Групи Лі $=$ $\underbrace{\text{група} + \text{топологія}}_{\text{Топологічні групи.}}$ $+$ структура многовиду.

Група G.

G, $\bullet$ - бінарна операція

① $a\bullet b \in G \ \forall a,b \in G$

② $e \in G$ - нейтральний $ae = a = ea \ \forall a \in G$

③ $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

④ $\forall a \ \exists \ a^{-1} \in G \quad aa^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$

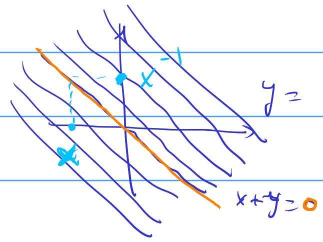
$\mu : G\times G \to G$

$\mu(a,b) = a\bullet b$

$\nu : G \to G$

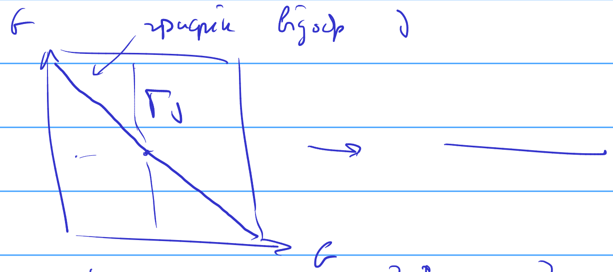
$\nu(a) := a^{-1}$

① $(\mathbb{R}, +)$ $\quad \mu : \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R} \quad \mu(x,y) = x+y$



② $\nu(\nu(a)) = (a^{-1})^{-1} = a \quad \nu\circ\nu = id_G \quad \nu$ - "інволюція"

$G\times G \to G$



$\Gamma_\nu = \{ (x, \nu(x)) \in G^2 \mid x \in G \}$

$x \quad x^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{G}_{ab}\times \underbrace{G\times G}_{b\cdot c} \arrow[r, "id_G\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times id_G"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}$$

$a \quad b \quad c$; $\quad a \quad b\bullet c$

$ab \quad c$

$a\cdot(bc) = (ab)\bullet c$ ← асоціативність

Топологічна група.

(G, τ) $\quad \tau$ - сім'я підмножин в G

τ - називається топологією на G, якщо

① $\emptyset, G \in \tau$ ② $\forall U, V \in \tau \Rightarrow U\cap V \in \tau$ ③ $\forall \{U_i\} \subset \tau \Rightarrow \bigcup U_i \in \tau$

$$\Big(G,\ \underbrace{\tau}_{\text{топологія}},\ \underbrace{\mu, \nu}_{\text{структура групи}} \Big)$$

$\mu: G\times G \to G$ — множення

$\nu: G \to G$ — взяття обернен.

(G, τ, μ, ν) — топологічна група, якщо μ і ν — неперервні в топологіях $\tau\times\tau$ і τ

$\tau \ni V$, $U\times V$, $G\times G$, $U\in\tau$

[$f: X^{\tau} \to Y^{\sigma}$ — відобр. між топ. просторами

f — неперервне, якщо $f^{-1}(\sigma)\subset\tau$ $\quad \forall V\in\sigma \quad f^{-1}(V)\in\tau$

(G,τ) — многовид C^k,
(G,μ,ν) — група

| (G,τ,μ,ν) — група Лі, якщо μ, ν — C^k

(G,τ,μ,ν) — топол. група $\quad \mu: G\times G\to G$, $\quad \nu: G\to G$

① Зсуви по групі

$\forall g\in G \quad L_g, R_g: G\to G$

лівий: $L_g(h) = g\cdot h = \mu(g,h)$ — зсув

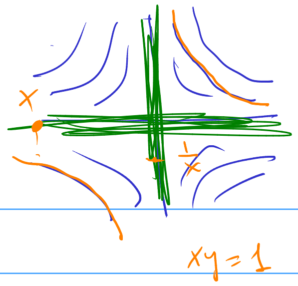
правий: $R_g(h) = h\cdot g = \mu(h,g)$

Приклад: ① $(\mathbb{R},+)$ $\quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{R}\xrightarrow{\nu}\mathbb{R}$ $\quad \left.\begin{array}{l}\mu(x,y) = x+y\\ \nu(x) = -x\end{array}\right]$ $\quad \mathbb{R}$ — многов. $\quad \mu, \nu\in C^\infty$

