НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Тeско Володимир Анатолійович

УДК 517.515

ПРОСТОРИ ОСНОВНИХ ТА УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ У ЗАДАЧАХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник —
академік НАН України,
доктор фіз.-мат. наук,
проф. Ю. М. Березанський

Київ — 2005

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Нескінченновимірний аналіз є одним із актуальних напрямків сучасного функціонального аналізу. За останні десятиліття, завдяки працям С. Альбеверіо, Ю. М. Березанського, Ю. В. Богданського, Ю. Л. Далецького, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. С. Самойленка, А. В. Скорохода, М. Н. Феллера, С. В. Фоміна, Т. Хіди, Л. Штрайта та інших математиків, цей аналіз істотно просунувся вперед, а його методи значно удосконалились.

Окремим розділом нескінченновимірного аналізу є теорія узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Вона виникла в 70-х роках минулого століття в роботах Ю. М. Березанського, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. С. Самойленка, Т. Хіди у зв'язку з потребами сучасної математичної фізики як математичний апарат для вивчення фізичних систем нескінченного числа часток.

Останнім часом у цій області нескінченновимірного аналізу досягнуто значного прогресу. Головним чином це пов'язано з тим, що на початку 90-х років 20-го століття було запропоновано два підходи до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних: спектральний та біортогональний. Завдяки цьому стало зрозуміло, що велика кількість досить складних співвідношень, записаних для гауссового та пуассонового аналізу (відомих теорій узагальнених функцій нескінченного числа змінних), має простий і загальний характер.

Спектральний підхід запропоновано в 1991 році Ю. М. Березанським [1] і розвинуто у подальших роботах Ю. М. Березанського та його учнів, в першу чергу Є. В. Литвинова (див., наприклад, [2-11]). Біортогональний підхід бере початок з роботи С. Альбеверіо, Ю. Г. Кондратьєва, Л. Штрайта 1993 р. [12], інспірованої роботою Ю. Л. Далецького 1991 р. [13]. Розробці такого підходу присвячені праці Ю. Г. Кондратьєва, С. Альбеверіо, Ю. Л. Далецького, Л. Штрайта, Ю. М. Березанського, Г. Ф. Уса, М. О. Качановського та інших математиків (див., наприклад, [14-40]).

У дисертаційній роботі набув подальшого розвитку біортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Цей підхід вивчається із загальної точки зору, запропонованої Ю. М. Березанським. Зокрема, детально досліджується ситуація коли відповідне біунітарне відображення є унітарним — розробляється ортогональний підхід. Розвинута теорія застосовується до вивчення пуассонового аналізу білого шуму, побудованого у роботах Й. Іто та І. Кубо і дослідженого у роботах Г. Ф. Уса, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. М. Березанського та багатьох інших математиків.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі функціонального аналізу згідно із загальним планом дослідження в рамках науково-дослідної роботи "Спектральна теорія операторів та її застосування до задач математичної фізики".

Номер державної реєстрації 0101U000321.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка ортогонального підходу (на основі біортогонального) до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних; вивчення властивостей основних та узагальнених функцій; побудова операторів узагальненого зсуву на просторах основних функцій; застосування ортогонального підходу до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, такі:

1. Побудовано і досліджено клас операторів на просторах Фока (оператори знищення та народження нескінченного порядку) — аналог диференціальних операторів нескінченного порядку.

2. З використанням цих операторів вивчено простори основних та узагальнених функцій і побудовано сім'ю операторів узагальненого зсуву.
3. Розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних і надано його застосування до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при вивчення вже існуючих та побудови нових прикладів реалізації біортогонального підходу.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження, постановка задач належать науковому керівникові Ю. М. Березанському. Доведення всіх результатів дисертації проведено автором самостійно. У спільних публікаціях особистий внесок дисертанта такий. В оглядовій роботі [36] більшість результатів отримано науковим керівником, вони увійшли в дисертацію лише частково, з відповідним посиланням на [36]. У роботах [37, 40] Ю. М. Березанському належать загальна постановка задач, формулювання ряду теорем і аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на засіданнях семінару відділу функціонального аналізу (керівник: академік НАН України Березанський Ю. М.), київського семінару з функціонального аналізу (керівники: академік НАН України Березанський Ю. М., член-кор. НАН України Горбачук М. Л., член-кор. НАН України Самойленко Ю. С.), німецько-українського семінару з математичної фізики (Київ, 29–30 грудня 2004 р.), а також на конференціях:

- Десята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.)
- Міжнародна конференція пам'яті Б. Я. Буняковського (Київ, 16–21 серпня 2004 р.)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в роботах [36-39] та препринті [40].

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі викладено основні положення (відомі та нові) біортогонального підходу до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних.

Нехай $\mathbb{N}_p := \{p, p+1, \ldots\},\ p \in \mathbb{Z}$. Розглянемо фіксовану сім'ю $(N_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ дійсних сепарабельних гільбертових просторів N_p таку, що для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ простір N_{p+1} топологічно та квазіядерно (оператор вкладення є оператором Гільберта–Шмідта) вкладається у простір N_p. Побудуємо ланцюжок

$$N_{-p} \supset N_0 \supset N_p, \tag{1}$$

де N_{-p}, $p \in \mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового N_0 та позитивного N_p. Спарювання між N_{-p} та N_p, породжене скалярним добутком у просторі N_0, будемо позначати $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, і збережемо це позначення для тензорних степенів та комплексифікацій просторів ланцюжка (1).

При кожному $p \in \mathbb{Z}$ визначимо зважений симетричний простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ з вагою $\tau = (\tau_n)_{n=0}^{\infty},\ \tau_n > 0$, поклавши

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(N_p, \tau) :&= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(N_p)\tau_n \\ &= \{f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mid f_n \in \mathcal{F}_n(N_p),\ \|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)}\tau_n < \infty\},\end{aligned}$$

де n-частинковий простір Фока $\mathcal{F}_n(N_p) := N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ є n-та симетрична тензорна степінь $\hat{\otimes}$ комплексифікації $N_{p,\mathbb{C}}$ простору N_p.

Використовуючи ланцюжок (1) та сім'ю $(\tau(q))_{q\in\mathbb{N}_1}$ ваг

$$\tau(q) = (\tau_n(q))_{n=0}^{\infty}, \qquad \tau_n(q) = (n!)^2 K^{qn}, \qquad K > 1,$$

побудуємо ланцюжок

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(-p,-q) & \supset & F(N_0) & \supset & \mathcal{F}(p,q) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathcal{F}(N_{-p}, (K^{-qn})_{n=0}^{\infty}) & & \mathcal{F}(N_0, (n!)_{n=0}^{\infty}) & & \mathcal{F}(N_p, ((n!)^2 K^{qn})_{n=0}^{\infty}), \end{array} \tag{2}$$

котрий є базовим об'єктом у наших дослідженнях. "Координатно" спарювання $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{F(N_0)}$ між $\mathcal{F}(-p,-q)$ та $\mathcal{F}(p,q)$, породжене скалярним добутком у просторі $F(N_0)$, допускає зображення

$$\langle \xi, f \rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle n!,$$

де $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q)$, $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(p,q)$.

Нехай Q — сепарабельний метричний простір, $C(Q)$ — лінійний простір усіх комплекснозначних локально обмежених неперервних функцій на Q, ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q. Перейдемо до побудови теорії узагальнених функцій змінної $x \in Q$ зі спарюванням, породженим інтегруванням відносно міри ρ.

Нехай $\mathcal{U}_0$ — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times \mathcal{U}_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$$

— задана функція. *Припустимо, що для кожного* $x \in Q$ $\quad h(x, \cdot)$ *є аналітичною в нулі простору* $N_{1,\mathbb{C}}$ *функцією змінної* λ*, для кожного* $\lambda \in \mathcal{U}_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$ *і* $h(x, 0) = 1$ *для всіх* x *із* Q.

Із аналітичності випливає, що функція h допускає розклад

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x) \rangle$$

за базисними функціями $h_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$. Використовуючи такі функції, побудовано відображення

$$\mathcal{F}(p,q) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I^h f)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in C(Q).$$

Припускається, що це відображення є ін'єктивним, тобто $\mathrm{Ker}\,(I^h) = \{0\}$
.

Виходячи із відображення I^h, визначено сім'ю $(\mathcal{H}^h(p,q))_{p\in\mathbb{N}_3, q\in\mathbb{N}_1}$ гільбертових просторів

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(p,q) &:= I^h(\mathcal{F}(p,q)) \\ &=\{f\in C(Q)\,|\,\exists(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(p,q): f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(x)\rangle,\, x\in Q\}\end{aligned} \tag{3}$$

з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} = \|\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(p,q)},$$

індукованою нормою у просторі $\mathcal{F}(p,q)$.

Поряд із функцією $h(x,\lambda)$ розглянуто функцію

$$\kappa(x,\lambda)=\ell(\lambda)h(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\kappa_n(x)\rangle, \qquad \kappa_n(x)\in\mathcal{F}_n(N_{-2}),$$

де $\ell: N_{1,\mathbb{C}}\to\mathbb{C}^1$ — фіксована аналітична в $0\in N_{1,\mathbb{C}}$ функція, $\ell(0)\neq 0$.

Встановлено такий результат.

Теорема 1.3.1. *При всіх $p,q\in\mathbb{N}_3$ відображення*

$$\mathcal{F}(p,q)\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\mapsto(I^{\kappa}f)(\cdot):=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n,\kappa_n(\cdot)\rangle\in C(Q)$$

є ін'єктивним.

Використовуючи відображення I^{κ}, визначено сім'ю $(\mathcal{H}^{\kappa}(p,q))_{p,q\in\mathbb{N}_3}$ гільбертових просторів

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\kappa}(p,q) &:= I^{\kappa}(\mathcal{F}(p,q)) \\ &= \{f\in C(Q)\,|\,\exists(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(p,q): f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n,\kappa_n(x)\rangle,\, x\in Q\}\end{aligned}$$

з відповідним скалярним добутком, індукованим скалярним добутком у просторі $\mathcal{F}(p,q)$.

Зв'язок між просторами $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^{\kappa}(p,q)$ встановлено у такій теоремі.

Теорема 1.3.2. *Має місце рівність топологічних просторів*

$$\mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3.$$

Точніше, $\mathcal{H}^h(p,q)$ *та* $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ *збігаються як множини і*

$$c_1\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} \le \|f\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} \le c_2\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)}$$

для деяких $c_1 > 0, c_2 > 0$ *та довільного* $f \in \mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

Нехай $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$. *Припустимо, що при всіх* $n \in \mathbb{N}_0$ *функція*

$$Q \ni x \mapsto \|h_n(x)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \in [0,\infty)$$

є сумовною з квадратом відносно міри ρ *і*

$$\|\, \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})}\, \|_{(L^2_\rho)} \le LC^n n!$$

для деяких $L > 0$ *та* $C > 0$.

Завдяки останньому припущенню відображення

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto Of := f \in (L^2_\rho)$$

визначене і є неперервним. *Будемо вважати, що це відображення є ін'єктивним і множина* $O(\mathcal{H}^h(p,q))$ *є щільною у просторі* (L^2_ρ).

Побудовано ланцюжок

$$\mathcal{H}^h(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^h(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3, \tag{4}$$

зі спарюванням $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot \rangle\!\rangle$ між $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$, породженим скалярним добутком у просторі (L^2_ρ). Тут $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^h(p,q)$.

Виходячи із унітарного оператора $I^h : \mathcal{F}(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q)$, побудовано біунітарну пару (I^h_-, I^h),

$$I^h_- := \mathbb{I}^{-1}_{(L^2_\rho)} I^h \mathbb{I}_F : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q), \tag{5}$$

де $\mathbb{I}_{(L^2_\rho)}$, $\mathbb{I}_F$ — канонічні ізометрії, пов'язані з ланцюжками (4) та (2) відповідно. Розглядаючи простір $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ як I^h_--образ простору Фока $\mathcal{F}(-p,-q)$, отримано зображення

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(-p,-q) =& I^h_-(\mathcal{F}(-p,-q)) = \big\{ \mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \;\big| \\ & \qquad\qquad \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q),\; \|\mathcal{Q}(\xi)\|_{\mathcal{H}^h(-p,-q)} = \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} \big\},\end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\partial^+(\xi_n) := I^h_- a_+(\xi_n)(I^h_-)^{-1} : \mathcal{H}^h(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q)$$

— образ оператора народження $a_+(\xi_n) : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{F}(-p,-q)$.

З огляду на зображення (3), (6), спарювання між просторами $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$ має такий вигляд:

$$\langle\!\langle \mathcal{Q}(\xi), f \rangle\!\rangle = \langle\!\langle I^h_-(\xi_n)_{n=0}^{\infty}, I^h(f_n)_{n=0}^{\infty} \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle n!,$$

де $\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \in \mathcal{H}^h(-p,-q)$, $f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in \mathcal{H}^h(p,q)$.

Оскільки простори $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ збігаються, то поряд з ланцюжком (4) побудовано ланцюжок

$$\mathcal{H}^\kappa(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3,$$

який є образом ланцюжка (2) при дії біунітарного відображення (I^κ_-, I^κ), побудованого за правилом (5) (із заміною h на κ).

На просторах основних функцій $\mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q)$ визначено та вивчено сім'ю $(\bar{\kappa}_x(\partial))_{x \in Q}$ операторів знищення нескінченного порядку

$$\bar{\kappa}_x(\partial) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\overline{\kappa_n(x)}) : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q),$$

де

$$\partial(\overline{\kappa_n(x)}) := I^\kappa a_-(\overline{\kappa_n(x)})(I^\kappa)^{-1} : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

— лінійний неперервний оператор, що є образом оператора знищення $a_-(\overline{\kappa_n(x)}) : \mathcal{F}(p,q) \to \mathcal{F}(p,q)$. З'ясовано, що для

$$\kappa(x,\lambda) := \ell(\lambda) h(x,\lambda) = \frac{h(x,\lambda)}{h(e,\lambda)}, \qquad \ell(\lambda) := \frac{1}{h(e,\lambda)}$$

($e \in Q$ — фіксований елемент із простору Q), сім'я $(\bar{\kappa}_x(\partial))_{x\in Q}$ є сім'єю операторів узагальненого зсуву (теорема 1.5.1). Крім того, встановлено такий результат.

Теорема 1.8.1. *Для всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ відображення (так зване C-перетворення)*

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto (\mathsf{C}f)(\cdot) = \int_Q (\bar{\kappa}_\cdot(\partial)f)(y)d\rho(y) \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

визначене і є унітарним. Дія C-перетворення така:

$$(\mathsf{C}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \langle f_n, \kappa_n(x)\rangle, \qquad x \in Q.$$

У другому розділі розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Із загальної точки зору отримано ряд результатів, характерних для класичних гауссового та пуассонового аналізу.

Як і вище, нехай Q — сепарабельний метричний простір, ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q, $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$ — відповідний L^2-простір.

Нехай $\mathcal{U}_0$ — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times \mathcal{U}_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x,\lambda) \in \mathbb{C}^1$$

— задана функція, яка при кожному $x \in Q$ є аналітичною в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ функцією змінної λ, при кожному $\lambda \in \mathcal{U}_0$ $h(\cdot,\lambda) \in C(Q)$ і $h(x,0) = 1$ для всіх x із Q.

Доведено таку теорему.

Теорема 2.1.1. *Для функцій*

$$\langle \varphi_n, h_n(\cdot)\rangle \in C(Q), \qquad \langle \psi_m, h_m(\cdot)\rangle \in C(Q), \qquad n, m \in \mathbb{N}_0,$$

співвідношення ортогональності

$$\int_Q \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_m, h_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n, \overline{\psi_n}\rangle \tag{7}$$

є справедливим тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{N}_2$, $C > 0$, $L > 0$ *такі, що*

$$\|\|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})}\|_{(L^2)} \le LC^n n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

і

$$\int_Q h(x,\varphi)\overline{h(x,\psi)}d\rho(x) = \exp\langle\varphi,\overline{\psi}\rangle.$$

Припустимо, що функції

$$Q \ni x \mapsto \langle\varphi_n, h_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

задовольняють співвідношення ортогональності (7) і їхня лінійна оболонка є щільною у просторі (L^2_ρ).

Побудовано унітарне відображення

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h_\rho f)(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in (L^2_\rho) \tag{8}$$

під дією якого оснащення простору Фока $F(N_0)$ переходить в оснащення простору (L^2_ρ):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(-p,-q) & \supset & F(N_0) & \supset & \mathcal{F}(p,q) \\ & & \downarrow I^h_\rho & & \downarrow I^h_\rho \\ \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q) & \supset & (L^2_\rho) & \supset & \mathcal{H}^h_\rho(p,q), \end{array}$$

де $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^h_\rho(p,q) := I^h_\rho(\mathcal{F}(p,q))$.

Далі, у даному розділі досліджено I^h_ρ-образи операторів вторинного квантування. Зокрема, введено оператори у термінах яких вдалося побудувати зображення симетричної білінійної форми I^h_ρ-образу оператора вторинного квантування (теорема 2.5.1).

Як відомо, у гауссовому та пуассоновому аналізі важливу роль відіграє розширений стохастичний інтеграл, який узагальнює класичний інтеграл

Іто, побудований за вінеровим чи пуассоновим випадковим процесом. Поняття такого інтеграла було введено в 70-х роках минулого століття у роботах М. Хітцуди, Ю. Л. Далецького, С. Н. Парамонової, Ю. М. Кабанова, А. В. Скорохода, Р. Кінга. Слід відмітити також нещодавні роботи М. О. Качановського, в яких введено і вивчено такий інтеграл для гамма-процесу.

В кінці другого розділу введено поняття розширеного стохастичного інтеграла в термінах простору Фока та його оснащення. При функціональній реалізації простору Фока за допомогою відображення I_ρ^h отримано означення розширеного стохастичного інтеграла в термінах простору L_ρ^2 та його оснащення (у гауссовому та пуассоновому випадку це означення збігається із означеннями введеними в згадуваних вище роботах). Зокрема, з'ясовано за яких умов на функцію h цей інтеграл є узагальненням інтегралу Іто, побудованого за випадковим процесом, пов'язаним з h (теорема 2.6.3).

У третьому розділі показано, що Пуассонів аналіз білого шуму вкладається в загальну схему побудови нескінченновимірного аналізу, викладену в другому розділі. Завдяки чому в цьому аналізі одержано ряд нових фактів, в основному пов'язаних з розглядом двох породжуючих функцій (на скільки відомо автору, до цього часу в пуассоновому аналізі розглядали лише одну породжуючу функцію — породжуючу функцію для поліномів Шарльє).

Нехай m — міра Лебега на осі $\mathbb{R}^1$. Покладемо

$$N_0 = L^2(\mathbb{R}^1, dm(t)), \qquad N_p = W_{p+1}^2(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^{p+1} dm(t)), \qquad p \in \mathbb{N}_1,$$

де $W_p^2(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^p dm(t))$ — дійсний ваговий простір Соболєва.

Нехай $Q = N_{-1}$, $\rho = \pi$ — міра Пуассона з мірою інтенсивності m на $\mathcal{B}(Q)$, яка на підставі теореми Мінлоса однозначно визначається своїм перетворенням Фур'є

$$\int_Q e^{i\langle \lambda, x\rangle} d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle, \qquad \lambda \in N_1.$$

Доведено, що породжуюча функція

$$h(x,\lambda) = C(x,\lambda) := \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, C_n(x)\rangle,$$

для поліномів Шарльє $C_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$ задовольняє припущенням розділу 2. Як наслідок, сформульовано таке твердження.

Теорема 3.3.1. *Результати, викладені у розділі* 2, *є справедливими для пуассонового аналізу з простором* $Q = N_{-1}$, *мірою Пуассона* $\rho = \pi$ *та функціями*

$$h(x,\lambda) = C(x,\lambda) := \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle),$$

$$\kappa(x,\lambda) = \chi(x,\lambda) := \frac{C(x,\lambda)}{C(e,\lambda)} = \exp\langle x - e, \log(1+\lambda)\rangle,$$

де e *– фіксований елемент із простору* Q.

Зокрема, для всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ *простори* $\mathcal{H}^C(p,q)$, $\mathcal{H}^\chi(p,q)$ *збігаються у топологічному сенсі і їх можна розглядати як позитивні по відношенню до нульвого* $(L^2_\pi) = L^2(Q, d\pi(x))$. *Відповідні оснащення мають вигляд:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^C(-p,-q) & \supset & (L^2_\pi) & \supset & \mathcal{H}^C(p,q) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathcal{H}^\chi(-p,-q) & \supset & (L^2_\pi) & \supset & \mathcal{H}^\chi(p,q). \end{array}$$

Аналогічні результати отримано у випадку, коли Q — простір конфігурацій Γ. Крім того, доведено, що так зване K-перетворення між функціями на просторі скінченних конфігурацій Γ_0 та просторі конфігурацій Γ можна інтерпретувати як унітарний оператор, що діє між певними просторами основних функцій на Γ_0 та Γ (теорема 3.6.1).

Автор висловлює щиру та глибоку подяку своєму науковому керівникові Березанському Юрію Макаровичу за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1
БІОРТОГОНАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ НЕСКІНЧЕННОГО ЧИСЛА ЗМІННИХ

У даному розділі викладено основні положення (відомі та нові) біортогонального підходу до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних.

Побудова теорії узагальнених функцій за таким підходом фактично зводиться до визначення та вивчення властивостей біунітарного відображення, що переводить оснащення простору Фока в необхідне нам оснащення простору L^2, побудованого за заданою ймовірнісною мірою. З огляду на це в дисертаційній роботі більшість ключових об'єктів (оператори знищення та народження нескінченного порядку, аналог розширеного стохастичного інтеграла та інші) ми спочатку вводимо і досліджуємо в термінах простору Фоку та його оснащення, а потім застосовуємо біунітарне відображення і отримуємо відповідні результати в термінах простору L^2 та його оснащення.

1.1. Простір Фока та оператори на ньому

1.1.1. Простір Фока та його оснащення.

Нехай

$$\mathbb{N}_p := \{p, p+1, \ldots\}, \qquad p \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbb{Z}$ — множина усіх цілих чисел.

Розглянемо фіксовану сім'ю $(N_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ дійсних сепарабельних гільбертових просторів N_p таку, що для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ простір N_{p+1} топологічно (щільно та неперервно) та квазіядерно (оператор вкладення є оператором Гільберта–Шмідта; норму Гільберта–Шмідта будемо позначати $\|\cdot\|_{HS}$) вкладається у простір N_p, і, крім того, $\|\cdot\|_{N_p} \le \|\cdot\|_{N_{p+1}}$.

Побудуємо ядерний ланцюжок (див. [41, 42])

$$\mathcal{N}' := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} N_{-p} \supset N_{-p} \supset N_0 \supset N_p \supset \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} N_p =: \mathcal{N}, \tag{1.1}$$

де N_{-p}, $p \in \mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового N_0 та позитивного N_p. Спарювання між N_{-p} та N_p, породжене скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{N_0}$ у просторі N_0, будемо позначати $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, нехтуючи індексом N_0.

Комплексифікуючи простори ланцюжка (1.1), тобто переходячи від $N_p, \mathcal{N}$ до $N_{p,\mathbb{C}}, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$, і беручи їх симетричні тензорні степені $\hat{\otimes}$, побудуємо при кожному $n \in \mathbb{N}_0$ ядерний ланцюжок

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{F}_n(\mathcal{N}') & \supset & \mathcal{F}_n(N_{-p}) & \supset & \mathcal{F}_n(N_0) & \supset & \mathcal{F}_n(N_p) & \supset & \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} & & N_{0,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} & & N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} & & \end{array} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}_n(N_p), \qquad \mathcal{F}_n(\mathcal{N}') := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}_n(N_{-p}),$$

з комплексним спарюванням $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ між $\mathcal{F}_n(N_{-p})$ та $\mathcal{F}_n(N_p)$, породженим скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ у просторі $\mathcal{F}_n(N_0)$. Поряд з $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ будемо використовувати дійсне спарювання

$$\langle \xi_n, f_n\rangle := \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}, \qquad \xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_p),$$

де $\bar{f}_n$ — вектор комплексноспряжений до вектора f_n. При $n = 0$ простори із ланцюжка (1.2) збігаються з $\mathbb{C}^1$.

При кожному $p \in \mathbb{Z}$ визначимо зважений симетричний простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ з вагою $\tau = (\tau_n)_{n=0}^{\infty}$, $\tau_n > 0$, поклавши

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(N_p, \tau) : &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(N_p)\tau_n \\ &= \{f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mid f_n \in \mathcal{F}_n(N_p),\ \|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)}\tau_n < \infty\}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що множина $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$ фінітних послідовностей із $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ є щільною у цьому просторі.

Зафіксуємо $K > 1$ і розглянемо сім'ю $(\tau(q))_{q\in\mathbb{N}_1}$ ваг

$$\tau(q) = (\tau_n(q))_{n=0}^{\infty}, \qquad \tau_n(q) = (n!)^2 K^{qn}. \tag{1.3}$$

Використовуючи ланцюжок (1.1) та вказану сім'ю ваг, побудуємо ядерний ланцюжок (див. [36])

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \supset \mathcal{F}(-p,-q) \supset F(N_0) \supset \mathcal{F}(p,q) \supset \mathcal{F}(\mathcal{N}), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}(p,q), \qquad \mathcal{F}(\mathcal{N}') := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}(-p,-q).$$

Тут

$$\mathcal{F}(-p,-q) := \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)), \qquad \tau_F(q) := (K^{-qn})_{n=0}^{\infty},$$

— негативний простір по відношенню до нульового

$$F(N_0) := \mathcal{F}(N_0, (n!)_{n=0}^{\infty})$$

та позитивного

$$\mathcal{F}(p,q) := \mathcal{F}(N_p, \tau(q)), \qquad \tau(q) := ((n!)^2 K^{qn})_{n=0}^{\infty}.$$

Очевидно, що множина $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})$ фінітних послідовностей $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, є щільною у кожному просторі із ланцюжка (1.4).

"Координатно" спарювання $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{F(N_0)}$ між $\mathcal{F}(-p,-q)$ та $\mathcal{F}(p,q)$, породжене скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{F(N_0)}$ у просторі $F(N_0)$, допускає зображення

$$\langle \xi, f \rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle n!, \tag{1.5}$$

$$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q), \quad f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(p,q).$$

Для даної лінійної підмножини $D \subset N_0$ позначимо через $\mathring{\mathcal{F}}_n(D) \subset \mathcal{F}_n(N_0)$, $n \in \mathbb{N}_1$, лінійну оболонку множини векторів

$$\{\varphi_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \varphi_n \,|\, \varphi_i \in D_{\mathbb{C}},\ i = 1, \ldots, n\}$$

($D_{\mathbb{C}}$ — комплексифікація D), а через $\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(D) \subset \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_0)$ підмножину фінітних векторів з компонентами із $\mathring{\mathcal{F}}_n(D)$. Зазначимо, що завдяки поляризаційній тотожності

$$\mathring{\mathcal{F}}_n(D) := \text{л.о.}\{\varphi_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \varphi_n \,|\, \varphi_i \in D_{\mathbb{C}},\ i = 1, \ldots, n\} = \text{л.о.}\{\varphi^{\otimes n} \,|\, \varphi \in D_{\mathbb{C}}\}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}_1$.

1.1.2. Оператори знищення та народження. Оператор народження $a_+(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $m, p \in \mathbb{N}_0$, визначається, як лінійний оператор в $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p})$, такий що

$$a_+(\xi_m)\eta = a_+(\xi_m)(\eta_0, \eta_1, \ldots) := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, \xi_m \hat{\otimes} \eta_0, \xi_m \hat{\otimes} \eta_1, \ldots), \tag{1.6}$$

$$(a_+(\xi_m)\eta)_n := \begin{cases} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m} \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{N}_m, \\ 0 \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m, \end{cases}$$

для довільного $\eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p})$.

Має місце таке твердження (див. [36], лема 11.2).

Твердження 1.1.1. *Нехай $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_1$. При довільних фіксованих $p' \in \mathbb{N}_p, q \in \mathbb{N}_1$ відображення*

$$\mathcal{F}(-p', -q) \supset \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p'}) \ni \eta \mapsto a_+(\xi_m)\eta \in \mathcal{F}(-p', -q)$$

є неперервним і після замикання за неперервністю є лінійним неперервним оператор в $\mathcal{F}(-p', -q)$, що діє на кожному векторі $\eta \in \mathcal{F}(-p', -q)$ за правилом (1.6) *і задовольняє оцінку*

$$\|a_+(\xi_m)\eta\|_{\mathcal{F}(-p',-q)} \leq K^{-\frac{qm}{2}} \|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p'})} \|\eta\|_{\mathcal{F}(-p',-q)} \tag{1.7}$$

(*ми зберегли позначення $a_+(\xi_m)$ для замикання*).

Зауваження 1.1.1. Термін "оператор народження" пояснює той факт, що при дії операторів народження на так званий вакуум

$$\Omega := (1, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})$$

ми можемо отримати довільний вектор із простору $\mathcal{F}(-p,-q)$, $p,q\in\mathbb{N}_1$. Точніше, кожен вектор $\xi=(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(-p,-q)$ можна подати у вигляді ряду

$$\xi=\sum_{n=0}^{\infty}a_+(\xi_n)\Omega,$$

збіжного за нормою простору $\mathcal{F}(-p,-q)$.

Оператор знищення

$$a_-(\xi_m):\mathcal{F}(p',q)\to\mathcal{F}(p',q),\qquad p'\in\mathbb{N}_p,\quad q\in\mathbb{N}_1,$$

з коефіцієнтом $\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_{-p})$, $m,p\in\mathbb{N}_0$, визначається, як спряжений до

$$a_+(\xi_m):\mathcal{F}(-p',-q)\to\mathcal{F}(-p',-q)$$

відносно $F(N_0)$. Тобто, як лінійний неперервний оператор в $\mathcal{F}(p',q)$ такий, що

$$\langle a_+(\xi_m)\eta,f\rangle_{F(N_0)}=\langle\eta,a_-(\xi_m)f\rangle_{F(N_0)}$$

для довільних $\eta\in\mathcal{F}(-p',-q)$ та $f\in\mathcal{F}(p',q)$.

