$\underbrace{(G,\ \tau,\ \mu,\ \nu)}$ $\mu: G\times G \to G$ множення $\nu: G\to G$ взяття оберненого τ – топологія на G

Топологічна група. неперервні відносно τ

$L_g\ R_g: G\to G$ $L_g(h) = gh$ $R_g(h) = hg$

ліві праві зсуви

① $L_g\ R_g$ – гомеоморфізми $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$

② $abc^{-1} = d$ то з неперервності μ і ν $\Rightarrow$ $\forall$ окол. U_d $\exists$ ок. $U_a\ U_b\ U_c$

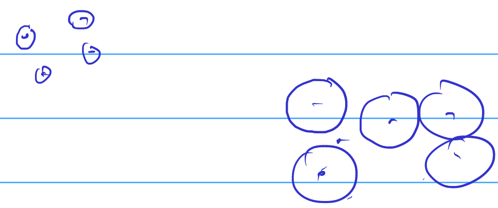
$U_a\cdot U_b\cdot U_c^{-1} \subset U_d$

$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c^{-1} \in$

③ $A\subset G$ $\forall$ підмножини і U – окіл e то $\bar A \subset AU \cap UA$

∃ Приклади [$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

$A\subset X$ – всюди щільне $\forall a\in A$ U_a : $\bigcup U_a \neq X$]



$AU = \bigcup\limits_{a\in A} aU$

④ $A\subset G$ – всюди щільне $\bar A = G$ то $\forall$ околу U_e :

$G = \bar A \subset A\cdot U_e$. $G = \bigcup\limits_{a\in A} aU_e$

⑤ $\forall$ топ. групи G є T_3 простором $\overline{V_x} \subset V_x\ V_x \subset U_x$

• $\forall x\in G$ $\forall$ окол U_x $\exists V_x$: $x\in \overline{V_x} \subset U_x$ $(ee=e)$

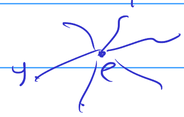
• $\forall x\in G$ $\forall$ замкн $F\subset G$ $x\notin F$ $\exists U_x\ U_F$: $U_x\cap U_F = \emptyset$

⑥ ⓐ $\bar e = \overline{\{e\}}$ ⓑ компонента зв'язності e, G_e

O_e ⓒ компонента лінійної зв'язності PG_e

$\{y\in G \mid \exists\ \gamma: [0,1]\to G,\ \gamma(0) = e,\ \gamma(1) = y\}$

ⓐ, ⓑ ⓒ – нормальні підгрупи в G.



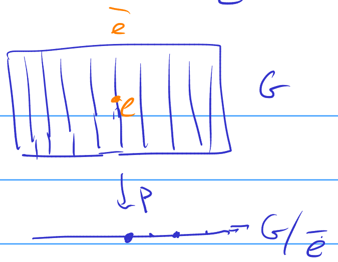
$\bar e \triangleleft G$ $G \xrightarrow{p} G/\bar e$ – введемо фактор топологію на $G/\bar e$

$\boxed{p: G\to H \text{ – фактор : } \forall A\subset H \text{ – замкн} \Leftrightarrow p^{-1}(A) \text{ – замкнене}}$

$p^{-1}(\text{одиниця } G/\bar e) = \bar e$ – замкнене, то одиниця $G/\bar e$ – замкн.

Суміжні класи $G/\bar{e} = \{ g\cdot\bar{e} = L_g(\bar{e}) \mid g\in G\} \Rightarrow G/\bar{e}$ — T_1 простір

замик.



