НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Препринт 2005.2

Ю. М. Березанський, В. А. Теско

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗШИРЕНОГО СТОХАСТИЧНОГО ІНТЕГРАЛА

Київ – 2005

УДК 517.515

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗШИРЕНОГО СТОХАСТИЧНОГО ІНТЕГРАЛА / Ю. М. Березанський, В. А. Теско. – Київ, 2005. – 35 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2005.2)

В роботі запропоновано одне узагальнення розширеного стохастичного інтеграла на випадок інтегрування по широкому класу випадкових процесів. Встановлено умови збігу такого інтеграла з класичним інтегралом Іто, побудованим за мартингалом.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук М. О. Качановський

Бібліографія: 22 назви

Затверджено до друку Вченою радою
Інституту математики НАН України

Вступ

Як відомо, у гауссовому та пуассоновому аналізі важливу роль відіграє розширений стохастичний інтеграл (так званий інтеграл Хітцуди–Скорохода), який узагальнює класичний інтеграл Іто, побудований за вінеровим чи пуассоновим випадковим процесом. Поняття такого інтеграла було введено приблизно в один і той же час у роботах кількох математиків: М. Хітцуди [1], Ю. Л. Далецького, С. М. Парамонової [2, 3], Ю. М. Кабанова, А. В. Скорохода [4, 5, 6], Р. Кінга [7] і пізніше для гамма-процесу — у роботах М. О. Качановського [8, 9]. Запропоновані в цих роботах означення розширеного стохастичного інтеграла були по суті еквівалентними, але по формі досить різними (див. [10] (Розд. 8)).

У даній роботі введено поняття розширеного стохастичного інтеграла у термінах простору Фока та його оснащення. Викладена конструкція побудови такого інтеграла, з одного боку, проста, а з іншого — загальна. При функціональній реалізації простору Фока за допомогою запропонованого в [11, 12] перетворення типу Вінера–Іто–Сігала отримано означення розширеного стохастичного інтеграла у термінах простору L^2 та його оснащення (у гауссовому та пуассоновому випадку це означення співпадає із введеними у роботах [1, 4-7]). Також з'ясовано за яких умов цей інтеграл є узагальненням інтегралу Іто. Тут слід відмітити, що з аналогічної точки зору (у термінах оснащення простору L^2) розширений стохастичний інтеграл вивчав М. О. Качановський в [13].

1. Розширений стохастичний інтеграл

1.1. Простір Фока та його оснащення

Нехай

$$\mathbb{N}_p := \{p, p+1, \ldots\}, \qquad p \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

Розглянемо фіксовану сім'ю $(N_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ дійсних сепарабельних гільбертових просторів N_p таку, що для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ простір N_{p+1} топологічно (щільно та неперервно) та квазіядерно (оператор вкладення є оператором Гільберта–Шмідта; норму Гільберта–Шмідта будемо позначати $\|\cdot\|_{HS}$) вкладається у простір N_p, і крім того, $\|\cdot\|_{N_p} \le \|\cdot\|_{N_{p+1}}$.

Побудуємо ядерний ланцюжок (див. [14, 15])

$$\mathcal{N}' := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} N_{-p} \supset N_{-p} \supset N_0 \supset N_p \supset \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} N_p =: \mathcal{N}, \tag{1.1}$$

де N_{-p}, $p \in \mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового N_0 та позитивного N_p. Спарювання між N_{-p} та N_p, породжене скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{N_0}$ у просторі N_0, будемо позначати $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, нехтуючи індексом N_0.

