НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТЕСКО Володимир Анатолійович

УДК 517.515

ПРОСТОРИ ОСНОВНИХ ТА УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ У ЗАДАЧАХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2005

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
Березанський Юрій Макарович,
Інститут математики НАН України,
головний науковий співробітник.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Богданський Юрій Вікторович,
Навчально-науковий комплекс
"Інститут прикладного системного аналізу"
в структурі НТУУ "КПІ", професор;

кандидат фізико-математичних наук
Фінкельштейн Дмитро Леонідович,
Інститут математики НАН України,
молодший науковий співробітник.

Провідна установа
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Захист відбудеться "___" __________ 2005 р. о ___ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України, 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий "___" __________ 2005 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Нескінченновимірний аналіз є одним із актуальних напрямків сучасного функціонального аналізу. За останні десятиліття, завдяки працям С. Альбеверіо, Ю. М. Березанського, Ю. В. Богданського, Ю. Л. Далецького, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. С. Самойленка, А. В. Скорохода, М. Н. Феллера, С. В. Фоміна, Т. Хіди, Л. Штрайта та багатьох інших математиків, цей аналіз істотно просунувся вперед, а його методи значно удосконалились.

Окремим розділом нескінченновимірного аналізу є теорія узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Вона виникла в 70-х роках минулого століття в роботах Ю. М. Березанського, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. С. Самойленка, Т. Хіди у зв'язку з потребами сучасної математичної фізики як математичний апарат для вивчення фізичних систем нескінченного числа часток.

Останнім часом у цій області нескінченновимірного аналізу досягнуто значного прогресу. Головним чином це пов'язано з тим, що на початку 90-х років 20-го століття було запропоновано два підходи до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних: спектральний та біортогональний. Завдяки цьому стало зрозуміло, що велика кількість досить складних співвідношень, записаних для гауссового та пуассонового аналізу (відомих теорій узагальнених функцій нескінченного числа змінних), має простий і загальний характер.

Спектральний підхід запропоновано в 1991 році Ю. М. Березанським і розвинуто у подальших роботах Ю. М. Березанського та його учнів, в першу чергу Є. В. Литвинова. Біортогональний підхід бере початок з роботи С. Альбеверіо, Ю. Г. Кондратьєва, Л. Штрайта 1993 р., інспірованої роботою Ю. Л. Далецького 1991 р. Розробці такого підходу присвячені праці Ю. Г. Кондратьєва, С. Альбеверіо, Ю. Л. Далецького, Л. Штрайта, Ю. М. Березанського, Г. Ф. Уса, М. О. Качановського та інших математиків.

У дисертаційній роботі набув подальшого розвитку біортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Цей підхід вивчається із загальної точки зору, запропонованої Ю. М. Березанським, пов'язаної з сім'єю операторів узагальненого зсуву. Зокрема, детально досліджується ситуація коли відповідне біунітарне відображення є унітарним — розробляється ортогональний підхід. Розвинута теорія застосовується до вивчення пуассонового аналізу білого шуму, побудованого у роботах Й. Іто та І. Кубо і дослідженого у роботах Г. Ф. Уса, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. М. Березанського та багатьох інших математиків.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі функціонального аналізу у відповідності до загального плану досліджень в рамках науково-дослідної роботи “Спектральна теорія операторів та її застосування до задач математичної фізики”.

Номер державної реєстрації 0101U000321.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка ортогонального підходу (на основі біортогонального) до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних; вивчення властивостей основних та узагальнених функцій; побудова операторів узагальненого зсуву на просторах основних функцій; застосування ортогонального підходу до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, такі:

1. Побудовано і досліджено клас операторів на просторах Фока (оператори знищення та народження нескінченного порядку) — аналог диференціальних операторів нескінченного порядку.

2. З використанням цих операторів вивчено простори основних та узагальнених функцій і побудовано сім'ю операторів узагальненого зсуву.

3. Розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних і надано його застосування до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при вивченні вже існуючих та побудові нових прикладів реалізації біортогонального підходу.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження, постановка задач належать науковому керівникові Ю. М. Березанському. Доведення всіх результатів дисертації проведено автором самостійно. У спільних публікаціях особистий внесок дисертанта такий. В оглядовій роботі [1] більшість результатів отримано науковим керівником, вони увійшли в дисертацію лише частково, з відповідним посиланням на [1]. У роботах [2, 5] Ю. М. Березанському належать загальна постановка задач, формулювання ряду теорем і аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на засіданнях семінару відділу функціонального аналізу (керівник: академік НАН України Березанський Ю. М.), київського семінару з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Березанський Ю. М., член-кор. НАН України Горбачук М. Л., член-кор. НАН України Самойленко Ю. С.), німецько-українського семінару з математичної фізики (Київ, 29–30 грудня 2004 р.), а також на конференціях:

- Десята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.)

- Міжнародна конференція пам'яті Б. Я. Буняковського (Київ, 16–21 серпня 2004 р.)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [1–4], препринті [5] та тезах [6, 7].

Структура й об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 75 найменувань.

Загальний обсяг роботи 121 сторінка друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі подано огляд робіт, пов'язаних з темою дисертації, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, проведено стислу анотацію результатів.

У першому розділі викладено основні положення (відомі та нові) біортогонального підходу до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних.

Нехай $\mathbb{N}_p := \{p, p+1, \ldots\}$, $p \in \mathbb{Z}$. Розглянемо фіксовану сім'ю $(N_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ дійсних сепарабельних гільбертових просторів N_p таку, що для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ простір N_{p+1} топологічно та квазіядерно (оператор вкладення є оператором Гільберта–Шмідта) вкладається у простір N_p. Побудуємо ланцюжок

$$N_{-p} \supset N_0 \supset N_p, \tag{1}$$

де N_{-p}, $p \in \mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового N_0 та позитивного N_p. Спарювання між N_{-p} та N_p, породжене скалярним добутком у просторі N_0, будемо позначати $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, і збережемо це позначення для тензорних степенів та комплексифікацій просторів ланцюжка (1).

При кожному $p \in \mathbb{Z}$ визначимо зважений симетричний простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ з вагою $\tau = (\tau_n)_{n=0}^{\infty}$, $\tau_n > 0$, поклавши

$$\mathcal{F}(N_p, \tau) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(N_p)\tau_n$$

$$= \Big\{ f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \,|\, f_n \in \mathcal{F}_n(N_p), \|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)} \tau_n < \infty \Big\},$$

де n-частинковий простір Фока $\mathcal{F}_n(N_p) := N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ є n-й симетричний тензорний степінь $\hat{\otimes}$ комплексифікації $N_{p,\mathbb{C}}$ простору N_p.

Використовуючи ланцюжок (1) та сім'ю $(\tau(q))_{q \in \mathbb{N}_1}$ ваг

$$\tau(q) = (\tau_n(q))_{n=0}^{\infty}, \qquad \tau_n(q) = (n!)^2 K^{qn}, \qquad K > 1,$$

побудуємо ланцюжок

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(-p,-q) & \supset & F(N_0) & \supset & \mathcal{F}(p,q) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathcal{F}(N_{-p},(K^{-qn})_{n=0}^{\infty}) & & \mathcal{F}(N_0,(n!)_{n=0}^{\infty}) & & \mathcal{F}(N_p,\tau(q)), \end{array} \tag{2}$$

який є базовим об'єктом у наших дослідженнях. "Координатно" спарювання $\langle\cdot,\cdot\rangle_{F(N_0)}$ між $\mathcal{F}(-p,-q)$ та $\mathcal{F}(p,q)$, породжене скалярним добутком у просторі $F(N_0)$, допускає зображення

$$\langle\xi,f\rangle_{F(N_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\xi_n,\bar{f}_n\rangle n!,$$

де $\xi=(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(-p,-q)$, $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(p,q)$.

