

$$\mu: G \times X \rightarrow X$$

G -группа X -множество

либо G и X

$$G \xrightarrow{\mu} X$$

$$\mu(gx) = g \cdot x$$

$$\bullet \mu(e, x) = x \quad \forall x \in X$$

$$e \cdot x = x$$

$$\bullet \mu(h, \mu(g, x)) = \mu(hg, x)$$

$$h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$$

$$\bullet \forall x \in X \quad \text{стабилизатор} \quad St(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \subset G$$

орбита

$$O(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

Лемма ① $St(x)$ - подгруппа в G (не обязательно нормальная)

$$G \xrightarrow{\mu(x)} O(x)$$

$$\pi \searrow \xrightarrow{g \mapsto gx}$$

$$G/St(x) \xrightarrow{\hat{\mu}_x}$$

② $\hat{\mu}_x$ - действие

$$\bullet \text{Эквивалентность} \quad \text{гипотеза ①} \quad gx = hx \quad \forall x \in G \Rightarrow g = h$$



$$\text{①} \quad gx = x \quad \forall x \in G \Rightarrow g = e$$

$$\bullet \text{Вспомогательные} \quad \text{①} \quad gx = x \quad \text{для любого } g \in G, x \in X \Rightarrow g = e$$

$$\text{②} \quad St(x) = \{e\} \quad \forall x \in X$$

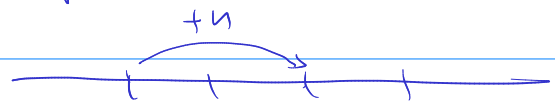
$$\text{③} \quad \mu_x: G \rightarrow O(x) \quad g \mapsto gx \quad - \text{действие}$$

$$\bullet \text{Транзитивность} \quad \text{①} \quad \forall x, y \in X \quad \exists g: y = gx$$

$$\text{②} \quad \exists \text{ только одна орбита}$$

$$\text{①} \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mu}$$

$$\mu(n, x) = x + n$$



Вспомогательные

$$\mu(n, x) = x \quad \text{тогда}$$

$$x + n = x \Rightarrow n = 0 \quad \text{тогда } n -$$

$$\text{для любого } n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

не нейтральный элемент $\mathbb{Z}$,

$$x \in \mathbb{R} \quad St(x) = \{0\}, \quad O(x) = \{x + n\}_{n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$$

поэтому $\mathbb{R}$ не орбита - ее разбитие на непересекающиеся $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

$$\text{элемент } x \mapsto O(x) \quad \leftarrow \text{группа вычетов}$$

$$\begin{array}{ccc} p & \searrow & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{r} & S^1 \\ & \nearrow & \text{дискретно} \end{array}$$

p, q -образы то δ -элементы.

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \{x + n\}_{n \in \mathbb{Z}} = O(x)$$



$$n \mapsto (x + n) \quad n \in \mathbb{Z}$$

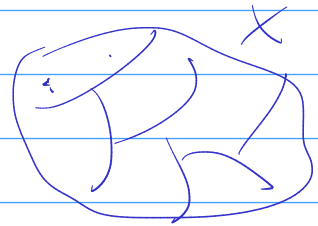


Λέμε H είναι $G \xrightarrow{h} X$ -σφ.
 $\forall g \in G \quad \forall x, y \in G$ τα ορίστη