Комплексифікуючи простори ланцюжка (1.1), тобто переходячи від $N_p, \mathcal{N}$ до $N_{p,\mathbb{C}}, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$, і беручи їх симетричні тензорні степені $\hat{\otimes}$, побудуємо при кожному $n \in \mathbb{N}_0$ ядерний ланцюжок

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{F}_n(\mathcal{N}') & \supset & \mathcal{F}_n(N_{-p}) & \supset & \mathcal{F}_n(N_0) & \supset & \mathcal{F}_n(N_p) & \supset & \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n} & & N_{0,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n} & & N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n} & & \end{array} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}_n(N_p), \qquad \mathcal{F}_n(\mathcal{N}') := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}_n(N_{-p}),$$

з комплексним спарюванням $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ між $\mathcal{F}_n(N_{-p})$ та $\mathcal{F}_n(N_p)$, породженим скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ у просторі $\mathcal{F}_n(N_0)$. Нарівні з $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ будемо використовувати дійсне спарювання

$$\langle \xi_n, f_n\rangle := \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}, \qquad \xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_p),$$

де $\bar{f}_n$ — вектор комплексноспряжений до вектора f_n. При $n = 0$ простори із ланцюжка (1.2) збігаються з $\mathbb{C}^1$.

При кожному $p \in \mathbb{Z}$ введемо зважений симетричний простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ з вагою $\tau = (\tau_n)_{n=0}^{\infty}$, $\tau_n > 0$, поклавши

$$\mathcal{F}(N_p,\tau) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(N_p)\tau_n$$

$$= \{f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mid f_n \in \mathcal{F}_n(N_p), \|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)}\tau_n < \infty\}.$$

Зафіксуємо $K > 1$ та розглянемо сім'ю $(\tau(q))_{q\in\mathbb{N}_1}$ ваг

$$\tau(q) = (\tau_n(q))_{n=0}^{\infty}, \qquad \tau_n(q) = (n!)^2 K^{qn}. \tag{1.3}$$

Використовуючи ланцюжок (1.1) та вказану сім'ю ваг, побудуємо ядерний ланцюжок (див., наприклад, [11])

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}') \supset \mathcal{F}(-p,-q) \supset F(N_0) \supset \mathcal{F}(p,q) \supset \mathcal{F}(\mathcal{N}), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}(p,q), \qquad \mathcal{F}(\mathcal{N}') := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}(-p,-q).$$

Тут

$$\mathcal{F}(-p,-q) := \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)), \qquad \tau_F(q) := (K^{-qn})_{n=0}^{\infty},$$

— негативний простір по відношенню до нульового

$$F(N_0) := \mathcal{F}(N_0, (n!)_{n=0}^{\infty})$$

та позитивного

$$\mathcal{F}(p,q) := \mathcal{F}(N_p, \tau(q)), \qquad \tau(q) := ((n!)^2 K^{qn})_{n=0}^{\infty}.$$

Очевидно, що множина $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N})$ фінітних послідовностей $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, є щільною у кожному просторі із ланцюжка (1.4).

"Координатно" спарювання $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{F(N_0)}$ між $\mathcal{F}(-p,-q)$ та $\mathcal{F}(p,q)$, породжене скалярним добутком $(\cdot\,, \cdot)_{F(N_0)}$ у просторі $F(N_0)$, допускає зображення

$$\langle \xi, f \rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle n!, \tag{1.5}$$

$$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q), \quad f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(p,q).$$

1.2. Простір сумовних з квадратом функцій та його оснащення

Нехай Q — сепарабельний метричний простір, ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q, $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$ — відповідний L^2-простір. Позначимо через $C(Q)$ лінійний простір всіх комплекснозначних локально обмежених (тобто обмежених на кожній кулі в Q) неперервних функцій на Q. Зручно вважати, що $C(Q)$ — топологічний простір зі збіжністю, рівномірною на кожній кулі з Q.

Нехай B_0 — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times B_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$$

— задана функція. *Припустимо, що для кожного* $x \in Q$ $h(x, \cdot)$ *є аналітичною в нулі простору* $N_{1,\mathbb{C}}$ *функцією змінної* λ*, для кожного* $\lambda \in B_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$*. Крім того, будемо вважати, що* $h(\cdot, \lambda)$ *локально обмежена рівномірно по відношенню до* λ *із довільної замкненої кулі з* B_0 *і* $h(x, 0) = 1$ *для всіх* x *із* Q.