Нехай Q — сепарабельний метричний простір, $C(Q)$ — лінійний простір усіх комплекснозначних локально обмежених неперервних функцій на Q, ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q. Перейдемо до побудови теорії узагальнених функцій змінної $x\in Q$ зі спарюванням, породженим інтегруванням відносно міри ρ.

Нехай $\mathcal{U}_0$ — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q\times\mathcal{U}_0\ni\{x,\lambda\}\mapsto h(x,\lambda)\in\mathbb{C}^1$$

— задана функція. *Припустимо, що для кожного* $x\in Q$ $\;h(x,\cdot)$ *є аналітичною в нулі простору* $N_{1,\mathbb{C}}$ *функцією змінної* λ*, для кожного* $\lambda\in\mathcal{U}_0$ $\;h(\cdot,\lambda)\in C(Q)$ *і* $h(x,0)=1$ *для всіх* x *із* Q*.*

Із аналітичності випливає, що функція h допускає розклад

$$h(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},h_n(x)\rangle$$

за базисними функціями $h_n(x)\in\mathcal{F}_n(N_{-2})$. Використовуючи такі базисні функції, побудовано відображення

$$\mathcal{F}(p,q)\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\mapsto(I^hf)(\cdot):=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n,h_n(\cdot)\rangle\in C(Q).$$

Припускається, що це відображення є ін'єктивним, тобто ядро $\mathrm{Ker}\,(I^h)=\{0\}$.

Виходячи із відображення I^h, визначено сім'ю

$$(\mathcal{H}^h(p,q))_{p\in\mathbb{N}_3,q\in\mathbb{N}_1}$$

гільбертових просторів

$$\mathcal{H}^h(p,q) := I^h(\mathcal{F}(p,q)) \tag{3}$$

$$= \Big\{ f \in C(Q) \,|\, \exists (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(p,q) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x)\rangle,\, x \in Q \Big\}$$

з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} = \|\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(p,q)},$$

індукованою нормою у просторі $\mathcal{F}(p,q)$.

Поряд із функцією h розглянуто функцію

$$\kappa(x,\lambda) = \ell(\lambda)h(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(x)\rangle, \qquad \kappa_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}),$$

де $\ell : N_{1,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^1$ — фіксована аналітична в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$ функція, $\ell(0) \neq 0$.

Встановлено такий результат.

Теорема 1.3.1. *При всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ відображення*

$$\mathcal{F}(p,q) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I^{\kappa} f)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \in C(Q)$$

є ін'ективним.

Використовуючи відображення I^{κ}, визначено сім'ю

$$(\mathcal{H}^{\kappa}(p,q))_{p,q\in\mathbb{N}_3}$$

гільбертових просторів

$$\mathcal{H}^{\kappa}(p,q) := I^{\kappa}(\mathcal{F}(p,q))$$

$$= \Big\{ f \in C(Q) \,|\, \exists (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(p,q) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle,\, x \in Q \Big\}$$

з відповідним скалярним добутком, індукованим скалярним добутком у просторі $\mathcal{F}(p,q)$.

Зв'язок між просторами $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ встановлено у такій теоремі.

Теорема 1.3.2. *Має місце рівність топологічних просторів*

$$\mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3.$$

Точніше, $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ збігаються як множини і

$$c_1 \|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} \le \|f\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} \le c_2 \|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)}$$

для деяких $c_1 > 0, c_2 > 0$ та довільного $f \in \mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

Нехай $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$. *Припустимо, що при всіх $n \in \mathbb{N}_0$ функція*

$$Q \ni x \mapsto \|h_n(x)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \in [0, \infty)$$

є сумовною з квадратом відносно міри ρ і

$$\| \, \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \, \|_{(L^2_\rho)} \le L C^n n!$$

для деяких $L > 0$ та $C > 0$.

Завдяки останньому припущенню відображення

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto Of := f \in (L^2_\rho)$$

визначене і є неперервним. *Будемо вважати, що це відображення є ін'єктивним і множина $O(\mathcal{H}^h(p,q))$ є щільною у просторі (L^2_ρ).*

Побудовано ланцюжок

$$\mathcal{H}^h(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^h(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3, \tag{4}$$

зі спарюванням $\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$ між $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$, породженим скалярним добутком у просторі (L^2_ρ). Тут $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^h(p,q)$.