Неважко бачити, що дія оператора $a_-(\xi_m)$ на довільному векторі $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(p',q)$ задається формулою

$$a_-(\xi_m)f=a_-(\xi_m)(f_0,f_1,\ldots):=(m!f_m^{\xi_m},\ldots,\frac{n!}{(n-m)!}f_n^{\xi_m},\ldots),$$

$$(a_-(\xi_m)f)_n:=\frac{(n+m)!}{n!}f_{n+m}^{\xi_m}\in\mathcal{F}_n(N_{p'}),\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

де вектор $f_n^{\xi_m}\in\mathcal{F}_{n-m}(N_{p'}),n\in\mathbb{N}_m$, однозначно визначається з рівності (див. [36], п. 5)

$$\langle f_n,\bar{\xi}_m\hat{\otimes}\eta_{n-m}\rangle=\langle f_n^{\xi_m},\eta_{n-m}\rangle,\tag{1.8}$$

$$\|f_n^{\xi_m}\|_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{p'})}\le\|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p'})}\|f_n\|_{\mathcal{F}_n(N_p')},$$

справедливої для довільного $\eta_{n-m}\in\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p'})$.

Через $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ зажди будемо позначати простір лінійних неперервних операторів, що діють у лінійному топологічному просторі $\mathcal{E}$.

Справедливим є таке твердження.

Твердження 1.1.2. *Нехай* $\xi = (\xi_m)_{m=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p, -(q-1)), p \in \mathbb{N}_1, q \in \mathbb{N}_2$. *При довільних фіксованих* $p' \in \mathbb{N}_p, q' \in \mathbb{N}_q$ *ряд* $\sum_{m=0}^{\infty} a_+(\xi_m)$ *збігається за нормою простору* $\mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q'))$ *до лінійного неперервного оператора*

$$\xi(a_+) := \sum_{m=0}^{\infty} a_+(\xi_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q')). \tag{1.9}$$

Спряженим до $\xi(a_+)$ *відносно* $F(N_0)$ *є оператор*

$$\xi(a_-) := \sum_{m=0}^{\infty} a_-(\xi_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(p', q')). \tag{1.10}$$

Зв'язок між $\xi(a_+)$ *та* $\xi(a_-)$ *такий:*

$$\langle \xi(a_+)\eta, f \rangle_{F(N_0)} = \langle \eta, \xi(a_-) f \rangle_{F(N_0)}$$

для довільних $\eta \in \mathcal{F}(-p', -q')$ *та* $f \in \mathcal{F}(p', q')$.

Доведення. Переконаємося в збіжності ряду (1.9) за нормою простору $\mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q'))$ (збіжність ряду (1.10) в $\mathcal{L}(\mathcal{F}(p', q'))$ перевіряється аналогічно). Для цього досить показати, що послідовність $\left(\sum_{m=0}^{n} a_+(\xi_m)\right)_{n=0}^{\infty}$ його часткових сум фундаментальна в $\mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q'))$.

Скориставшись (1.7), отримаємо

$$\begin{aligned} \| \sum_{m=0}^{n} a_+(\xi_m) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q'))} &\le \sum_{m=0}^{n} \| a_+(\xi_m) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q'))} \\ &\le \sum_{m=0}^{n} K^{\frac{-qm}{2}} \| \xi_m \|_{\mathcal{F}_m(N_{-p'})}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Оскільки $\xi \in \mathcal{F}(-p, -(q-1))$, то

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{F}(-p, -(q-1))} = \sum_{m=0}^{\infty} \|\xi_m\|^2_{\mathcal{F}_m(N_{-p})} K^{-(q-1)m} < \infty,$$

а тому

$$\|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p'})} \le \|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p})} \le \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p, -(q-1))} K^{\frac{(q-1)m}{2}}.$$

Врахувавши останнє, із (1.11) одержимо

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{m=0}^{n} a_+(\xi_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(-p',-q'))} &\leq \sum_{m=0}^{n} K^{\frac{-qm}{2}} \|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p'})} \\
&\leq \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-(q-1))} \sum_{m=0}^{n} K^{\frac{-qm}{2}} K^{\frac{(q-1)m}{2}} \\
&\leq \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-(q-1))} \sum_{m=0}^{n} K^{\frac{-m}{2}}.
\end{aligned}
$$

Звідси випливає потрібне (нагадаємо, що $K > 1$). □

Зауваження 1.1.2. Оператор $\xi(a_+)$ будемо називати оператором народження нескінченного порядку, а оператор $\xi(a_-)$ — оператором знищення нескінченного порядку.

Зауваження 1.1.3. Нехай

$$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty},\ \eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p, -(q-1)), \qquad p \in \mathbb{N}_1, q \in \mathbb{N}_2.$$

Неважко переконатися у справедливості таких комутаційних рівностей:

$$
\begin{aligned}
\xi(a_+)\eta(a_+) = \eta(a_+)\xi(a_+) = \zeta(a_+) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q')), \\
\xi(a_-)\eta(a_-) = \eta(a_-)\xi(a_-) = \zeta(a_-) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(p', q')),
\end{aligned}
$$

де $\zeta = (\zeta_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(-p', -q'))$, $\zeta_n = \sum_{m=0}^{n} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m}$, $p' \in \mathbb{N}_p, q' \in \mathbb{N}_q$ (див. також наслідок 1.2.2).

1.2. Аналітичність у локально опуклих просторах

Нагадаємо деякі факти з теорії аналітичних функцій у локально опуклому лінійному комплексному просторі $\mathcal{E}$ точок λ (див. [43, 44]).

Нехай $\mathcal{U}$ — деякий окіл нуля в $\mathcal{E}$. Комплекснозначна функція $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^1$ називається аналітичною в нулі $0 \in \mathcal{E}$, якщо

1. Для довільних $\lambda \in \mathcal{U}$, $\mu \in \mathcal{E}$ функція комплексної змінної

$$\mathbb{C}^1 \ni z \mapsto \phi(\lambda + z\mu) \in \mathbb{C}^1$$

визначена при малих $|z|$ і аналітична в околі $0 \in \mathbb{C}^1$.

2. Існує константа $c > 0$ така, що $|\phi(\lambda)| \le c,\ \lambda \in \mathcal{U}$.

Кожна така функція розкладається в деякому околі $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ нуля в ряд Тейлора

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(D^n\phi)(\lambda), \qquad \lambda \in \mathcal{U}_0, \tag{1.12}$$

який рівномірно збігається на $\mathcal{U}_0$. Тут $(D^n\phi)(\lambda)$ — деякі однорідні неперервні поліноми n-го степеня змінної λ. Останнє означає, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_1$ існує симетрична n-лінійна неперервна форма

$$\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E} \ni \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \mapsto A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^1$$

така, що $(D^n\phi)(\lambda)$ — її діагональне значення:

$$(D^n\phi)(\lambda) = A_n(\lambda, \ldots, \lambda), \qquad \lambda \in E.$$

Поліноми $(D^n\phi)(\lambda)$ визначаються по ϕ однозначно.

Зупинимося на випадку, коли $\mathcal{E}$ — гільбертів простір $N_{1,\mathbb{C}}$. Ми припустили, що вкладення $N_{2,\mathbb{C}} \hookrightarrow N_{1,\mathbb{C}}$ квазіядерне, тому до кожної форми $A_n,\ n \in \mathbb{N}_1$, можна застосувати теорему про ядро (див., наприклад, [41, 42]), згідно з якою звуження форми на $N_{2,\mathbb{C}}$ породжується її ядром $\xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$:

$$A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left\langle \xi_n, \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n \right\rangle, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in N_{2,\mathbb{C}}. \tag{1.13}$$

З урахуванням (1.13) розклад (1.12) для $\mathcal{E} = N_{1,\mathbb{C}}$ (звужений на $N_{2,\mathbb{C}}$) можна переписати у вигляді

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \right\rangle, \tag{1.14}$$

$$\lambda \in \mathcal{U}_0 = \{\, \lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_0,\ R_0 > 0 \,\},$$

причому ряд збігається рівномірно на довільній замкненій кулі з $\mathcal{U}_0$; $\lambda^{\otimes 0} := 1$.

Відзначимо, що для коефіцієнтів розкладу (1.14) справджується оцінка

$$\|\xi_n\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \leq \frac{n!e^n\|O_{3,2}\|^n_{HS}}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r} |\phi(\lambda)|, \qquad r \in (0, R_0) \tag{1.15}$$

(див. [36]; $\|O_{3,2}\|_{HS}$ — норма Гільберта–Шмідта оператора вкладення $O_{3,2} : N_3 \to N_2$). Скориставшись якою, неважко переконатися, що при

$$K > \max\{1, \|O_{3,2}\|^2_{HS}e^2R_0^{-2}\}$$

послідовність $\left(\frac{1}{n!}\xi_n\right)_{n=0}^{\infty}$ цих коефіцієнтів визначає вектор $\xi = \left(\frac{1}{n!}\xi_n\right)_{n=0}^{\infty}$ із простору $\mathcal{F}(-p, -q), p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1$.

Справді, взявши $r = R_0 - \varepsilon$ з достатньо малим фіксованим $\varepsilon > 0$, із (1.15) отримаємо

$$\begin{aligned}
\|\left(\frac{1}{n!}\xi_n\right)_{n=0}^{\infty}\|^2_{\mathcal{F}(-p,-q)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{1}{n!}\xi_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_{-p})}K^{-qn} \\
&\leq (\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r} |\phi(\lambda)|)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n}\|O_{3,2}\|^{2n}_{HS}}{n!r^{2n}K^{qn}} \\
&\leq (\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r} |\phi(\lambda)|)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n}\|O_{3,2}\|^{2n}_{HS}}{r^{2n}K^{qn}} < \infty,
\end{aligned}$$

що і стверджувалося.

Використовуючи довільний фіксований вектор $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p, -q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, та фоківську експоненту (когерентний стан)

$$\mathsf{e}(\lambda) := \left(\frac{1}{n!}\lambda^{\otimes n}\right)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(p, q), \tag{1.16}$$
$$\lambda \in \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}}) := \{\lambda \in N_{p,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < K^{-\frac{q}{2}}\},$$

побудуємо функцію

$$N_{p,\mathbb{C}} \supset \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}}) \ni \lambda \mapsto \phi(\lambda) := \langle \xi, \mathsf{e}(\bar{\lambda})\rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n\rangle \in \mathbb{C}^1. \tag{1.17}$$

Очевидно, що ряд (1.17) збігається рівномірно на кожній замкненій кулі з $\mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})$, тому побудована функція є аналітичною в $0 \in N_{p,\mathbb{C}}$.

Нехай $\mathcal{A}(N_p), p \in \mathbb{N}_1$, — простір усіх аналітичних в $0 \in N_{p,\mathbb{C}}$ функцій. Для фіксованих $p, q \in \mathbb{N}_1$ позначимо через $\mathrm{Hol}(p,q)$ образ простору Фока $\mathcal{F}(-p,-q)$ при ін'єктивному відображенні

$$\mathcal{F}(-p,-q) \ni \xi \mapsto (I_{\mathrm{Hol}}\xi)(\cdot) := \langle \xi, \mathsf{e}(\bar{\cdot})\rangle_{F(N_0)} \in \mathcal{A}(N_p).$$

Зрозуміло, що

$$\mathrm{Hol}(p,q) := I_{\mathrm{Hol}}(\mathcal{F}(-p,-q))$$
$$= \{\phi \in \mathcal{A}(N_p) \mid \exists (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q) : \phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \ \lambda \in \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})\}$$

є гільбертовим простором відносно гільбертової норми

$$\|\phi\|_{\mathrm{Hol}(p,q)} = \|\sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle\|_{\mathrm{Hol}(p,q)} := \|(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(-p,-q)},$$

індукованої нормою у просторі $\mathcal{F}(-p,-q)$.

Позначимо через $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$ алгебру ростків аналітичних в $0 \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ функцій $\phi : \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^1$, наділену індуктивною топологією, породженою сім'єю норм

$$\|\phi\|_{p,l} := \sup_{\|\lambda\|_{N_{p,\mathbb{C}}} \le K^{-l}} |\phi(\lambda)|, \qquad p, l \in \mathbb{N},$$

де $K > 1$ — константа із (1.3).

Справедлива така теорема (див., наприклад, [31, 36]).

Теорема 1.2.1. *Має місце рівність топологічних просторів*

$$\operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}_1} \mathrm{Hol}(p,q) = \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}). \tag{1.18}$$

Наслідок 1.2.1. *Із визначення гільбертового простору* $\mathrm{Hol}(p,q)$ *випливає, що оператор*

$$I_{\mathrm{Hol}} : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathrm{Hol}(p,q), \qquad p, q \in \mathbb{N}_1,$$

є унітарним, тому на підставі (1.18) *відображення*

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \ni \xi \mapsto (I_{\mathrm{Hol}}\xi)(\cdot) := \langle \xi, \mathsf{e}(\bar{\cdot})\rangle_{F(N_0)} \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}) \tag{1.19}$$

здійснює топологічний ізоморфізм між $\mathcal{F}(\mathcal{N}')$ *та* $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$.

Останній наслідок і та обставина, що простір $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$ є комутативною алгеброю відносно звичайного додавання та множення функцій, дають можливість ввести в $\mathcal{F}(\mathcal{N}')$ множення Віка (і тим самим перетворити простір $\mathcal{F}(\mathcal{N}')$ в комутативну алгебру), поклавши

$$\xi \diamond \eta := I_{\mathrm{Hol}}^{-1}((I_{\mathrm{Hol}}\xi) \cdot (I_{\mathrm{Hol}}\eta)) = (\zeta_n)_{n=0}^{\infty}, \qquad \zeta_n = \sum_{m=0}^{n} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m}, \tag{1.20}$$

де $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}, \eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathcal{N}')$.

Лема 1.2.1. *Множення Віка $\diamond$ є неперервним в $\mathcal{F}(\mathcal{N}')$. Зокрема, для довільних*

$$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p_1, -q_1), \quad \eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p_2, -q_2)$$

існує константа $c = c(\max\{q_1, q_2\}) > 0$ така, що

$$\|\xi \diamond \eta\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} \leq c\|\xi\|_{\mathcal{F}(-p_1,-q_1)}\|\eta\|_{\mathcal{F}(-p_2,-q_2)}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_{\max\{p_1,p_2\}}$, $q \in \mathbb{N}_{(1+\max\{q_1,q_2\})}$.

Доведення. Без втрати загальності будемо вважати, що $q_2 \geq q_1$. Скориставшись нерівністю Коші–Буняковського, із (1.20) отримуємо

$$\begin{aligned}\|\xi \diamond \eta\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}^2 = \|(\zeta_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \|\zeta_n\|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})}^2 K^{-qn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \| \sum_{m=0}^{n} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m}\|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})}^2 K^{-qn} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p})} \|\eta_{n-m}\|_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})} \right)^2 K^{-qn}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} K^{-qn}\Bigg(\sum_{m=0}^{n} \|\xi_m\|^2_{\mathcal{F}_m(N_{-p})} K^{-q_1 m}\Bigg) \\
&\quad \times \Bigg(\sum_{m=0}^{n} \|\eta_{n-m}\|^2_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})} K^{q_1 m}\Bigg) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} K^{(-q+q_2)n}\Bigg(\sum_{m=0}^{n} \|\xi_m\|^2_{\mathcal{F}_m(N_{-p})} K^{-q_1 m}\Bigg) \\
&\quad \times \Bigg(\sum_{m=0}^{n} \|\eta_{n-m}\|^2_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})} K^{-q_2(n-m)}\Bigg) \\
&\leq \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} K^{(-q+q_2)n}\Bigg)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty} \|\xi_m\|^2_{\mathcal{F}_m(N_{-p_1})} K^{-q_1 m}\Bigg) \\
&\quad \times \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \|\eta_k\|^2_{\mathcal{F}_k(N_{-p_2})} K^{-q_2 k}\Bigg) \\
&= \frac{K^{q-q_2}}{K^{q-q_2}-1} \|\xi\|^2_{\mathcal{F}(-p_1,-q_1)} \|\eta\|^2_{\mathcal{F}(-p_2,-q_2)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Наслідок 1.2.2. *У просторі $\mathcal{F}(\mathcal{N}')$ кожен вектор $\xi = (\xi_m)_{m=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathcal{N}')$ визначає оператор множення Віка $\diamond$ на ξ, тобто*

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \ni \eta \mapsto \zeta := \xi \diamond \eta \in \mathcal{F}(\mathcal{N}').$$

Більше того, цей оператор збігається з оператором

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \ni \eta \mapsto \xi(a_+)\eta := \sum_{m=0}^{\infty} a_+(\xi_m)\eta \in \mathcal{F}(\mathcal{N}').$$

Справді, беручи до уваги (1.6) та (1.20), для довільного $\eta_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}') \subset \mathcal{F}(\mathcal{N}')$ дістанемо

$$\xi(a_+)\eta_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_+(\xi_m)\eta_n = (\xi_m \hat{\otimes} \eta_n)_{m=0}^{\infty} = \xi \diamond \eta_n,$$

звідки безпосередньо випливає потрібне.

1.3. Простори основних функцій

1.3.1. Дві системи базисних функцій та відповідні простори. Нехай Q — сепарабельний метричний простір точок $x, y, \dots$. Позначимо через $C(Q)$ лінійний простір всіх комплекснозначних локально обмежених (тобто обмежених на кожній кулі в Q) неперервних функцій на Q. Зручно вважати, що $C(Q)$ — топологічний простір зі збіжністю, рівномірною на кожній кулі з Q.

Нехай $\mathcal{U}_0$ — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times \mathcal{U}_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1 \tag{1.21}$$

— задана функція. *Припустимо, що для кожного* $x \in Q \quad h(x, \cdot)$ *є аналітичною в нулі простору* $N_{1,\mathbb{C}}$ *функцією змінної* λ*, для кожного* $\lambda \in \mathcal{U}_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$*. Крім того, будемо вважати, що* $h(\cdot, \lambda)$ *локально обмежена рівномірно по відношенню до* λ *із довільної замкненої кулі з* $\mathcal{U}_0$ *(останнє розуміємо так: для довільної кулі* $U \subset Q$ *і довільної замкненої кулі* $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}_0$ *існує константа* $c = c(U, \bar{\mathcal{U}}) > 0$ *така, що* $|h(x, \lambda)| \le c$ *при* $x \in U$, $\lambda \in \bar{\mathcal{U}}$*) і* $h(x, 0) = 1$ *для всіх* x *із* Q*.*

У відповідності з підрозділом 1.2 із аналітичності випливає, що при довільному фіксованому $x \in Q$ існує окіл

$$\mathcal{U}_h(x) = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_h(x),\ R_h(x) > 0\} \subset \mathcal{U}_0$$

в якому функцію $h(x, \cdot)$ можна подати у вигляді ряду

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x) \rangle, \quad h_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}), \tag{1.22}$$

рівномірно збіжного в кожній замкненій кулі із $\mathcal{U}_h(x)$. *Надалі припускаеться існування спільного для всіх* x *із* Q *околу*

$$\mathcal{U}_h = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_h,\ R_h > 0\} \subset \mathcal{U}_0$$

в якому функція $h(x,\cdot)$ *допускає зображення* (1.22). Зафіксуємо функцію h з вказаними властивостями. Відповідні їй коефіцієнти

$$Q \ni x \mapsto h_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

будемо називати *базисними функціями.*

Використовуючи вектор $f_n \in \mathcal{F}_n(N_p)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$, побудуємо функцію

$$Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1. \tag{1.23}$$

Очевидно, що функція (1.23) входить до простору $C(Q)$ (див., наприклад, [36], лема 3.2). Крім того, при

$$f_n = \varphi^{(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi^{(n)}, \qquad \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in N_p,$$

на підставі (1.22) для довільного $x \in Q$ отримаємо

$$\langle \varphi^{(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi^{(n)}, h_n(x)\rangle = \frac{\partial^n h(x, z_1\varphi^{(1)} + \cdots + z_n\varphi^{(n)})}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}\bigg|_{z_1=\ldots=z_n=0}, \tag{1.24}$$

де $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^1$.

Справедлива така лема (див. [36], лема 4.2).

Лема 1.3.1. *При*

$$K > \max\{1, \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R_h^{-2}\}$$

для довільних $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_1$ *відображення*

$$\mathcal{F}(p,q) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h f)(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in C(Q) \tag{1.25}$$

визначене і є неперервним, тобто для кожної кулі $U \subset Q$ *існує константа* $c = c(U) > 0$ *така, що*

$$|(I^h f)(x)| \le c\|(f_n)_{n=0}^\infty\|_{\mathcal{F}(p,q)}, \qquad x \in U. \tag{1.26}$$

Зафіксуємо $K > \max\{1, \|O_{3,2}\|_{HS}^2 e^2 R_h^{-2}\}$ та *припустимо, що відображення I^h є ін'єктивним, тобто* $\operatorname{Ker}(I^h) = \{0\}$. Використовуючи це відображення, побудуємо сім'ю $(\mathcal{H}^h(p,q))_{p\in\mathbb{N}_3, q\in\mathbb{N}_1}$ гільбертових просторів

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(p,q) &:= I^h(\mathcal{F}(p,q)) \\ &= \{f \in C(Q) \mid \exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p,q) : f(x) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(x)\rangle,\ x \in Q\}\end{aligned}$$

з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} = \|\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^\infty\|_{\mathcal{F}(p,q)}.$$

Із означення простору $\mathcal{H}^h(p,q)$ видно, що оператор

$$\mathcal{F}(p,q) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h f)(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q) \tag{1.27}$$

унітарно відображає простір Фока $\mathcal{F}(p,q)$ на простір $\mathcal{H}^h(p,q)$. Очевидно, що $h(\cdot,\lambda)$ є I^h-образом фоківської експоненти $\mathsf{e}(\lambda)$ (1.16), тобто

$$h(\cdot,\lambda) = I^h(\mathsf{e}(\lambda)) = I^h\Big(\frac{1}{n!}\lambda^{\otimes n}\Big).$$

Поряд із сім'єю $(\mathcal{H}^h(p,q))_{p\in\mathbb{N}_3, q\in\mathbb{N}_1}$ визначимо сім'ю гільбертових просторів, побудованих за базисними функціями, які визначаються з розкладу типу (1.22), але для видозміненої лівої частини, тісно пов'язаної з $h(x,\lambda)$.

Нехай $\ell : N_{1,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^1$ — аналітична функція змінної λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ і $\ell(0) \neq 0$. Тоді для кожного $x \in Q$ функція $\kappa(x,\lambda) := \ell(\lambda)h(x,\lambda)$ є аналітичною за змінною λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ і як результат допускає розклад

$$\kappa(x,\lambda) = \ell(\lambda)h(x,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(x)\rangle, \tag{1.28}$$

$$\mathcal{U}_\kappa = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_\kappa,\ R_\kappa > 0\} \subset \mathcal{U}_h,$$

за *базисними функціями*

$$Q \ni x \mapsto \kappa_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тісний зв'язок між функціями $h(x,\lambda)$ та $\kappa(x,\lambda)$ дає можливість знайти формули для перерахунку базисних функцій $h_n(x)$ та $\kappa_n(x)$ одна через одну. А саме, оскільки функція ℓ є аналітичною в $0\in N_{1,\mathbb{C}}$ і $\ell(0)\neq 0$, то і функція ℓ^{-1} є аналітичною в $0\in N_{1,\mathbb{C}}$. Тому ці функції допускають зображення

$$\ell(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\alpha_n\rangle,\qquad \alpha_n\in\mathcal{F}_n(N_{-2}),\tag{1.29}$$

$$\frac{1}{\ell(\lambda)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\beta_n\rangle,\qquad \beta_n\in\mathcal{F}_n(N_{-2}),\tag{1.30}$$
$$\mathcal{U}_\ell=\{\lambda\in N_{2,\mathbb{C}}\mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}<R_\ell,\ R_\ell>0\}.$$

Розклад (1.22) (відповідно (1.28)) є добутком (1.28) (відповідно (1.22)) та (1.30) (відповідно (1.29)). Так, порівнюючи коефіцієнти в цих розкладах, для всіх $x\in Q,\ n\in\mathbb{N}_0$ отримуємо (див. [36], п.8)

$$h_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\beta_{n-m}\hat{\otimes}\kappa_m(x),\tag{1.31}$$

$$\kappa_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\alpha_{n-m}\hat{\otimes}h_m(x).\tag{1.32}$$

Покладемо $R:=\min\{R_h,\ R_\kappa,\ R_\ell\}$ та зафіксуємо

$$K>\max\{1,\|O_{3,2}\|_{HS}^2e^2R^{-2}\}.$$

Зрозуміло, що при такому виборі костанти K із (1.3) відображення

$$\mathcal{F}(p,q)\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\mapsto(I^\kappa f)(\cdot):=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n,\kappa_n(\cdot)\rangle\in C(Q)\tag{1.33}$$

визначене і є неперервним для всіх $p\in\mathbb{N}_3,\ q\in\mathbb{N}_1$.

Лема 1.3.2. *Відображення*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})\ni\varphi=(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}\mapsto(I^\kappa\varphi)(\cdot):=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi_n,\kappa_n(\cdot)\rangle\in C(Q)\tag{1.34}$$

є ін'єктивним. Більше того,

$$I^\kappa(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))=I^h(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))=:\mathcal{P}(Q).$$

Доведення. Покажемо, що $I^{\kappa}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})) \subset I^{h}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$. Нехай

$$\varphi(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \in I^{\kappa}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})).$$

Зафіксувавши $s \in \mathbb{N}_0$ таке, що $\varphi_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}_{s+1}$, на основі (1.8) та (1.32) отримаємо

$$\begin{aligned}
\varphi(\cdot) &= \sum_{n=0}^{s} \langle \varphi_n, \kappa_n(\cdot)\rangle = \sum_{n=0}^{s} \langle \varphi_n, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \alpha_{n-m} \hat{\otimes} h_m(\cdot)\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{s} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \langle \varphi_n, \alpha_{n-m} \hat{\otimes} h_m(\cdot)\ \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{s} \sum_{m=0}^{n} \langle \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\bar{\alpha}_{n-m}}, h_m(\cdot)\rangle \\
&= \sum_{m=0}^{s} \langle \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\bar{\alpha}_{n-m}}, h_m(\cdot)\rangle \in I^{h}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Навпаки, нехай

$$\varphi(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, h_n(\cdot)\rangle \in I^{h}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$$

і фіксовано $s \in \mathbb{N}_0$ таке, що $\varphi_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}_{s+1}$. Аналогічно до попереднього, використавши (1.8) та (1.31), отримаємо

$$\begin{aligned}
\varphi(\cdot) &= \sum_{n=0}^{s} \langle \varphi_n, h_n(\cdot)\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{s} \langle \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\bar{\beta}_{n-m}}, \kappa_m(\cdot)\rangle \in I^{\kappa}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})),
\end{aligned} \tag{1.36}$$

що і забезпечує справедливість вкладення $I^{h}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})) \subset I^{\kappa}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$, а отже і рівності $I^{h}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})) = I^{\kappa}(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$.

Залишилося переконатися в ін'єктивності відображення (1.34). Для цього досить показати, що для $\varphi = (\varphi_m)_{m=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})$ з рівності

$$(I^{\kappa}\varphi)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \varphi_m, \kappa_m(x)\rangle, \qquad x \in Q,$$

випливає рівність $\varphi = 0$ в $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N})$, тобто, що $\varphi_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}_0$.

Нехай вектор $\varphi = (\varphi_m)_{m=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N})$ такий, що $(I^{\kappa}\varphi)(x) = 0$ для всіх $x \in Q$. Використовуючи (1.35) та (1.36), для довільного $x \in Q$ отримаємо

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{s} \langle \varphi_m, \kappa_m(x) \rangle = \sum_{m=0}^{s} \langle \widetilde{\varphi}_m, h_m(x) \rangle = \sum_{m=0}^{s} \langle \widetilde{\widetilde{\varphi}}_m, \kappa_m(x) \rangle = 0,$$

де

$$\widetilde{\varphi}_m = \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\bar{\alpha}_{n-m}}, \qquad \widetilde{\widetilde{\varphi}}_m = \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \widetilde{\varphi}_n^{\bar{\beta}_{n-m}}, \tag{1.37}$$

а $s \in \mathbb{N}_0$ таке, що $\varphi_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}_{s+1}$. Оскільки відображення (1.25) ін'єктивне, то

$$\widetilde{\varphi}_m = 0, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_{s+1},$$

а тому і $\widetilde{\widetilde{\varphi}}_m = 0$ при $m \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_{s+1}$.

