mapsto \alpha \circ g$$

$\alpha \circ g^{-1}$ - liba

$$G \times \text{Map}(Y, X) \rightarrow \text{Map}(Y, X)$$

$$g \quad \beta \mapsto g \circ \beta$$

liba - $g \circ \beta$

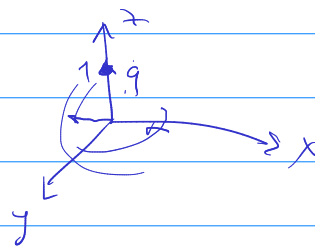
$$G \times (X \times X) \rightarrow (X \times X)$$

$$g \quad (x, y) \rightarrow (gx, gy)$$

- Несам $\mu: G \times X \rightarrow X$ - нба гн $G \overset{\mu}{\rightarrow} X$
- $\forall x \in X \quad St(x) = G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ - сгдгнзгср
т.х гнзгср гн μ
 - $\forall x \in X \quad O_g(x) = G_x = \{gx \in X \mid g \in G\}$ - сгдгнзгср т.х μ

Несам $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ - гн мнхгнм нгнзгср

$$A \quad x \rightarrow Ax$$



Несам $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

сгдгнзгср

$$O(g) = S^2$$

$$St(g) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = SO(2) \subset SO(3)$$

$$\langle g, p \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle Ag, Ap \rangle = 0$$

$$\uparrow$$

Несам ① $\forall x \in X \quad St_x$ - гн нгнзгср G .

$\Downarrow$

$$g, h \in St_x \quad \bullet \quad gx = hx = x \Rightarrow (gh)x = g(hx) = gx = x$$

$$\bullet \quad gx = x \Leftrightarrow \underbrace{g^{-1}g}_e x = g^{-1}x \Leftrightarrow \underbrace{ex}_{x'} = g^{-1}x \leftarrow g^{-1} \in St_{x'} \uparrow$$

② Несам $g, h \in G \quad x \in X$
Нзгн

$$gx = hx \Leftrightarrow h^{-1}gx = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in St_x \Leftrightarrow g \in hSt_x \text{ тн } g \text{ нзгнзгср } h \text{ нзгнзгср } St_x$$

сгнм нзгнзгср нзгнзгср G/St_x

$$\textcircled{3} \quad G \xrightarrow{p} O_x \subset X$$

$$p(g) = gx$$

$$\searrow \quad G/St_x \xrightarrow{\hat{p}} O_x$$

p нзгнзгср нзгнзгср

$$G/St_x \xrightarrow{\hat{p}} O_x$$

нзгнзгср $\hat{p}$ - сгнзгср

Примеры

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathbb{Z} \times X \rightarrow X \quad (h, x) \mapsto h+x \bmod 5$$

$$x=0 \quad St_0 = 5\mathbb{Z}$$

$$h \in \mathbb{Z} \quad h \cdot 0 = 1 \quad 5\mathbb{Z} + 1$$

$$h \cdot 0 = 3 \quad 5\mathbb{Z} + 3$$

$$h \mapsto h \cdot 0$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow X$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \text{сюръект} & \\ & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \end{array}$$

Теперь $\mu: G \times X \rightarrow X$

① эффективна, если $\ker \hat{\mu} = \{e\}$, $\hat{\mu}: G \rightarrow \Sigma_X$ — инъект.
тогда для $g(x) = h(x) \quad \forall x \in X$, то $g = h$.

② близка (или свободна), если выполняется хотя бы одно из условий:
• если $g \in G$ имеет неподвижную точку, то $gx = x$ для всех $x \in X$
то $g = e$.

$$\bullet \forall x \in X \quad St_x = \{e\}$$

$$\bullet \forall x \in X \quad p: G \rightarrow \mathcal{O}_x \quad p(g) = gx \quad \text{— сюръект}$$

$$\downarrow \text{сюръект}$$

$$G / (St_x) = \{e\}$$

③ транзитивна, если

- если e — тривиальная группа
- $\forall x, y \in X \quad \exists g \in G: y = gx$.

Примеры • $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — эффективна (+)
• близка — но $St_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = SO(2) \neq \{e\}$

• транзитивна? Но это зависит от выбора

орбита — все концы сфер, $i \in \mathbb{R}^3$

• Нехай $\mu: G \times G \rightarrow G$ множення в групі G

• ерентивна + $gx = x \quad \forall x \in G \Rightarrow g = e$
 біліна +

• асоціативна + $y = (yx^{-1})x \quad \forall x, y \in G$

• Нехай $H \subset G$ - підгрупа $\mu|_{H \times G}: H \times G \rightarrow G$
 $h, g \rightarrow hg$

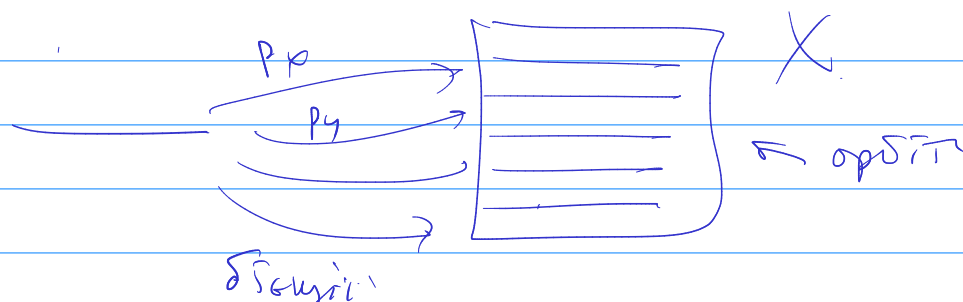
• ерентивна + до групи G таке
 біліна

• асоціативна - $he \cdot e \in H \quad g \in G \setminus H$, то
 $\exists h \in H \quad hg = e$

орбита gH - праві класи Hg



Структурування біліної групи



Нехай G - біліна, то $X = \bigcup O_x$

х. $p_x: G \rightarrow O_x$ - біліна