Із аналітичності випливає (див., наприклад, [11] (Розд. 2, 3)), що при довільному фіксованому $x \in Q$ існує окіл

$$B_h(x) = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_h(x),\ R_h(x) > 0\} \subset B_0,$$

в якому функцію $h(x, \cdot)$ можна подати у вигляді ряду

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x) \rangle, \qquad h_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2}), \tag{1.6}$$

рівномірно збіжного на кожній замкненій кулі з $B_h(x)$. *Далі припускаємо, що існує спільний для всіх* x *із* Q *окіл*

$$B_h = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_h,\ R_h > 0\},$$

в якому функція $h(x, \cdot)$ *допускає зображення* (1.6).

Використовуючи вектор $f_n \in \mathcal{F}_n(N_p)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$, побудуємо функцію

$$Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1. \tag{1.7}$$

Очевидно, що функція (1.7) входить до простору $C(Q)$ (див., наприклад, [11] (Лема 3.2)). Крім того, якщо

$$f_n = \varphi^{(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi^{(n)}, \qquad \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in N_p,$$

то на підставі (1.6) для довільного $x \in Q$ отримуємо

$$\langle \varphi^{(1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi^{(n)}, h_n(x) \rangle = \left. \frac{\partial^n h(x, z_1 \varphi^{(1)} + \cdots + z_n \varphi^{(n)})}{\partial z_1 \ldots \partial z_n} \right|_{z_1 = \ldots = z_n = 0}, \tag{1.8}$$

де $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^1$.

Далі ми використовуємо схему з [12]. Так, *припустимо, що для функцій* (1.7)*, породжених векторами*

$$\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \qquad \psi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}), \qquad n, m \in \mathbb{N}_0,$$

виконується співвідношення ортогональності

$$\int_Q \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle \overline{\langle \psi_m, h_m(x) \rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n, \overline{\psi_n} \rangle, \tag{1.9}$$

і лінійна оболонка цих функцій є щільною у просторі (L^2_ρ).

Зауваження. *Згідно з твердженням 3.1 із [12] співвідношення ортогональності (1.9) виконується тоді і тільки тоді, коли існують* $p \in \mathbb{N}_2,\ C > 0,\ L > 0$ *такі, що*

$$\| \, \| h_n(\cdot) \|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} \|_{(L^2)} \leq L C^n n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

і

$$\int_Q h(x, \varphi) \overline{h(x, \psi)} d\rho(x) = \exp \langle \varphi, \overline{\psi} \rangle$$

для довільних $\varphi, \psi \in \mathcal{N}_\mathbb{C}$ *таких, що* $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}}, \|\psi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < r$*, де* $r > 0$ *— достатньо мале.*

Зафіксуємо функцію h із вказаними властивостями. За такої функції h відображення

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I^h_\rho f)(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in (L^2_\rho) \tag{1.10}$$

визначене і здійснює унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$ та простором (L^2_ρ) [11] (Твердження 7.1). Тут

$$\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle := \lim_{k\to\infty}\langle \varphi_n^{(k)}, h_n(\cdot)\rangle \in (L^2_\rho), \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.11}$$

де $(\varphi_n^{(k)})_{k=0}^\infty \subset \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$ — довільна послідовність, збіжна до f_n у топології простору $\mathcal{F}_n(N_0)$ (в (1.11) границю розуміємо в сенсі (L^2_ρ)). Очевидно, що для функцій

$$\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in (L^2_\rho), \qquad f_n \in \mathcal{F}_n(N_0), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\langle g_m, h_m(\cdot)\rangle \in (L^2_\rho), \qquad g_m \in \mathcal{F}_m(N_0), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

побудованих за правилом (1.11), має місце співвідношення ортогональності

$$\int_Q \langle f_n, h_n(x)\rangle \overline{\langle g_m, h_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle f_n, \overline{g_n}\rangle. \tag{1.12}$$

Під дією відображення I^h_ρ оснащення (1.4) простору Фока $F(N_0)$ переходить в оснащення простору (L^2_ρ). Точніше, I^h_ρ-образ

$$I^h_\rho(\mathcal{F}(p,q)) =: \mathcal{H}^h_\rho(p,q) \subset (L^2_\rho)$$

простору Фока $\mathcal{F}(p,q)$ з топологією останнього є гільбертовим простором, щільно та неперервно вкладеним у (L^2_ρ) і таким, що породжує ядерне оснащення

$$(\mathcal{H}^h_\rho)' \supset \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset \mathcal{H}^h_\rho(p,q) \supset \mathcal{H}^h_\rho, \tag{1.13}$$

$$\mathcal{H}^h_\rho := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{H}^h_\rho(p,q), \qquad (\mathcal{H}^h_\rho)' := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_1} \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q),$$

де $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$, $p,q\in\mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $\mathcal{H}^h_\rho(p,q)$.