$\mathbb{R}$ — група Лі

② $(\mathbb{R}^n,+)$ $\quad \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\quad \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $\quad \left.\begin{array}{l}(x,y)\to x+y\\ x\to -x\end{array}\right\}\in C^\infty$ $\quad \mathbb{R}^n$ — група Лі

③ $(\mathbb{R}\backslash 0, \cdot)$ $\quad (\mathbb{R}\backslash 0)\times(\mathbb{R}\backslash 0)\to\mathbb{R}\backslash 0$, $\quad \mathbb{R}\backslash 0\to\mathbb{R}\backslash 0$ $\quad (x,y)\to x\cdot y$, $\quad x\to \frac{1}{x}$



$(\mathbb{R},+)$ $\quad L_g(x) = g+x = x+g = R_g(x)$

① Якщо G – комутативна, то $L_g = R_g \quad \forall g \in G$

② $L_g \circ L_h(x) = L_g(hx) = ghx = (gh)\cdot x = L_{gh}(x)$

$R_g \circ R_h(x) = R_g(xh) = xhg = x(hg) = R_{hg}(x) \qquad (x)R_g$

$L_g \circ L_h = L_{gh} \qquad R_g \circ R_h = R_{hg}$

③ $L_e(x) = x = R_e(x) \quad L_e = R_e = id_G$

④ $L_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ L_{g^{-1}} = L_e = id \Rightarrow$ L_g – бієкція при чому $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$

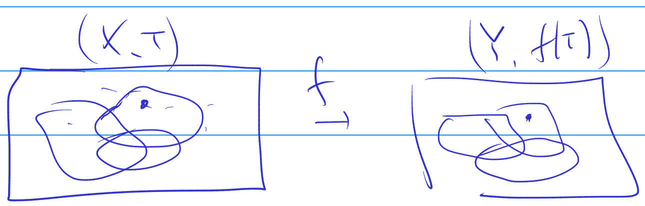
$L_g(x) = g+x = y \qquad L_g^{-1}(y) = -g+y = L_{g^{-1}}(y)$

⑤ (G,T) $\quad L_g : G \xrightarrow{x \to (g,x)} G\times G \xrightarrow{M} G$ $\quad$ в топол. групі L_g R_g – неперервні відображення

$\mathrm{Const}_g \times id_G$

L_g R_g – неперервні бієкції, а їх обернені $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ $\quad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ також неперервні

тобто L_g і R_g – це гомеоморфізми



$G = \{0,1,2\}$

$x+y \mod 3$

$1+2=0$

$G \longrightarrow \{a, b, c\} = H$ $\quad$ $a+b=c$, $\quad b+c=a$

($a \leftarrow 0$, $b \leftarrow 1$, $c \leftarrow 2$)

Наслідки ① Топ. група "однорідна", тобто $\forall\, x, y \in G$ $\exists$ гомеоморфізм $\varphi: G \to G$ такий, що $\varphi(x) = y$

$\Downarrow$ $(y x^{-1}) x = y$ $\quad \varphi = L_{yx^{-1}}$ $\quad \Uparrow$

або $x (x^{-1} y) = y$ $\quad \varphi = R_{x^{-1}y}$

Лема Якщо G — група Лі, то L_g, R_g — дифеоморфізми

Наслідок Нехай G — топол. група. Тоді наст. умови еквівал.

① G — є T_1 простором

② кожна точка $a \in G$ є замкненою множиною

③ $\{e\}$ є замкненою множиною

$\Downarrow$

① $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ②

② $\Rightarrow$ ① Нехай $\{a\}$ — замкнен. $\overline{\{a\}} = \{a\}$

і $b \in G$ нехай $\varphi = L_{ba^{-1}}$ — гомеоморфізм

$\varphi(a) = b$

$\varphi(\{a\}) = \{b\}$

оскільки $\{a\}$ — замкнен. то $\varphi(\{a\})$ — теж замкнена.