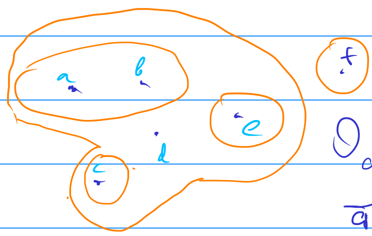
Лема $\mu: G\times G\to G$ і $\nu: G\to G$ індукують операції $\bar\mu$ і $\bar\nu$ на $G/\bar{e}$

$\bar\mu: G/\bar{e}\times G/\bar{e}\to G/\bar{e}$, $\bar\nu: G/\bar{e}\to G/\bar{e}$ — є неперервними в фактор-топології

Тобто $G/\bar{e}$ — топологічна група + T_1-простір $\Rightarrow$ $G/\bar{e}$ — T_1+T_3, $\Rightarrow T_2$
(T_3) регулярний

Для $g\in G$ нехай $O_g = \bigcap\limits_{g\in U\in\tau} U$ — перетин всіх околів т. g

Приклад

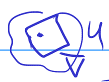


$O_a=\{a,b\}$ $O_e=\{e\}$ $O_d=\{a,b,c,d,e\}$ $O_f=\{f\}$

$\bar a=\{a,b,d\}$ $\bar e=\{d,e\}$ $\bar d=\{d\}$ $\bar f=\{f\}$

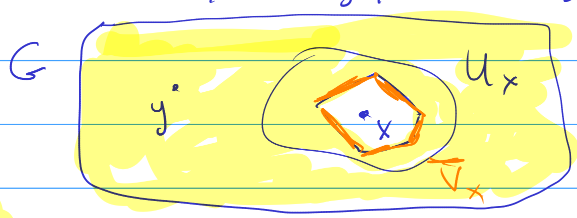
Лема $a\in\bar b \iff b\in O_a$

Лема Нехай G — T_3 простір. Тоді $\forall x$ $\bar x\subset O_x$

 $y\notin O_x$

$\Downarrow$ Нехай $y\in G$ і $\exists U_x: y\notin U_x$. Тоді (T_3) $\Rightarrow \exists V_x\subset U_x$

$x\in V_x\subset\bar V_x\subset U_x$

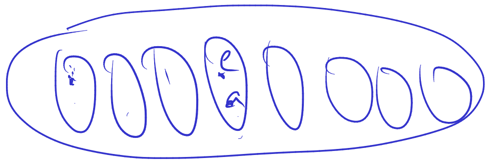


Тоді $G\setminus\bar V_x$ — окіл т. y, який не містить x $\Rightarrow y\notin\bar x$.

$\boxed{y\notin O_x \Rightarrow y\notin\bar x}$ $\iff$ $y\in\bar x\Rightarrow y\in O_x$ $\Uparrow$

Лема Для топологічної групи $\bar g = O_g$ $\forall g\in G$.

Зокрема $\bar e = O_e$



⇓ Ми довели, що $\bar{e} \subset \mathcal{O}_e$.

Доведемо обернене включення.

$\cdot\ x^{-1} \in \mathcal{O}_e \iff x \in \mathcal{O}_e \iff e \in \bar{x}$

$\mathcal{O}_e$ - підгрупа

$L_x(x^{-1}) \in L_x(\mathcal{O}_e)$

$e = xx^{-1}$, $\mathcal{O}_{L_x(e)} = \mathcal{O}_x$

$\Updownarrow$

$e \in \mathcal{O}_x \iff x \in \bar{e}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_e \subset \bar{e}$ $\Uparrow$

$h(y)$, y, x

$\exists\ x \in \bar{y}$ $\quad \exists\ h: x \to y \Rightarrow y \in h(e) \in \overline{h(y)}$

$\cdot\ \forall\ x \in G \quad \bar{x} = \mathcal{O}_x$ - суміжні класи $G/\bar{e}$

$L_x(\bar{e}) = \underset{x\bar{e}}{\bar{x}} \qquad L_x(\mathcal{O}_e) = \mathcal{O}_{L_x(e)} = \mathcal{O}_x$

Лема $\mathcal{O}_e$ - нормальна підгрупа в G.

⇓ Нехай $a, b \in \mathcal{O}_e$. Потрібно показати, що $ab^{-1} \in \mathcal{O}_e$.