Зрозуміло, що ін'єктивність відображення (1.34) буде встановлена, якщо ми покажемо, що

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}_m = \varphi_m, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_{s+1}.$$

Підставляючи в другу рівність в (1.37) вираз для $\widetilde{\varphi}_m$, дістанемо

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{\varphi}}_m &= \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \widetilde{\varphi}_n^{\bar{\beta}_{n-m}} \\
&= \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\sum_{k=n}^{s} \frac{k!}{n!(k-n)!} \varphi_k^{\bar{\alpha}_{k-n}} \right)^{\bar{\beta}_{n-m}} \\
&= \sum_{k=m}^{s} \frac{k!}{m!} \varphi_k^{\sum_{n=m}^{k} \frac{1}{(n-m)!(k-n)!} \alpha_{k-n} \hat{\otimes} \beta_{n-m}} = \varphi_m.
\end{aligned}$$

Остання рівність випливає із властивостей функцій ℓ і $\frac{1}{\ell}$. Так, перемножаючи розклади (1.29) та (1.30), отримуємо

$$\begin{aligned}
1 = \ell(\lambda) \frac{1}{\ell(\lambda)} &= \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{1}{l!n!} \langle \lambda^{\otimes l}, \alpha_l \rangle \langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \langle \lambda^{\otimes l}, \sum_{n=0}^{l} \frac{l!}{n!(l-n)!} \alpha_{l-n} \hat{\otimes} \beta_n \rangle,
\end{aligned}$$

звідки $\alpha_0\beta_0 = 1$ і

$$0 = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{n!(l-n)!}\alpha_{l-n} \hat{\otimes} \beta_n = \sum_{n=m}^{k=l+m} \frac{1}{(n-m)!(k-n)!}\alpha_{k-n} \hat{\otimes} \beta_{n-m}$$

для всіх $l \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Наслідок 1.3.1. *Якщо функція φ входить до множини $\mathcal{P}(Q)$, то її можна однозначно зобразити як у вигляді*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{s} \langle \varphi_m, \kappa_m(x) \rangle, \qquad (\varphi_m)_{m=0}^{s} \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N}), \qquad x \in Q, \tag{1.38}$$

так і у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{s} \langle \widetilde{\varphi}_m, h_m(x) \rangle, \qquad (\widetilde{\varphi}_m)_{m=0}^{s} \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N}), \qquad x \in Q. \tag{1.39}$$

Формули для перерахунку коефіцієнтів такі:

$$\varphi_m = \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \widetilde{\varphi}_m^{\bar{\beta}_{n-m}} \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}), \tag{1.40}$$

$$\widetilde{\varphi}_m = \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_m^{\bar{\alpha}_{n-m}} \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}). \tag{1.41}$$

Теорема 1.3.1. *При всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ відображення I^κ (1.33) є ін'єктивним.*

Доведення. Нехай $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_1$. Оскільки $\mathcal{H}^h(p,q) \subset C(Q)$, то досить переконатися в існуванні констант $c' > 0$, $c'' > 0$ таких, що

$$c' \|\varphi\|_{\mathcal{F}(p,q)} \leq \|I^\kappa \varphi\|_{\mathcal{H}^h(p,q+1)} \leq c'' \|\varphi\|_{\mathcal{F}(p,(q+2))} \tag{1.42}$$

для всіх φ із $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N})$.

Оцінимо $\|I^\kappa \varphi\|_{\mathcal{H}^h(p,q)}$ для довільного $\varphi = (\varphi)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N})$. З огляду на те, що $\varphi_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}_{s+1}$, починаючи з деякого $s \in \mathbb{N}_s$, згідно з (1.8) та

(1.41) отримаємо

$$\begin{aligned}
\|I^{\kappa}\varphi\|^2_{\mathcal{H}^h(p,q)} &= \|\sum_{m=0}^{s}\langle\varphi_m,\kappa_m(\cdot)\rangle\|^2_{\mathcal{H}^h(p,q)} = \|\sum_{m=0}^{s}\langle\widetilde{\varphi}_m,h_m(\cdot)\rangle\|^2_{\mathcal{H}^h(p,q)} \\
&= \sum_{m=0}^{s}\|\widetilde{\varphi}_m\|^2_{\mathcal{F}_m(N_p)}(m!)^2K^{qm} \\
&= \sum_{m=0}^{s}\|\sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\varphi_n^{\bar{\alpha}_{n-m}}\|^2_{\mathcal{F}_m(N_p)}(m!)^2K^{qm} \\
&\le \sum_{m=0}^{s}(m!)^2K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\|\alpha_{n-m}\|_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})}\|\varphi_n\|_{\mathcal{F}_n(N_p)}\right)^2 \\
&\le \sum_{m=0}^{s}(m!)^2K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{s}\|\varphi_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)}(n!)^2K^{(q+1)n}\right)\left(\sum_{n=m}^{s}\frac{\|\alpha_{n-m}\|^2_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})}}{(m!(n-m)!)^2K^{(q+1)n}}\right) \\
&\le \|\varphi\|^2_{\mathcal{F}(p,q+1)}\sum_{m=0}^{s}K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{s}\frac{\|\alpha_{n-m}\|^2_{\mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})}}{((n-m)!)^2K^{(q+1)n}}\right).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Для коефіцієнтів розкладу (1.29) справедлива оцінка (див. підрозділ 1.2)

$$\|\alpha_n\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \le \frac{n!e^n\|O_{3,2}\|^n_{HS}}{r^n}\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|\ell(\lambda)|, \tag{1.44}$$

$$n\in\mathbb{N}_0, \qquad r\in(0,R).$$

Поклавши

$$c_1 = \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|\ell(\lambda)|, \quad r\in(0,R), \quad c_2 = e\|O_{3,2}\|_{HS},$$

із (1.43) та (1.44) для довільного $r\in(0,R)$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\|I^{\kappa}\varphi\|^2_{\mathcal{H}^h(p,q)} &\le \|\varphi\|^2_{\mathcal{F}(p,q+1)}\sum_{m=0}^{s}\sum_{n=m}^{s}c_1^2(c_2r^{-1})^{2(n-m)}K^{-(q+1)n+qm} \\
&= c_1^2\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}(p,q+1)}\sum_{m=0}^{s}\sum_{n=m}^{s}\left((c_2r^{-1})^2K^{-(q+1)}\right)^{n-m}K^{-m}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$= c_1^2 \|\varphi\|^2_{\mathcal{F}(p,q+1)} \sum_{m=0}^{s} K^{-m} \sum_{n=0}^{s} \Big((c_2 r^{-1})^2 K^{-(q+1)} \Big)^n$$
$$\leq c_1^2 \|\varphi\|^2_{\mathcal{F}(p,q+1)} \sum_{m=0}^{\infty} K^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} \Big((c_2 r^{-1})^2 K^{-(q+1)} \Big)^n .$$

Оскільки $K > \max\{1, \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R^{-2}\}$, то для $r = R - \varepsilon$ з достатньо малим фіксованим $\varepsilon > 0$

$$c_3 := (c_2 r^{-1})^2 K^{-1} = \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 r^{-2} K^{-1} < 1.$$

Врахувавши останнє, із (1.45) отримаємо

$$\|I^\kappa \varphi\|^2_{H^h(p,q)} \leq c_1^2 \frac{K}{K-1} \frac{1}{1 - c_3 K^{-q}} \|\varphi\|^2_{\mathcal{F}(p,q+1)}. \tag{1.46}$$

Аналогічно можна переконатися в існуванні константи $c > 0$ такої, що

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}(p,q)} \leq c \|I^\kappa \varphi\|_{\mathcal{H}^h(p,q+1)} \tag{1.47}$$

для всіх $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N})$. Для цього потрібно скористатися формулою (1.40) і оцінкою типу (1.44) для β_n.

Із (1.46) та (1.47) отримаємо (1.42). □

Зауваження 1.3.1. Теорему 1.3.1 можна було встановити й іншим способом, використавши підхід, запропонований М. О. Качановським в [33] для встановлення мінімальності квазіаппелевих систем.

Використовуючи відображення I^κ, визначимо сім'ю $(\mathcal{H}^\kappa(p,q))_{p,q \in \mathbb{N}_3}$ гільбертових просторів

$$\mathcal{H}^\kappa(p,q) := I^\kappa(\mathcal{F}(p,q))$$
$$= \{ f \in C(Q) \,|\, \exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p,q) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle,\ x \in Q \}$$

з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} = \|\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot) \rangle\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^\infty\|_{\mathcal{F}(p,q)}.$$

Відзначимо, що введені простори $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ будуть нам потрібні при побудові оснащення простору сумовних з квадратом функцій, тобто відповідної теорії узагальнених функцій змінної $x \in Q$.

1.3.2. Образи операторів знищення. У гільбертовому просторі $\mathcal{H}^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1$, визначимо оператор знищення $\partial_h(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p}), m \in \mathbb{N}_0$, поклавши

$$\partial_h(\xi_m) := I^h a_-(\xi_m)(I^h)^{-1} : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q). \tag{1.48}$$

Очевидно, що на функціях

$$Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad f_n \in \mathcal{F}_n(N_p), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

оператор (1.48) діє за правилом

$$(\partial_h(\xi_m)\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!}\langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_{n-m}(x)\rangle, & n \in \mathbb{N}_m, \\ 0, & n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m. \end{cases} \tag{1.49}$$

Подібно до (1.48) у просторі $\mathcal{H}^\kappa(p,q), p, q \in \mathbb{N}_3$, визначимо оператор знищеня $\partial_\kappa(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p}), m \in \mathbb{N}_0$, поклавши

$$\partial^\kappa(\xi_m) := I^\kappa a_-(\xi_m)(I^\kappa)^{-1} : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q).$$

Зрозуміло, що

$$(\partial_\kappa(\xi_m)\langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!}\langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} \kappa_{n-m}(x)\rangle, & n \in \mathbb{N}_m, \\ 0, & n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m, \end{cases} \tag{1.50}$$

для довільного $f_n \in \mathcal{F}_n(N_p),\ n \in \mathbb{N}_0$.

Справедливим є таке твердження.

Твердження 1.3.1. *Нехай $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p}), m \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}_3$. Має місце така рівність*

$$(\partial_h(\xi_m)) \restriction \mathcal{P}(Q) = (\partial_\kappa(\xi_m)) \restriction \mathcal{P}(Q) =: \partial(\xi_m),$$

тобто

$$\partial_h(\xi_m)\varphi = \partial_\kappa(\xi_m)\varphi \tag{1.51}$$

для довільного φ *із* $\mathcal{P}(Q)$.

Доведення. Рівність (1.51) досить встановити на функціях

$$Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, \kappa_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad \varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}_m$. На підставі (1.32), (1.8), (1.49) і (1.50) одержимо

$$\begin{aligned}
(\partial_h(\xi_m)\langle \varphi_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(x) &= \partial_h(\xi_m)\langle \varphi_n, \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!}\alpha_{n-s} \hat{\otimes} h_s(x)\rangle \\
&= \partial_h(\xi_m) \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!} \langle \varphi_n^{\bar{\alpha}_{n-s}}, h_s(x)\rangle \\
&= \sum_{s=m}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{s!}{(s-m)!} \langle \varphi_n^{\bar{\alpha}_{n-s}}, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_{s-m}(x)\rangle \\
&= n! \sum_{l=0}^{n-m} \frac{1}{l!(n-m-l)!} \langle \varphi_n, \alpha_{n-m-l} \hat{\otimes} \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_l(x)\rangle \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{l=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{l!(n-m-l)!} \langle \varphi_n^{\xi_m}, \alpha_{n-m-l} \hat{\otimes} h_l(x)\rangle \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} \langle \varphi_n^{\xi_m}, \kappa_{n-m}(x)\rangle = \frac{n!}{(n-m)!} \langle \varphi_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} \kappa_{n-m}(x)\rangle \\
&= (\partial_\kappa(\xi_m)\langle \varphi_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(x), \qquad x \in Q.
\end{aligned}$$

У випадку $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m$ аналогічно отримаємо

$$(\partial_h(\xi_m)\langle \varphi_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(x) = (\partial_\kappa(\xi_m)\langle \varphi_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(x) = 0, \qquad x \in Q.$$

□

1.3.3. Образи операторів знищення нескінченного порядку. Зафіксуємо вектор $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p, -(q-1))$, $p, q \in \mathbb{N}_3$. У просторах $\mathcal{H}^h(p', q')$ та $\mathcal{H}^\kappa(p', q')$, $p' \in \mathbb{N}_p, q' \in \mathbb{N}_q$, визначимо оператори знищення нескінченного порядку, поклавши

$$\xi(\partial_h) := I^h \xi(a_-)(I^h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_h(\xi_n) : \mathcal{H}^h(p', q') \to \mathcal{H}^h(p', q'), \tag{1.52}$$

$$\xi(\partial_\kappa) := I^\kappa \xi(a_-)(I^\kappa)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_\kappa(\xi_n) : \mathcal{H}^\kappa(p', q') \to \mathcal{H}^\kappa(p', q'), \tag{1.53}$$

де $\xi(a_-) = \sum_{n=0}^{\infty} a_-(\xi_n)$ — оператор із твердження 1.1.2. Зрозуміло, що ці оператори є неперервними і

$$\xi(\partial_h) \upharpoonright \mathcal{P}(Q) = \xi(\partial_\kappa) \upharpoonright \mathcal{P}(Q) = \xi(\partial) := \sum_{n=0}^{\infty} \partial(\xi_n).$$

Перш ніж сформулювати необхідне для подальшого викладу твердження нагадаємо, що функції

$$\ell(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \alpha_n \rangle, \quad \frac{1}{\ell}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n \rangle,$$

визначають вектори

$$\alpha = \left(\frac{1}{n!} \alpha_n \right)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-3, -1), \quad \beta = \left(\frac{1}{n!} \beta_n \right)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-3, -1).$$

Твердження 1.3.2. *При всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ оператори*

$$\mathcal{H}^h(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \bar{\alpha}(\partial)\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\bar{\alpha}_m)\varphi \in \mathcal{H}^\kappa(p, q), \tag{1.54}$$

$$\mathcal{H}^\kappa(p, q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto \bar{\beta}(\partial)\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\bar{\beta}_m)\varphi \in \mathcal{H}^h(p, q), \tag{1.55}$$

є ізометричними, тобто

$$\|\bar{\alpha}(\partial)\varphi\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}^h(p,q)}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}(Q),$$

$$\|\bar{\beta}(\partial)\varphi\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}(Q).$$

Доведення. Переконаємося в ізометричності оператора (1.54) (ізометричність оператора (1.55) перевіряється аналогічним чином).

Нехай функцію $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ записано у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle, \qquad (\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}).$$

Використавши (1.49) та (1.32), для довільного $x \in Q$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}(\partial)\varphi(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\bar{\alpha}_m) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, h_n(\cdot) \rangle \right)(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \langle \varphi_n, h_{n-m}(x) \hat{\otimes} \alpha_m \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} h_{n-m}(x) \hat{\otimes} \alpha_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає ізометричність оператора (1.54). $\square$

1.3.4. Збіг просторів $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

Для встановлення рівності топологічних просторів $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ суттєву роль буде відігравати наступна лема.

Лема 1.3.3. *Нехай лінійна множина $\mathcal{P}$ є щільною в банахових просторах E_1 та E_2 (з нормами $\|\cdot\|_{E_1}$ та $\|\cdot\|_{E_2}$ відповідно). Припустимо, що на множині $\mathcal{P}$ визначено лінійні оператори A і B, які як оператори*

$$E_2 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto A\varphi \in E_2, \qquad E_1 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto B\varphi \in E_1$$

є неперервними, а як оператори

$$E_1 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto A\varphi \in E_2, \qquad E_2 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto B\varphi \in E_1$$

— ізометричними.

Тоді оператор $\mathbf{U} : E_1 \to E_2$, що є замиканням за неперервністю оператора

$$E_1 \supset \mathcal{P} \ni \varphi \mapsto U\varphi = \varphi \in \mathcal{P} \subset E_2, \tag{1.56}$$

реалізує топологічний ізоморфізм між E_1 та E_2, тобто є взаємнооднозначним і взаємнонеперервним відображенням між цими просторами.

Доведення. Для доведення леми досить переконатися в існуванні констант $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ таких, що

$$c_1\|\varphi\|_{E_1} \leq \|\varphi\|_{E_2} \leq c_2\|\varphi\|_{E_1}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{1.57}$$

Справді, якщо оцінка (1.57) виконується, то оператор U (1.56) є визначеним і неперервним. Далі, нехай $f \in E_1$ і $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathcal{P}$, – довільна послідовність, що збігається до f в E_1. Тоді $\varphi_n \to \mathbf{U}f$ при $n \to \infty$ в топології простору E_2. Згідно з (1.57) для кожного $\varphi_n \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}_0$, є справедливою оцінка

$$c_1\|\varphi_n\|_{E_1} \leq \|\varphi_n\|_{E_2} \leq c_2\|\varphi_n\|_{E_1}. \tag{1.58}$$

Перейшовши в (1.58) до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$c_1\|f\|_{E_1} \leq \|\mathbf{U}f\|_{E_2} \leq c_2\|f\|_{E_1}, \qquad f \in E_1. \tag{1.59}$$

Завдяки (1.59) область значень $\mathrm{Ran}\,(\mathbf{U})$ оператора $\mathbf{U}$ є замкненою в топології простору E_2, а оскільки $\mathcal{P} = \mathrm{Ran}\,(U) \subset \mathrm{Ran}\,(\mathbf{U})$ і множина $\mathcal{P}$ є щільною в E_2, то $\mathrm{Ran}\,(\mathbf{U}) = E_2$. Врахувавши останнє, на піставі нерівностей (1.59) робимо висновок, що оператор $\mathbf{U} : E_1 \to E_2$ є взаємно однозначним і взаємно неперервним відображенням між просторами E_1 та E_2, тобто реалізує топологічний ізоморфізм між цими просторами.

Пересвідчимось в справедливості оцінки (1.57). Оскільки оператор A як оператор в E_2 ($\mathrm{Dom}\,(A) = \mathcal{P}$) є неперервним, то існує константа $c_3 > 0$ така, що

$$\|A\varphi\|_{E_2} \leq c_3\|\varphi\|_{E_2}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{1.60}$$

Аналогічно існує константа $c_4 > 0$ така, що

$$\|B\varphi\|_{E_1} \leq c_4\|\varphi\|_{E_1}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{1.61}$$

Крім цього, на підставі ізометричності операторів A і B маємо

$$\|A\varphi\|_{E_2} = \|\varphi\|_{E_1}, \qquad \|B\varphi\|_{E_1} = \|\varphi\|_{E_2}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{1.62}$$

Використовуючи (1.60) і першу рівність в (1.62), одержуємо

$$\|\varphi\|_{E_1} \leq c_3\|\varphi\|_{E_2}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{1.63}$$

Аналогічно із (1.61) і другої рівності в (1.62) маємо

$$\|\varphi\|_{E_2} \leq c_4\|\varphi\|_{E_1}, \qquad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Врахувавши останнє і (1.63), легко отримаємо (1.57). □

Тепер можна безпосередньо перейти до встановлення головного результату даного пункту.

Теорема 1.3.2. *Має місце рівність топологічних просторів*

$$\mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q) =: \mathcal{H}(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3. \tag{1.64}$$

Точніше, простори $\mathcal{H}^h(p,q)$, $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ *збігаються як множини і*

$$c_1\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} \leq c_2\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)}$$

для деяких $c_1 > 0, c_2 > 0$ *та довільного* $f \in \mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

Доведення. Досить показати, що оператор, який кожній функції $f \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$ ставить у відповідність цю ж функцію f, котру вже розуміємо як елемент простору $\mathcal{H}^h(p,q)$, є визначеним і реалізує топологічний ізоморфізм між $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$.

Зрозуміло, що для

$$E_1 = \mathcal{H}^\kappa(p,q), \quad E_2 = \mathcal{H}^h(p,q), \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(Q),$$

оператори

$$A = \bar{\beta}(\partial), \qquad B = \bar{\alpha}(\partial)$$

введені в п. 1.3.3 задовольняють умовам леми 1.3.3. Тому оператор $\mathbf{U}$: $\mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q)$, що є продовженням за неперервністю оператора

$$\mathcal{H}^\kappa(p,q) \supset \mathcal{P}(Q) \ni \varphi \mapsto U\varphi = \varphi \in \mathcal{P}(Q) \subset \mathcal{H}^h(p,q),$$

реалізує топологічний ізоморфізм між $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$.

Залишилося показати, що

$$f(x) = (\mathbf{U}f)(x), \qquad x \in Q, \tag{1.65}$$

для довільного $f \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

Нехай $f \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$ і $\mathcal{P}(Q) \ni \varphi_n \to f$ в $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$, тоді $\mathcal{P}(Q) \ni \varphi_n \to \mathbf{U}f$ в $\mathcal{H}^h(p,q)$. Скориставшись (1.26) та визначеннями просторів $\mathcal{H}^h(p,q)$, $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$, для довільного $x \in V \subset Q$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x) - (\mathbf{U}f)(x)| &= |f(x) - \varphi_n(x) + \varphi_n(x) - (\mathbf{U}f)(x)| \\ &\le |f(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - (\mathbf{U}f)(x)| \\ &\le c_4\|f - \varphi_n\|_{\mathcal{H}^\kappa(p,q)} + c_3\|\varphi_n - \mathbf{U}f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Оскільки (1.66) має місце для x із довільної кулі $V \subset Q$, то $f(x) = (\mathbf{U}f)(x)$ для всіх $x \in Q$. $\square$

Наслідок 1.3.2. *Нехай* $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p}), p \in \mathbb{N}_3, m \in \mathbb{N}_0$. *Зрозуміло, що оператори* $\partial_h(\xi_m)$, $\partial_\kappa(\xi_m)$ *діють неперервно в топологічному просторі* $\mathcal{H}(p',q), p' \in \mathbb{N}_p,\ q \in \mathbb{N}_3$. *Оскільки*

$$(\partial_h(\xi_m)) \restriction \mathcal{P}(Q) = (\partial_\kappa(\xi_m)) \restriction \mathcal{P}(Q) =: \partial(\xi_m),$$

то як оператори у просторі $\mathcal{H}(p',q)$

$$\partial_h(\xi_m) = \partial_\kappa(\xi_m) =: \partial(\xi_m)$$

(ми зберегли позначення $\partial(\xi_m)$ *для продовження* $\partial(\xi_m)$ *з* $\mathcal{P}(Q)$ *на* $\mathcal{H}(p',q)$*).*

Наслідок 1.3.3. *Нехай* $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(-p,-(q-1)), p,q \in \mathbb{N}_3$. *Оператори* $\xi(\partial_h)$, $\xi(\partial_\kappa)$ *діють неперервно в* $\mathcal{H}(p',q'), p' \in \mathbb{N}_p, q' \in \mathbb{N}_q$, *і збігаються:*

$$\xi(\partial_h) = \xi(\partial_\kappa) = \xi(\partial) := \sum_{n=0}^\infty \partial(\xi_n).$$

Наслідок 1.3.4. *Оператор*

$$\bar{\alpha}(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\bar{\alpha}_m) : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

є унітарним і діє таким чином:

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \mapsto (\bar{\alpha}(\partial)f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^\kappa(p,q).$$

Оберненим до нього є унітарний оператор

$$\bar{\beta}(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\bar{\beta}_m) : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q),$$

котрий діє за правилом

$$\mathcal{H}^\kappa(p,q) \ni f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \mapsto (\bar{\beta}(\partial)f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q).$$

1.4. Одна властивість образів операторів знищення

Припустимо, що на функціях f із простору $C(Q)$ задано операцію $\mathscr{C}(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}), m \in \mathbb{N}_0$, таку, що при кожному $x \in Q$ відображення

$$C(Q) \in f \mapsto (\mathscr{C}(\xi_m)f)(x) \in \mathbb{C}^1$$

визначене і є лінійним, причому

$$(\mathscr{C}(\xi_m)h(\cdot,\lambda))(x) = \langle \lambda^{\otimes m}, \bar{\xi}_m\rangle h(x,\lambda) \tag{1.67}$$

для всіх $x \in Q$ та $\lambda \in \mathcal{U}_h$. Відзначимо, що такі операції часто з'являються незалежно від конструкцій попередніх підрозділів (див. [45, 17]).

Теорема 1.4.1. *Якщо для* $\xi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}), m \in \mathbb{N}_0$, *операція* $\mathscr{C}(\xi_m)$ *визначає неперервний оператор*

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto (\mathscr{C}(\xi_m)f)(\cdot) \in C(Q),$$

то простір $\mathcal{H}^h(p,q), p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1,$ *є інваріантним відносно дії цього оператора, причому*

$$\mathscr{C}(\xi_m) = \partial(\xi_m) : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q).$$

Доведення. Досить показати, що $\partial(\xi_m)$ і $\mathscr{C}(\xi_m)$ як оператори, що діють із $\mathcal{H}^h(p,q)$ в $C(Q)$, збігаються. З одного боку, застосовуючи оператор

$$\mathscr{C}(\xi_m) : \mathcal{H}^h(p,q) \to C(Q)$$

до розкладу (1.22), отримаємо

$$(\mathscr{C}(\xi_m)h(\cdot,\lambda))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathscr{C}(\xi_m)\langle \lambda^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle)(x), \qquad x \in Q. \tag{1.68}$$

З іншого боку, беручи до уваги (1.67), для всіх $x \in Q$ одержимо

$$\begin{aligned} (\mathscr{C}(\xi_m)h(\cdot,\lambda))(x) &= \langle \lambda^{\otimes m}, \bar{\xi}_m\rangle h(x,\lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes m}, \bar{\xi}_m\rangle\langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes m+n}, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_n(x)\rangle \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m)!}\langle \lambda^{\otimes n}, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_{n-m}(x)\rangle. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Нехай e — орт простору $N_{p,\mathbb{C}}$, $\|e\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = 1$. Поклавши $\lambda = ze$, $z \in \mathbb{Z}$, $|z| \in (0, R_h)$, із (1.68) та (1.69), порівнюючи коефіцієнти при z^n, для $x \in Q$ знайдемо

$$(\mathscr{C}(\xi_m)\langle e^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!}\langle e^{\otimes n}, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_{n-m}(x)\rangle, & n \in \mathbb{N}_m, \\ 0, & n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m. \end{cases}$$

Завдяки цій рівності, поляризаційній тотожності, лінійності по $e^{\otimes n}$ та неперервності оператора $\mathscr{C}(\xi_m)$ для $f_n \in \mathcal{F}_n(N_p)$, $x \in Q$, маємо

$$(\mathscr{C}(\xi_m)\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!}\langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} h_{n-m}(x)\rangle, & n \in \mathbb{N}_m, \\ 0, & n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m. \end{cases} \tag{1.70}$$

Порівнюючи (1.49) з (1.70) приходимо до висновку, що

$$(\mathscr{C}(\xi_m)\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = (\partial(\xi_m)\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x), \qquad x \in Q,$$

звідки негайно випливає потрібне. □

1.5. Оператори узагальненого зсуву

Нехай $E(Q)$ — деякий простір комплекснозначних функцій на Q. Припустимо, що у просторі $E(Q)$ задано сім'ю $T = (T_x)_{x\in Q}$ лінійних операторів $T_x : E(Q) \to E(Q)$, таку що при довільному фіксованому $y \in Q$ функція

$$Q \ni x \mapsto g(x) = (T_x f)(y) \in \mathbb{C}^1, \qquad f \in E(Q),$$

входить до $E(Q)$. Позначимо через $L = (L_y)_{y\in Q}$ сім'ю лінійних операторів

$$E(Q) \ni f \mapsto (L_y f)(\cdot) = (T_\cdot f)(y) \in E(Q).$$

За визначенням (див., наприклад, [45]*) сім'я T є сім'єю операторів узагальненого зсуву, якщо виконуються такі аксіоми.*

(A1) *Для довільних елементів $x, y \in Q$ має місце рівність $L_y T_x = T_x L_y$ ("асоціативність").*

(A2) *Знайдеться елемент $o \in Q$ ("базисна одиниця") такий, що $T_o = id$, де id — тотожний оператор в $E(Q)$.*

Відзначимо, що у випадку комутуючої сім'ї $T = (T_x)_{x\in Q}$ операторів T_x, за умови, що для будь-яких $x, y \in Q$ та $f \in E(Q)$

$$(T_x f)(y) = (T_y f)(x),$$

аксіома асоціативності виконується автоматично, причому $T_x = L_x$, $x \in Q$.

Функцію $\chi \in E(Q)$, *яка тотожно не дорівнює нулю, називають характером сім'ї* T, *якщо вона має таку властивість:*

$$(T_x\chi)(y) = \chi(x)\chi(y), \qquad x, y \in Q.$$

Як і вище, нехай функція $h(x,\lambda)$ (1.21) задовольняє припущенням п.1.3.1. Оскільки для всіх $x \in Q$ $h(x,0) = 1$ і функція $h(x,\cdot)$ є аналітичною в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$, то при кожному $x \in Q$ $h(x,\lambda) \neq 0$ для будь-якого λ із деякого околу $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$. Тому можна покласти

$$\kappa(x,\lambda) := \ell(\lambda)h(x,\lambda) = \frac{h(x,\lambda)}{h(e,\lambda)}, \qquad \ell(\lambda) := \frac{1}{h(e,\lambda)}, \tag{1.71}$$

де e — фіксований елемент із простору Q. *Далі завжди будемо використовувати саме таку функцію* $\kappa(x,\lambda)$.

Очевидно, що

$$\kappa(e,\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathcal{U}_\kappa; \qquad \kappa(x,0) = 1, \quad x \in Q.$$

Звідси і з (1.22) випливає, що

$$\kappa_0(x) = 1, \quad x \in Q; \qquad \kappa_n(e) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_1. \tag{1.72}$$

Розглянемо сім'ю $\bar\kappa(\partial) = (\bar\kappa_x(\partial))_{x\in Q}$ операторів знищення нескінченного порядку

$$\bar\kappa_x(\partial) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\partial(\overline{\kappa_m(x)}) : \mathcal{H}^\kappa(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad p, q \in \mathbb{N}_3,$$

породжену функцією κ. Зрозуміло, що сім'я $\bar\kappa(\partial)$ є сім'єю комутуючих неперервних операторів.

Неважко переконатися, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$

$$(\bar\kappa_x(\partial)f)(y) = (\bar\kappa_y(\partial)f)(x), \qquad x, y \in Q, \tag{1.73}$$

а тому $(\bar\kappa_{\cdot}(\partial)f)(y) \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

Справді, користуючись визначенням (1.50), для довільної функції

$$\langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^{\kappa}(p,q), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

та всіх $x, y \in Q$ знаходимо

$$\begin{aligned}
(\bar{\kappa}_x(\partial)\langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(\partial(\overline{\kappa_m(x)})\langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(y) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\langle f_n, \kappa_m(x) \hat{\otimes} \kappa_{n-m}(y)\rangle \\
&= \langle f_n, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\kappa_m(x) \hat{\otimes} \kappa_{n-m}(y)\rangle \\
&= (\bar{\kappa}_y(\partial)\langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle)(x).
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Звідси, врахувавши те, що оператор $\bar{\kappa}_x(\partial)$ є лінійним та неперервним, отримуємо рівність (1.73).

Тепер є майже очевидною така теорема.