② μ ίσχυει ποτέ
 X με ορίστη τους

① ας με κερτίστη $O(x) \cap O(y) = \emptyset$
 ας τρέβη $O(x) = O(y)$

③ $h(gx) = y \in O(x) \in \text{orbit}$

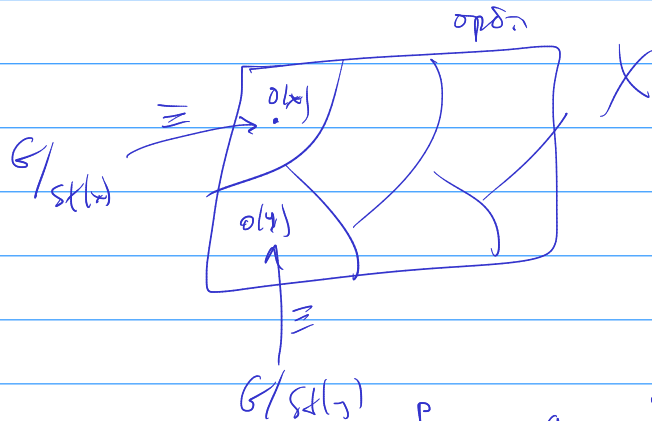


③ • $x \in O(x) \quad x = e \cdot x$

• $y \in O(x) \quad y = gx \Rightarrow$

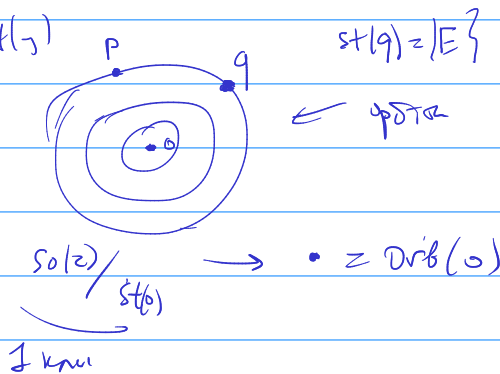
$g^{-1}y = g^{-1}gx = e \cdot x = x \Rightarrow x \in O(y)$

• $y \in O(x), z \in O(y) : y = gx, z = hy \Rightarrow z = hy = h(gx) = (hg)x \Rightarrow z \in O(x)$



$SO(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ induced

$St(0) = SO(2)$



$SO(2)/St(0) \rightarrow \bullet = \text{Dir}(0)$
 $\downarrow$ know

$SO(2) \rightarrow O(g)$
 $\downarrow$ $SO(2)/\{E\}$
 $\uparrow$ $St(g)$

Гомоліогія

G - група

Γ - топологія на G :

$\mu: G \times G \rightarrow G$ - мультиплікація

інверсія $\gamma: G \rightarrow G$
 $g \rightarrow g^{-1}$

① (G, μ, γ) - топологічна група якщо μ, γ - неперервні

• $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R} \quad (t, x) \rightarrow x+t \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \quad x \rightarrow -x \quad \mathbb{R}$ - топ. група

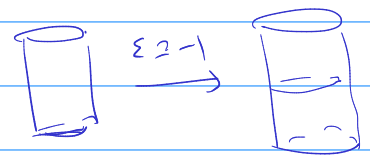
② G - топ. група і X - топ. простір.
якщо $G \xrightarrow{\mu} X$ має неперервну, сим-
 $\mu: G \times X \rightarrow X$ - неперервна бієкція.

• $g \in G \quad L_g: X \rightarrow X \quad L_g(x) = \mu(g, x)$ - неперервна

$L_g: X \rightarrow g \times X \hookrightarrow G \times X \xrightarrow{\mu} X$
 L_g - бієкція + $L_{g^{-1}}$ - обернена до $L_g \Rightarrow L_g$ - гомеоморфізм

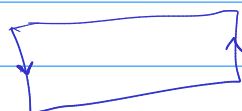
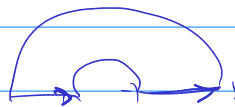
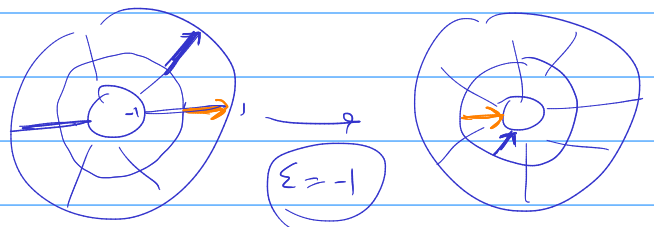
$\left[X \xrightarrow{p} X/G \right]$ - мультисорт простір із гомеоморфізмом

$\mathbb{Z}_2 \times \underbrace{\left(S^1 \times [-1, 1] \right)}_C \xrightarrow{\mu} \underbrace{S^1 \times [-1, 1]}_C$



$\mu(\varepsilon, z, t) = (\varepsilon z, \varepsilon t)$

$C/\mathbb{Z}_2$ - циліндр



поворот на 180° і
"вдворіть зворот"

$C \rightarrow C/\mathbb{Z}_2 \cong M_0$

$$C \times C \supset Y_2 \left\{ \begin{array}{l} ((z, t), (-z, -t)) \\ ((z, t), (z, t)) \end{array} \right\} \xrightarrow{\varphi} \{\pm 1\}$$

$$\varphi((3, 1), (-2, -1)) = -1$$

$$\varphi'((z+1)(z+1) \mid 1 \mid 2 \mid 1)$$

$C \approx Y_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 7x \end{pmatrix} \right\}$ $Y_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ -7x \end{pmatrix} \right\}$

common $\nearrow$ $\nwarrow$ gläserner Y

$V_0 \cap V_1 = \emptyset$ so $\mathbb{R}^2$ has no U_{reg} , so

$Y_2 \cup Y_1$ - partitioned solution

Def: φ -wert $\varphi^{-1}(-1) = Y_1$, $\varphi^{-1}(1) = Y_0$.