G — T_1 екв.
- $\forall\, x, y \in G$ $\exists$ окол. U_x і U_y: $x \notin U_y$, $y \notin U_x$
- $\forall\, \{x\}$ є замкненою
- $\forall\, \{x\} = \bigcap_{x \in U \in \tau} U$

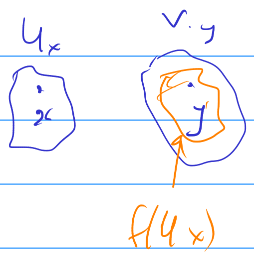
$\Uparrow$

$f: X \to Y$ $\quad x \in X$ $\quad$ неп. f в т. x

$\forall\, U_x \quad f(U_x) \subset V_{f(x)}$ ~

$\forall\, V_{f(x)} \quad f^{-1}(V_{f(x)})$ — окіл т. x $\quad +$

$\forall\, V_{f(x)} \; \exists\, U_x : \; f(U_x) \subset V_{f(x)}$



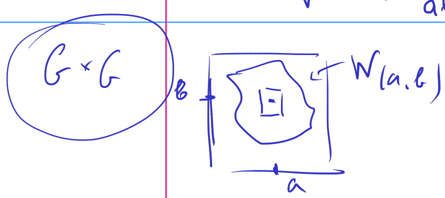
$\mu: G \times G \to G$ — множення $\qquad c = a \cdot b = \mu(a, b)$

Що означає неперервність μ в т. (a, b)?

$\mu(a, b) = c \qquad (a, b) \to a \cdot b$

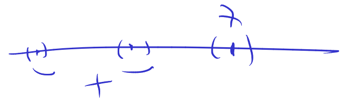
$\forall\, W_{ab} \; \exists\, W_{(a,b)} : \; \mu(W_{(a,b)}) \subset W_{ab}$

$W_{(a,b)} \supset U_a \times V_b \qquad \mu(U_a \times V_b) \subset W_{ab}$



$\boxed{U_a \cdot V_b \subset W_{ab}}$

Приклад. $5+2=7$ $(\mathbb{R},+)$



$$W_7=(6{,}8\ ,\ 7{,}2)$$

$$U_5=(4{,}9\ ,\ 5{,}1) \qquad V_2=(1{,}9\ ,\ 2{,}1)$$

$$U_5+V_2=W_7$$

$$(V_{-5})^{-1}=-(V_{-5})$$

• $\vartheta(5)=-5$ $\qquad V_{-5}$ $\quad \exists\, U_5 :\ \vartheta(U_5)\subset V_{-5}$

$(-6,-4)$ $\qquad (4,6)$ $\qquad (4{,}5\ ,\ 5{,}1)$

$\vartheta : G\to G$ — непер. $\qquad \vartheta(a)=b=a^{-1}$

$\forall\, V_b\ \exists\, U_a\ \ \vartheta(U_a)\subset V_b$ — непер ϑ в т. a

$$\boxed{U_a^{-1}\subset V_{a^{-1}}}$$

Приклад $x=ab^{-1}cd^2$ $\quad \forall\, V_x\ \exists\, U_a\ U_b\ U_c\ U_d$:

$$U_a\cdot(U_b)^{-1}\cdot U_c\cdot(U_d)^2\subset V_x$$

$(U_b)^{-1}$ — окіл т. b^{-1}

• $e\cdot e=e$ $\qquad\qquad e^{-1}=e$

$\forall\, W_e\ \exists\, U_e$ $\boxed{U_e\cdot U_e\subset W_e}$ $\qquad W_e$ $\quad (W_e)^{-1}$ — окіл e