За означенням

$$\mathcal{H}^h_\rho(p,q) := I^h_\rho(\mathcal{F}(p,q))$$
$$= \{f\in(L^2_\rho)\,|\,\exists (f_n)_{n=0}^\infty\in\mathcal{F}(p,q):\ f(\cdot)=\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\in(L^2_\rho)\} \tag{1.14}$$

(останній ряд збігається за нормою простору (L^2_ρ)) є гільбертовим простором з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^h_\rho(p,q)} = \|\sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\|_{\mathcal{H}^h_\rho(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^\infty\|_{\mathcal{F}(p,q)}. \tag{1.15}$$

Зауваження. *Можна показати (див., наприклад, [11] (Розд. 7)), що при достатньо великому $K>1$ (K — константа із (1.3), що фігурує в означенні простору $\mathcal{F}(p,q)$) для будь-яких $p\in\mathbb{N}_3, q\in\mathbb{N}_1$ відображення*

$$\mathcal{F}(p,q)\ni(f_n)_{n=0}^\infty\mapsto f(\cdot):=\sum_{n=0}^\infty\langle f_n,h_n(\cdot)\rangle\in C(Q)$$

визначене і є ін'єктивним та неперервним. Як наслідок, простір $\mathcal{H}^h_\rho(p,q)$, $p\in\mathbb{N}_3$, $q\in\mathbb{N}_1$, неперервно вкладається у простір $C(Q)$ і його можна трактувати, як гільбертів простір неперервних функцій

$$\mathcal{H}^h_\rho(p,q)=\mathcal{H}^h(p,q)$$
$$:=\{f\in C(Q)\,|\,\exists(f_n)_{n=0}^\infty\in\mathcal{F}(p,q):\ f(x)=\sum_{n=0}^\infty\langle f_n,h_n(x)\rangle,\ x\in Q\}$$

з гільбертовою нормою (1.15).

Зрозуміло, що відображення

$$\mathcal{F}(-p,-q) \supset F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_\rho^h f) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n \rangle \ \in \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$$

є ізометричним і після замикання за неперервністю реалізує унітарний ізоморфізм між $\mathcal{F}(-p,-q)$ та $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q),\ p,q \in \mathbb{N}_1$ (ми зберігаємо позначення I_ρ^h для замикання). Як результат, негативний простір узагальнених функцій $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$ допускає зображення

$$\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q) = I_\rho^h(\mathcal{F}(-p,-q)) = \big\{\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, h_n \rangle \ | \\ (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q),\ \|\xi\|_{\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)} = \|(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}\big\}. \tag{1.16}$$

Тут

$$\langle \xi_n, h_n \rangle := \lim_{k\to\infty} \langle f_n^{(k)}, h_n \rangle \in \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.17}$$

де $(f_n^{(k)})_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{F}_n(N_0)$ — довільна послідовність, збіжна до $\xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p})$ у топології простору $\mathcal{F}_n(N_{-p})$ (в (1.17) границю розуміємо в сенсі $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$). Можна показати (див. [12]), що в $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)$

$$\langle \xi_m, h_m \rangle = \partial^+(\xi_m)1, \qquad \xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p}), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

де

$$\partial^+(\xi_m) := I_\rho^h a_+(\xi_m)(I_\rho^h)^{-1} : \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q) \to \mathcal{H}_\rho^h(-p,-q) \tag{1.18}$$