Виходячи із унітарного оператора $I^h : \mathcal{F}(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q)$, побудовано біунітарну пару (I^h_-, I^h),

$$I^h_- := \mathbb{I}^{-1}_{(L^2_\rho)} I^h \mathbb{I}_F : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q), \tag{5}$$

де $\mathbb{I}_{(L^2_\rho)}$, $\mathbb{I}_F$ — канонічні ізометрії, пов'язані з ланцюжками (4) та (2) відповідно. Розглядаючи простір $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ як I^h_--образ простору Фока $\mathcal{F}(-p,-q)$, отримано зображення

$$\mathcal{H}^h(-p,-q) = I^h_-(\mathcal{F}(-p,-q)) = \big\{\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \,\big| \tag{6}$$

$$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q),\ \|\mathcal{Q}(\xi)\|_{\mathcal{H}^h(-p,-q)} = \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}\big\},$$

де

$$\partial^+(\xi_n) := I^h_- a_+(\xi_n)(I^h_-)^{-1} : \mathcal{H}^h(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q)$$

— образ оператора народження $a_+(\xi_n) : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{F}(-p,-q)$, що діє на довільному векторі

$$\eta = (\eta_m)_{m=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q)$$

за формулою

$$a_+(\xi_n)\eta = a_+(\xi_n)(\eta_0,\eta_1,\ldots) := (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, \xi_n \hat{\otimes} \eta_0, \xi_n \hat{\otimes} \eta_1, \ldots),$$

$$(a_+(\xi_n)\eta)_m := \begin{cases} \xi_n \hat{\otimes} \eta_{m-n} \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), & \text{якщо } m \in \mathbb{N}_n, \\ 0 \in \mathcal{F}_m(N_{-p}), & \text{якщо } m \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_n. \end{cases}$$

З огляду на зображення (3), (6), спарювання між просторами $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$ має такий вигляд:

$$\langle\!\langle \mathcal{Q}(\xi), f \rangle\!\rangle = \langle\!\langle I^h_-(\xi_n)_{n=0}^{\infty}, I^h(f_n)_{n=0}^{\infty} \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle n!,$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \in \mathcal{H}^h(-p,-q), \quad f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in \mathcal{H}^h(p,q).$$

Оскільки простори $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ збігаються, то поряд з ланцюжком (4) побудовано ланцюжок

$$\mathcal{H}^\kappa(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3,$$

який є образом ланцюжка (2) при дії біунітарного відображення (I^κ_-, I^κ), побудованого за правилом (5) (із заміною h на κ).

На просторах основних функцій $\mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q)$ визначено та вивчено сім'ю $(\bar{\kappa}_x(\partial))_{x\in Q}$ операторів знищення нескінченного порядку

$$\bar{\kappa}_x(\partial) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\overline{\kappa_n(x)}) : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q),$$

де

$$\partial(\overline{\kappa_n(x)}) := I^\kappa a_-(\overline{\kappa_n(x)})(I^\kappa)^{-1} : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

— лінійний неперервний оператор, що є образом оператора знищення $a_-(\overline{\kappa_n(x)}) : \mathcal{F}(p,q) \to \mathcal{F}(p,q)$. З'ясовано, що для

$$\kappa(x,\lambda) := \ell(\lambda) h(x,\lambda) = \frac{h(x,\lambda)}{h(e,\lambda)}, \qquad \ell(\lambda) := \frac{1}{h(e,\lambda)}$$

(e — фіксований елемент із простору Q), сім'я $(\bar{\kappa}_x(\partial))_{x\in Q}$ є сім'єю операторів узагальненого зсуву (теорема 1.5.1). Крім того, встановлено такий результат.