$\forall$ окіл e містить a і b. Нехай W — $\forall$ окіл e. Покажемо, що $ab^{-1} \in W$

$e e^{-1} = e \Rightarrow$ для W $\exists$ окіл U одиниці $UU^{-1} \subset W$

але тоді $a, b \in U \Rightarrow ab^{-1} \in UU^{-1} \subset W$.

Таким чином $\mathcal{O}_e$ - підгрупа в G.

Якщо $h: G \to G$ - $\forall$ гомеоморфізм $h(e) = e \Rightarrow h(\mathcal{O}_e) = \mathcal{O}_{h(e)} = \mathcal{O}_e$

$$h(\mathcal{O}_e) = h\Big(\bigcap_{e \in U \in \tau} U\Big) = \bigcap_{e \in U \in \tau} h(U) = \bigcap_{e \in U \in \tau} U$$

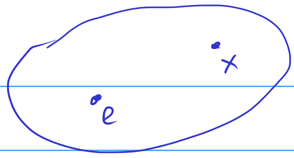
h-гомеом.

Для доведення нормальності $\forall g \in G \quad g\mathcal{O}_e g^{-1} = \mathcal{O}_e$

$h = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g \qquad h(x) = gxg^{-1} \qquad h(e) = e \Rightarrow h(\mathcal{O}_e) = \mathcal{O}_e$

тобто $g\mathcal{O}_e g^{-1} = \mathcal{O}_e$ ⇑

Лема Нехай G – топ. група. Якщо $G - T_0$, то $G - T_1$. $\Rightarrow T_1 + T_3$



O_e O_x

T_0: $\forall x \neq y$: коли б одна з умов $x \notin O_y$ $y \notin O_x$

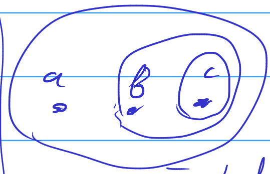
$\exists U_y \not\ni x$ $\exists U_x \not\ni y$

В топ. групі. $\boxed{x \in O_y \Leftrightarrow y \in O_x \text{ бо } O_y \text{ і } O_x \text{ – суміжні класи по } G/O_e}$

T_1 : $\forall x \neq y$ кожне $x \notin O_y$ і $y \notin O_x$

$x \notin O_y \Rightarrow y \in O_x$.

$a < b < c$



$B = \{a b\}$

$O_B = \{b c\}$

$x < y$ $x \in \bar{y}$

$\Updownarrow$

$y \in O_x$

$\Uparrow$

Лема Нехай G – група. $N \subset G$ – нормальна підгрупа, $p : G \to G/N$ – стандартне фактор відображення і $\bar{\tau} - T_1$ топологія на G/N відносно якої G/N – топ. група.

Нехай $\tau = p^{-1}(\bar{\tau})$ – індукована топологія на G.

Тоді G – топ. група, і $N = \bar{e}$ $\Uparrow$

Функ. аналіз H – в. простір $\Rightarrow$ топ. група $(H, +, \cdot)$

$H \times H \to H$ $(a, b) \to a + b$

$\mathbb{R} \times H \to H$ $(t, v) = t \cdot v$ $\Big\}$ – неперервні

$L \subset H$ – (цілий) підпростір H/L $H \to H/L$

норм. підгрупа замкнений

G – топ. група то топ. підгрупа $H \subset G$ – це замкнена підгрупа.

Приклад $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ не є топ. підгрупа $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$ – це топ. підгрупа $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$

Нехай $H \subset G$ – підгрупа, $p: G \to G/H$ – вводимо фактор топологію

↑ ліві або праві суміжні класи

$A \subset G/H$ – відкрита $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(A)$ – відкрита в G.

Лема $p: G \to G/H$ – є відкритим.