Теорема 1.5.1. *Сім'я $\bar{\kappa}(\partial) = (\bar{\kappa}_x(\partial))_{x \in Q}$ комутуючих неперервних операторів*

$$\bar{\kappa}_x(\partial) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\partial(\overline{\kappa_m(x)}) : \mathcal{H}^{\kappa}(p,q) \to \mathcal{H}^{\kappa}(p,q), \qquad p, q \in \mathbb{N}_3,$$

є сім'єю операторів узагальненого зсуву.

При кожному $\lambda \in \mathcal{U}_{\kappa} \cap \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})$ функція $\kappa(\cdot, \lambda)$ є характером сім'ї $\bar{\kappa}(\partial)$.

Доведення. З огляду на рівність (1.73) і ту обставину, що сім'я $\bar{\kappa}(\partial)$ є комутуючою, відразу переконуємося у справедливості аксіоми (A1).

Оскільки мають місце рівності (1.72), то $\bar{\kappa}_e(\partial) = id$, що і забезпечує виконання аксіоми (A2) з $o = e \in Q$.

Скориставшись (1.74), неперервністю оператора $\bar{\kappa}_x(\partial)$ та врахувавши, що при кожному $\lambda \in \mathcal{U}_{\kappa} \cap \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})$ функція

$$\kappa(\cdot, \lambda) = I^{\kappa}(\mathsf{e}(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle$$

входить до $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ (останній ряд збігається в $C(Q)$), для будь-яких $x, y \in Q$ отримаємо

$$\begin{aligned}(\bar\kappa_x(\partial)\kappa(\cdot,\lambda))(y) &= \Big(\bar\kappa_x(\partial)\Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\kappa_n(\cdot)\rangle\Big)\Big)(y)\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\bar\kappa_x(\partial)\langle\lambda^{\otimes n},\kappa_n(\cdot)\rangle)(y)\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\kappa_m(x)\,\hat\otimes\,\kappa_{n-m}(y)\rangle\\ &= \sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}\langle\lambda^{\otimes m},\kappa_m(x)\rangle\langle\lambda^{\otimes(n-m)},\kappa_{n-m}(y)\rangle\\ &= \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\kappa_n(x)\rangle\Big)\Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\kappa_n(y)\rangle\Big)\\ &= \kappa(x,\lambda)\kappa(y,\lambda).\end{aligned}$$

$\square$

Зауваження 1.5.1. Зазначимо, що при спеціальному виборі функції κ сім'ю $(\bar\kappa_x(\partial))_{x\in Q}$ було введено та досліджено в роботах М. О. Качановського та Г. Ф. Уса [30, 32].

Припустимо, що у просторі $C(Q)$ задано сім'ю $\widetilde{T} = (\widetilde{T}_x)_{x\in Q}$ лінійних операторів $\widetilde{T}_x : C(Q) \to C(Q)$ таку, що:

а) для довільних $x, y \in Q$ відображення $C(Q) \ni f \mapsto (\widetilde{T}_x f)(y) \in \mathbb{C}^1$ є неперервним;

б) для довільного фіксованого λ з деякого околу $\mathcal{U}_0$ нуля $0 \in N_{3,\mathbb{C}}$ функція $\kappa(\cdot,\lambda)$ є характером сім'ї $\widetilde{T} = (\widetilde{T}_x)_{x\in Q}$, тобто

$$(\widetilde{T}_x\kappa(\cdot,\lambda))(y) = \kappa(x,\lambda)\kappa(y,\lambda), \qquad x, y \in Q.$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 1.5.2. *Для довільного $x \in Q$*

$$\widetilde{T}_x \restriction \mathcal{H}^\kappa(p,q) = \bar\kappa_x(\partial), \qquad p, q \in \mathbb{N}_3.$$

Доведення. З огляду на те, що для всіх $x, y \in Q$ відображення

$$C(Q) \supset \mathcal{H}^\kappa(p,q) \ni f \mapsto (\bar{\kappa}_x(\partial)f)(y) \in \mathbb{C}^1, \quad C(Q) \ni f \mapsto (\widetilde{T}_x f)(y) \in \mathbb{C}^1 \tag{1.75}$$

є лінійними та неперервними, досить показати, що

$$(\widetilde{T}_x \langle \varphi^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle)(y) = (\bar{\kappa}_x(\partial)\langle \varphi^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle)(y), \qquad x, y \in Q, \tag{1.76}$$

де φ – довільний орт із простору $N_{p,\mathbb{C}}$, $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = 1$.

Оскільки при кожному $\lambda \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})$ функція

$$\kappa(\cdot, \lambda) = I^\kappa(\mathsf{e}(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle$$

входить до $\mathcal{H}^\kappa(p,q) \subset C(Q)$, то на основі неперервності другого відображення в (1.75) для будь-яких $x, y \in Q$ та цих λ маємо

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}_x \kappa(\cdot, \lambda))(y) &= \Big(\widetilde{T}_x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle\Big)(y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\widetilde{T}_x \langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle)(y).\end{aligned} \tag{1.77}$$

З іншого боку, з огляду на те, що функція $\kappa(\cdot, \lambda)$ є характером сім'ї $\widetilde{T}$, для довільних $x, y \in Q$ дістанемо

$$\begin{aligned}(\widetilde{T}_x \kappa(\cdot, \lambda))(y) &= \kappa(x, \lambda)\kappa(y, \lambda) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(x)\rangle \langle \lambda^{\otimes m}, \kappa_m(y)\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \langle \lambda^{\otimes (n+m)}, \kappa_n(x) \mathbin{\hat{\otimes}} \kappa_m(y)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \kappa_m(x) \mathbin{\hat{\otimes}} \kappa_{n-m}(y)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\bar{\kappa}_x(\partial)\langle \lambda^{\otimes n}, \kappa_n(\cdot)\rangle)(y).\end{aligned} \tag{1.78}$$

Нехай $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| \in (0,r)$ (r — достатньо мале) і $\varphi \in N_{p,\mathbb{C}}$, $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = 1$. Підставивши $\lambda = z\varphi$ в (1.77), (1.78) та порівнявши коефіцієнти при z^n, отримаємо (1.76). $\square$

1.6. Простір сумовних з квадратом функцій та його оснащення

Зафіксуємо борелеву ймовірнісну міру ρ на Q і розглянемо гільбертів простір $L^2(Q, d\rho(x)) =: (L^2_\rho)$ комплекснозначних функцій, сумовних з квадратом відносно $d\rho(x)$:

$$(f,g)_{(L^2_\rho)} := \int_Q f(x)\overline{g(x)}d\rho(x), \qquad f,g \in (L^2_\rho).$$

Нехай функція $h(x,\lambda)$ (1.21) така як і в п. 1.3.1. *Припустимо, що для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ функція*

$$Q \ni x \mapsto \|h_n(x)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \in [0,\infty)$$

сумовна з квадратом відносно міри ρ і

$$\| \, \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-3})} \, \|_{(L^2_\rho)} \le LC^n n! \tag{1.79}$$

для деяких $L > 0$ та $C > 0$.

Зафіксуємо

$$K > \max\{1, C^2, \|O_{3,2}\|_{HS} e^2 R^{-2}\}$$

($R := \min\{R_h, R_\kappa, R_\ell\}$, K — константа із (1.3)) і при всіх $p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1$ розглянемо оператор

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto Of := f \in (L^2_\rho),$$

котрий, очевидно, є визначеним та неперервним (див. [36], лема 4.3). *Припустимо, що цей оператор є ін'єктивним і O-образ множини $\mathcal{P}(Q) := I^h(\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$ щільний у просторі (L^2_ρ).*

Таким чином оператор O щільно та неперервно вкладає простір $\mathcal{H}^h(p,q)$ у простір (L^2_ρ). Тому $\mathcal{H}^h(p,q)$ можна розглядати як позитивний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ). Позначимо через $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ відповідний спряжений (негативний) простір узагальнених функцій і побудуємо ланцюжок

$$(\mathcal{H}^h)' \supset \mathcal{H}^h(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^h(p,q) \supset \mathcal{H}^h, \tag{1.80}$$

$$\mathcal{H}^h := \underset{p\in\mathbb{N}_3, q\in\mathbb{N}_1}{\mathrm{pr}\lim} \mathcal{H}^h(p,q), \qquad (\mathcal{H}^h)' := \underset{p\in\mathbb{N}_3, q\in\mathbb{N}_1}{\mathrm{ind}\lim} \mathcal{H}^h(-p,-q),$$

зі спарюванням $\langle\!\langle\cdot\,,\cdot\rangle\!\rangle$ між $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$, породженим скалярним добутком у просторі (L^2_ρ).

Оскільки простори $\mathcal{H}^h(p,q)$ унітарно ізоморфні ваговим просторам Фока $\mathcal{F}(p,q)$, проективна границя яких $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ — ядерний простір, то і *простір* $\mathcal{H}^h$ *є ядерним.*

На підставі теореми 1.3.2 $\mathcal{H}^h(p,q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ збігаються як топологічні простори, тому поряд з оснащенням (1.80) простору (L^2_ρ) можна побудувати оснащення

$$(\mathcal{H}^\kappa)' \supset \mathcal{H}^\kappa(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^\kappa(p,q) \supset \mathcal{H}^\kappa, \tag{1.81}$$

$$\mathcal{H}^\kappa := \underset{p,q\in\mathbb{N}_3}{\mathrm{pr}\lim} \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad (\mathcal{H}^\kappa)' := \underset{p,q\in\mathbb{N}_3}{\mathrm{ind}\lim} \mathcal{H}^\kappa(-p,-q),$$

де $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q), p,q \in \mathbb{N}_3,$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$. Зрозуміло, що збіг просторів

$$\mathcal{H}^h(p,q) = \mathcal{H}^\kappa(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3,$$

призводить до збігу просторів

$$\mathcal{H}^h(-p,-q) = \mathcal{H}^\kappa(-p,-q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3.$$

Відмітимо, що у випадку коли міра ρ позитивна на непорожніх відкритих множинах з Q, для довільних фіксованих $p,q \in \mathbb{N}_3$ оператор

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto Of := f \in (L^2_\rho)$$

автоматично є ін'єктивним.

Справді, для функції $f \in \mathcal{H}^h(p,q)$ з рівності $\|f\|_{(L^2_\rho)} = 0$, беручи до уваги, що міра ρ позитивна на непорожніх відкритих множинах з Q, випливає рівність

$$f(x) = 0, \qquad x \in Q,$$

а тому і рівність $f = 0$ у просторі $\mathcal{H}^h(p,q)$.

1.7. Простори узагальнених функцій

1.7.1. Біунітарне відображення. Розглянемо два гільбертові ланцюжки

$$\mathcal{F}_- \supset \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_+, \qquad \mathcal{H}_- \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_+ \tag{1.82}$$

зі спарюваннями

$$\langle \xi, \varphi \rangle_{\mathcal{F}_0}, \quad \xi \in \mathcal{F}_-,\ \varphi \in \mathcal{F}_+; \qquad \langle \eta, \psi \rangle_{\mathcal{H}_0}, \quad \eta \in \mathcal{H}_-,\ \psi \in \mathcal{H}_+,$$

породженими скалярними добутками в $\mathcal{F}_0$ та $\mathcal{H}_0$ відповідно.

За визначенням (див. [27]*), пара* (U_-, U_+) *унітарних операторів*

$$U_- : \mathcal{F}_- \to \mathcal{H}_-, \qquad U_+ : \mathcal{F}_+ \to \mathcal{H}_+$$

є біунітарною, якщо

$$\langle U_-\xi, U_+\varphi \rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle \xi, \varphi \rangle_{\mathcal{F}_0} \tag{1.83}$$

для довільних векторів $\xi \in \mathcal{F}_-$ *та* $\varphi \in \mathcal{F}_+$.

Справедливим є таке твердження (див. [27], твердження 1).

Твердження 1.7.1. *Для довільного унітарного оператора* $U_+ : \mathcal{F}_+ \to \mathcal{H}_+$ *існує єдиний унітарний оператор* $U_- : \mathcal{F}_- \to \mathcal{H}_-$ *такий, що пара* (U_-, U_+) *є біунітарною. Більш того, оператор* U_- *задається формулою*

$$U_- = \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0}^{-1} U_+ \mathbb{I}_{\mathcal{F}_0} : \mathcal{F}_- \to \mathcal{H}_-, \tag{1.84}$$

в якій

$$\mathbb{I}_{\mathcal{F}_0} : \mathcal{F}_- \to \mathcal{F}_+, \qquad \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$$

— канонічні ізометрії, пов'язані з ланцюжками (1.82).

Нехай $A : \mathcal{F}_+ \to \mathcal{F}_+$ — лінійний неперервний оператор. Позначимо через $A^+ : \mathcal{F}_- \to \mathcal{F}_-$ оператор спряжений до A відносно $\mathcal{F}_0$, тобто лінійний неперервний оператор в $\mathcal{F}_-$ такий, що

$$\langle A^+\xi, \varphi\rangle_{\mathcal{F}_0} = \langle \xi, A\varphi\rangle_{\mathcal{F}_0}, \qquad \xi \in \mathcal{F}_-, \quad \varphi \in \mathcal{F}_+.$$

Використовуючи біунітарну пару (U_-, U_+), визначимо оператори

$$A_{U_+} := U_+ A U_+^{-1} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+, \qquad A^+_{U_-} := U_- A^+ U_-^{-1} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_-.$$

У подальшому буде потрібне таке твердження (див. [27], твердження 2).

Твердження 1.7.2. *Оператори*

$$A_{U_+} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+, \qquad A^+_{U_-} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_-$$

пов'язані як спряжені відносно $\mathcal{H}_0$, тобто

$$\langle A^+_{U_-}\eta, \psi\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle \eta, A_{U_+}\psi\rangle_{\mathcal{H}_0}, \qquad \eta \in \mathcal{H}_-, \quad \psi \in \mathcal{H}_+.$$

1.7.2. Опис узагальнених функцій у термінах операторів народження. Нехай

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(-p,-q) & \supset & F(N_0) & \supset & \mathcal{F}(p,q) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathcal{F}_- & & \mathcal{F} & & \mathcal{F}_+ \end{array}$$

— перший ланцюжок із (1.82), а

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^h(-p,-q) & \supset & (L^2_\rho) & \supset & \mathcal{H}^h(p,q) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathcal{H}_- & & \mathcal{H} & & \mathcal{H}_+ \end{array}$$

— другий. Виходячи із унітарного оператора

$$U_+ := I^h : \mathcal{F}(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q),$$

за правилом (1.84) побудуємо біунітарну пару $(U_-, U_+) = (I_-^h, I^h)$,

$$U_- := I_-^h := \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0}^{-1} I^h \mathbb{I}_{\mathcal{F}_0} : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q).$$

Розглядаючи кожен вектор $\mathcal{Q}(\xi) = I_-^h \xi$ із простору $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ як I_-^h-образ вектора $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(-p,-q)$ та враховуючи, що

$$\xi = \sum_{n=0}^\infty a_+(\xi_n)\Omega, \qquad \Omega := (1,0,0,\ldots) \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N}) \tag{1.85}$$

(див. зауваження 1.1.1), отримаємо зображення

$$\mathcal{Q}(\xi) := I_-^h \xi = \sum_{n=0}^\infty I_-^h a_+(\xi_n)\Omega = \sum_{n=0}^\infty \partial^+(\xi_n) I_-^h \Omega,$$

$$\partial^+(\xi_n) := I_-^h a_+(\xi_n)(I_-^h)^{-1} : \mathcal{H}^h(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q),$$

вектора $\mathcal{Q}(\xi)$ у термінах образів операторів народження.

Без втрати загальності будемо вважати, що

$$\int_Q h(x,\lambda) d\rho(x) = 1, \qquad \lambda \in \mathcal{U}_h.$$

Справедливою є така лема.

Лема 1.7.1. *У просторі* $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ *має місце рівність*

$$I_-^h \Omega = 1.$$

Доведення. Досить показати, що

$$\langle\!\langle I_-^h \Omega, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle = \langle\!\langle 1, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \tag{1.86}$$

для довільної функції $\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

З одного боку, скориставшись (1.25) та (1.83), отримуємо

$$\begin{aligned}\langle\!\langle I_-^h\Omega, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle I_-^h\Omega, I^h f_n\rangle\!\rangle \\ &= \langle \Omega, (\underbrace{0,\dots,0}_{n}, f_n, 0, \dots)\rangle_{F(N_0)} = \delta_{n,0}\bar{f}_0.\end{aligned} \tag{1.87}$$

З іншого боку, повторюючи доведення леми 12.4 із [36], знаходимо

$$\langle\!\langle 1, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle = \delta_{n,0}\bar{f}_0. \tag{1.88}$$

Порівнюючи (1.87) з (1.88), приходимо до (1.86). □

Як висновок з властивостей, встановлених вище, можна сформулювати наступне твердження.

Теорема 1.7.1. *Негативний простір узагальнених функцій $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ допускає зображення*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(-p,-q) =& I_-^h(\mathcal{F}(-p,-q)) = \Big\{\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \,\Big| \\ & \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q),\ \|\mathcal{Q}(\xi)\|_{\mathcal{H}^h(-p,-q)} = \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}\Big\}.\end{aligned}$$

"Координатно" спарювання між $\mathcal{H}^h(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h(p,q)$ має вигляд

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \mathcal{Q}(\xi), f\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle I_-^h(\xi_n)_{n=0}^{\infty}, I^h(f_n)_{n=0}^{\infty}\rangle\!\rangle \\ &= \langle (\xi_n)_{n=0}^{\infty}, (f_n)_{n=0}^{\infty}\rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n!,\end{aligned} \tag{1.89}$$

де $\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \in \mathcal{H}^h(-p,-q),\ f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q)$.

Перейдемо до розгляду просторів узагальнених функцій $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q), p,q \in \mathbb{N}_3$. Нагадаємо, що за визначенням

$$\kappa(x,\lambda) := \frac{h(x,\lambda)}{h(e,\lambda)},$$

де e — фіксована точка із Q. Простір $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$ будемо інтерпретувати як образ простору Фока $\mathcal{F}(-p,-q)$ при унітарному відображенні

$$I_-^\kappa := \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0}^{-1} I^\kappa \mathbb{I}_{\mathcal{F}_0} : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{H}^\kappa(-p,-q),$$

де

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{I}_{\mathcal{F}_0}: & \mathcal{F}(-p,-q) & \to & \mathcal{F}(p,q), & \qquad & \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0}: & \mathcal{H}^\kappa(-p,-q) & \to & \mathcal{H}^\kappa(p,q) \\ & \| & & \| & & & \| & & \| \\ & \mathcal{F}_- & & \mathcal{F}_+ & & & \mathcal{H}_- & & \mathcal{H}_+ \end{array}$$

— канонічні ізометрії, пов'язані із ланцюжками (1.4) та (1.81). Зрозуміло, що пара (I^κ_-, I^κ) є біунітарною.

Беручи до уваги формулу (1.85), неважко переконатися, що довільний вектор $\theta(\xi) = I^\kappa_-\xi$, $\xi \in \mathcal{F}(-p,-q)$, із простору $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$ допускає зображення

$$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} I^\kappa_- a_+(\xi_n)\Omega. \tag{1.90}$$

Більш того, оскільки

$$\partial(\xi_n) = I^h a_-(\xi_n)(I^h)^{-1} = I^\kappa a_-(\xi_n)(I^\kappa)^{-1}$$

(див. наслідок 1.3.2), то

$$\partial^+(\xi_n) = I^h_- a_+(\xi_n)(I^h_-)^{-1} = I^\kappa_- a_+(\xi_n)(I^\kappa_-)^{-1}$$

і зображення (1.90) набере вигляду

$$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n) I^\kappa_-\Omega.$$

Лема 1.7.2. *У просторі $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$ має місце рівність*

$$I^\kappa_-\Omega = \delta_e,$$

де $\delta_e \in \mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$ — δ-функція зосереджена в точці $e \in Q$, тобто

$$\langle\!\langle \delta_e, f \rangle\!\rangle = \overline{f(e)}, \qquad f \in \mathcal{H}^\kappa(p,q).$$

Доведення. Як і при доведенні леми 1.7.2 досить показати, що

$$\langle\!\langle I^\kappa_-\Omega, \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \delta_e, \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \rangle\!\rangle \tag{1.91}$$

для довільної функції $\langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

З одного боку

$$\begin{aligned}\langle\!\langle I_-^\kappa \Omega, \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle I_-^\kappa \Omega, I^\kappa f_n\rangle\!\rangle \\ &= \langle \Omega, (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, f_n, 0, \ldots)\rangle_{F(N_0)} = \delta_{n,0}\bar{f}_0.\end{aligned} \tag{1.92}$$

З іншого боку, повторюючи доведення леми 12.3 із [36], знаходимо

$$\langle\!\langle \delta_e, \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle = \delta_{n,0}\bar{f}_0. \tag{1.93}$$

Порівнюючи (1.92) з (1.93), приходимо до (1.91). □

Має місце аналог теореми 1.7.1.

Теорема 1.7.2. *Негативний простір узагальнених функцій $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$ допускає зображення*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\kappa(-p,-q) =& I_-^\kappa(\mathcal{F}(-p,-q)) = \Big\{\theta(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \partial^+(\xi_n)\delta_e \,\Big| \\ & \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(-p,-q),\ \|\theta(\xi)\|_{\mathcal{H}^\kappa(-p,-q)} = \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}\Big\}.\end{aligned}$$

"Координатно" спарювання між $\mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^\kappa(p,q)$ має вигляд

$$\langle\!\langle \theta(\xi), f\rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^\infty \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n!, \tag{1.94}$$

де $\theta(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \partial^+(\xi_n)\delta_e \in \mathcal{H}^\kappa(-p,-q)$, $f(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \kappa_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$.

1.7.3. Образи операторів народження нескінченного порядку.

Нехай $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(-p,-(q-1))$, $p,q \in \mathbb{N}_3$. У просторі $\mathcal{H}^h(-p',-q')$, $p' \in \mathbb{N}_p$, $q' \in \mathbb{N}_q$, визначимо оператор

$$\xi(\partial^+) := I_-^h \xi(a_+)(I_-^h)^{-1} = \sum_{m=0}^\infty I_-^h a_-(\xi_m)(I_-^h)^{-1} = \sum_{m=0}^\infty \partial^+(\xi_m),$$

де $\xi(a_+)$ — оператор знищення нескінченного порядку, що діє у просторі Фока $\mathcal{F}(-p',-q')$ (див. твердження 1.1.2).

Очевидно, що оператор $\xi(\partial^+)$ є спряженим до оператора $\xi(\partial)$ відносно (L^2_ρ), тобто

$$\langle\!\langle \xi(\partial^+)\eta, f\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \eta, \xi(\partial) f\rangle\!\rangle, \qquad \eta \in \mathcal{H}^h(-p', -q'), \quad f \in \mathcal{H}^h(p', q').$$

Як оператор у просторі $\mathcal{H}^\kappa(-p', -q')$ він збігається з оператором

$$\xi(\partial^+) := I^\kappa_- \xi(a_+)(I^\kappa_-)^{-1} : \mathcal{H}^\kappa(-p', -q') \to \mathcal{H}^\kappa(-p', -q').$$

Нагадаємо, що

$$\kappa(x, \lambda) = \ell(\lambda) h(x, \lambda) = \frac{h(x, \lambda)}{h(e, \lambda)},$$

де e — фіксована точка із Q. Згідно з п. 1.3.1 функції ℓ та $\frac{1}{\ell}$ допускають зображення

$$\ell(\lambda) = \frac{1}{h(e, \lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \alpha_n\rangle, \qquad \alpha = \Big(\frac{1}{n!}\alpha_n\Big)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-3, -1),$$

$$\frac{1}{\ell(\lambda)} = h(e, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n\rangle, \qquad \beta = \Big(\frac{1}{n!}\beta_n\Big)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-3, -1).$$

Твердження 1.7.3. *Для довільних фіксованих $p, q \in \mathbb{N}_3$ оператор*

$$\bar\alpha(\partial^+) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial^+(\bar\alpha_m) : \mathcal{H}^\kappa(-p, -q) \to \mathcal{H}^h(-p, -q) \tag{1.95}$$

є унітарним і діє на узагальнених функціях

$$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)\delta_e \in \mathcal{H}^\kappa(-p, -q)$$

за правилом

$$\bar\alpha(\partial^+)\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n) 1 \in \mathcal{H}^h(-p, -q). \tag{1.96}$$

Оберненим до $\bar\alpha(\partial^+)$ є унітарний оператор

$$\bar\beta(\partial^+) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial^+(\bar\beta_m) : \mathcal{H}^h(-p, -q) \to \mathcal{H}^\kappa(-p, -q), \tag{1.97}$$

котрий діє за правилом

$$\mathcal{H}^h(-p,-q) \ni \mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \mapsto \bar{\beta}(\partial^+)\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)\delta_e \in \mathcal{H}^\kappa(-p,-q). \tag{1.98}$$

Доведення. Унітарність операторів (1.95), (1.97) є очевидною. Підрахуємо дію цих операторів на відповідних елементах. Використовуючи (1.89), (1.94) та наслідок 1.3.4, для довільних

$$\partial^+(\xi_n)\delta_e \in \mathcal{H}^\kappa(-p,-q), \quad n \in \mathbb{N}_0; \qquad \langle f_m, h_m(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
&\langle\!\langle \bar{\alpha}(\partial^+)\partial^+(\xi_n)\delta_e - \partial^+(\xi_n)1, \langle f_m, h_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \\
&\qquad = \langle\!\langle \bar{\alpha}(\partial^+)\partial^+(\xi_n)\delta_e, \langle f_m, h_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \partial^+(\xi_n)1, \langle f_m, h_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \\
&\qquad = \langle\!\langle \partial^+(\xi_n)\delta_e, \bar{\alpha}(\partial)\langle f_m, h_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \partial^+(\xi_n)1, \langle f_m, h_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \\
&\qquad = \langle\!\langle \partial^+(\xi_n)\delta_e, \langle f_m, \kappa_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle - \langle\!\langle \partial^+(\xi_n)1, \langle f_m, h_m(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \\
&\qquad = \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle - \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Звідки й випливає справедливість (1.96).

Провівши аналогічні підрахунки, переконуємося у справедливості (1.98).

□

1.8. Інтегральні перетворення та множення Віка

1.8.1. C-перетворення. Згідно з підрозділом 1.5 сім'я

$$\bar{\kappa}(\partial) = (\bar{\kappa}_x(\partial))_{x \in Q}$$

лінійних неперервних операторів

$$\bar{\kappa}_x(\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial(\overline{\kappa_m(x)}) : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{H}^h(p,q)$$

є сім'єю операторів узагальненого зсуву.

На функціях f із простору $\mathcal{H}^h(p,q), p, q \in \mathbb{N}_3$, визначимо C-*перетворення*, поклавши

$$(\mathsf{C}f)(x) = \int_Q (\bar{\kappa}_x(\partial)f)(y)d\rho(y) = \langle\!\langle \overline{1, \bar{\kappa}_x(\partial)f} \rangle\!\rangle, \qquad x \in Q.$$

Лема 1.8.1. *На функціях*

$$\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

дія C*-перетворення така:*

$$(\mathsf{C}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \langle f_n, \kappa_n(x)\rangle, \qquad x \in Q. \tag{1.99}$$

Доведення. Використовуючи (1.49), (1.8) та співвідношення (1.88) для довільного фіксованого $x \in Q$ отримаємо

$$\begin{aligned}
(\mathsf{C}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) &= \int_Q (\bar{\kappa}_x(\partial)\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(y)d\rho(y) \\
&= \int_Q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(\partial(\overline{\kappa_m(x)})\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(y)d\rho(y) \\
&= \int_Q \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\langle f_n, \kappa_m(x) \hat{\otimes} h_n(y)\rangle d\rho(y) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \int_Q \langle f_n^{\overline{\kappa_m(x)}}, h_n(y)\rangle d\rho(y) \\
&= \langle f_n^{\overline{\kappa_n(x)}}, 1\rangle = \langle f_n, \kappa_n(x)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Тепер є майже очевидною така теорема.

Теорема 1.8.1. *Для всіх* $p, q \in \mathbb{N}_3$ *відображення*

$$\mathcal{H}^h(p,q) \ni f \mapsto (\mathsf{C}f)(\cdot) = \int_Q (\bar{\kappa}_{\cdot}(\partial)f)(y)d\rho(y) \in \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

визначене і є унітарним, причому

$$\mathsf{C} = \bar{\alpha}(\partial) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\partial(\bar{\alpha}_m) : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q)$$

(*щодо визначення та властивостей оператора* $\bar{\alpha}(\partial)$ *див. наслідок* 1.3.4).

Доведення. При кожному $x \in Q$, взявши до уваги наслідок 1.3.4 і те, що оператор $\bar{\kappa}_x(\partial) : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{H}^\kappa(p,q)$ є лінійним та неперевним, для довільної функції

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in \mathcal{H}^h(p,q)$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
(\mathsf{C}f)(x) &= \Big(\mathsf{C}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\Big)\Big)(x) \\
&= \int_Q \Big(\bar{\kappa}_x(\partial)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\Big)\Big)(y) d\rho(y) \\
&= \Big\langle\!\!\Big\langle 1, \overline{\bar{\kappa}_x(\partial)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\Big)(y)} \Big\rangle\!\!\Big\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle\!\langle \overline{1, \bar{\kappa}_x(\partial)(\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(y)} \rangle\!\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathsf{C}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x)\rangle = (\bar{\alpha}(\partial)f)(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Зауваження 1.8.1. Із теореми випливає, що спряжений оператор C^+ до C відносно (L^2_ρ) збігається з унітарним оператором

$$\mathsf{C}^+ = \bar{\alpha}(\partial^+) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \partial^+(\bar{\alpha}_m) : \mathcal{H}^\kappa(-p,-q) \to \mathcal{H}^h(-p,-q).$$

1.8.2. S- і T-перетворення та множення Віка. В даному пункті, використовуючи оператори

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \ni \xi \mapsto (I_{\mathrm{Hol}}\xi)(\cdot) := \langle \xi, \mathsf{e}(\bar{\cdot})\rangle_{F(N_0)} \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}),$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \ni \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto I_-^h \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n) 1 \in (\mathcal{H}^h)',$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \ni \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto I_-^\kappa \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n) \delta_e \in (\mathcal{H}^\kappa)',$$

котрі здійснюють топологічний ізоморфізм між відповідними просторами, побудуємо так звані S- і T-перетвореня між простором ростків аналітичних функцій $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$ та простором

$$(\mathcal{H}^h)' = (\mathcal{H}^\kappa)' =: (\mathcal{H})',$$

і введемо в $(\mathcal{H})'$ множення S-Віка та T-Віка, індуковані цими перетвореннями.