Теорема 1.8.1. *Для всіх $p,q \in \mathbb{N}_3$ відображення (так зване C-перетворення)*

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto (\mathsf{C}f)(\cdot) = \int_Q (\bar{\kappa}_\cdot(\partial) f)(y)\, d\rho(y) \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

визначене і є унітарним. Дія C-перетворення така:

$$(\mathsf{C}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \langle f_n, \kappa_n(x)\rangle, \qquad x \in Q.$$

У другому розділі розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Із загальної точки зору отримано ряд результатів, характерних для класичних гауссового та пуассонового аналізу.

Як і вище, нехай Q — сепарабельний метричний простір, ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q, $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$ — відповідний L^2-простір.

Нехай $\mathcal{U}_0$ — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times \mathcal{U}_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$$

— задана функція, яка при кожному $x \in Q$ є аналітичною в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ функцією змінної λ, при кожному $\lambda \in \mathcal{U}_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$ і $h(x, 0) = 1$ для всіх x із Q.

Доведено таку теорему.

Теорема 2.1.1. *Для функцій*

$$\langle \varphi_n, h_n(\cdot) \rangle \in C(Q), \qquad \langle \psi_m, h_m(\cdot) \rangle \in C(Q), \qquad n, m \in \mathbb{N}_0,$$

співвідношення ортогональності

$$\int_Q \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle \overline{\langle \psi_m, h_m(x) \rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n, \overline{\psi_n} \rangle \tag{7}$$

є справедливим тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{N}_2$, $C > 0$, $L > 0$ *такі, що*

$$\| \| h_n(\cdot) \|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} \|_{(L^2)} \leq L C^n n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

і

$$\int_Q h(x, \varphi) \overline{h(x, \psi)} d\rho(x) = \exp \langle \varphi, \overline{\psi} \rangle.$$

Далі, припускається, що функції

$$Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

задовольняють співвідношення ортогональності (7) і їхня лінійна оболонка є щільною у просторі (L^2_ρ).

Побудовано унітарне відображення

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h_\rho f)(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in (L^2_\rho), \tag{8}$$

під дією якого оснащення простору Фока $F(N_0)$ переходить в оснащення простору (L^2_ρ):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(-p,-q) & \supset & F(N_0) & \supset & \mathcal{F}(p,q) \\ & & \downarrow I^h_\rho & & \downarrow I^h_\rho \\ \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q) & \supset & (L^2_\rho) & \supset & \mathcal{H}^h_\rho(p,q), \end{array}$$

де $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^h_\rho(p,q) := I^h_\rho(\mathcal{F}(p,q))$.

Далі, у даному розділі досліджено I^h_ρ-образи операторів вторинного квантування. Зокрема, введено оператори, у термінах яких вдалося побудувати зображення симетричної білінійної форми I^h_ρ-образу оператора вторинного квантування (теорема 2.5.1).

Як відомо, у гауссовому та пуассоновому аналізі важливу роль відіграє розширений стохастичний інтеграл, який узагальнює класичний інтеграл Іто, побудований за вінеровим чи пуассоновим випадковим процесом. Поняття такого інтеграла було введено в 70-х роках минулого століття у роботах М. Хітцуди, Ю. Л. Далецького, С. М. Парамонової, Ю. М. Кабанова, А. В. Скорохода, Р. Кінга. Слід відмітити також нещодавні роботи М. О. Качановського, в яких введено такий інтеграл для гамма-процесу.

В кінці другого розділу введено поняття розширеного стохастичного інтеграла в термінах простору Фока та його оснащення. При функціональній реалізації простору Фока за допомогою відображення I^h_ρ отримано означення розширеного стохастичного інтеграла в термінах простору L^2_ρ та його оснащення (у гауссовому та пуассоновому випадку це означення збігається із означеннями, введеними в згадуваних вище роботах). Зокрема, з'ясовано за яких умов на функцію h цей інтеграл є узагальненням інтегралу Іто, побудованого за випадковим процесом, пов'язаним з h (теорема 2.6.3).