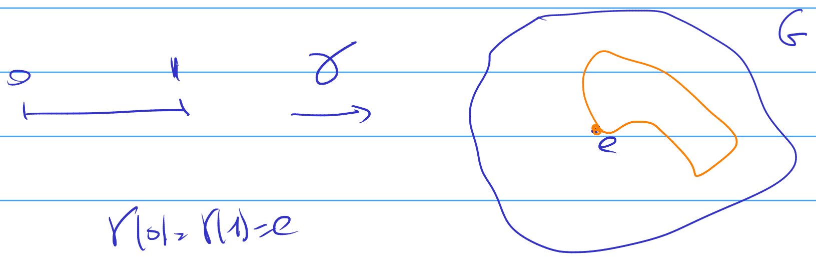
$\Downarrow$

Нехай $U \subset G$ – відкрита підмножина. Треба показати, що $p(U)$ – відкрита в G/H відносно фактор-топології, тобто $p^{-1}(p(U))$ – відкрита в G. Для визначеності нехай G/H – це ліві суміжні класи

$$p^{-1}(p(U)) = UH = \bigcup_{u\in U} u\cdot H = \bigcup_{h\in H} U\cdot h = \bigcup_{h\in H} \underbrace{R_h(U)}_{\text{відкр.}} \text{ – відкрита} \quad \Uparrow$$

H-просторів

Лема Нехай G – топологічна група. Тоді $\pi_1(G,e)$ – комутативна.



$\gamma(0)=\gamma(1)=e$

$\gamma \simeq \gamma'$ якщо вони гомотопні, клас пет. $[\gamma]$

$\exists\ F: [0,1]\times[0,1] \to G$

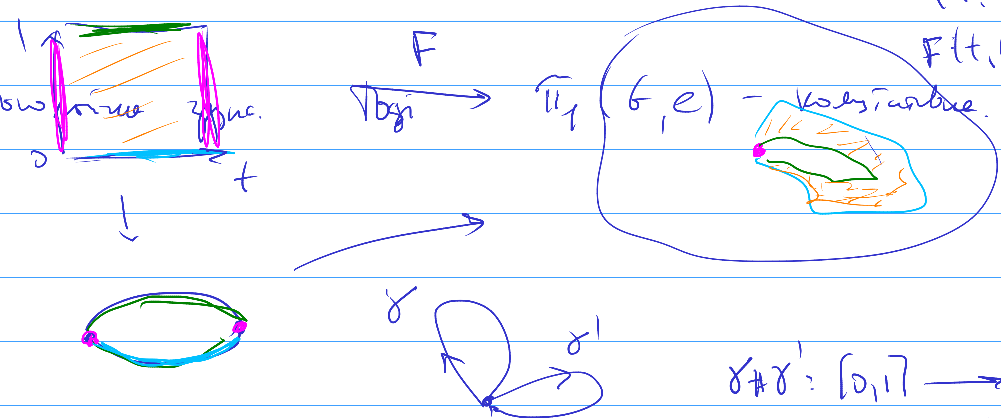
$F(t,0)=\gamma(t)$

$F(t,1)=\gamma'(t)$

$F(0,s)=F(1,s)=e$

$\forall s\in[0,1]$

Нехай G – топологічна група. Тоді $\pi_1(G,e)$ – комутативна.



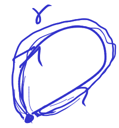
$\gamma\#\gamma': [0,1] \to G$

$$\gamma\#\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t-1) & t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

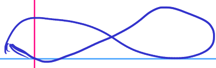
$$\pi_1(G,e) = C\big(([0,1],\{0,1\}),(G,e)\big) \big/ \simeq$$

Тв. Операція # не єдина яка задає структуру групи на множині їх класів гомотопій.