S-*перетворення* визначається як топологічний ізоморфізм

$$\mathsf{S} := I_{\mathrm{Hol}}(I^h_-)^{-1} : (\mathcal{H})' \to \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$$

між $(\mathcal{H})'$ та $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$. Зрозуміло, що як відображення

$$\mathsf{S} := I_{\mathrm{Hol}}(I^h_-)^{-1} : \mathcal{H}^h(-p,-q) \to \mathrm{Hol}(p,q)$$

S-перетворення є унітарним оператором.

Дія оператора $\mathsf{S} : (\mathcal{H})' \to \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$ на довільному векторі

$$\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \in (\mathcal{H})'$$

така:

$$(\mathsf{S}\mathcal{Q}(\xi))(\lambda) = \langle\!\langle \mathcal{Q}(\xi), h(\cdot,\bar{\lambda})\rangle\!\rangle,$$

де $\lambda \in \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})$ при $\mathcal{Q}(\xi) \in \mathcal{H}^h(-p,-q) \subset (\mathcal{H})'$.

Справді, при $\lambda \in \mathcal{U}_p(K^{-\frac{q}{2}})$

$$h(\cdot,\lambda) = I^h\mathsf{e}(\lambda) \in \mathcal{H}^h(p,q),$$

а оскільки пара (I^h_-, I^h) — біунітарна, то на підставі (1.19) та (1.89) дістанемо

$$\begin{aligned}(\mathsf{S}\mathcal{Q}(\xi))(\lambda) &= \big(I_{\mathrm{Hol}}\big((I^h_-)^{-1}\mathcal{Q}(\xi)\big)\big)(\lambda) = \big(I_{\mathrm{Hol}}\xi\big)(\lambda)\\ &= \langle \xi, \mathsf{e}(\bar{\lambda})\rangle_{F(N_0)} = \langle\!\langle I^h_-\xi, I^h\mathsf{e}(\bar{\lambda})\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathcal{Q}(\xi), h(\cdot,\bar{\lambda})\rangle\!\rangle,\end{aligned}$$

що і стверджувалося.

Ізоморфізм $\mathsf{S} : (\mathcal{H})^{'} \to \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$ і та обставина, що простір $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$ є комутативною алгеброю відносно звичайного додавання і множення функцій, дають можливість перетворити $(\mathcal{H})^{'}$ в комутативну алгебру з *множенням* S-*Віка*

$$\mathcal{Q}(\xi) \diamond_S \mathcal{Q}(\eta) := \mathsf{S}^{-1}(\mathsf{S}\mathcal{Q}(\xi) \cdot \mathsf{S}\mathcal{Q}(\eta)).$$

узагальнених функцій $\mathcal{Q}(\xi), \mathcal{Q}(\eta) \in (\mathcal{H})^{'}$

Очевидно, що

$$\mathcal{Q}(\xi) \diamond_S \mathcal{Q}(\eta) = I_-^h(\xi \diamond \eta),$$

де $\xi = (I_-^h)^{-1}\mathcal{Q}(\xi), \eta = (I_-^h)^{-1}\mathcal{Q}(\eta) \in \mathcal{F}(\mathcal{N}^{'})$, а $\diamond$ – множення Віка в $\mathcal{F}(\mathcal{N}^{'})$ (див. підрозділ 1.2).

Звідси, скориставшись наслідком 1.2.2, одержимо: *довільна фіксована узагальнена функція* $\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_n)1 \in (\mathcal{H})^{'}$ *визначає лінійний неперервний оператор*

$$(\mathcal{H})^{'} \ni \mathcal{Q}(\eta) \mapsto \mathcal{Q}(\xi) \diamond_S \mathcal{Q}(\eta) \in (\mathcal{H})^{'},$$

котрий збігається з оператором

$$(\mathcal{H})^{'} \ni \mathcal{Q}(\eta) \mapsto \xi(\partial^+)\mathcal{Q}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^+(\xi_m)\mathcal{Q}(\eta) \in (\mathcal{H})^{'}.$$

Поряд з S-перетворенням у просторі $(\mathcal{H})^{'}$ визначимо T-*перетворення*, поклавши

$$\mathsf{T} := I_{\mathrm{Hol}}(I_-^{\kappa})^{-1} : (\mathcal{H})^{'} \to \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}).$$

Все викладене вище щодо S-перетворення зберігається і для T-перетворення, але з використанням узагальнених функцій $\theta(\xi) \in (\mathcal{H})^{'}$ замість $\mathcal{Q}(\xi) \in (\mathcal{H})^{'}$ і заміною h на κ. Множення T-Віка $\diamond_T$ знову перетворює $(\mathcal{H})^{'}$ в комутативну алгебру, ізоморфну тій самій алгебрі $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N})$, але відмінну від алгебри, породженої множенням $\diamond_S$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі викладені основні положення (відомі та нові) біортогонального підходу до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Отримано такі результати:

1. На просторах Фока введено оператори знищення та народження нескінченного порядку і досліджено їх образи при відповідній функціональній реалізації цих просторів.
2. З використанням таких операторів встановлено важливий результат про збіг просторів основних функцій, пов'язаних з різними породжуючими функціями.
3. На просторах основних функцій побудовано і досліджено сім'ю операторів узагальненого зсуву.
4. Досліджено властивості так званого C-перетворення, пов'язаного з операторами узагальненого зсуву.

Матеріали цього розділу опубліковані в роботах [36, 38, 39].

РОЗДІЛ 2
ОРТОГОНАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ НЕСКІНЧЕННОГО ЧИСЛА ЗМІННИХ

У другому розділі розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Із загальної точки зору отримано ряд результатів, характерних для класичних гауссового та пуассонового аналізу.

2.1. Ортогональність системи базисних функцій

Як і вище, нехай Q — сепарабельний метричний простір, ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q, $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$ — відповідний L^2-простір.

Нехай $\mathcal{U}_0$ — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times \mathcal{U}_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$$

— задана функція. *Припустимо, що для кожного* $x \in Q$ $\quad h(x, \cdot)$ *є аналітичною в нулі простору* $N_{1,\mathbb{C}}$ *функцією змінної* λ, *для кожного* $\lambda \in \mathcal{U}_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$. *Крім того, будемо вважати, що* $h(\cdot, \lambda)$ *локально обмежена рівномірно по відношенню до* λ *із довільної замкненої кулі з* $\mathcal{U}_0$ *і* $h(x, 0) = 1$ *для всіх* x *із* Q.

Як і в п. 1.3.1 припускається існування спільного для всіх x із Q околу

$$\mathcal{U}_h = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_h,\ R_h > 0\} \subset \mathcal{U}_0$$

в якому функцію $h(x, \cdot)$ можна подати у вигляді ряду

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x) \rangle, \quad h_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}), \tag{2.1}$$

рівномірно збіжного на кожній замкненій кулі з $\mathcal{U}_h$.

Згідно з п.1.3.1 кожен вектор $f_n \in \mathcal{F}_n(N_p)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$, породжує функцію

$$Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1 \tag{2.2}$$

із простору $C(Q)$.

Теорема 2.1.1. *Для функцій* (2.2)*, породжених векторами*

$$\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \qquad \psi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}), \qquad n, m \in \mathbb{N}_0,$$

співвідношення ортогональності

$$\int_Q \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_m, h_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n, \overline{\psi_n}\rangle \tag{2.3}$$

є справедливим тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{N}_2$, $C > 0$, $L > 0$ такі, що

$$\| \| h_n(\cdot) \|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} \|_{(L^2)} \leq L C^n n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.4}$$

і

$$\int_Q h(x, \varphi) \overline{h(x, \psi)} d\rho(x) = \exp\langle \varphi, \overline{\psi}\rangle \tag{2.5}$$

для довільних $\varphi, \psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ таких, що $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}}, \|\psi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < r$, де $r > 0$ — достатньо мале.

Доведення. Необхідність. Нехай співвідношення ортогональності (2.3) має місце. Тоді, очевидно, для всіх λ із $\mathcal{U}_h$ ряд

$$h(\cdot, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle$$

збігається за нормою простору (L^2_ρ) . Тому для $\varphi, \psi \in \mathcal{U}_h \cap \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ маємо

$$\begin{aligned}\int_Q h(x, \varphi) \overline{h(x, \psi)} d\rho(x) &= (h(\cdot, \varphi), h(\cdot, \psi))_{(L^2_\rho)} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} (\langle \varphi^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle, \langle \psi^{\otimes m}, h_m(\cdot)\rangle)_{(L^2_\rho)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \varphi, \overline{\psi}\rangle^n = \exp\langle \varphi, \overline{\psi}\rangle.\end{aligned}$$

Переконаємося у справедливості оцінки (2.4) при $p = 2$. Оскільки $\rho(Q) = 1$ і $h_0(x) = 1$ для всіх $x \in Q$, то при $n = 0$ оцінка (2.4) виконується. Встановимо її для $n \in \mathbb{N}_1$.

Нехай $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у просторі N_2, $e_j \in \mathcal{N}$. Позначимо через $\mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}$ множину фінітних мультиіндексів з цілочисловими невід'ємними координатами, тобто мультиіндексів $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$, $\mu_j \in \mathbb{N}_0$, таких, що $\mu_{k+1} = \mu_{k+2} = \ldots = 0$, починаючи з деякого $k = k(\mu) \in \mathbb{N}_1$.

Зрозуміло, що

$$(e_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}, |\mu|=n}, \qquad e_\mu := \varepsilon_\mu e_1^{\otimes \mu_1} \hat{\otimes} e_2^{\otimes \mu_2} \hat{\otimes} \ldots,$$

$$\varepsilon_\mu := \left(\frac{|\mu|!}{\mu_1! \mu_2! \ldots} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad |\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \ldots = n, \qquad e_j^{\otimes 0} := 1.$$

— ортонормовний базис у просторі $\mathcal{F}_n(N_2)$, а тому для кожного $x \in Q$

$$\|h_n(x)\|^2_{\mathcal{F}_n(N_{-2})} = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}, |\mu|=n} |\langle e_\mu, h_n(x) \rangle|^2.$$

Використовуючи останнє і (2.3), на підставі теореми Б. Леві отримуємо

$$\begin{aligned}
\| \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} \|^2_{(L^2)} &= \int_Q \|h_n(x)\|^2_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} d\rho(x) \\
&= \int_Q \sum_{\mu \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}, |\mu|=n} |\langle e_\mu, h_n(x) \rangle|^2 d\rho(x) \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}, |\mu|=n} \int_Q |\langle e_\mu, h_n(x) \rangle|^2 d\rho(x) \\
&= \sum_{\mu \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}, |\mu|=n} \|e_\mu\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)} = n! \|O_{2,0}^{\otimes n}\|^2_{HS} \\
&\leq n! \|O_{2,0}^{\otimes 1}\|^{2n}_{HS} \leq (C^n n!)^2, \qquad C := \|O_{2,0}^{\otimes 1}\|_{HS},
\end{aligned}$$

де $O_{2,0}^{\otimes n}, n \in \mathbb{N}_1$, — оператор вкладення $\mathcal{F}_n(N_2)$ в $\mathcal{F}_n(N_0)$.

Достатність. Припустимо, що існує $p \in \mathbb{N}_2$ таке, що оцінка (2.4) і рівність (2.5) виконуються. Нехай вектори φ та ψ такі як і в умові теореми. Подавши їх у вигляді

$$\varphi = z_1 \tilde{\varphi}, \qquad \psi = z_2 \tilde{\psi},$$

$$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}},\ \|\tilde{\varphi}\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = \|\tilde{\psi}\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = 1; \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}^1, \quad |z_1|, |z_2| < \min\{R_h, C^{-1}\},$$

та врахувавши, що для $\lambda = \varphi, \psi$ ряд (2.1) збігається у топології простору (L^2_ρ) до $h(\cdot, \varphi)$ та $h(\cdot, \psi)$ відповідно (див. [36], лема 4. 1), отримаємо

$$\begin{aligned}\int_Q h(x, z_1\tilde{\varphi})\overline{h(x, z_2\tilde{\psi})}d\rho(x) &= (h(\cdot, z_1\tilde{\varphi}), h(\cdot, z_2\tilde{\psi}))_{(L^2_\rho)} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^m}{n!m!}(\langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle, \langle\tilde{\psi}^{\otimes m}, h_m(\cdot)\rangle)_{(L^2_\rho)} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^m}{n!m!}\int_Q \langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, h_n(x)\rangle\overline{\langle\tilde{\psi}^{\otimes m}, h_m(x)\rangle}d\rho(x).\end{aligned} \tag{2.6}$$

З іншого боку, на підставі (2.5) маємо

$$\int_Q h(x, z_1\tilde{\varphi})\overline{h(x, z_2\tilde{\psi})}d\rho(x) = \exp(z_1\bar{z}_2\langle\tilde{\varphi}, \overline{\tilde{\psi}}\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^n}{n!}\langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \overline{\tilde{\psi}}^{\otimes n}\rangle. \tag{2.7}$$

Таким чином для функції від z_1, z_2, що стоїть у лівій частині (2.6) маємо два зображення: (2.6) і (2.7). Порівнюючи коефіцієнти в цих двох зображеннях дістанемо

$$\int_Q \langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, h_n(x)\rangle\overline{\langle\tilde{\psi}^{\otimes m}, h_m(x)\rangle}d\rho(x) = \delta_{n,m}n!\langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \overline{\tilde{\psi}}^{\otimes n}\rangle,$$

що забезпечує справедливість (2.3). □

Зауваження 2.1.1. Нехай $Q = N_{-1}$. Борелеву ймовірнісну міру ρ на Q називають аналітичною, якщо її перетворення Лапласа

$$l_\rho(\lambda) = \int_{N_{-1}} \exp\langle x, \lambda\rangle d\rho(x), \qquad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}},$$

є аналітичною функцією в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$.

У випадку, коли міра ρ є аналітичною і

$$h(x, \lambda) = \frac{\exp\langle x, \omega(\lambda)\rangle}{l_\rho(\omega(\lambda))}, \qquad x \in Q = N_{-1}, \quad \lambda \in \mathcal{U}_h \subset N_{1,\mathbb{C}}$$

($\omega : N_{1,\mathbb{C}} \to N_{1,\mathbb{C}}$ — аналітична й оборотна функція в околі $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$, $\omega(0) = 0$), оцінка (2.4) виконується автоматично. (див. [25, 31]). Крім того лінійна оболонка функцій

$$Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, \omega_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad \varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(у цьому випадку неперервних поліномів), є щільною у просторі (L^2_ρ) (див. [46], розділ 2, § 10, теорема 1).

2.2. Унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$ та простором (L^2_ρ)

Припустимо, що функції

$$Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad \varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.8}$$

задовольняють співвідношення ортогональності (2.3) *і їхня лінійна оболонка є щільною у просторі* (L^2_ρ).

Завдяки (2.3) можна розширити в L^2-сенсі клас функцій (2.8) до функцій

$$Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad \varphi_n \in \mathcal{F}_n(N_0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.9}$$

зі збереженням властивості ортогональності.

Точніше, нехай $f_n \in \mathcal{F}_n(N_0)$ і $(\varphi_n^{(k)})_{k=0}^\infty \subset \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$ — послідовність, збіжна до f_n в $\mathcal{F}_n(N_0)$. Покладемо

$$\langle f_n, h_n(\cdot) \rangle := \lim_{k\to\infty} \langle \varphi_n^{(k)}, h_n(\cdot) \rangle \in (L^2_\rho). \tag{2.10}$$

Очевидно, що дана границя існує в (L^2_ρ) і не залежить від вибору послідовності $(\varphi_n^{(k)})_{k=0}^\infty$, збіжної до f_n в $\mathcal{F}_n(N_0)$. Подавши вектори

$$f_n \in \mathcal{F}_n(N_0), \qquad g_m \in \mathcal{F}_m(N_0), \qquad n, m \in \mathbb{N}_0,$$

у вигляді

$$f_n = \lim_{k\to\infty} \varphi_n^{(k)}, \quad \varphi_n^{(k)} \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \qquad g_m = \lim_{k\to\infty} \psi_m^{(k)}, \quad \psi_m^{(k)} \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}),$$

і перейшовши в

$$\int_Q \langle \varphi_n^{(k)}, h_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_m^{(k)}, h_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n^{(k)}, \overline{\psi_n^{(k)}}\rangle$$

до границі при $k \to \infty$, отримаємо

$$\int_Q \langle f_n, h_n(x)\rangle \overline{\langle g_m, h_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle f_n, \bar{g}_n\rangle. \tag{2.11}$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 2.2.1. *Для довільної функції $f \in (L^2_\rho)$ існує однозначно визначений вектор $(f_n)_{n=0}^\infty \in F(N_0)$ такий, що в (L^2_ρ)*

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \tag{2.12}$$

і

$$\|f\|^2_{(L^2_\rho)} = \|(f_n)_{n=0}^\infty\|^2_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)} n!.$$

Навпаки, довільний ряд вигляду (2.12) з $(f_n)_{n=0}^\infty \in F(N_0)$ визначає функцію в (L^2_ρ).

Як результат визначено відображення

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h_\rho f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in (L^2_\rho), \tag{2.13}$$

яке реалізує унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$ та простором (L^2_ρ).

Доведення. Досить показати, що відображення I^h_ρ (2.13) визначене і є унітарним оператором, що діє між $F(N_0)$ та (L^2_ρ).

Нехай $(f_n)_{n=0}^\infty \in F(N_0)$. З рівності (2.11) відразу випливає збіжність ряду $\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle$ у топології простору (L^2_ρ). Це дає можливість визначити відображення I^h_ρ (2.13), яке внаслідок співвідношення ортогональності

(2.11) є ізометричним оператором, що діє із $F(N_0)$ в (L^2_ρ). Цей оператор I^h_ρ буде унітарним, якщо $\mathrm{Ran}\,(I^h_\rho) = (L^2_\rho)$, тобто для довільної функції $f \in (L^2_\rho)$ знайдеться вектор $\tilde{f} = (f_n)_{n=0}^\infty \in F(N_0)$ такий, що в (L^2_ρ)

$$(I^h_\rho \tilde{f})(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle = f(\cdot). \tag{2.14}$$

Зафіксуємо $f \in (L^2_\rho)$. При кожному фіксованому $n \in \mathbb{N}_0$ функція $f \in (L^2_\rho)$ породжує антилінійний неперервний функціонал

$$\mathcal{F}_n(N_0) \ni g_n \mapsto \frac{1}{n!}\langle\!\langle f, \langle g_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \in \mathbb{C}^1.$$

Тому існує єдиний елемент $f_n \in \mathcal{F}_n(N_0)$ такий, що

$$\langle f_n, \bar{g}_n\rangle = \frac{1}{n!}\langle\!\langle f, \langle g_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\!\rangle \tag{2.15}$$

для довільного $g_n \in \mathcal{F}_n(N_0)$.

Використовуючи співвідношення ортогональності (2.11) і рівність (2.15), неважко встановити нерівність

$$\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)} n! \le \|f\|^2_{(L^2_\rho)},$$

яка забезпечує належність послідовності $(f_n)_{n=0}^\infty$ до простору $F(N_0)$.

Таким чином, $\tilde{f} = (f_n)_{n=0}^\infty \in F(N_0)$, і для доведення теореми залишилось встановити рівність (2.14). Використавши (2.15), (2.11) і врахувавши, що лінійна оболонка функцій (2.9) є щільною в (L^2_ρ), відразу отримаємо необхідне. $\square$

2.3. Оснащення простору (L^2_ρ)

З огляду на те, що оператор I^h_ρ (2.13) здійснює унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$ і простором (L^2_ρ), природно будувати оснащення простору (L^2_ρ) (тобто простори основних та узагальнених функцій) як образ оснащення (1.4) простору Фока $F(N_0)$ при відображенні I^h_ρ. Точніше, образ

$$I^h_\rho(\mathcal{F}(p,q)) =: \mathcal{H}^h_\rho(p,q) \subset (L^2_\rho) \qquad p,q \in \mathbb{N}_1,$$

з топологією $\mathcal{F}(p,q)$ є гільбертовим простором, щільно та неперервно вкладеним у (L^2_ρ) і породжуючим ядерне оснащення

$$(\mathcal{H}^h_\rho)' \supset \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^h_\rho(p,q) \supset \mathcal{H}^h_\rho, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{H}^h_\rho := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{H}^h_\rho(p,q), \qquad (\mathcal{H}^h_\rho)' := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q),$$

де $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^h_\rho(p,q)$.

За визначенням

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h_\rho(p,q) &:= I^h_\rho(\mathcal{F}(p,q)) \\ &= \{f \in (L^2_\rho) \,|\, \exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p,q) :\; f(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\}\end{aligned}$$

є гільбертовим простором з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^h_\rho(p,q)} = \|\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\|_{\mathcal{H}^h_\rho(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^\infty\|_{\mathcal{F}(p,q)}. \tag{2.17}$$

Твердження 2.3.1. *При* $K > \max\{1, \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R_h^{-2}\}$ *простір* $\mathcal{H}^h_\rho(p,q), p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}$, *неперервно вкладається у простір* $C(Q)$ *і його можна інтерпретувати як множину неперервних функцій*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h_\rho(p,q) &= \mathcal{H}^h(p,q) \\ &:= \{f \in C(Q) \,|\, \exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p,q) : f(x) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(x)\rangle,\, x \in Q\}\end{aligned}$$

із заданою на ній гільбертовою нормою (2.17).

Доведення. При вказаному в умові твердження $K > 1$ ряд

$$\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle, \qquad (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p,q),$$

збігається як у топології простору (L^2_ρ), так і у топології простору $C(Q)$. А оскільки відображення (2.13) ін'єктивне, то таким, очевидно, є і неперервне відображення

$$\mathcal{F}(p,q) \in f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h_\rho f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in C(Q),$$

що і забезпечує справедливість твердження. $\square$

Як висновок з властивостей, встановлених вище, можна сформулювати таку теорему.

Теорема 2.3.1. *Якщо функція $h(x,\lambda)$ задовольняє припущенням даного розділу, то вона задовольняє припущенням розділу 1. Як наслідок, всі результати, викладені у розділу 1, є справедливими у розглядуваному випадку.*

2.4. Простори узагальнених функцій

Згідно з результатами п. 1.7.2 негативний простір узагальнених функцій $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ можна зобразити у вигляді (беремо до уваги теорему 2.3.1)

$$\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q) = \mathcal{H}^h(-p,-q) \tag{2.18}$$

$$:= \{\mathcal{Q}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n) \mid \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(-p,-q), \|\mathcal{Q}(\xi)\|_{\mathcal{H}^h(-p,-q)} = \|\xi\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}\},$$

де

$$\mathcal{Q}(\xi_n) := \partial^+(\xi_n)1, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

"Координатно" спарювання $\langle\!\langle\cdot\,,\cdot\rangle\!\rangle$ цього простору з $\mathcal{H}^h_\rho(p,q)$, породжене скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{(L^2_\rho)}$ у просторі (L^2_ρ), має вигляд (1.89).

Зважаючи на те, що оператор $I^h_\rho : F(N_0) \to (L^2_\rho)$ є унітарним, можна дати альтернативний до (2.18) опис простору $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$.

Твердження 2.4.1. *Відображеня*

$$\mathcal{F}(-p,-q) \supset F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_\rho^h f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q) \tag{2.19}$$

після замикання за неперервністю реалізує унітарний ізоморфізм між простором $\mathcal{F}(-p,-q), p, q \in \mathbb{N}_1$, *та простором* $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$.

Як наслідок, простір $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$ *допускає зображення*

$$\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)) = \{\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, h_n\rangle \mid (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q),$$

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)} = \|(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}\},$$

в якому

$$\langle \xi_n, h_n\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle f_n^{(k)}, h_n\rangle \in \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.20}$$

де $(f_n^{(k)})_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{F}_n(N_0)$ *— довільна послідовність, збіжна до* $\xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p})$ *у топології простору* $\mathcal{F}_n(N_{-p})$ (*в* (2.20) *границю розуміємо в* $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$).

Для

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, h_n\rangle \in \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q), \quad f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}_\rho^h(p,q)$$

маємо

$$\langle\!\langle \xi, f\rangle\!\rangle = \langle (\xi_n)_{n=0}^{\infty}, (f_n)_{n=0}^{\infty}\rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n!. \tag{2.21}$$

Доведення. З огляду на те, що простір $F(N_0)$ щільно вкладається у простір $\mathcal{F}(-p,-q)$, досить переконатися в ізометричності оператора (2.19).

Нехай

$$\mathbb{I}_F : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{F}(p,q), \qquad \mathbb{I}_{L^2} : \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q) \to \mathcal{H}_\rho^h(p,q)$$

— канонічні ізометрії пов'язані з ланцюжками (1.4) та (2.16) відповідно. Позначимо через $I_{+,\rho}^h$ оператор I_ρ^h, який розуміємо як оператор із $\mathcal{F}(p,q)$ в $\mathcal{H}_\rho^h(p,q)$. Очевидно, що оператор

$$I_{-,\rho}^h := (\mathbb{I}_{L^2})^{-1} I_{+,\rho}^h \mathbb{I}_F : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$$

— унітарний, а пара $(I^h_{-,\rho}, I^h_{+,\rho})$ — біунітарна, тобто

$$\langle\!\langle I^h_{-,\rho}\xi, I^h_{+,\rho}\varphi\rangle\!\rangle = \langle \xi, \varphi\rangle_{F(N_0)} \tag{2.22}$$

для довільних $\xi \in \mathcal{F}(-p,-q)$ та $\varphi \in \mathcal{F}(p,q)$.

Покажемо, що в $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$

$$I^h_\rho f = I^h_{-,\rho} f, \qquad f \in F(N_0), \tag{2.23}$$

цим ізометричність оператора (2.19) буде встановлено.

Нехай $f = (f_n)_{n=0}^\infty \in F(N_0), \varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p,q)$. З одного боку, скориставшись (2.13), отримаємо

$$\begin{aligned} \langle\!\langle I^h_\rho f, I^h_{+,\rho}\varphi\rangle\!\rangle &= (I^h_\rho f, I^h_{+,\rho}\varphi)_{(L^2_\rho)} \\ &= (\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle, \sum_{m=0}^\infty \langle \varphi_m, h_m(\cdot)\rangle)_{(L^2_\rho)} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \bar\varphi_n\rangle n! = \langle f, \varphi\rangle_{F(N_0)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

З іншого боку

$$\langle\!\langle I^h_{-,\rho} f, I^h_{+,\rho}\varphi\rangle\!\rangle = \langle f, \varphi\rangle_{F(N_0)}. \tag{2.25}$$

Порівнюючи (2.24) з (2.25), приходимо до висновку, що для довільних $f \in F(N_0)$, $\varphi \in \mathcal{F}(p,q)$

$$\langle\!\langle I^h_{-,\rho} f - I^h_\rho f, I^h_{+,\rho}\varphi\rangle\!\rangle = 0.$$

Звідси відразу випливає (2.23).

Щодо рівності (2.21), то вона випливає із (2.22) та (2.23). □

Наслідок 2.4.1. *Порівнюючи* (2.21) *з* (1.89)*, приходимо до висновку, що для довільного* $\xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), n \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle \xi_n, h_n\rangle = \mathcal{Q}(\xi_n) := \partial^+(\xi_n)1$$

в сенсі простору $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q), p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1$.

2.5. Образи операторів вторинного квантування

Нехай A — самоспряжений позитивний оператор в N_0 з областю визначення $\mathrm{Dom}\,(A)$. Він природним чином продовжується до такого ж оператора в $\mathcal{F}_1(N_0) = N_{0,\mathbb{C}}$, для продовженого оператора збережемо позначення A. Для кожного $n \in \mathbb{N}_1$ позначимо через A_n оператор в $\mathcal{F}_n(N_0)$, визначений формулою

$$A_n := A \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes A \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes A$$

на $\mathring{\mathcal{F}}_n(D)$ ($D \subset \mathrm{Dom}\,(A)$ — фіксована лінійна множина в N_0).

Вторинним квантуванням оператора A *називається оператор в* $F(N_0)$*, визначений формулою*

$$d\,\mathrm{Exp}\,A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad A_0 := 0,$$

на $\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}\,(D)$. Згідно з [41] (розділ 6, § 1) цей оператор є ермітовим. Більш того, якщо D — область істотної самоспряженості, то він є істотно самоспряженим.

Позначимо через

$$H_\rho^A := I_\rho^h d\,\mathrm{Exp}\,A(I_\rho^h)^{-1}$$

образ оператора $d\,\mathrm{Exp}\,A$ при відображенні (2.13). Оператор H_ρ^A також будемо називати вторинним квантуванням оператора A. Зрозуміло, що якщо множина D є областю істотної самоспряженості оператора A, то множина $I_\rho^h(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}\,(D))$ є областю істотної самоспряженості оператора H_ρ^A.

Введемо оператори $\partial_x,\ x \in Q$, необхідні при побудові симетричної білінійної форми оператора H_ρ^A.

Для фіксованого $x \in Q$ позначимо через ∂_x лінійний неперервний оператор, що діє із $\mathcal{H}^h(p,q)$ ($p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1$ — фіксовані) в $\mathcal{F}_1(N_0) = N_{0,\mathbb{C}}$ і задовольняє рівність

$$(\partial_x f, \xi_1)_{\mathcal{F}_1(N_0)} = (\partial(\xi_1)f)(x), \qquad \xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0), \quad f \in \mathcal{H}^h(p,q), \tag{2.26}$$

якою він однозначно визначається.