Нема Нема G - групује узме сва Hilb_n
 — Hilb на $\text{Spec } k$. Hilb_n X
 $\mu: G \times X \rightarrow X$

Иногда, из-за некорректных данных!

• G Chirale X - rac. (meso)

$G \overset{\mu}{\curvearrowright} X$ - непрерывное гл. топ. гр G и топ. пространство X

G - гл. непрерывное поглощение, если выполняется

① μ -близна гл.

т.е. $\forall x \in X \quad G \rightarrow O(x) \quad g \mapsto gx$ - действие

закрепа $\forall y \in O(x) \quad \exists! g \in G : y = gx$

Рассмотрим множество

$$Y = \{ (x, y) \mid y \in O(x) \} \subset X \times X$$

где выполнено отображение

$Y \xrightarrow{\varphi} G$ так, что

$$y = \underbrace{\varphi(x, y) \cdot x}_{\text{групповое действие}} \quad \forall (x, y) \in Y$$

② Выкажется, что $\varphi : Y \rightarrow G$ было непрерывным.

Хьюзеплер

расстояние пространства

При этом отображение

$p : X \rightarrow X/G$ называют глобальным G -разматыванием.

Пример $\mu : G \times G \rightarrow G$ - отображение умножения - не было гл. G не ком.

Если G -топ. гр. $\Leftrightarrow \mu$ - непрерывное

μ -близна и транзитивна гл.

$$x, y \in G \quad y = (y \cdot x^{-1}) \cdot x$$

① $x, y \in$ одн. орбиты (гл. транзитивна)

② $x = gx \Rightarrow g = xx^{-1} = e$ (гл. близна)

$$G \times G \supset Y = \{ (g, h) \mid h \in O(g) \} = G \times G \xrightarrow{\varphi} G$$

x, y

$$y = \varphi(xy) \cdot x$$

$$y x^{-1}$$

$$\varphi : G \times G \rightarrow G$$

$$\varphi(xy) = y x^{-1} - \text{непрерывное}$$

$$\varphi: G \times G \xrightarrow{pr_2 \times (id - pr_1)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

$$(x, y) \mapsto (y, x^{-1})$$

тогда $G \xrightarrow{\mu} G$ — левая г.е.

$p: G \rightarrow G/G = \bullet$ — левые G -связывающие
на $\bullet$

Пример 2 Тривиальное левое г.е.

Пусть P — топологич. пространство G -мод. пространства
 $X = G \times P$

$$\mu: G \times X \rightarrow X \quad G \times (G \times P) \xrightarrow{\mu} G \times P$$

$$g \cdot (h, x) \mapsto (gh, x)$$

Пусть μ — левое г.е.
• транзитив?

$$g(h, x) = (h, x) \quad \text{т.е.}$$

$$g(h, x) = (gh, x) \Rightarrow gh = h \Rightarrow g = e$$

$$O(h, x) = G \times x$$

$$(G \times P)/G \cong P$$

$p: G \times P \rightarrow P$ — левое
 $(g, x) \mapsto x$ G -связывающее.
тоже верно тривиальное.

$$Y = \{ (g, x), (h, x) \mid (h, x) \in O(g, x) \}$$

$$(h, x) \in O(g, x) = (kg, x) \Rightarrow h = kg$$

$$y = x$$

$$Y = \{ ((g, x), (h, x)) \mid (h, x) \in O(g, x) \} \subset G \times P \times G \times P \cong G \times G \times P \times P$$

$$g \times x \quad h \times x$$

$$Y = G \times G \times \Delta_{P \times P} \xrightarrow{\varphi} G$$

$$(g, h, x) \mapsto hg^{-1}$$

— непереходное.

↑

Изоморфизм грі

Нехай $\mu: G \times X \rightarrow X$ і $\gamma: G \times Y \rightarrow Y$ - грі ліній грі

при G . Для відображення $\varphi: X \rightarrow Y$ назові G -морфізмом якщо $\forall g \in G \forall x \in X$

$$\boxed{\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)} \quad (*)$$

G -линійність

$$\varphi(\mu(g, x)) = \gamma(g, \varphi(x))$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \mu_g \downarrow & & \downarrow \gamma_g \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{комутативна діаграма} \\ \text{! } \lambda_g \end{array}$$