$=\{ab \mid a,b\in U_e\}\neq\{a^2 \mid a\in U_e\}$ $\qquad \Downarrow$

$V_e=W_e\cap(W_e)^{-1}$ — "симетричний" окіл e

$$\boxed{V_e^{-1}=V_e}$$

• $g\in G$ $\quad A\subset G$ $\qquad gA=L_g(A)=\{ga \mid a\in A\}$

$$Ag=R_g(A)=\{ag \mid a\in A\}$$

Наслідок. Якщо $A\subset G$ — замкнене (відкрите) $\forall\, g\in G$ Ag і gA — також замкнені (відкриті)

Наслідок. Нехай $\beta=\{U_i\}$ — локальна база топології в e. Тоді $\forall\, g\in G$ $\quad g\beta=\{gU_i\}$ — лок. база в т. g $\qquad \beta g=\{U_i g\}$

U_e - окіл e $\qquad$ gU_e - окіл т. g

Лема Нехай U_e - $\forall$ окіл e, і $A \subset G$ - підмножина. Тоді

$$\overline{A} \subset U_e \cdot A \qquad \overline{A} \subset A \cdot U_e$$

$\Downarrow$

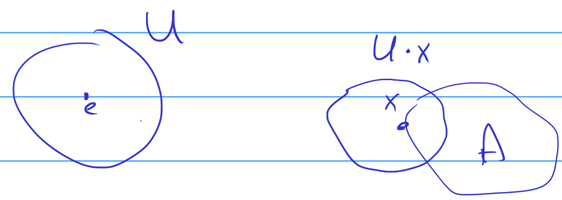
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Т. } x \in G \text{ - т. дотику для } A\text{, якщо } \forall \text{ окіл т. } x \ U_x \\ \qquad U_x \cap A \neq \emptyset \\ \overline{A} \text{ - це сукупність всіх точок дотику } A.\end{array}}$$

Покажемо, що $\overline{A} \subset \overset{=U_e}{U} \cdot A$

Нехай $x \in \overline{A}$. Потрібно показати, що $x = u \cdot a$, де $u \in U$, $a \in A$.

Розглянемо $V = U^{-1} \cdot x$ - це окіл x. Оскільки x - т. дотику для A,

то $U^{-1}x \cap A \neq \emptyset$ $\quad \exists\ a = u^{-1} \cdot x \Leftrightarrow \underline{ua = x}$ $\quad \Uparrow$

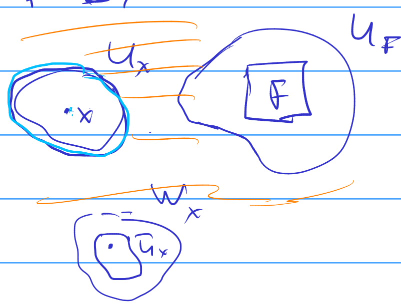


Лема Нехай G - топологічна група. Тоді G є T_3 - простором; (хоча може не бути ні T_0, T_1, T_2)

$\forall x \in G$ $\forall$ замкненої множини $F \subset G \setminus x$ $\exists$ відкриті околи

$$U_x \quad U_F : \quad U_x \cap U_F = \emptyset$$

$$T_3 : \forall x \ \forall \underset{\overset{\shortparallel}{G \setminus F}}{W_x} \ \exists U_x : \overline{U}_x \subset W_x$$

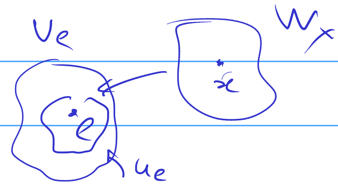


$\Downarrow$ Нехай W_x - окіл т. x

$\exists V_e : xV_e = W_x$

$ee = e \Rightarrow \exists U_e \cdot U_e \subset V_e$

$x U_e \cdot U_e \subset x \cdot V_e = W_x$



$eex = x$ $\qquad \exists\ U_e \cdot \underbrace{U_e x}_{A = U_x} \subset W_x$

$\overline{U}_x \subset U_e U_x \subset W_x$ $\quad \Uparrow$

Примеры $\mathbb{R}$, $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непр $\qquad$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\{\emptyset, \mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ $\qquad$ $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}$ $\quad T = 2^{\mathbb{R}}$ — дискр $\qquad$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

дис

Алгебр топол $\qquad$ Топол алгебра