Існування такого оператора забезпечує оцінка

$$
\begin{aligned}
|(\partial(\xi_1)f)(x)| &\le c\|\partial(\xi_1)f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} \\
&\le cK^{-\frac{q}{2}}\|\xi_1\|_{\mathcal{F}_1(N_{-p})}\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)} \le cK^{-\frac{q}{2}}\|\xi_1\|_{\mathcal{F}_1(N_0)}\|f\|_{\mathcal{H}^h(p,q)},
\end{aligned}
$$

справедлива для деякого $c = c(x) > 0$ і всіх $f \in \mathcal{H}^h(p,q)$ та $\xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0)$.

Щоб визначити явно дію оператора $\partial_x : \mathcal{H}^h(p,q) \to \mathcal{F}_1(N_0)$ ($p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}_1$ — фіксовані) на функціях

$$
\langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^h(p,q), \qquad \varphi_1 \in \mathcal{F}_1(N_p), \quad n \in \mathbb{N}_0,
$$

скористаємося (2.26) та (1.49). А саме, для довільного $\xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0)$ маємо

$$
\begin{aligned}
(\partial_x\langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n\rangle, \xi_1)_{\mathcal{F}_1(N_0)} &= (\partial(\xi_1)\langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle)(x) \\
&= \begin{cases} n\langle \varphi_1^{\otimes n}, h_{n-1}(x)\hat{\otimes}\bar{\xi}_1\rangle, & n \in \mathbb{N}_1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (n\langle \varphi_1^{\otimes(n-1)}, h_{n-1}(x)\rangle\varphi_1, \xi_1)_{\mathcal{F}_1(N_0)}, & n \in \mathbb{N}_1, \\ 0, & n = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Звідси знаходимо, що у просторі $\mathcal{F}_1(N_0)$

$$
\partial_x\langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n\rangle = \begin{cases} n\langle \varphi_1^{\otimes(n-1)}, h_{n-1}(x)\rangle\varphi_1, & n \in \mathbb{N}_1, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \tag{2.27}
$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 2.5.1. *Нехай* $\mathcal{N} \subset \mathrm{Dom}\, A$. *Симетрична білінійна форма оператора* H_ρ^A *допускає зображення*

$$
(H_\rho^A\varphi, \psi)_{(L_\rho^2)} = \int_Q (A\partial_x\varphi, \partial_x\psi)_{\mathcal{F}_1(N_0)}d\rho(x) \tag{2.28}
$$

для всіх $\varphi, \psi \in I_\rho^h(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$.

Доведення. Рівність (2.28) досить встановити на функціях

$$\varphi(\cdot) = \langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle, \quad \psi(\cdot) = \langle \psi_1^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle, \quad \varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{F}_1(\mathcal{N}), \quad n, m \in \mathbb{N}_1.$$

З одного боку, скориставшись (2.13), для ρ-майже всіх $x \in Q$ отримуємо

$$\begin{aligned}(H_\rho^A \langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle)(x) &= (I_\rho^h d\,\mathrm{Exp}\,A (I_\rho^h)^{-1} \langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle)(x) \\ &= (I_\rho^h((d\,\mathrm{Exp}\,A)\varphi_1^{\otimes n}))(x) \\ &= (I_\rho^h(A\varphi_1 \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_1 + \ldots + \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_1 \otimes A\varphi_1))(x) \\ &= (I_\rho^h(nA\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)})(x) = n\langle A\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}, h_n(x)\rangle.\end{aligned}$$

Звідси (використовуємо (2.11))

$$\begin{aligned}(H_\rho^A \varphi, \psi)_{(L^2_\rho)} &= \int_Q n\langle A\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}, h_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_1^{\otimes m}, h_m(x)\rangle} d\rho(x) \\ &= \delta_{n,m} n n! \langle A\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}, \bar{\psi}_1^{\otimes n}\rangle \\ &= \delta_{n,m} n n! \langle \varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle^{n-1} \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle.\end{aligned} \tag{2.29}$$

З іншого боку, скориставшись (2.27), для будь-якого $x \in Q$ отримуємо

$$\begin{aligned}(A\partial_x \varphi, \partial_x \psi)_{\mathcal{F}_1(N_0)} &= (A\partial_x \langle \varphi_1^{\otimes n}, h_n\rangle, \partial_x \langle \psi_1^{\otimes m}, h_m\rangle)_{\mathcal{F}_1(N_0)} \\ &= nm \langle \varphi_1^{\otimes(n-1)}, h_{n-1}(x)\rangle \overline{\langle \psi_1^{\otimes(m-1)}, h_{m-1}(x)\rangle} \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle.\end{aligned}$$

Врахувавши останнє, за допомогою співвідношення ортогональності (2.11) знаходимо

$$\begin{aligned}&\int_Q (A\partial_x \varphi, \partial_x \psi)_{\mathcal{F}_1(N_0)} d\rho(x) \\ &\qquad = nm \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle \int_Q \langle \varphi_1^{\otimes(n-1)}, h_{n-1}(x)\rangle \overline{\langle \psi_1^{\otimes(m-1)}, h_{m-1}(x)\rangle} d\rho(x) \\ &\qquad = \delta_{n,m} n n! \langle \varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle^{n-1} \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Порівнюючи (2.29) з (2.30), отримуємо потрібне. □

2.6. Розширений стохастичний інтеграл

Як відомо, у гауссовому та пуассоновому аналізі важливу роль відіграє розширений стохастичний інтеграл, який узагальнює класичний інтеграл Іто, побудований за вінеровим чи пуассоновим випадковим процесом. Поняття такого інтеграла було введено приблизно в один і той же час у роботах кількох математиків: М. Хітцуди [47], Ю. Л. Далецького, С. Н. Парамонової [48, 49], Ю. М. Кабанова, А. В. Скорохода [50, 51, 52], Р. Кінга [53] і пізніше для гамма-процесу — у роботах М. О. Качановського [54, 55].

У цьому розділі введено поняття розширеного стохастичного інтеграла в термінах простору Фока та його оснащення. При функціональній реалізації простору Фока за допомогою відображення I_ρ^h отримано визначення розширеного стохастичного інтеграла в термінах простору L_ρ^2 та його оснащення (у гауссовому та пуассоновому випадку це визначення збігається із визначеннями введеними в згадуваних вище роботах). Зокрема, з'ясовано за яких умов на функцію h цей інтеграл є узагальненням інтегралу Іто, побудованого за випадковим процесом, пов'язаним з h.

2.6.1. Розширений стохастичний інтеграл у просторі Фока. Тут і далі всі побудови будемо виконувати при спеціальному виборі ланцюжка (1.1). А саме, нехай

$$N_0 = S_0 := L^2(\mathbb{R}^1, dm(t)),$$

де m — міра Лебега на осі $\mathbb{R}^1$. Зрозуміло, що в даному випадку n-частинковий простір Фока

$$\mathcal{F}_n(S_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t)), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

збігається із простором $\hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$ усіх комплекснозначних симетричних функцій із $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$, де $m^{\otimes n}$ — продакт-міра на борелевій σ-

алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, породжена мірою m. Оскільки функції

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto f_n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^1$$

із простору $\mathcal{F}_n(S_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$ є симетричними, то

$$\begin{aligned}\|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(S_0)} &:= \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(t_1, \ldots, t_n)|^2 dm(t_1) \ldots dm(t_n) \\ &= n! \int\limits_{-\infty < t_1 \le \cdots \le t_n < +\infty} |f_n(t_1, \ldots, t_n)|^2 dm(t_1) \ldots dm(t_n).\end{aligned}$$

Очевидно, що у просторі $\mathcal{F}_n(N_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$, $n \in \mathbb{N}_0$, є щільною множина

$$\Big\{ \sum_{k=1}^{s} c_k \varkappa_{\Delta_1^{(k)}} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n^{(k)}} \,\Big|\, c_k \in \mathbb{C}^1,\ \Delta_j^{(k)} = [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \subset \mathbb{R}^1,\ s \in \mathbb{N}_1 \Big\} \quad (2.31)$$

функцій

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto \sum_{k=1}^{s} c_k (\varkappa_{\Delta_1^{(k)}} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n^{(k)}})(t_1, \ldots, t_n) \\ := \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{s} \sum_{\sigma \in S_n} c_k \varkappa_{\Delta^{(k)}_{\sigma(1)}}(t_1) \ldots \varkappa_{\Delta^{(k)}_{\sigma(n)}}(t_n) \in \mathbb{C}^1,\end{aligned} \quad (2.32)$$

де $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ — перестановка із групи S_n усіх перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$, $\varkappa_\alpha(\cdot)$ — індикатор борелевої множини $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Більш того, можна вважати, що усі функції (2.32) із множини (2.31) мають таку властивість: при кожному $k \in \{1, \ldots, s\}$ півінтервали $\Delta_j^{(k)}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, попарно не перетинаються і, крім того,

$$\Delta_1^{(i)} \times \ldots \times \Delta_n^{(i)} \cap \Delta_1^{(j)} \times \ldots \times \Delta_n^{(j)} = \varnothing$$

при $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$.

Покладемо

$$N_p = S_p := W_p^2(\mathbb{R}^1, (1 + t^2)^p dm(t)), \qquad p \in \mathbb{N}_1,$$

де S_p — дійсний зважений соболевський простір, що є поповненням множини $C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1)$ ($C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1)$ — сукупність усіх нескінченно диференційовних фінітних функцій на $\mathbb{R}^1$) щодо гільбертової норми

$$\|\varphi\|^2_{S_p} := \sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} |(D^n\varphi)(t)|^2 (1+t^2)^p dm(t), \qquad \varphi \in C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1). \tag{2.33}$$

Добре відомо, що при кожному $p \in \mathbb{N}_1$ простір S_{p+1} топологічно та квазіядерно вкладається у простір S_p і $\|\cdot\|_{S_p} \leq \|\cdot\|_{S_{p+1}}$. Крім того, у даному випадку

$$\mathcal{N} = \mathcal{S} := \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} S_p$$

є класичним простором Шварца (див., наприклад, [42], розділ 14).

Таким чином в якості ланцюжка (1.1) будемо використовувати ланцюжок

$$\mathcal{S}' := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} S_{-p} \supset S_{-p} \supset S_0 \supset S_p \supset \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} S_p =: \mathcal{S}.$$

Нехай $\mathcal{K}$ — деякий гільбертів простір. Далі через $L^2([0,\infty);\mathcal{K})$ будемо позначати гільбертів простір векторнозначних функцій

$$[0,\infty) \ni t \mapsto f(t) \in \mathcal{K}, \qquad \|f\|^2_{L^2([0,\infty);\mathcal{K})} := \int_{[0,\infty)} \|f(t)\|^2_{\mathcal{K}} dm(t) < \infty,$$

з відповідним скалярним добутком.

Розширеним стохастичним інтегралом від функції

$$\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q)), \qquad p,q \in \mathbb{N}_1,$$

назвемо елемент $\mathbb{J}_{\text{ext}}(\xi)$ *простору* $\mathcal{F}(-p,-q)$ *такий, що*

$$\mathbb{J}_{\text{ext}}(\xi) = \int_{[0,\infty)} a_+(\delta_t)\xi(t) dm(t) \in \mathcal{F}(-p,-q),$$

де вираз, що праворуч розуміємо як інтеграл Бохнера від векторнозначної функції

$$[0,\infty) \ni t \mapsto a_+(\delta_t)\xi(t) \in \mathcal{F}(-p,-q), \tag{2.34}$$

де δ_t — δ*-функція зосереджена в точці* t.

Підставою для такого означення є наступне твердження.

Твердження 2.6.1. *Якщо* $\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q))$, $p,q \in \mathbb{N}_1$, *то векторнозначна функція* (2.34) *інтегровна за Бохнером на* $[0,\infty)$.

Доведення. Нехай $\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q))$, $p,q \in \mathbb{N}_1$. Скориставшись (1.7) і тим, що

$$\|\delta_t\|_{\mathcal{F}_1(S_{-p})} \leq \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad t \in \mathbb{R}^1,$$

з деяким $c > 0$ (див., наприклад, [42], розділ 14, теорема 4.5), дістанемо

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \|a_+(\delta_t)\xi(t)\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) &\leq K^{-\frac{q}{2}} \int_{[0,\infty)} \|\delta_t\|_{\mathcal{F}_1(S_{-p})} \|\xi(t)\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \\ &\leq K^{-\frac{q}{2}} \Big(\int_{[0,\infty)} \|\delta_t\|^2_{\mathcal{F}_1(S_{-p})} dm(t) \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Big(\int_{[0,\infty)} \|\xi(t)\|^2_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K^{-\frac{q}{2}} \Big(\int_{[0,\infty)} c^2 (1+t^2)^{-1} dm(t) \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Big(\int_{[0,\infty)} \|\xi(t)\|^2_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає потрібне. $\square$

Вкажемо на одну властивість розширеного стохастичного інтеграла $\mathbb{J}_{\mathrm{ext}}$. Нехай

$$D \subset L^2([0,\infty); F(S_0))$$

— множина усіх функцій

$$[0,\infty) \ni t \mapsto f(t) = (f_n(t))_{n=0}^{\infty} \in F(S_0) \tag{2.35}$$

із $L^2([0,\infty); F(S_0))$ таких, що для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f_n(t) = f_n(t; t_1,\ldots,t_n) = \varkappa_{[0,t)^n}(t_1,\ldots,t_n) f_n(t; t_1,\ldots,t_n), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

де $\varkappa_\alpha(\cdot)$ — індикатор борелевої множини $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Далі компоненти $f_n(t), n \in \mathbb{N}_0$, функції $f \in D$ зручно вважати визначеними при всіх $t \in \mathbb{R}^1$, поклавши

$$f_n(t) := 0, \qquad t \in \mathbb{R}^1 \setminus [0,\infty).$$

Нехай

$$f_n(\cdot;\cdot_1,\ldots,\cdot_n) \in S_{0,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{F}_n(S_0)$$

— задана функція. Позначимо через $\hat{f}_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}), n \in \mathbb{N}_1$, симетризацію даної функції за $n+1$ змінною, тобто

$$\hat{f}_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} f_n(t_k;t_1,\ldots,\cancel{t_k},\ldots,t_{n+1})$$

для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1,\ldots,t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Зрозуміло, що якщо $f_n(t;t_1,\ldots,t_n)$, $n \in \mathbb{N}_1$, компонента функції $f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} \in D$, то для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1,\ldots,t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\hat{f}_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}) := \frac{1}{n+1} f_n(t_k;t_1,\ldots,\cancel{t_k},\ldots,t_{n+1}), \tag{2.36}$$

де $t_k = \max\{t_1,\ldots,t_{n+1}\}$. Покладемо $\hat{f}_1(t) := f_0(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 2.6.1. *Відображення*

$$\begin{aligned} L^2([0,\infty);F(S_0)) \supset D \ni f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} \mapsto \\ \mathbb{J}(f) := (0,\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n,\ldots) \in F(S_0) \end{aligned} \tag{2.37}$$

визначене і є лінійним та ізометричним. Більш того, у просторі $\mathcal{F}(-p,-q)$, $p,q \in \mathbb{N}_1$, *має місце рівність*

$$\mathbb{J}_{\text{ext}}(f) = \mathbb{J}(f), \qquad f \in D. \tag{2.38}$$

Доведення. Нехай $f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} \in D$. На основі (2.36) отримаємо

$$\|f\|^2_{L^2([0,\infty);F(S_0))} = \int_{[0,\infty)} \|f(t)\|^2_{F(S_0)} dm(t)$$

$$= \int_{[0,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(t)\|^2_{\mathcal{F}_n(S_0)} n! dm(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{[0,\infty)} \|f_n(t)\|^2_{\mathcal{F}_n(S_0)} dm(t)$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{[0,\infty)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_n(t;t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \right) dm(t) \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,t)^n} |f_n(t;t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \right) dm(t) \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 \int_{[0,\infty)} \left(\int\limits_{0\le t_1\le\dots\le t_n<t} |f_n(t;t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \right) dm(t) \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)!)^2 \int\limits_{0\le t_1\le\dots\le t_{n+1}<\infty} |\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1})|^2 dm(t_1)\dots dm(t_{n+1}) \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1})|^2 dm(t_1)\dots dm(t_{n+1}) \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{f}_{n+1}\|^2_{\mathcal{F}_{n+1}(S_0)}(n+1)! = \|\mathbb{J}(f)\|^2_{F(S_0)}.
\end{aligned}
$$

Звідси випливає ізометричність відображення (2.37), лінійність цього відображення очевидна.

Для встановлення рівності (2.38) досить показати, що

$$\langle \mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(f), \psi\rangle_{F(S_0)} = \langle \mathbb{J}(f), \psi\rangle_{F(S_0)}$$

для довільного $\psi = \varphi^{\otimes k}$, $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Застосувавши до функції

$$[0,\infty) \ni t \mapsto f(t) = (f_n(t))_{n=0}^{\infty} \in F(S_0) \subset \mathcal{F}(-p,-q)$$

оператор $a_+(\delta_t)$, отримаємо (використовуємо (1.6))

$$a_+(\delta_t) f(t) = (0, \delta_t \hat{\otimes} f_0(t), \delta_t \hat{\otimes} f_1(t), \dots) \in \mathcal{F}(-p,-q). \tag{2.39}$$

Використавши (2.39) та (1.5), для довільного $f \in D$ одержуємо

$$\langle \mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(f), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)} = \langle \int_{[0,\infty)} a_+(\delta_t) f(t) dm(t), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,\infty)} \langle a_+(\delta_t) f(t), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)} dm(t) \\
&= k! \int_{[0,\infty)} \langle \delta_t \hat{\otimes} f_{k-1}(t), \varphi^{\otimes k}\rangle_{\mathcal{F}_k(S_0)} dm(t) \\
&= k! \int_{[0,\infty)} \overline{\varphi(t)} \langle f_{k-1}(t), \varphi^{\otimes k-1}\rangle_{\mathcal{F}_{k-1}(S_0)} dm(t) \\
&= k! \int_{[0,\infty)} \overline{\varphi(t)} \Big(\int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_{k-1}(t; t_1, \dots, t_{k-1}) \\
&\qquad \times \overline{\varphi^{\otimes k-1}(t_1, \dots, t_{k-1})} dm(t_1) \dots dm(t_{k-1}) \Big) dm(t) \\
&= k! \int_{[0,\infty)} \overline{\varphi(t)} \Big(\int_{[0,t)^{k-1}} f_{k-1}(t; t_1, \dots, t_{k-1}) \\
&\qquad \times \overline{\varphi^{\otimes k-1}(t_1, \dots, t_{k-1})} dm(t_1) \dots dm(t_{k-1}) \Big) dm(t) \\
&= k!(k-1)! \int_{[0,\infty)} \overline{\varphi(t)} \Big(\int\limits_{0 \le t_1 \le \dots \le t_{k-1} < t} f_{k-1}(t; t_1, \dots, t_{k-1}) \\
&\qquad \times \overline{\varphi^{\otimes k-1}(t_1, \dots, t_{k-1})} dm(t_1) \dots dm(t_{k-1}) \Big) dm(t) \\
&= (k!)^2 \int\limits_{0 \le t_1 \le \dots \le t_k < \infty} \hat{f}_k(t_1, \dots, t_k) \overline{\varphi^{\otimes k}(t_1, \dots, t_k)} dm(t_1) \dots dm(t_k) \\
&= k! \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}_k(t_1, \dots, t_k) \overline{\varphi^{\otimes k}(t_1, \dots, t_k)} dm(t_1) \dots dm(t_k) \\
&= k! \langle \hat{f}_k, \varphi^{\otimes k}\rangle_{\mathcal{F}_k(S_0)} = \langle \mathbb{J}(f), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)}.
\end{aligned}
$$

□

2.6.2. Образ розширеного стохастичного інтеграла та інтеграл Іто. Оскільки відображення

$$
\mathcal{F}(-p,-q) \ni \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto I_\rho^h \xi := \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, h_n \rangle \in \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)
$$

унітарне, то таким буде і відображення між відповідними просторами L^2:

$$
\begin{aligned}
L^2([0,\infty); \mathcal{F}(-p,-q)) \ni \xi(\cdot) = (\xi_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} &\mapsto (\mathcal{I}_{-,\rho}^h \xi)(\cdot) \\
&:= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n(\cdot), h_n \rangle \in L^2([0,\infty); \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)).
\end{aligned}
$$

Використовуючи ці відображення, *визначимо розширений стохастичний інтеграл* $\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}(\xi)$ *від функції* $\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q))$, *поклавши*

$$\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}(\xi) := (I^h_\rho \mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(\mathcal{I}^h_{-,\rho})^{-1})(\xi) = \int_{[0,\infty)} \partial^+(\delta_t)\xi(t)dm(t),$$

де вираз, що праворуч належить до простору $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ *і існує як інтеграл Бохнера від векторнозначної функції*

$$[0,\infty) \ni t \mapsto \partial^+(\delta_t)\xi(t) \in \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q).$$

Нехай $\mathcal{I}^h_\rho$ — звуження оператора $\mathcal{I}^h_{-,\rho}$ на простір $L^2([0,\infty);F(S_0))$, яке, очевидно, визначає унітарний оператор (див. (2.37))

$$\begin{aligned} L^2([0,\infty);F(S_0)) \ni f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^\infty \mapsto (\mathcal{I}^h_\rho f)(\cdot) \\ := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n(\cdot), h_n\rangle \in L^2([0,\infty);(L^2_\rho)). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Використовуючи оператори (2.13), (2.40), поряд з інтегралом $\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}$ *визначимо розширений стохастичний інтеграл* $\mathbb{J}^h(f)$ *від функції*

$$f(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n(\cdot), h_n\rangle \in D^h_\rho := \mathcal{I}^h_\rho D \subset L^2([0,\infty);(L^2_\rho)),$$

поклавши

$$\mathbb{J}^h(f) := (I^h_\rho \mathbb{J}(\mathcal{I}^h_\rho)^{-1})(f) = \sum_{n=0}^\infty \langle \hat{f}_{n+1}, h_{n+1}\rangle \in (L^2_\rho), \tag{2.41}$$

де $\mathbb{J}$ *— оператор із теореми 2.6.1.*

Як наслідок із теореми 2.6.1 отримуємо такий результат.

Теорема 2.6.2. *У просторі* $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q), p,q \in \mathbb{N}_1$, *має місце рівність*

$$\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}(f) = \mathbb{J}^h(f), \qquad f \in D^h_\rho,$$

причому відображення

$$L^2([0,\infty);(L^2_\rho)) \supset D^h_\rho \ni f \mapsto \mathbb{J}^h(f) \in (L^2_\rho)$$

є ізометричним.

Перейдемо до визначення інтегралу Іто. Розглянемо випадковий процес

$$\mathbf{M} = \{M(t) := \langle \varkappa_{[0,t)}, h_1 \rangle \mid t \in [0,\infty)\}, \qquad M(0) := 0$$

(нагадаємо (див. підрозділ 2.2), що за визначенням

$$\langle \varkappa_{[0,t)}, h_1 \rangle := I_\rho^h(0, \varkappa_{[0,t)}, 0, \ldots) = \lim_{k\to\infty} \langle \varphi^{(k)}, h_1 \rangle \in (L^2_\rho), \qquad t \in [0,\infty),$$

де $(\varphi^{(k)})_{k=0}^\infty \subset \mathcal{S}$ — довільна послідовність, збіжна до $\varkappa_{[0,t)}$ за нормою простору $\mathcal{F}_1(S_0) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1, dm(t)))$.

Використавши співвідношення ортогональності (2.11), неважко переконатися, що для $0 \le t_1 \le t_2 < \infty$

$$\|M(t_2) - M(t_1)\|^2_{(L^2_\rho)} = \|\langle \varkappa_{[t_1,t_2)}, h_1 \rangle\|^2_{(L^2_\rho)} = \|\varkappa_{[t_1,t_2)}\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1, dm(t))} = t_2 - t_1. \tag{2.42}$$

Крім того, оскільки $h(x,0) = 1$ для всіх x із Q, то

$$h_0(x) = 1, \qquad x \in Q,$$

а тому згідно з (2.11)

$$\int_Q M(t) d\rho(x) = \int_Q \langle \varkappa_{[0,t)}, h_1(x) \rangle d\rho(x) = 0. \tag{2.43}$$

Припустимо, що $\mathbf{M}$ *є процесом з незалежними приростами.* Як і кожен процес з незалежними приростами, що має властивості (2.42), (2.43), процес $\mathbf{M}$ є нормальним квадратично інтегровним мартингалом щодо сім'ї $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_t)_{t\in[0,\infty)}$, породжених ним σ-алгебр $\mathcal{R}_t := \sigma\{M(s) \mid 0 \le s \le t\}$ (див., наприклад, [57, 58]). Вважатимемо, що σ-алгебра $\mathcal{B}(Q)$ поповнена множинами ρ-міри нуль. Більше того, вважатимемо, що й σ-алгебри $\mathcal{R}_t, t \in [0,\infty)$, поповнені множинами з $\mathcal{B}(Q)$, які мають ρ-міру нуль.

Позначимо через D_{I} множину $(\mathcal{B}(Q) \times \mathcal{B}([0,\infty))$-вимірних) функцій $f \in L^2([0,\infty); (L^2_\rho))$, узгоджених з сім'єю $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_t)_{t\in[0,\infty)}$. Відомо (див., наприклад, [56, 58, 59]), що *існує єдине лінійне ізометричне відображення*

$$L^2([0,\infty); (L^2_\rho)) \supset D_{\mathrm{I}} \ni f \mapsto \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) \in (L^2_\rho) \tag{2.44}$$

таке, що

$$\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(g\varkappa_{[t_1,t_2)}) = g(M(t_2) - M(t_1)) = g\langle\varkappa_{[t_1,t_2)}, h_1\rangle, \qquad 0 \le t_1 \le t_2 < \infty, \tag{2.45}$$

для довільної $\mathcal{R}_{t_1}$-вимірної функції $g \in (L^2_\rho)$. Це відображення називають інтегралом Іто (стохастичним інтегралом), побудованим за мартингалом $\mathbf{M}$, і позначають

$$\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) := \int_{[0,\infty)} f(t)dM(t) \in (L^2_\rho), \qquad f \in D_{\mathrm{I}}.$$

Поряд з інтегралом $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}$ розглядатимемо інтеграл

$$\int_{[0,s)} f(t)dM(t) := \int_{[0,\infty)} \varkappa_{[0,s)}(t)f(t)dM(t) \in (L^2_\rho), \qquad f \in D_{\mathrm{I}}.$$

Відзначимо, що завдяки ізометричності відображення (2.44) має місце рівність

$$\|\int_{[0,s)} f(t)dM(t)\|^2_{(L^2_\rho)} = \int_{[0,s)} \|f(t)\|^2_{(L^2_\rho)}dm(t), \qquad f \in D_{\mathrm{I}}. \tag{2.46}$$

Із властивостей інтегралу Іто випливає, що для довільної функції

$$f_n \in \mathcal{F}_n(N_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t)), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

має сенс інтеграл

$$\mathbb{J}_n(f_n) := \int\limits_{0\le t_1\le\dots\le t_n<\infty} f_n(t_1,\dots,t_n)dM(t_1)\dots dM(t_n), \tag{2.47}$$

який називатимемо *n-кратним стохастичним інтегралом*, побудованим за мартингалом $\mathbf{M}$. *Якщо*

$$f_n = \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n} \in \mathcal{F}_n(N_0), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

де $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0,\infty), j \in \{1,\dots,n\}$, — півінтервали, що попарно не перетинаються, то

$$\mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}) = \frac{1}{n!}\langle\varkappa_{\Delta_1}, h_1\rangle \dots \langle\varkappa_{\Delta_n}, h_1\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1. \tag{2.48}$$

Справді, скориставшись формулами (2.47), (2.32), отримуємо

$$\begin{aligned} &\mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varkappa_{\Delta_n}) \\ &= \int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<\infty} (\varkappa_{\Delta_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varkappa_{\Delta_n})(t_1,\dots,t_n)dM(t_1)\dots dM(t_n) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<\infty} \varkappa_{\Delta_{\sigma(1)}}(t_1)\dots\varkappa_{\Delta_{\sigma(n)}}(t_n)dM(t_1)\dots dM(t_n) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Далі, без втрати загальності будемо вважати, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, тоді, використовуючи (2.49) та (2.45), послідовно прийдемо до рівності (2.48):

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varkappa_{\Delta_n}) &= \frac{1}{n!}\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<\infty} \varkappa_{\Delta_1}(t_1)\dots\varkappa_{\Delta_n}(t_n)dM(t_1)\dots dM(t_n) \\ &= \frac{1}{n!}\int\limits_{0\le t_2\le\cdots\le t_n<\infty} \langle\varkappa_{\Delta_1},h_1\rangle\varkappa_{\Delta_2}(t_1)\dots\varkappa_{\Delta_n}(t_n)dM(t_2)\dots dM(t_n) \\ &= \quad \cdots \\ &= \frac{1}{n!}\langle\varkappa_{\Delta_1},h_1\rangle\dots\langle\varkappa_{\Delta_n},h_1\rangle. \end{aligned}$$

Вкажемо ще на один простий факт. Послідовно використовуючи рівність (2.46), для довільного вектора $f_n \in \mathcal{F}_n(N_0)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \|\mathbb{J}_n(f_n)\|^2_{(L^2_\rho)} &= \Big\|\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<\infty} f_n(t_1,\dots,t_n)dM(t_1)\dots dM(t_n)\Big\|^2_{(L^2_\rho)} \\ &= \Big\|\int_{[0,\infty)}\Big(\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n-1}\le t_n} f_n(t_1,\dots,t_n)dM(t_1)\dots dM(t_{n-1})\Big)dM(t_n)\Big\|^2_{(L^2_\rho)} \\ &= \int_{[0,\infty)}\Big\|\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n-1}\le t_n} f_n(t_1,\dots,t_n)dM(t_1)\dots dM(t_{n-1})\Big\|^2_{(L^2_\rho)}dm(t_n) \\ &= \quad \cdots \\ &= \int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<\infty} |f_n(t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \le \frac{1}{n!}\|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що *відображення*

$$\mathcal{F}_n(N_0) \ni f_n \mapsto \mathbb{J}_n(f_n) \in (L^2_\rho), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

є неперервним.