Лема G -грі утворена категорія

Зображення можна розглядати як ізоморфізм грі

- Нехай G -грі X і Y та $\varphi: X \rightarrow Y$ - ізоморфізм грі. Тоді можна визначити $\varphi^*/\mu: G \times Y \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \mu_g \downarrow & & \downarrow \varphi^*/\mu_g \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \quad \varphi^*/\mu_g = \varphi \cdot \mu_g \cdot \varphi^{-1}$$

$$\varphi^*/\mu(g, x) = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(x))$$

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{\varphi} & x \\ g \downarrow & & \downarrow \varphi(g) \\ gy & \xrightarrow{\varphi(gy)} & gx \end{array}$$

При цьому $\varphi: X \rightarrow Y \in$ ізоморфізм $G \curvearrowright X$ і $G \curvearrowright Y$ G -морф і φ^{-1} тож G -морфізм.

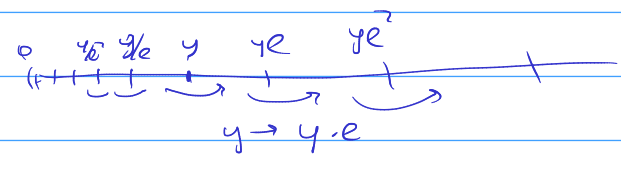
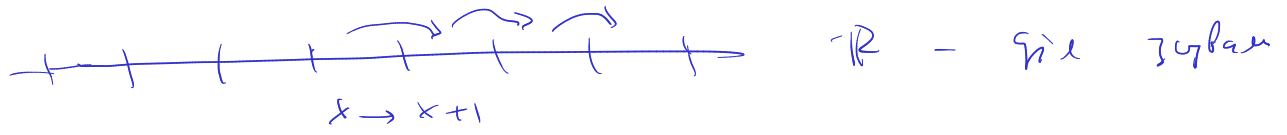
Приклад

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R} \quad \mu(n, x) = x + n \quad \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$$

$$\varphi(x) = e^x$$

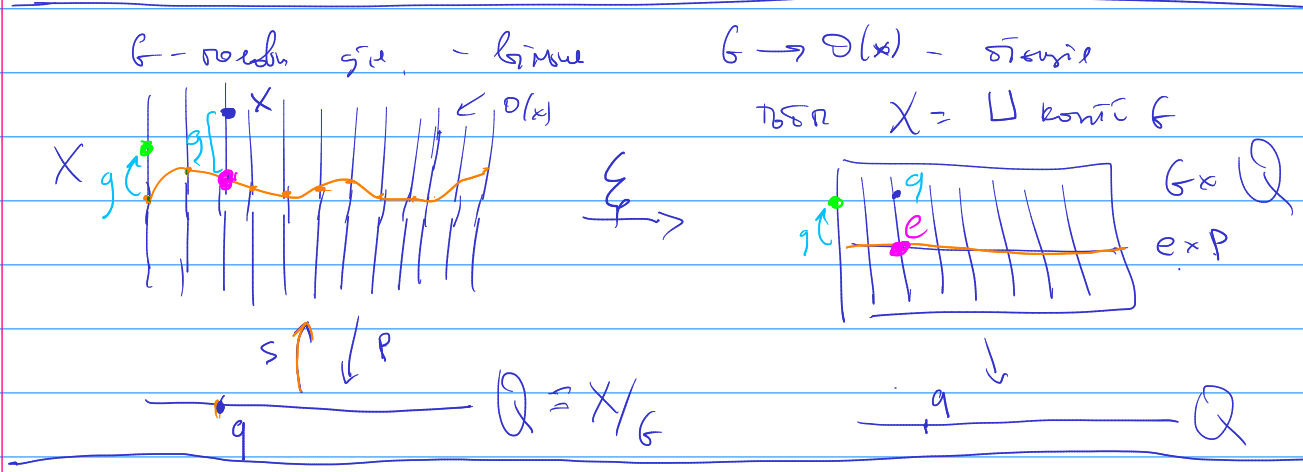
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\varphi^*\mu} \mathbb{R}_+ \quad (n, y) \mapsto e^{n \ln(y) + y} = e^{n \ln y} \cdot e^y = y^n \cdot e^y$$