Одиниця — це клас постійної петлі $[0,1] \to e$



$\bar\gamma(t)=\gamma(1-t)$

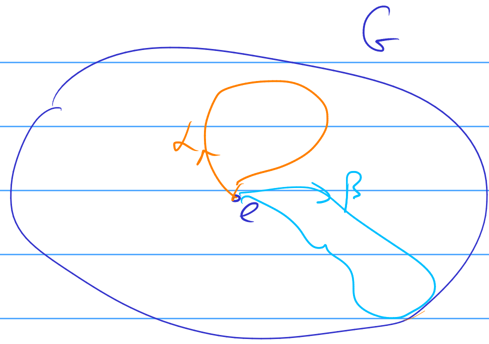
Прик.  $S^1 \vee S^1$ $\quad \pi_1(S^1\vee S^1) = F_2$ — вільна група з 2-ма твірними

Лема. Нехай G — топологічна група. Тоді $\pi_1(G,e)$ — комутативна.

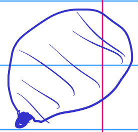
⇓

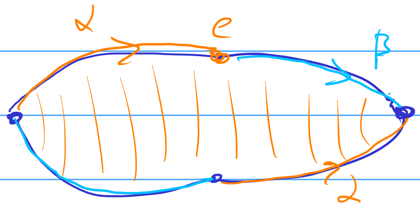
Нехай $\alpha,\beta: [0,1]\to G$ — дві петлі в т. e

$\alpha(0)=\alpha(1)=\beta(0)=\beta(1)=e$.



Покажемо, що $\alpha\#\beta \simeq \beta\#\alpha$

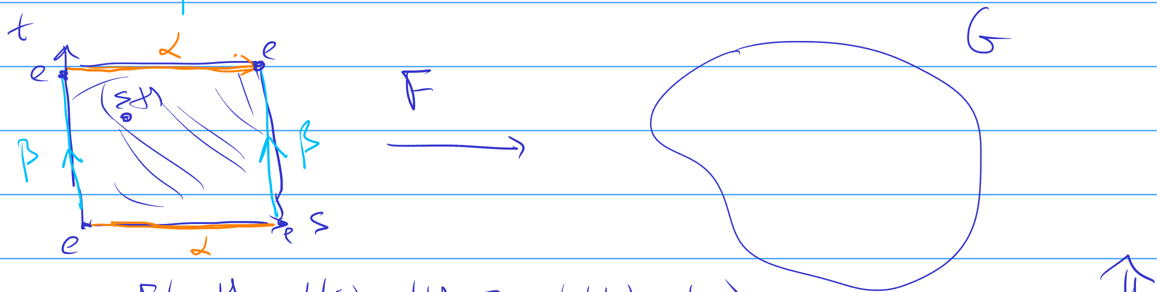




$\gamma \sim \cdot$

$S^1 \to G$

$D^2 \nearrow$



$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \cdot$ $\qquad F(s,t)=\alpha(s)\cdot\beta(t) = \mu(\alpha(s),\beta(t))$

$t=0,1 \quad \alpha(s)\cdot\underset{}{\overset{e}{\beta(0)}} = \alpha(s)$ $\qquad s=0,1 \quad \underbrace{\alpha(s)}_{e}\cdot\beta(t) = \beta(t)$

$\alpha(s)\,\beta(1) =$ $\qquad\qquad 0, \text{або } 1$

Прик. $S^1 = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \middle| \varphi\in[0,2\pi) \right\} = \{|z|=1\}$

$\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$

Зв'язні 3-вимірні групи Лі, компакти $\quad S^3 = \{|q|=1\}\subset \mathbb{H} \quad \mathbb{RP}^3 = SO(3) = S^3/\{\pm1\}$

1 $\quad \mathbb{R} \quad S^1$

2 $\quad \mathbb{R}^2 \quad S^1\times S^1 \quad S^1\times\mathbb{R} \qquad \mathbb{R}\rtimes\mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$H: G \times [0,1] \to G$

$H_0 = id_G \qquad H_1 = e$

$\mathbb{R}^4 \times [0,1] \to \mathbb{R}^4$

$H(x,t) = (1-t) \cdot x$

$t = 0 \qquad H(x,0) = x$

$t = 1 \qquad H$