Вище відзначалося, що у гауссовому та пуассоновому випадку розширений стохастичний інтеграл є узагальненням інтегралу Іто, побудованого за мартингалом $\mathbf{M}$ (див., наприклад, [50, 60]). В зв'язку з цим виникає природне питання: за яких умов на функцію h інтеграл $\mathbb{J}^h$ збігається з інтегралом $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}$. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 2.6.3. *Якщо функція h така, що у просторі (L^2_ρ)*

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle = \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \ldots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1, \tag{2.50}$$

для довільних півінтервалів $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), j \in \{1, \ldots, n\}$, що попарно не перетинаються, то $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ і

$$\mathbb{J}^h(f) = \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f), \qquad f \in D^h_\rho. \tag{2.51}$$

Навпаки, якщо $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ і інтеграл Іто $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f)$ від функції $f \in D^h_\rho$ збігається з розширеним стохастичним інтегралом $\mathbb{J}^h(f)$, то для довільних півінтервалів $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), j \in \{1, \ldots, n\}$, що попарно не перетинаються, у просторі (L^2_ρ) має місце рівність (2.50).

Доведення. Припустимо, що для довільних півінтервалів

$$\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), \qquad j \in \{1, \ldots, n\},$$

що попарно не перетинаються, у просторі (L^2_ρ) має місце рівність (2.50). Справедливість вкладення $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ випливає з того, що для кожного $t \in [0, \infty)$ функції

$$\langle \sum_{k=1}^{s} c_k \varkappa_{\Delta_1^{(k)}} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n^{(k)}}, h_n \rangle = \sum_{k=1}^{s} c_k \langle \varkappa_{\Delta_1^{(k)}}, h_1 \rangle \ldots \langle \varkappa_{\Delta_n^{(k)}}, h_1 \rangle, \quad n, s \in \mathbb{N}_1,$$

побудовані за півінтервалами $\Delta_j^{(k)} = [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \subset [0, t)$ такими, що

$$\Delta_i^{(k)} \cap \Delta_j^{(k)} = \varnothing, \qquad i \neq j, \qquad k \in \{1, \ldots, s\},$$

є $\mathcal{R}_t$-вимірними і їми у просторі (L^2_ρ) можна апроксимувати довільну функцію f із множини D^h_ρ.

Встановимо рівність (2.51). Скориставшись формулами (2.48), (2.50), неважко переконатися, що у просторі (L^2_ρ) довільна функція

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle \in (L^2_\rho)$$

допускає зображення

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle = n! \mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}),$$

де $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), j \in \{1, \ldots, n\}$, — півінтервали, що попарно не перетинаються. Звідси безпосередньо випливає, що довільна функція $\langle f_n, h_n \rangle \in (L^2_\rho)$ така, що для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \varkappa_{[0,\infty)^n}(t_1, \ldots, t_n) f_n(t_1, \ldots, t_n),$$

допускає зображення

$$\langle f_n, h_n \rangle = n! \mathbb{J}_n(f_n) = n! \int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n < \infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) dM(t_1) \ldots dM(t_n).$$

Врахувавши останнє та (2.36), для довільної функції

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n(\cdot), h_n \rangle \in D^h_\rho$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) &= \int_{[0,\infty)} f(t) dM(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} \langle f_n(t), h_n \rangle dM(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} n! \Bigg(\int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n < t} f_n(t; t_1, \ldots, t_n) dM(t_1) \ldots dM(t_n) \Bigg) dM(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_{n+1} < \infty} \hat{f}_{n+1}(t_1, \ldots, t_{n+1}) dM(t_1) \ldots dM(t_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{f}_{n+1}, h_{n+1} \rangle = \mathbb{J}^h(f).
\end{aligned}$$

Навпаки, нехай $D_\rho^h \subset D_{\mathrm{I}}$ і $\mathbb{J}^h(f) = \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f)$, $f \in D_\rho^h$. Переконаємося у справедливості рівності (2.50). Зафіксуємо півінтервали $\Delta_1 = [a_1, b_1), \dots, \Delta_n = [a_n, b_n)$ такі як і в умові теореми, причому вважатимемо, що $a_n > a_i$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Тоді, очевидно, що функція

$$[0,T) \ni t \mapsto f(t) := \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1} \rangle \varkappa_{\Delta_n}(t) \in (L_\rho^2),$$

входить до множини $D_\rho^h \subset D_{\mathrm{I}}$. Більш того, функція

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1} \rangle$$

є $\mathcal{R}_{a_n}$-вимірною, а тому на підставі (2.45)

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) &= \int_{[0,\infty)} \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1} \rangle \varkappa_{\Delta_n}(t) dM(t) \\ &= \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1} \rangle \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle. \end{aligned} \tag{2.52}$$

З іншого боку, скориставшись припущенням щодо збігу інтегралу Іто з розширеним стохастичним інтегралом, на підставі (2.41) одержимо

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) = \mathbb{J}^h(f) &= \mathbb{J}^h(\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}} \otimes \varkappa_{\Delta_n}(\cdot), h_{n-1} \rangle) \\ &= \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Порівнюючи (2.52) з (2.53), за індукцією легко отримаємо (2.50). □

Справедлива така теорема.

Теорема 2.6.4. *Якщо*

$$\frac{\partial^n h(x, z_1\varphi_1 + \cdots + z_n\varphi_n)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \Bigg|_{z_1 = \ldots = z_n = 0} = \frac{\partial}{\partial z_1} h(x, z_1\varphi_1) \Bigg|_{z_1=0} \dots \frac{\partial}{\partial z_n} h(x, z_n\varphi_n) \Bigg|_{z_n=0} \tag{2.54}$$

для будь-якого $x \in Q$ *та довільних функцій* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ *таких, що* $\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j = \varnothing$ *при* $j \neq i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, *то у просторі* (L_ρ^2)

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle = \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \dots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

для довільних півінтервалів $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset \mathbb{R}^1$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *що попарно не перетинаються.*

Доведення. Припустимо, що рівність (2.54) виконується. Тоді на основі (1.24)

$$\langle \varphi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_n, h_n(x)\rangle = \langle \varphi_1, h_1(x)\rangle \dots \langle \varphi_n, h_1(x)\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1, \tag{2.55}$$

для будь-якого $x \in Q$ та довільних функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ таких, що

$$\operatorname{supp} \varphi_i \cap \operatorname{supp} \varphi_j = \varnothing$$

при $j \neq i,\ i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Як відомо, для довільних півінтервалів $\Delta_1, \dots, \Delta_n \subset \mathbb{R}^1$, що попарно не перетинаються, знайдуться функції $\varphi_{j,\varepsilon}, \varepsilon > 0$, із простору $\mathcal{S}$ такі, що $\operatorname{supp} \varphi_{j,\varepsilon} \subset \Delta_j$ і $\varphi_{j,\varepsilon} \to \varkappa_{\Delta_j}$ при $\varepsilon \to 0$ за нормою простору S_0. Тому

$$\begin{aligned}\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n\rangle &= I^h_\rho(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}) = \lim_{\varepsilon \to 0} I^h_\rho(\varphi_{1,\varepsilon} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_{n,\varepsilon}) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \varphi_{1,\varepsilon} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_{n,\varepsilon}, h_n\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \varphi_{1,\varepsilon}, h_1\rangle \dots \langle \varphi_{n,\varepsilon}, h_1\rangle \\ &= \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1\rangle \dots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1\rangle.\end{aligned}$$

□

Висновки до розділу 2

У другому розділі розроблено ортогональний підхід (на основі біортогонального) до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Отримано такі результати:

1. Встановлено необхідні та достатні умови того, що задана система базисних функцій є ортогональною у просторі L^2, побудованому за деякою фіксованою ймовірнісною мірою.
2. З використанням операторів знищення вивчено образи операторів вторинного квантування в термінах відповідного L^2-простору.
3. В термінах простору Фока та його оснащення введено поняття розширеного стохастичного інтеграла і досліджено його образ при відповідній функціональній реалізації цього простору.

Матеріали цього розділу опубліковані в роботах [36, 37, 40].

РОЗДІЛ 3
ПУАССОНІВ АНАЛІЗ БІЛОГО ШУМУ

Пуассонів аналіз білого шуму, тобто теорія основних та узагальнених функцій нескінченного числа змінних зі спарюванням, породженим інтегруванням відносно міри Пуассона, був побудований у роботах Й. Іто та І. Кубо [61, 62] і вивчався у роботах Г. Ф. Уса, Ю. Г. Кондратьєва, Ю. М. Березанського, їх учнів та багатьох інших математиків (див., наприклад, [63-70]).

У даному розділі показано, що пуассонів аналіз вкладається в загальну схему побудови нескінченновимірного аналізу, викладену в другому розділі. Завдяки чому в цьому аналізі одержано ряд нових фактів. Потрібно відмітити, що по суті такий підхід до побудови пуассонового аналізу був анонсований Ю. М. Березанським у роботі [28].

3.1. Один клас вагових посторів Соболева

Відомо (див., наприклад, [42], розділ 14, § 4, п. 3), що при кожному $p \in \mathbb{N}_1$ соболевський простір

$$S_p := W_p^2(\mathbb{R}^1, (1 + t^2)^p dm(t))$$

неперервно вкладається у банахів простір $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^1)$ неперервних обмежених функцій на $\mathbb{R}^1$ (з нормою $\|f\|_{C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^1)} := \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |f(t)|$). Крім того, відомо, що соболевський простір на обмеженій області є алгеброю (див., наприклад, [71], розділ 1, п. 1.7). Подібний результат має місце і для S_p.

Теорема 3.1.1. *Простір S_p, $p \in \mathbb{N}_1$, є банаховою алгеброю щодо звичайного (поточкового) множення функцій.*

Доведення. Потрібно показати, що

$$\|fg\|_{S_p} \leq c\|f\|_{S_p}\|g\|_{S_p}$$

для довільних $f, g \in S_p$ та деякої константи $c := c_p > 0$. Зрозуміло, що для цього досить переконатися у справедливості оцінки

$$\|\varphi\psi\|_{S_p} \leq c\|\varphi\|_{S_p}\|\psi\|_{S_p}, \qquad \varphi, \psi \in C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1). \tag{3.1}$$

Скориставшись (2.33), формулою Лейбніца та очевидними нерівностями

$$C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq 2^p, \qquad n \in \{0, \dots, p\}, \quad \mathbb{N}_0 \ni k \leq n;$$

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2), \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^1, \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

для довільних $\varphi, \psi \in C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1)$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\|\varphi\psi\|_{S_p}^2 &= \sum_{n=0}^p \int_{\mathbb{R}^1} |(D^n(\varphi\psi))(t)|^2(1+t^2)^p dm(t) \\
&= \sum_{n=0}^p \int_{\mathbb{R}^1} |\sum_{k=0}^n C_n^k (D^k\varphi)(t)(D^{n-k}\psi)(t)|^2(1+t^2)^p dm(t) \\
&\leq 4^p \sum_{n=0}^p (n+1) \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{k=0}^n |(D^k\varphi)(t)(D^{n-k}\psi)(t)|^2(1+t^2)^p dm(t) \\
&\leq (p+1)4^p \sum_{k=0}^p \text{Int}_k,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

де $\text{Int}_k := \sum_{n=k}^p \int_{\mathbb{R}^1} |(D^k\varphi)(t)(D^{n-k}\psi)(t)|^2(1+t^2)^p dm(t)$.

Оцінимо Int_k, $k \in \{0, \dots, p\}$. Згідно з [42] (розділ 14, § 4, п. 3) для кожного $p \in \mathbb{N}_1$ існує константа $d = d_p > 0$ така, що

$$|(D^k\varphi)(t)| \leq d\|\varphi\|_{S_p}, \qquad \varphi \in C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1), \tag{3.3}$$

для всіх $k \in \{0, \dots, p-1\}$ та $t \in \mathbb{R}^1$. Врахувавши останнє, для $k \in \{0, \dots, p-1\}$ дістанемо

$$\text{Int}_k \leq d^2\|\varphi\|_{S_p}^2 \sum_{n=k}^p \int_{\mathbb{R}^1} |(D^{n-k}\psi)(t)|^2(1+t^2)^p dm(t) \leq d_p^2\|\varphi\|_{S_p}^2\|\psi\|_{S_p}^2. \tag{3.4}$$

Щодо Int_p, то

$$\text{Int}_p = \int_{\mathbb{R}^1} |(D^p\varphi)(t)\psi(t)|^2(1+t^2)^p dm(t) \leq d^2\|\varphi\|_{S_p}^2\|\psi\|_{S_p}^2. \tag{3.5}$$

Оцінки (3.2), (3.4) та (3.5) забезпечують справедливість (3.1). $\square$

Зауваження 3.1.1. Теорема 3.1.1 залишається справедливою і для комплексних просторів Соболева $S_{p,\mathbb{C}}$, $p \in \mathbb{N}_1$.

3.2. Міра Пуассона на просторі узагальнених функцій

Далі скрізь через $\mathcal{B}(E)$ будемо позначати σ-алгебру борелевих множин топологічного простору E.

Мірою Пуассона на $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ з лебеговою мірою інтенсивності m називають ймовірнісну міру π, перетворення Фур'є якої має вигляд

$$\int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi(x) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^1} (e^{i\lambda(t)} - 1) dm(t)\right), \qquad \lambda \in \mathcal{S}. \tag{3.6}$$

Зауваження 3.2.1. На підставі теореми Мінлоса міра π однозначно визначається своїм перетворенням Фур'є (3.6).

Із теореми 3.1.1 випливає, що відображення

$$S_1 \ni \lambda \mapsto e^{i\lambda} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \in S_{1,\mathbb{C}},$$

а отже і відображення

$$S_1 \ni \lambda \mapsto \exp\left(\int_{\mathbb{R}^1} (e^{i\lambda(t)} - 1) dm(t)\right) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle \in \mathbb{C}^1$$

є неперервними. Тому, зважаючи на те, що вкладення $S_2 \hookrightarrow S_1$ квазіядерне, на підставі теореми Мінлоса–Сазонова міру π можна модифікувати до борелевої ймовірнісної міри на S_{-2}. Модифіковану міру π стосовно S_{-2} також позначатимемо π і називатимемо мірою Пуассона. Перетворення Фур'є цієї міри має вигляд

$$\int_{S_{-2}} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle, \qquad \lambda \in S_2. \tag{3.7}$$

Нагадаємо, що розуміють під модифікацією міри (див., наприклад, [41], розділ 3, § 1, п. 9). Розглянемо вимірні простори $(R, \mathcal{R})$ та $(R', \mathcal{R}')$. Будемо вважати, що простір R містить R' і відображення

$$\mathcal{R} \ni \alpha \mapsto \alpha' = \alpha \cap R' \in \mathcal{R}'$$

є відображенням всієї σ-алгебри $\mathcal{R}$ на всю σ-алгебру $\mathcal{R}^{'}$.

Нехай μ — фіксована міра на $\mathcal{R}$. Припустимо, що множина $R^{'}$ має повну зовнішню міру μ (тобто довільна множина $\mathcal{R} \ni \alpha \supset R^{'}$ має повну міру μ). Тоді μ породжує міру $\mu^{'}$ на $\mathcal{R}^{'}$ за правилом

$$\mathcal{R}^{'} \ni \alpha^{'} \mapsto \mu^{'}(\alpha^{'}) = \mu^{'}(\alpha \cap R^{'}) := \mu(\alpha) \in \mathbb{C}^1,$$

де α деяка множина з $\mathcal{R}$, що визначається з рівності $\alpha^{'} = \alpha \cap R^{'}$. Міру $\mu^{'}$ називають модифікованою мірою μ щодо $R^{'}$. Якщо функція $R \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$ вимірна щодо σ-алгебри $\mathcal{R}$, то її звуження $f \upharpoonright R^{'}$ вимірне щодо σ-алгебри $\mathcal{R}^{'}$. Функція f сумовна щодо міри μ тоді і тільки тоді, коли $f \upharpoonright R^{'}$ сумовна щодо $\mu^{'}$, причому

$$\int_R f(x) d\mu(x) = \int_{R'} f(x) d\mu^{'}(x).$$

3.3. Оснащення простору (L^2_π)

Перейдемо до реалізації загальної схеми побудови просторів основних та узагальнених функцій викладеної в розділі 2 у випадку коли Q є соболевським дійсним простором S_{-2}, а ρ є мірою Пуассона π на $\mathcal{B}(Q)$. Зазначимо, що при дещо іншому виборі простору Q основні результати даного підрозділу є відомими (див. [61-65, 70] та наведену там бібліографію). Новими тут є результати, пов'язані з розглядом поряд з поліномами Шарльє базисних функцій відмінних від цих поліномів.

З огляду на те, що $Q = S_{-2}$, *надалі будемо вважати, що*

$$N_0 := S_0 = L^2(\mathbb{R}^1), \qquad N_p := S_{p+1} = W^2_{p+1}(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^{p+1} dm(t)), \quad p \in \mathbb{N}_1.$$

Нехай

$$\mathcal{U}_0 := \{\lambda \in N_{1,\mathbb{C}} \mid \| \lambda\|_{N_{1,\mathbb{C}}} < R,\ 0 < R < 1\}.$$

Скориставшись теоремою 3.1.1, переконуємося, що при кожному $\lambda \in \mathcal{U}_0$ ряд

$$\log(1+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{n}$$

збігається за нормою простору $N_{1,\mathbb{C}}$. Тому визначена функція

$$Q \times \mathcal{U}_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto C(x,\lambda) := \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle) \in \mathbb{C}^1, \qquad (3.8)$$

яка, очевидно, є аналітичною в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ відносно змінної λ і неперервною та локально обмеженою відносно x рівномірно по відношенню до λ із довільної замкненої кулі з $\mathcal{U}_0$.

Покладемо $h(x,\lambda) := C(x,\lambda)$. У даному випадку базисні функції

$$Q \ni x \mapsto h_n(x) := C_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}),$$

що визначаються із розкладу

$$h(x,\lambda) := C(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, C_n(x)\rangle, \qquad x \in Q, \quad \lambda \in \mathcal{U}_C,$$

прийнято називати *поліномами Шарльє*. Неважко бачити, що ці поліноми задовольняють рекурентну рівність

$$\begin{aligned}\langle \varphi^{\otimes n}, C_n(x)\rangle = {} & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-1)!}{k!} \langle \varphi^{n-k}, x\rangle \langle \varphi^{\otimes k}, C_k(x)\rangle \\ & - \langle 1, \varphi\rangle \langle \varphi^{\otimes (n-1)}, C_{n-1}(x)\rangle, \qquad \varphi \in N_{2,\mathbb{C}}, \quad x \in Q,\end{aligned}$$

яку легко отримати, скориставшись очевидною формулою

$$\frac{d}{dz} C(x, z\varphi) = \Big(\Big\langle x, \frac{\varphi}{1+z\varphi}\Big\rangle - \langle 1, \varphi\rangle\Big) C(x, z\varphi), \qquad x \in Q, \quad \varphi \in N_{2,\mathbb{C}}, \; (3.9)$$

де $z \in \mathbb{C}^1$, $|z|$ — достатньо мале.

Відразу відзначимо, що використовуючи (3.9), нескладно переконатися у справедливості рівності

$$\frac{\partial^n C(x, z_1\varphi_1 + \cdots + z_n\varphi_n)}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}\bigg|_{z_1 = \ldots = z_n = 0} = \frac{\partial}{\partial z_1} C(x, z_1\varphi_1)\bigg|_{z_1=0} \ldots \; \frac{\partial}{\partial z_n} C(x, z_n\varphi_n)\bigg|_{z_n=0}$$

для будь-якого $x \in Q$ та довільних функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ таких, що

$$\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j = \varnothing$$

при $j \neq i,\ i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Для можливості застосування результатів розділу 2 залишилось показати, що функції

$$Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, C_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad Q \ni x \mapsto \langle \psi_k, C_k(x) \rangle \in \mathbb{C}^1, \tag{3.10}$$

$$\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \quad \psi_k \in \mathcal{F}_k(\mathcal{N}), \quad n, k \in \mathbb{N}_0,$$

задовольняють співвідношення ортогональності

$$\int_Q \langle \varphi_n, C_n(x) \rangle \overline{\langle \psi_k, C_k(x) \rangle} d\pi(x) = \delta_{n,k} n! \langle \varphi_n, \bar{\psi}_n \rangle, \tag{3.11}$$

і їхня лінійна оболонка є щільною у просторі $(L^2_\pi) := L^2(Q, d\pi(x))$.

Очевидно, що перетворення Лапласа

$$l_\pi(\lambda) := \int_Q \exp\langle x, \lambda \rangle d\pi(x) = \exp\langle 1, e^\lambda - 1 \rangle, \qquad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}}, \tag{3.12}$$

міри π є аналітичною функцією змінної λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$, тому на підставі зауваження 2.1.1 лінійна оболонка функцій (3.10) є щільною у просторі (L^2_π). Щодо потрібної ортогональності (3.11), то справедливим є таке твердження (в іншому викладі див. [62, 64]).

Твердження 3.3.1. *Для функцій* (3.10) *має місце співвідношення ортогональності* (3.11).

Доведення. Згідно з теоремою 2.1.1 досить встановити оцінку (2.4) та рівність (2.5).

Оскільки перетворення Лапласа l_π міри π є аналітичною функцією змінної λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$, то на підставі зауваження 2.1.1 знайдеться $p \in \mathbb{N}_2$ таке, що оцінка (2.4) виконується.

Встановимо рівність (2.5). Скориставшись (3.8) та (3.12), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_Q C(x, \varphi) \overline{C(x, \psi)} d\pi(x) &= \exp(-\langle 1, \varphi + \overline{\psi} \rangle) \int_Q \exp\langle x, \log(1 + \varphi) \overline{(1 + \psi)} \rangle d\pi(x) \\ &= \exp(-\langle 1, \varphi + \overline{\psi} \rangle) \exp\langle 1, (1 + \varphi) \overline{(1 + \psi)} - 1 \rangle \\ &= \exp\langle 1, \varphi \overline{\psi} \rangle = \exp \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dm(t) = \exp\langle \varphi, \overline{\psi} \rangle. \end{aligned}$$

∎

□

Як висновок з властивостей, встановлених вище, можна сформулювати таку теорему.

Теорема 3.3.1. *Результати, викладені у розділі 2, є справедливими для пуассонового аналізу з простором $Q = S_{-2}$, мірою Пуассона $\rho = \pi$ та функціями*

$$h(x,\lambda) = C(x,\lambda) := \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle),$$

$$\kappa(x,\lambda) = \chi(x,\lambda) := \frac{C(x,\lambda)}{C(e,\lambda)} = \exp\langle x - e, \log(1+\lambda)\rangle,$$

де e – фіксований елемент із простору Q.

Зокрема, для всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ простори $\mathcal{H}^C(p,q)$, $\mathcal{H}^\chi(p,q)$ збігаються у топологічному сенсі і їх можна розглядати як позитивні по відношенню до нульового $(L^2_\pi) = L^2(Q, d\pi(x))$. Відповідні оснащення мають вигляд:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\mathcal{H}^C)' & \supset \cdots \supset & \mathcal{H}^C(-p,-q) & \supset \cdots \supset & (L^2_\pi) & \supset \cdots \supset & \mathcal{H}^C(p,q) & \supset \cdots \supset & \mathcal{H}^C \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
(\mathcal{H}^\chi)' & \supset \cdots \supset & \mathcal{H}^\chi(-p,-q) & \supset \cdots \supset & (L^2_\pi) & \supset \cdots \supset & \mathcal{H}^\chi(p,q) & \supset \cdots \supset & \mathcal{H}^\chi.
\end{array}$$

Зауваження 3.3.1. Можна показати (відповідний результат був анонсований в [28]), що унітарний ізоморфізм

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^C_\pi f)(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, C_n(\cdot)\rangle \in (L^2_\pi) \qquad (3.13)$$

є перетворенням Фур'є за сумісними власними векторами деякої сім'ї

$$A = (A(\varphi))_{\varphi \in N_1}$$

комутуючих самоспряжених операторів $A(\varphi)$, що діють у просторі Фока $F(N_0)$, $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1, dm(t))$, і мають якобієву структуру. Точніше, сім'я $A = (A(\varphi))_{\varphi \in N_1}$ утворює так зване поле Пуассона (щодо визначення та властивостей такого поля див. [8]).

Зауваження 3.3.2. Неважко бачити, що сім'я $\tilde{T} = (\tilde{T}_x)_{x\in Q}$ лінійних операторів

$$(\tilde{T}_x f)(y) = f(x + y - e), \qquad y \in Q, \quad f \in C(Q),$$

задовольняє умовам теореми 1.5.2. Тому на підставі цієї теореми сім'я $\tilde{T}$ збігається з сім'єю $\bar{\chi}(\partial) = (\bar{\chi}_x(\partial))_{x\in Q}$ операторів узагальненого зсуву, тобто

$$\tilde{T}_x = \bar{\chi}_x(\partial) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial(\overline{\chi_n(x)}) : \mathcal{H}^{\chi}(p,q) \to \mathcal{H}^{\chi}(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3.$$

Зауваження 3.3.3. Далі зручно вважати, що $e = 0$ і

$$\chi(x,\lambda) := \frac{C(x,\lambda)}{C(0,\lambda)} = \exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle. \qquad (3.14)$$

Зрозуміло, що подібно до (3.9) базисні функції

$$Q \ni x \mapsto \chi_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$$

визначаються з рекурентної рівності

$$\langle \varphi^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-1)!}{k!} \langle \varphi^{n-k}, x\rangle \langle \varphi^{\otimes k}, \chi_k(x)\rangle,$$

справедливої для всіх $\varphi \in N_{2,\mathbb{C}}$ та $x \in Q$.

3.4. Явний вигляд образів операторів знищення

На функціях f із простору $C(Q)$ введемо лінійну різницеву операцію $\mathscr{C}(\varphi_n)$ з фінітним коефіцієнтом $\varphi_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_1$, поклавши

$$(\mathscr{C}(\varphi_n)f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (\ell(\delta_{t_1}) \ldots \ell(\delta_{t_n}) f)(x) \overline{\varphi_n(t_1, \ldots, t_n)} dm(t_1) \ldots dm(t_n), \qquad (3.15)$$

$$(\ell(\delta_t)f)(x) := f(x + \delta_t) - f(x), \qquad x \in Q = S_{-2}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \qquad (3.16)$$

де δ_t — δ-функція, зосереджена в точці t.

Очевидно, що при кожному $x \in Q$ функція

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto f(x + \sum_{m=1}^{n} \delta_{t_m}) \in \mathbb{C}^1, \qquad n \in \mathbb{N}_1, \tag{3.17}$$

є неперервною та обмеженою. Тому при вказаних вище f та φ_n права частина (3.15) визначена для всіх $x \in Q$.

Справді, оскільки $f \in C(Q)$ і відображення

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto \sum_{m=1}^{n} \delta_{t_m} \in Q$$

є неперервним (див. [42], розділ 14, § 4), то таким буде і відображення (3.17). Обмеженість функції (3.17) забезпечує оцінка

$$\exists c > 0 : \qquad \|\delta_t\|_{S_{-2}} \leq \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad t \in \mathbb{R}^1, \tag{3.18}$$

та локальна обмеженість функції $f \in C(Q)$.

Застосувавши різницеву операцію (3.16) до функції $C(x, \lambda)$ (3.8), для $x \in Q, \ \lambda \in \mathcal{U}_C$ отримаємо

$$\begin{aligned}
(\ell(\delta_t)C(\cdot, \lambda))(x) &= C(x + \delta_t, \lambda) - C(x, \lambda) \\
&= (\exp\langle x + \delta_t, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle) - (\exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle) \\
&= (\exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle)(\exp\langle \delta_t, \log(1+\lambda)\rangle - 1) \\
&= (\exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle)\lambda(t) = \lambda(t)C(x, \lambda), \qquad t \in \mathbb{R}^1.
\end{aligned}$$

Завдяки останньому

$$(\mathscr{C}(\varphi_n)C(\cdot, \lambda))(x) = \langle \lambda^{\otimes n}, \bar{\varphi}_n\rangle C(x, \lambda), \qquad x \in Q, \quad \lambda \in \mathcal{U}_C,$$

для довільної фінітної функції $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_1$.

Справедлива така лема.

Лема 3.4.1. *Для кожної фінітної функції $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_1$, відображення*

$$\mathcal{H}^C(p, q) \ni f \mapsto \mathscr{C}(\varphi_n)f \in C(Q)$$

визначене для всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ і є лінійним та неперервним.

Доведення. Досить встановити оцінку: для довільної кулі $U \subset Q$ знайдеться константа $c = c(U) > 0$ така, що

$$|(\mathscr{C}(\varphi_n)f)(x)| \leq c\|f\|_{\mathcal{H}^C(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in \mathcal{H}^C(p,q).$$

Оскільки функція $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$ фінітна, то досить показати, що для довільної кулі $U \subset Q$ знайдеться константа $a = a(U) > 0$ така, що

$$|(\ell(\delta_{t_1}) \dots \ell(\delta_{t_n})f)(x)| \leq a\|f\|_{\mathcal{H}^C(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in \mathcal{H}^C(p,q),$$

для будь-яких $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^1$.

Остання оцінка безпосередньо випливає із визначення простору $\mathcal{H}^C(p,q)$, оцінки (1.26) та тієї обставини, що для довільної кулі $U \subset Q$ знайдеться куля $U' \subset Q$ така, що для будь-якого $x \in U$ та всіх $t_k, \dots, t_n \in \mathbb{R}^1$, $k \in \{1, \dots, n\}$ елемент $x + \sum_{m=k}^{n} \delta_{t_m}$ належить до U' (існування кулі $U' \subset Q$ забезпечує оцінка (3.18)). □

Використовуючи лему 3.4.1 та теорему 1.4.1, одержуємо таке твердження.