2

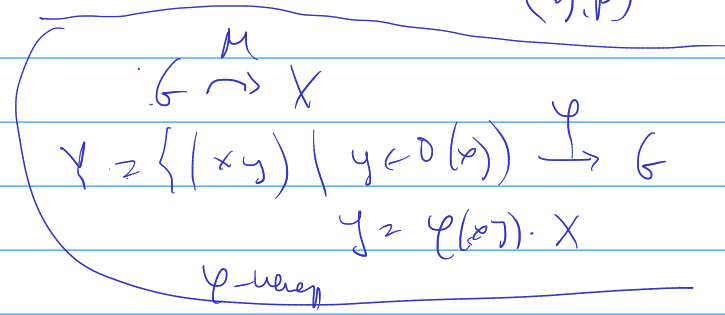
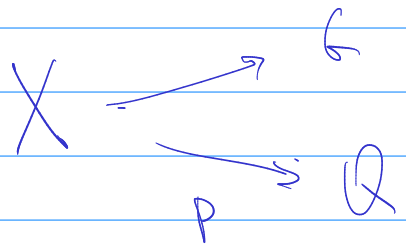


Теорема Если $G \xrightarrow{M} X$ - ровное гл.е., то $p: X \rightarrow X/G$ - универсальное
 Приложение, что p есть непрерывный гомоморфизм
 тогда $\exists$ $s: X/G \rightarrow X$ так, что $ps = id_{X/G}$

Для μ изоморфизма отображений гл.е. $G \times (G \times P) \rightarrow G \times P$
 $g(hx) \mapsto (gh, x)$.



Треба показ. $X \xrightarrow{\xi} G \times Q$, что $\xi(x) = (g, p)$
 где $p(x) = h \xi(x) = h(g, p) = (hg, p)$



$$X \ni x \mapsto \varphi(s(p(x)), x) \in G$$

$$\xi(x) = \left(\varphi(s(p(x)), x), p(x) \right)$$

$$\xi(g \cdot x) = g \cdot \xi(x) \quad - ?$$

$$\xi(gx) = \left(\varphi[\xi(p(gx)), gx], p(gx) \right) = \left(\varphi[\xi(p(x)), gx], p(gx) \right)$$

$x \in gx$ -
 ηαμηνό συντίω
 ορδτη
 το $p(x) = p(gx)$

$$gx = \gamma \cdot s(p(x))$$

$$s_p(x) \longrightarrow x \longrightarrow gx$$

$$\varphi(s_p(x), x) \stackrel{g}{\longrightarrow}$$

$\geq$

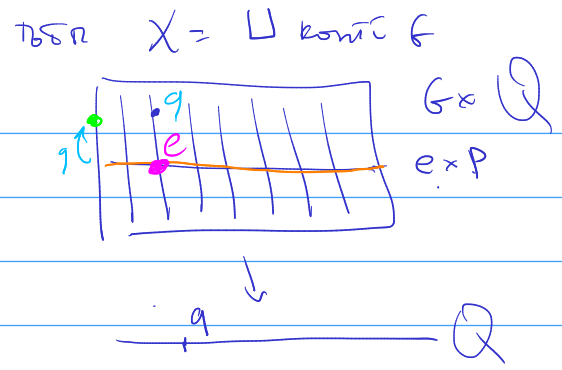
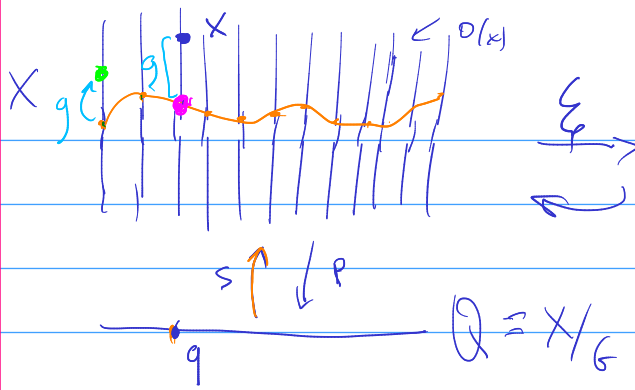
$$\gamma = g \cdot \varphi(s_p(x), x)$$

$$= \left(g \cdot \varphi(s_p(x), x), p(x) \right) =$$

$$g \cdot \left(\varphi(s_p(x), x), p(x) \right) = g \cdot \xi(x).$$

$$\varphi(x, gy) =$$

$$= g \cdot \varphi(x, y)$$



$$\xi^{-1}: G \times Q \rightarrow X$$

$$(g, y) \rightarrow g \cdot s(y)$$

$$G \xrightarrow{\pi} X$$

так

неприв $\xrightarrow{\xi}$ лок-прв

$p \rightarrow$ лев X/G -
картина

$$p: X \xrightarrow{p} X/G$$

7 точка находится
замер. при этом
возникает.

$$\dots \rightarrow \pi_1 G \rightarrow \pi_1 X \rightarrow \pi_1 X/G \rightarrow \pi_1 G \rightarrow \dots$$