— лінійний неперервний оператор, який є образом оператора народження

$$a_+(\xi_m) : \mathcal{F}(-p,-q) \to \mathcal{F}(-p,-q).$$

Дія оператора $a_+(\xi_m)$ на довільному векторі

$$\eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(-p,-q)$$

задається формулою

$$a_+(\xi_m)\eta = a_+(\xi_m)(\eta_0,\eta_1,\ldots) := (\underbrace{0,\ldots,0}_{m}, \xi_m \hat{\otimes} \eta_0, \xi_m \hat{\otimes} \eta_1, \ldots), \tag{1.19}$$

$$(a_+(\xi_m)\eta)_n := \begin{cases} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m} \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), & \text{якщо } n \in \mathbb{N}_m, \\ 0 \in \mathcal{F}_n(N_{-p}), & \text{якщо } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}_m, \end{cases}$$

причому

$$\|a_+(\xi_m)\eta\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} \le K^{-\frac{qm}{2}} \|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p})} \|\eta\|_{\mathcal{F}(-p,-q)}. \tag{1.20}$$

“Координатно” спарюваня $\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$ між $\mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ та $\mathcal{H}^h_\rho(p,q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, породжене скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{(L^2_\rho)}$ у просторі (L^2_ρ), має вигляд

$$\langle\!\langle \xi, f \rangle\!\rangle = \langle (\xi_n)_{n=0}^{\infty}, (f_n)_{n=0}^{\infty} \rangle_{\mathcal{F}(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, f_n \rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)} n!, \tag{1.21}$$

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, h_n \rangle \in \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q), \quad f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in \mathcal{H}^h_\rho(p,q).$$

1.3. Розширений стохастичний інтеграл у просторі Фока

Тут і далі всі побудови будемо виконувати при спеціальному виборі ланцюжка (1.1). А саме, нехай

$$N_0 = S_0 := L^2(\mathbb{R}^1, dm(t)),$$

де m – міра Лебега на осі $\mathbb{R}^1$. Зрозуміло, що в даному випадку n-частинковий простір Фока

$$\mathcal{F}_n(S_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t)), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

збігається із простором $\hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$ всіх комплекснозначних симетричних функцій із $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$, де $m^{\otimes n}$ — продакт-міра на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, породжена мірою m. Оскільки функції

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto f_n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^1$$

із простору $\mathcal{F}_n(S_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$ є симетричними, то

$$\begin{aligned}\|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(S_0)} &:= \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(t_1, \ldots, t_n)|^2 dm(t_1) \ldots dm(t_n) \\ &= n! \int\limits_{-\infty < t_1 \le \cdots \le t_n < +\infty} |f_n(t_1, \ldots, t_n)|^2 dm(t_1) \ldots dm(t_n).\end{aligned}$$

Очевидно, що у просторі $\mathcal{F}_n(N_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t))$, $n \in \mathbb{N}_0$, є щільною множина

$$\Big\{ \sum_{k=1}^{s} c_k \varkappa_{\Delta_1^{(k)}} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n^{(k)}} \Big| c_k \in \mathbb{C}^1, \Delta_j^{(k)} = [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \subset \mathbb{R}^1,\ s \in \mathbb{N}_1 \Big\} \tag{1.22}$$

функцій

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto \sum_{k=1}^{s} c_k(\varkappa_{\Delta_1^{(k)}} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n^{(k)}})(t_1, \ldots, t_n)$$
$$:= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{s} \sum_{\sigma \in S_n} c_k \varkappa_{\Delta_{\sigma(1)}^{(k)}}(t_1) \ldots \varkappa_{\Delta_{\sigma(n)}^{(k)}}(t_n) \in \mathbb{C}^1, \tag{1.23}$$

де $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ — перестановка із групи S_n всіх перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$, $\varkappa_\alpha(\cdot)$ — індикатор борелевої множини $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Більше того, можна вважати, що всі функції (1.23) із множини (1.22) мають таку властивість: при кожному $k \in \{1, \ldots, s\}$ півінтервали $\Delta_j^{(k)}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, попарно не перетинаються і, крім того,

$$\Delta_1^{(i)} \times \ldots \times \Delta_n^{(i)} \cap \Delta_1^{(j)} \times \ldots \times \Delta_n^{(j)} = \varnothing$$

при $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$.