Теорема 3.4.1. *Дія оператора знищення*

$$\partial(\varphi_n) : \mathcal{H}^C(p,q) \to \mathcal{H}^C(p,q), \qquad p, q \in \mathbb{N}_3,$$

з фінітним коефіцієнтом $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_1$, *на довільній функції* $f \in \mathcal{H}^C(p,q)$ *задається формулою*

$$\begin{aligned}(\partial(\varphi_n)f)(x) &= (\mathscr{C}(\varphi_n)f)(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\ell(\delta_{t_1}) \dots \ell(\delta_{t_n})f)(x)\overline{\varphi_n(t_1, \dots, t_n)}dm(t_1) \dots dm(t_n),\end{aligned} \tag{3.19}$$

справедливою для всіх $x \in Q$.

Перейдемо до розгляду операторів вторинного квантування, що діють у просторі (L^2_π). Як і раніше, нехай A — самоспряжений позитивний оператор в $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$ з областю визначення $\mathrm{Dom}\,(A)$. Позначимо через

$H_\pi^A := I_\pi^C d\,\mathrm{Exp}\,A(I_\pi^C)^{-1}$ образ оператора вторинного квантування $d\,\mathrm{Exp}\,A$ при відображенні I_π^C (3.13). Застосувавши до H_π^A теорему 2.5.1, отримаємо добре відоме твердження (див., наприклад, [65, 70]).

Теорема 3.4.2. *Припустимо, що $\mathcal{N} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \subset \mathrm{Dom}\ A$. Тоді симетрична білінійна форма оператора H_π^A допускає зображення*

$$(H_\pi^A\varphi, \psi)_{(L_\pi^2)} = \int_Q (A\partial_x\varphi, \partial_x\psi)_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)} d\pi(x) \tag{3.20}$$

для всіх $\varphi, \psi \in I_\pi(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$.

Зауваження 3.4.1. Дія оператора

$$\partial_x : H^C(p,q) \to \mathcal{F}_1(N_0) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1) \qquad p,q \in \mathbb{N}_3,$$

легко підраховується: для майже всіх $t \in \mathbb{R}^1$

$$(\partial_x f)(t) = (\ell(\delta_t)f)(x) = f(x+\delta_t) - f(x), \qquad f \in \mathcal{H}^C(p,q). \tag{3.21}$$

Справді, на підставі (2.26), для довільної функції $\xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$

$$(\partial(\xi_1)f)(x) = (\partial_x f, \xi_1)_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)}, \qquad f \in \mathcal{H}^C(p,q). \tag{3.22}$$

З іншого боку, на основі (3.19), для будь-якої фінітної функції $\varphi_1 \in \mathcal{F}_1(\mathcal{N})$

$$(\partial(\varphi_1)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^1} (\ell(\delta_t)f)(x)\varphi_1(t)dm(t), \qquad f \in \mathcal{H}^C(p,q). \tag{3.23}$$

Порівнюючи (3.22) з (3.23) та враховуючи, що множина фінітних функцій із $\mathcal{F}_1(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ є щільною у просторі $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$, переконуємося у справедливості рівності (3.21).

3.5. Простір конфігурацій та міра Лебега–Пуассона

Під простором конфігурацій $\Gamma = \Gamma(\mathbb{R}^1)$ над $\mathbb{R}^1$ розуміють (див., наприклад, [70]) сукупність усіх локально скінченних підмножин (конфігурацій) $\mathbb{R}^1$, тобто

$$\Gamma := \{\gamma \subset \mathbb{R}^1 \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty \text{ для довільного компакту } \Lambda \subset \mathbb{R}^1\},$$

де $|X|$ означає кількість точок множини $X \subset \mathbb{R}^1$.

При кожному $n \in \mathbb{N}_1$ розглянемо підмножину $\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}(\mathbb{R}^1)$ простору Γ, що складається з усіх n-точкових конфігурацій $\eta = \{t_1, \dots, t_n\}$, тобто

$$\Gamma^{(n)} := \{\eta \subset \mathbb{R}^1 \mid |\gamma| = n\}.$$

Нехай

$$\widehat{\mathbb{R}}^n := \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_k \neq t_j \text{ якщо } k \neq j\}.$$

Відображення

$$\widehat{\mathbb{R}}^n \ni (t_1, \dots, t_n) \mapsto \{t_1, \dots, t_n\} = \eta \in \Gamma^{(n)} \tag{3.24}$$

визначає на $\Gamma^{(n)}$ хаусдорфову топологію (на $\widehat{\mathbb{R}}^n$ розглядається топологія, індукована топологією $\mathbb{R}^n$). Відповідна до цієї топології борелева σ-алгебра $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})$ є образом борелевої σ-алгебри $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ при відображенні (3.24).

Поряд з Γ розглянемо простір скінченних конфігурацій — диз'юнктну суму топологічних просторів $\Gamma^{(n)}$:

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(\mathbb{R}^1) := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \qquad \Gamma^{(0)} := \varnothing.$$

Простір Γ_0 має звичайну топологію диз'юнктного об'єднання і відповідну до цієї топології борелеву σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma_0)$. Як множина

$$\Gamma_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)} = \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| < \infty\}$$

є підмножиною простору Γ. Далі ми, як правило, скінченні конфігурації, тобто точки з Γ_0, будемо позначати через η, а довільні точки з Γ — через γ.

Виходячи з міри Лебега m на $\mathbb{R}^1$, побудуємо міру на Γ_0. Для довільного $n \in \mathbb{N}_1$ розглянемо продакт-міру $m^{\otimes n}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Оскільки $m^{\otimes n}(\mathbb{R}^n \setminus \widehat{\mathbb{R}}^n) = 0$, то $m^{\otimes n}$ можна розглядати як σ-скінченну міру на $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Позначимо через m_n борелеву σ-скінченну міру на $\Gamma^{(n)}$, що є образом міри $\sigma^{\otimes n}$ при відображенні (3.24). Під *мірою Лебега–Пуассона* на $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ з мірою інтенсивності m

розуміють σ-скінченну міру

$$\nu_m := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m_n, \qquad m_0(\varnothing) := 1.$$

Встановимо природний унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$, $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$, та гільбертовим простором $L^2_\nu(\Gamma_0) := L^2(\Gamma_0, d\nu_m(\eta))$ комплекснозначних функцій, сумовних з квадратом за мірою ν_m.

Перш за все нагадаємо, що для кожної конфігурації $\eta = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \Gamma^{(n)}$ порядок точок t_j є несуттєвим. Тому означити деяку функцію $\Gamma^{(n)} \ni \eta = \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto f(\eta) = f(\{t_1, \ldots, t_n\}) \in \mathbb{C}^1$ — це те саме, що означити симетричну за змінними $t_1, \ldots, t_n$ функцію $\widehat{\mathbb{R}}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^1$,

$$f(\{t_1, \ldots, t_n\}) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Оскільки $m^{\otimes n}(\mathbb{R}^n \backslash \widehat{\mathbb{R}}^n) = 0$, то для довільної борелевої функції $\Gamma^{(n)} \ni \eta \mapsto f(\eta) \in \mathbb{C}^1$ (тобто для борелевої симетричної функції $\widehat{\mathbb{R}}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^1$) маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{(n)}} f(\eta) dm_n(\eta) &= \int_{\widehat{\mathbb{R}}^n} f(t_1, \ldots, t_n) dm^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \ldots, t_n) dm^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n). \end{aligned} \tag{3.25}$$

З огляду на (3.25) і ту обставину, що n-частинковий простір Фока $\mathcal{F}_n(N_0)$ збігається із простором $\widehat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$ усіх симетричних функцій із $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$, можна записати

$$L^2(\Gamma^{(n)}, dm_n(\eta)) = \widehat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t)) = \mathcal{F}_n(N_0).$$

Останнє дає змогу трактувати простір $L^2_\nu(\Gamma_0)$ як образ простору Фока $F(N_0)$ при унітарному відображенні

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_\nu f)(\cdot) := F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\cdot) \in L^2_\nu(\Gamma_0),$$

де

$$\Gamma_0 \ni \eta \mapsto F_0(\eta) := \begin{cases} f_0, & \text{якщо} \quad \eta = \varnothing, \\ 0 & \text{— у противному разі,} \end{cases}$$

$$\Gamma_0 \ni \eta \mapsto F_n(\eta) := \begin{cases} n! f_n(t_1, \ldots, t_n), & \text{якщо} \quad \eta = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \Gamma^{(n)}, \\ 0 & \text{— у противному разі,} \end{cases}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}_1$. Зокрема, простір $L^2_\nu(\Gamma_0)$ допускає зображення

$$L^2_\nu(\Gamma_0) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\Gamma^{(n)}, dm_n(\eta)) \frac{1}{n!}\,.$$

Під дією відображення I_ν ядерне оснащення (1.4) переходить в ядерне оснащення простору $L^2_\nu(\Gamma_0)$ (нагадаємо, що $N_0 = S_0 = L^2(\mathbb{R}^1),\ N_p = S_{p+1}$). Точніше,

$$(\mathcal{H}_\nu)' \supset \mathcal{H}_\nu(-p, -q) \supset L^2_\nu(\Gamma_0) \supset \mathcal{H}_\nu(p, q) \supset \mathcal{H}_\nu, \tag{3.26}$$

$$\mathcal{H}_\nu := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}_1} \mathcal{H}_\nu(p, q), \qquad (\mathcal{H}_\nu)' := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}_1} \mathcal{H}_\nu(-p, -q),$$

де $\mathcal{H}_\nu(-p, -q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового $L^2_\nu(\Gamma_0)$ та позитивного гільбертового простору

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu(p, q) &:= I_\nu(\mathcal{F}(p, q)) \\ &= \{F \in L^2_\nu(\Gamma_0) \mid \exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(p, q) :\ F = I_\nu(f_n)_{n=0}^\infty\} \end{aligned}$$

з гільбертовою нормою

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}_\nu(p,q)} = \|I_\nu(f_n)_{n=0}^\infty\|^2_{\mathcal{H}_\nu(p,q)} := \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)} K^{qn}, \qquad F \in \mathcal{H}_\nu(p, q).$$

Простори (L^2_π) та $L^2_\nu(\Gamma_0)$ є різними функціональними реалізаціями простору Фока $F(N_0)$, $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$. Відображення

$$I^C_{\nu\pi} := I^C_\pi I^{-1}_\nu : L^2_\nu(\Gamma_0) \to (L^2_\pi)$$

задає унітарний ізоморфізм між цими просторами.

Зрозуміло, що реалізувавши простір Фока $F(N_0)$ як простір $L^2_\nu(\Gamma_0)$, можна будувати оснащення простору (L^2_π) як образ оснащення (3.26). При цьому під дією унітарного відображення

$$I^C_{\nu\pi} := I^C_\pi I^{-1}_\nu : \mathcal{H}_\nu(p,q) \to \mathcal{H}^C(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_1,$$

отримаємо оснащення простору (L^2_π), побудоване за поліномами Шарльє, а під дією унітарного відображення

$$I^\chi_\nu := I^\chi I^{-1}_\nu : \mathcal{H}_\nu(p,q) \to \mathcal{H}^\chi(p,q), \qquad p,q \in \mathbb{N}_3,$$

— оснащення простору (L^2_π), побудоване за базисними функціями $\chi_n(x)$, де

$$\mathcal{F}(p,q) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^\chi f)(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}^\chi(p,q)$$

— унітарний оператор.

3.6. Пуассонів аналіз на просторі конфігурацій

Нехай $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1) := C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1)$ — простір основних функцій з класичною топологією, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — спряжений до нього простір узагальнених функцій зі слабкою топологією та σ-алгеброю $C_\sigma(\mathcal{D}')$ його підмножин, породженою циліндричними множинами

$$\{x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \,|\, (\langle x,\varphi_1\rangle, \ldots, \langle x,\varphi_1\rangle) \in \beta\}, \qquad \varphi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1),\ \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ n \in \mathbb{N}_1.$$

Неважко бачити, що відображення

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto O\gamma := x = \sum_{t\in\gamma} \delta_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \tag{3.27}$$

визначене і є ін'єктивним (δ_t — δ-функція зосереджена в точці $t \in \mathbb{R}^1$). Позначимо через $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}(\mathbb{R}^1)$ сукупність усіх конфігурацій $\gamma \in \Gamma$, котрі при відображенні O переходять в узагальнені функції із простору $S_{-2} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ (тобто $O\gamma = \sum_{t\in\gamma} \delta_t \in S_{-2}$ при $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$).

Нехай $\widetilde{Q}$ — образ простору $\widetilde{\Gamma}$ при відображенні (3.27), тобто

$$\widetilde{Q} := \{\sum_{t\in\gamma}\delta_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap S_{-2} = \{\sum_{t\in\gamma}\delta_t \in S_{-2} \mid \gamma \in \widetilde{\Gamma}\}.$$

Норма в S_{-2} індукує метрику в $\widetilde{Q}$ і перетворює $\widetilde{Q}$ в сепарабельний метричний простір. Множина $\widetilde{Q} \subset S_{-2}$ має повну зовнішню міру Пуассона π (3.7) (це випливає з того, що множини $\Gamma \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ та $S_{-2}(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ мають повну зовнішню міру продовженої з $\mathcal{B}(S_{-2})$ на $C_\sigma(\mathcal{D}')$ міри π; див., наприклад, [41, 65]), тому π можна модифікувати до борелевої ймовірнісної міри на $\widetilde{Q}$. Модифіковану міру π щодо $\widetilde{Q}$ також позначатимемо π і називатимемо мірою Пуассона. Перетворення Фур'є цієї міри має вигляд

$$\int_{\widetilde{Q}} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle, \qquad \lambda \in N_1 = S_2.$$

Зрозуміло, що результати, викладені в підрозділах 3.3 - 3.5, залишаються справедливими для простору $Q = \widetilde{Q}$, міри $\rho = \pi$ та функцій $h(x,\lambda) := C(x,\lambda)$ (3.8) і $\kappa(x,\lambda) := \chi(x,\lambda)$ (3.14), котрі зараз допускають зображення: для всіх $x \in \widetilde{Q}$ та $\lambda \in \mathcal{U}_\chi$

$$C(x,\lambda) = \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1,\lambda\rangle) = \exp(-\langle 1,\lambda\rangle)\prod_{t\in\gamma}(1+\lambda(t)),$$

$$\chi(x,\lambda) = \exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle = \prod_{t\in\gamma}(1+\lambda(t)),$$

де $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$ (тут і далі відображення O (3.27) розглядаємо як оборотне відображення $O : \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{Q}$ з оберненим $O^{-1} : \widetilde{Q} \to \widetilde{\Gamma}$).

Згідно з результатами підрозділу 3.5 оснащення простору $(L^2_\pi) := L^2(\widetilde{Q}, d\pi(x))$ можна будувати як образ оснащення (3.26) простору $L^2_\nu(\Gamma_0)$ при відображенні $I^C_{\nu\pi}$ або I^χ_ν. Виявляється, що унітарний ізоморфізм

$$I^\chi_\nu : \mathcal{H}_\nu(p,q) \to \mathcal{H}^\chi(p,q)$$

має просте комбінаторне тлумачення. Перш ніж переходити до формулювання відповідного твердження, нагадаємо визначення так званого K-перетворення між функціями на Γ_0 та $\widetilde{Q}$, введеного в [74] і дослідженого в [74, 75].

За визначенням

$$(\mathsf{K}f)(x) := \sum_{\eta\subset\gamma} f(\eta), \qquad x \in \widetilde{Q}, \tag{3.28}$$

де $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$, $f : \Gamma_0 \to \mathbb{C}^1$ — довільна функція, для якої права частина (3.28) має сенс. Підсумування в останньому виразі проводиться за всіма скінченними підконфігураціями конфігурації $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$. Зазначимо, що принаймі для векторів f із щільної у просторі $L^2_\nu(\Gamma_0)$ множини $I_\nu(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)))$ K-перетворення визначено (сума (3.28) є скінченною).

Теорема 3.6.1. *Для всіх* $p, q \in \mathbb{N}_3$ *відображення*

$$\mathcal{H}_\nu(p,q) \supset I_\nu(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^1))) \ni f \mapsto \mathsf{K}f \in \mathcal{H}^\chi(p,q)$$

визначене і є лінійним та неперервним. Після замикання за неперервністю оператор K *є унітарним. Більш того, має місце операторна рівність*

$$\mathsf{K} = I^\chi_\nu : \mathcal{H}_\nu(p,q) \to \mathcal{H}^\chi(p,q).$$

Доведення. Твердження теореми безпосередньо випливає з того, що на векторах

$$\mathsf{e}_\nu(\varphi) := I_\nu(\mathsf{e}(\varphi)) = I_\nu\left(\frac{\varphi^{\otimes n}}{n!}\right)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{H}_\nu(p,q), \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$$

(норма $\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1(N_p)}$ достатньо мала), K-перетворення визначено (сума (3.28) є скінченною) і

$$\begin{aligned}(\mathsf{K}\mathsf{e}_\nu(\varphi))(x) &= \sum_{\eta\subset\gamma}(\mathsf{e}_\nu(\varphi))(\eta) = \prod_{t\in\gamma}(1+\varphi(t))\\ &= \chi(x,\varphi) = (I^\chi_\nu \mathsf{e}_\nu(\varphi))(x), \qquad \gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma},\end{aligned}$$

для всіх $x \in \widetilde{Q}$. $\square$

Наслідок 3.6.1. *Якщо* $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$*, то*

$$\langle \varphi^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle = (I_\nu^\chi(I_\nu \varphi^{\otimes n}))(x) = (\mathsf{K}(I_\nu \varphi^{\otimes n}))(x) = n! \sum_{\{t_1,\ldots,t_n\}\subset\gamma} \prod_{i=1}^{n} \varphi(t_i)$$

для всіх $x \in \widetilde{Q}$*,* $n \in \mathbb{N}_1$ *з* $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$*.*

Висновки до розділу 3

У третьому розділі надано застосування ортогонального підходу до вивчення пуассонового аналізу білого шуму. Отримано такі результати:

1. Встановлено, що вагові простори Соболева

$$W_2^p(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^p dm(t)), \qquad p \in \mathbb{N}_1,$$

   є банаховою алгеброю.
2. З використанням цього факту показано, що пуассонів аналіз вкладається в загальну схему побудови нескінченновимірного аналізу, викладену в другому розділі.
3. Знайдено явний вигляд образів операторів знищення.
4. Доведено, що так зване K-перетворення між функціями на просторі скінченних конфігурацій Γ_0 та просторі конфігурацій Γ можна інтерпретувати як унітарний оператор, що діє між певними просторами основних функцій на Γ_0 та Γ.

Матеріали цього розділу опубліковані в роботі [37].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджуються простори основних і узагальнених функцій нескінченного числа змінних та оператори на них. Отримано такі результати:

1. Побудовано і досліджено клас операторів на просторах Фока (оператори знищення та народження нескінченного порядку) — аналог диференціальних операторів нескінченного порядку.
2. З використанням цих операторів вивчено простори основних та узагальнених функцій і побудовано сім'ю операторів узагальненого зсуву.
3. Розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних і надано його застосування до вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. *Berezansky Yu. M.* Spectral approach to white noise analysis // Proc. Symp. "Dynamics of Complex and Irregular Systems" (16–20 December 1991, Germany; "Bielefeld Encounters in Math. and. Phys. viii"). – Singapore: World Sc., 1993. – P. 131–140.
2. *Верезанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В* Спектральный подход к анализу белого шума // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, № 3. – С. 177–197.
3. *Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. V.* A generalization of Gaussian white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1995. – Vol. 1, № 1. – P. 28–55.
4. *Lytvynov E. W.* Multiple Wiener integrals and non-Gaussian white noise analysis: a Jacobi field approach // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1995. – Vol. 1, № 1. – P. 61–85.
5. *Berezansky Yu. M.* Commutative Jacobi fields in Fock space // Integr. Equ. Oper. Theory. – 1998. – Vol. 30, № 2. – P. 163–190.
6. *Berezansky Yu. M.* On the direct and inverse spectral problems for Jacobi fields // St. Petersburg Math. J. – 1998. – Vol. 9, № 6. – P. 1053–1071.
7. *Berezansky Yu. M.* On the theory of commutative Jacobi fields // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – Vol. 4, № 1. – P. 1–31.
8. *Berezansky Yu. M.* Poisson measure as the spectral measure of Jacobi field // Infinite Dimen. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2000. – Vol. 3, № 1. – P. 121–139.
9. *Berezansky Yu. M., Mierzejewski D. A.* The chaotic decomposition for the Gamma field // Funct. Anal. and Appl. – 2001. – Vol. 35, № 4. – P. 305–308.
10. *Berezansky Yu. M., Mierzejewski D. A.* The Construction of the Chaotic Representation for the Gamma Field // Infinite Dimen. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2003. – Vol. 6, № 1. – P. 33–56.

11. *Mierzejewski D. A.* Generalized Jacobi fields // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – Vol. 9, № 1. – P. 80–100.

12. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Streit L.* How to generalize white noise analysis to non-Gaussian spaces // Dynamics of Complex and Irregular Systems/ Eds: Ph. Blanchard et al. – Singapore: World Sci., 1993. – P. 48–60.

13. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовой мере // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – Т. 25, № 2. – С. 68–70.

14. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Негауссов анализ и гипергруппы // Функцион. анализ и его прилож. – 1995. – Т. 29, № 3. – С. 51–55.

15. *Berezansky Yu. M.* A connection between the theory of hypergroups and white noise analysis // Rept. Math. Phys. – 1995. – Vol. 36, № 2–3. – P. 215–234.

16. *Berezansky Yu. M.* A generalization of white noise analysis by means of theory of hypergroups // Rept. Math. Phys. – 1996. – Vol. 38, № 3. – P. 289–300.

17. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gaussian analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – Vol. 2, № 2. – P. 1–50.

18. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный негауссов анализ и операторы обобщенного сдвига // Функцион. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30, № 4. – С. 61–65.

19. *Albeverio S., Daletsky Yu. L., Kondratiev Yu. G., Streit L.* Non-Gaussian infinite-dimensional analysis // J. Func. Anal. – 1996. – Vol. 138. – P. 311–350.

20. *Kachanovsky N. A.* Biortogonal Appell-like systems in a Hilbert space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – Vol. 2, № 3–4. – P. 36–52.

21. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный анализ, связанный с операторами обобщенного сдвига //Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 3. – С. 364–409.

22. *Berezansky Yu. M.* Generalized functions, connected with differential hypergroups // Differential Equations, Asymptotic Analysis, and Mathematical Physics /Eds M. Demuth, B.-W. Schulze. – Berlin: Acad. Verlag, 1997. – P. 32–39.

23. *Качановский Н. А.* Дуальная система Аппеля и пространства Кондратьева в анализе на пространствах Шварца //Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 4. – С. 527–534.

24. *Kachanovsky N. A.* On analog of stochastic integral and Wick calculus in non-Gaussian infinite dimensional analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – Vol. 3, № 3. – P. 1–12.

25. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L.* Generalized Appell systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – Vol. 3, № 3. – P. 28–61.

26. *Berezansky Yu. M.* Construction of generalized translation operators from the system of Appel characters // Amer. Math. Soc. Transl. (2). – 1998. – Vol. 184, № 2. – P. 7–21.

27. *Berezansky Yu. M.* Infinite-dimensional non-Gaussian analysis connected with generalized translation operators // Analysis on Infinite-Dimensional Lie Groups and Algebras /Eds H. Heyer, J. Marion. – Singapore ets.: World Sci., 1998. – P. 22–46.

28. *Березанский Ю. М.* Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связаного с операторами обобщенного сдвига // Функцион. анализ и его прил. – 1998. – Т. 32, № 3. – С. 65–70.

29. *Kachanovsky N. A.* Dual Appell-like system and finite order spaces in non-Gaussian infinite dimensional analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – Vol. 4, № 2. – P. 41–52.

30. *Качановский Н. А., Ус Г. Ф.* Биортогональные системы Аппеля в анализе на дуально-ядерных пространствах // Функцион. анализ и его прил. – 1998. – Т. 32, № 1. – С. 69–72.
31. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions on infinite dimensional analysis // Hiroshima Math. J. – 1998. – Vol. 28, № 2. – P. 213–260.
32. *Качановский Н. А.* Псевдодифференциальные уравнения и оператор обобщенного сдвига в негауссовом бесконечномерном анализе //Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1334–1341.
33. *Kachanovsky N.A., Koshkin S.V.* Minimality of Appell-like systems and embeddings of test functions spaces in a generalization of white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1999. – Vol. 5, № 3. – P. 13–25.
34. *Kachanovsky N. A.* On biorthogonal approach to a construction of non-Gaussian analysis and application to the Poisson anaysis on the configuration space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2000. – Vol 6, № 2. – P. 13–21.
35. *Berezansky Yu. M.* Pascal measure on generalized functions and the corresponding generalized Meixner polynomials // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – Vol. 8, № 1. – P. 1–13.
36. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Простори основних і узагальнених функцій, пов'язані з узагальненим зсувом // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 12. – С. 1587–1658.
37. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних та пуассонів аналіз білого шуму // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 12. – С. 1587–1615.
38. *Теско В. А.* Про простори, що виникають при побудові нескінченновимірного аналізу за біортогональною схемою // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 7. – С. 977–990.

39. *Tesko V. A.* A construction of generalized translation operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2004. – Vol. 10, № 4. – P. 86–92.

40. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Одне узагальнення розширеного стохастичного інтеграла. – К., 2005. – 35 с. (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2005.3).

41. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral Methods in Infinite Dimensional Analysis. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – xvii + 572 p.; Vol. 2. - viii + 427 p.

42. *Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F.* Functional Analysis: vols. 1, 2. – Basel etc.: Birkhäuser, 1996. – Vol. 1. – xix + 423 p.; Vol. 2. – xvi + 293 p.

43. *Nachbin L.* Topology on Spaces of Holomorfic Mappings. – Berlin etc.: Springer, 1969. – 66 p.

44. *Dineen S.* Complex Analysis in Locally Conves Spaces. – Amsterdam etc.: North-Holand Publ., 1981. – xiii + 492 p.

45. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1992. – 352 с.

46. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 237 с.

47. *Hitsuda M.* Formula for Brownian partial derivatives // In: Proc. Second Japan – USSR Symphosium on Probability Theory. – 1972. – Vol. 2, P. 111-114.

48. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Стохастические интегралы относительно случайной нормально распределенной функции множеств // ДАН СССР – 1973. – Т. 208, № 3. – С. 512–515.

49. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов // Теория вероят. и ее примен. – 1974. – Т. 19, № 4. – С. 845–849.

50. *Кабанов Ю. М.* О расширенных стохастических интегралах // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – Т. 20, № 4. – С. 725–737.

51. *Кабанов Ю. М., Скороход А. В.* Расширенные стохастические интегралы // Тр. шк.-семинара по теории случайн. процессов. – Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1975. – Ч. 1. – Р. 123–167.

52. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – Т. 20, № 2. – С. 223–228.

53. *King R.* Stochastic integrals and metadistributions. Applications to stochastic partial differential equations and quantum field theory // Ph. D. dissertation, Cornell University, 1975.

54. *Kachanovsky, N. A.* On the extended stochastic integral connected with the gamma-measure on an infinite-dimensional space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – Vol. 8, № 2. – P. 10–32.

55. *Kachanovsky, N. A.* A generalized Malliavin derivative connected with the Poisson- and Gamma-measures // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – Vol. 9, № 3. – P. 213–240.

56. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

57. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 320 с.

58. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, Т. 3. 1975. – 496 с.

59. *Protter P.* Stochastic Integration and Differential Equations. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1990. – 293 p.

60. *Hida T., Kuo H. - H., Potthoff J., Streit L.* White Noise. An Infinite Dimensional Calculus. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – xiii+516 p.

61. *Ito Y.* Generalized Poisson functionals // Probab. Theory Related Fields. – 1988. – Vol. 77. – P. 1–28.

62. *Ito Y.. Kubo I.* Calculus on Gaussian and Poisson white noise // Nagoya Math. J. – 1988. – Vol. 111. – P. 41–84.

63. *Us G. F.* Dual Appel systems in Poissonian analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1995. – Vol. 1, № 1. – P. 93–108.

64. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L., and Us G. F.* Analysis on Poisson and Gamma spaces // Infinite Dimen. Anal. Quant. Probab. Related Topics. – 1998. – Vol. 1, № 1. – P. 91–117.

65. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – Vol. 154, № 2. – P. 444–500.

66. *Finkelshtein D. L., Us G. F.* On exponential model of poisson spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – Vol. 4, № 4. – P. 5–21.

67. *Lytvynov E. W.* A note on test and generalized functionals of Poisson white noise // Hiroshima Math. J. – 1998. – Vol. 28, № 3. – P. 463–480.

68. *Finkelshtein D. L., Kondratiev Yu. G., Konstantinov A. Yu., Röckner M.* Symmetric differential operators of the second order in Poisson spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – Vol. 7, № 4. – P. 489–509.

69. *Oliveira M. J.* Configuration Space Analysis and Poissonian White Noise Analysis: PhD-Thesis. – Lisboa, 2002. – 185 p.

70. *Kondratiev Yu. G., Kuna T., Oliveira M. J.* Analytic aspects of Poissonian white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – Vol. 8, № 4. – P. 15–48.

71. *Maz'ja V. G., Shaposhnicova T. O.* Multiplicators in Spaces of Differentiable Functions. – Leningrad: Leningrad University, 1986. – 404 p.

72. *Kondratiev Yu. G., Lytvynov E. W.* Operators of Gamma white noise calculus // Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. Related Topics. – 2000. – Vol. 3, № 3. – P. 303–335.

73. *Berezansky Yu. M., Mierzejewski D. A.* The Construction of the Chaotic Representation for the Gamma Field // Infinite Dimen. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2003. – Vol. 6, № 1. – P. 33–56.

74. *Lenard A.* Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics // Comm. Math. Phys. – 1973. – № 30. – P. 35–40.

75. *Kondratiev Yu. G., Kuna T.* Harmonic analysis on configuration space I. General theory // Infinite Dimen. Anal. Quant. Probab. Related Topics. – 2002. – Vol. 5, № 2. – P. 201–233.