У третьому розділі показано, що Пуассонів аналіз білого шуму вкладається в загальну схему побудови нескінченновимірного аналізу, викладену в другому розділі. Завдяки чому в цьому аналізі одержано ряд нових фактів, в основному пов'язаних з розглядом двох породжуючих функцій (наскільки відомо автору, до цього часу в пуассоновому аналізі розглядали лише одну породжуючу функцію — породжуючу функцію для поліномів Шарльє).

Нехай m — міра Лебега на осі $\mathbb{R}^1$. Покладемо

$$N_0 = L^2(\mathbb{R}^1, dm(t)), \qquad N_p = W^2_{p+1}(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^{p+1} dm(t)), \qquad p \in \mathbb{N}_1,$$

де $W^2_p(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^p dm(t))$ — дійсний ваговий простір Соболева.

Нехай $Q = N_{-1}$, $\rho = \pi$ — міра Пуассона з мірою інтенсивності m на $\mathcal{B}(Q)$, яка на підставі теореми Мінлоса однозначно визначається своїм перетворенням Фур'є

$$\int_Q e^{i\langle \lambda, x\rangle} d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle, \qquad \lambda \in N_1.$$

Доведено, що породжуюча функція

$$h(x,\lambda) = C(x,\lambda) := \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, C_n(x)\rangle$$

для поліномів Шарльє $C_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$ задовольняє припущення розділу 2. Як наслідок, сформульовано таке твердження.

Теорема 3.3.1. *Результати, викладені у розділі 2, є справедливими для пуассонового аналізу з простором $Q = N_{-1}$, мірою Пуассона $\rho = \pi$ та функціями*

$$h(x,\lambda) = C(x,\lambda) := \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle),$$

$$\kappa(x,\lambda) = \chi(x,\lambda) := \frac{C(x,\lambda)}{C(e,\lambda)} = \exp\langle x - e, \log(1+\lambda)\rangle,$$

де e – фіксований елемент із простору Q.

Зокрема, для всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ простори $\mathcal{H}^C(p,q)$, $\mathcal{H}^\chi(p,q)$ збігаються у топологічному сенсі і їх можна розглядати як позитивні по відношенню до нульового $(L^2_\pi) = L^2(Q, d\pi(x))$. Відповідні оснащення мають вигляд:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}^C(-p,-q) & \supset & (L^2_\pi) & \supset & \mathcal{H}^C(p,q) \\
\| & & \| & & \| \\
\mathcal{H}^\chi(-p,-q) & \supset & (L^2_\pi) & \supset & \mathcal{H}^\chi(p,q).
\end{array}$$

Аналогічні результати отримано у випадку, коли Q — простір конфігурацій Γ. Крім того, доведено, що так зване K-перетворення між функціями на просторі скінченних конфігурацій Γ_0 та просторі конфігурацій Γ можна інтерпретувати як унітарний оператор, що діє між певними просторами основних функцій на Γ_0 та Γ (теорема 3.6.1).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджуються простори основних і узагальнених функцій нескінченного числа змінних та оператори на них. Отримано такі результати:

1. Побудовано і досліджено клас операторів на просторах Фока (оператори знищення та народження нескінченного порядку) — аналог диференціальних операторів нескінченного порядку.

2. З використанням цих операторів вивчено простори основних та узагальнених функцій і побудовано сім'ю операторів узагальненого зсуву.

3. Розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних і надано його застосування до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

Список опублікованих робіт здобувача за темою дисертації:

1. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Простори основних і узагальнених функцій, пов'язані з узагальненим зсувом // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 12. – С. 1587–1658.

2. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних та пуассонів аналіз білого шуму // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 12. – С. 1587–1615.

3. *Теско В. А.* Про простори, що виникають при побудові нескінченновимірного аналізу за біортогональною схемою // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 7. – С. 977–990.

4. *Tesko V. A.* A construction of generalized translation operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2004. – Vol. 10, № 4. – P. 86–92.

5. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Одне узагальнення розширеного стохастичного інтеграла. – Київ, 2005. – 35 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2005.2).

6. *Теско В. А.* Про простори, що виникають при узагальненні гауссівського нескінченновимірного аналізу // Тези доп. Десятої Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. П. Кравчука. – Київ: Нац. техн. ун-т України "КПІ", 13–15 травня 2004 р. – С. 527.

7. *Теско В. А.* Про образи операторів вторинного квантування // Тези доп. Міжнародна конференція пам'яті Б. Я. Буняковського. – Київ: Ін-т математики, 16–21 серпня 2004 р. – С. 123.

Автор висловлює щиру та глибоку подяку своєму науковому керівникові Березанському Юрію Макаровичу за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

Анотації

Теско В. А. Простори основних та узагальнених функцій у задачах нескінченновимірного аналізу. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. Інститут математики НАН України, Київ, 2005.

У дисертаційній роботі набув подальшого розвитку біортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. На просторах Фока побудовано і досліджено клас операторів, породжених операторами знищення та народження. З використанням цих операторів вивчено простори основних та узагальнених функцій і побудовано сім'ю операторів узагальненого зсуву.

Розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних і надано його застосування до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

Ключові слова: *простір Фока, простори основних та узагальнених функцій, оператори знищення та народження, оператор узагальненого зсуву, міра Пуассона.*

Tesko V. A. Spaces of test and generalized functions in Problems of Infinite Dimensional Analysis. — Manuscript.

Thesis for the Candidate degree by speciality 01.01.01 — mathematical analysis. Institute of Mathematics of the National Academy of Ukraine, Kyiv, 2005.

The thesis is devoted to the subsequent development of the biorthogonal approach to a construction of the theory of generalized functions of infinite many variables. Operators (on Fock spaces) that generated by the annihilation and creation operators are constructed and studied. Spaces of test and generalized functions are studied with using these operators. A family of generalized translation operators on the test functions spaces is constructed. An orthogonal approach to the construction of the theory of generalized functions of infinite many variables is developed. This approach is applied to the study of the Poissonian white noise analysis.

Key words: *Fock space, spaces of test and generalized functions, annihilation and creation operators, generalized translation operator, Poisson measure.*

Теско В. А. Пространства основных и обобщенных функций в задачах бесконечномерного анализа. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 2005.

В диссертационной работе получил дальнейшее развитие биортогональный подход к построению теории обобщенных функций бе-

сконечного числа переменных. На пространствах Фока построен и исследован класс операторов, порожденных операторами уничтожения и рождения. С использованием этих операторов изучены свойства пространств основных и обобщенных функций и построено семейство операторов обобщенного сдвига. Разработан ортогональный подход к построению теории обобщенных функций бесконечного числа переменных и применен к изучению пуассонового анализа белого шума.

Работа состоит из введения, трех глав, выводов и списка использованных литературных источников. Во введении освещается исторический аспект научных проблем, рассматриваемых в диссертационной работе, формулируется цель работы и дается краткая характеристика ее результатов. В первой главе изложены основные положения (известные и новые) биортогонального подхода к построению теории обобщенных функций бесконечного числа переменных. На пространствах Фока введены и иследованы операторы уничтожения и рождения бесконечного порядка. Изучены свойства пространств основных и обобщенных функций. На пространствах основных функций определено семейство операторов обобщенного сдвига, с использованием которого введено и иследовано так называемое C-преобразование. Во второй главе разработан ортогональный подход к построению теории обобщенных функций бесконечного числа переменных. На пространствах Фока введен расширенный стохастический интеграл и иследован его образ при соответственной функциональной реализации пространств Фока. В третьей главе в качестве примера применения полученных результатов иследуется пуассонов анализ белого шума. Приводится библиография, состоящая из 75 источников.

Ключевые слова: *пространство Фока, пространства основных и обощенных функций, операторы уничтожения и рождения, оператор обобщенного сдвига, расширенный стохастический интеграл, мера Пуассона.*

Підписано до друку 25.04.2005. Формат 60×90/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,23. Умов. друк. арк. 1,12.
Тираж 100 пр. Зам. 85. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.