Покладемо

$$N_p = S_p := W_p^2(\mathbb{R}^1, (1+t^2)^p dm(t)), \qquad p \in \mathbb{N}_1,$$

де S_p — дійсний ваговий соболевський простір, що є поповненням множини $C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ всіх нескінченно диференційовних фінітних функцій на $\mathbb{R}^1$ за гільбертовою нормою

$$\|\varphi\|_{S_p}^2 := \sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} |(D^n\varphi)(t)|^2 (1+t^2)^p dm(t), \qquad \varphi \in C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^1).$$

Добре відомо, що при кожному $p \in \mathbb{N}_1$ простір S_{p+1} топологічно та квазіядерно вкладається у простір S_p і $\|\cdot\|_{S_p} \leq \|\cdot\|_{S_{p+1}}$. Крім того, у даному випадку

$$\mathcal{N} = \mathcal{S} := \operatorname{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}_1} S_p$$

є класичним простором Шварца (див., наприклад, [15] (Розд. 14)).

Таким чином в якості ланцюжка (1.1) будемо використовувати ланцюжок

$$\mathcal{S}^{'} := \operatorname{ind}\lim_{p\in\mathbb{N}_1} S_{-p} \supset S_{-p} \supset S_0 \supset S_p \supset \operatorname{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}_1} S_p =: \mathcal{S}.$$

Нехай $\mathcal{K}$ — деякий гільбертів простір. Скрізь в цій роботі через $L^2([0,\infty);\mathcal{K})$ будемо позначати гільбертів простір векторнозначних функцій

$$[0,\infty) \ni t \mapsto f(t) \in \mathcal{K},$$

$$\|f\|^2_{L^2([0,\infty);\mathcal{K})} := \int_{[0,\infty)} \|f(t)\|^2_{\mathcal{K}} dm(t) < \infty,$$

з відповідним скалярним добутком.

Розширеним стохастичним інтегралом від функції

$$\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q)), \qquad p,q \in \mathbb{N}_1,$$

назвемо елемент $\mathbb{J}_{\text{ext}}(\xi)$ *простору* $\mathcal{F}(-p,-q)$ *такий, що*

$$\mathbb{J}_{\text{ext}}(\xi) = \int_{[0,\infty)} a_+(\delta_t)\xi(t)dm(t) \in \mathcal{F}(-p,-q),$$

де інтеграл розуміємо як інтеграл Бохнера від векторнозначної функції

$$[0,\infty) \ni t \mapsto a_+(\delta_t)\xi(t) \in \mathcal{F}(-p,-q), \tag{1.24}$$

де δ_t *—* δ*-функція, зосереджена в точці* t.

Підставою для такого означення є наступне твердження.

Твердження 1.1. *Якщо* $\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q))$, *то вектор-нозначна функція* (1.24) *інтегровна за Бохнером на* $[0,\infty)$.

Доведення. Нехай $\xi \in L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q))$, $p,q \in \mathbb{N}_1$. Скориставшись (1.20) і тим, що

$$\|\delta_t\|_{\mathcal{F}_1(S_{-p})} \leq \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad t \in \mathbb{R}^1,$$

з деяким $c > 0$ (див., наприклад, [15], розділ 14, теорема 4.5), отримуємо

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)} \|a_+(\delta_t)\xi(t)\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \\
&\qquad \leq K^{-\frac{q}{2}} \int_{[0,\infty)} \|\delta_t\|_{\mathcal{F}_1(S_{-p})} \|\xi(t)\|_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \\
&\qquad \leq K^{-\frac{q}{2}} \left(\int_{[0,\infty)} \|\delta_t\|^2_{\mathcal{F}_1(S_{-p})} dm(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{[0,\infty)} \|\xi(t)\|^2_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq K^{-\frac{q}{2}} \left(\int_{[0,\infty)} c^2 (1+t^2)^{-1} dm(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{[0,\infty)} \|\xi(t)\|^2_{\mathcal{F}(-p,-q)} dm(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає потрібне. $\square$

Вкажемо на одну властивість розширеного стохастичного інтеграла $\mathbb{J}_{\text{ext}}$. Нехай

$$D \subset L^2([0,\infty); F(S_0))$$

— множина всіх функцій

$$[0,\infty) \ni t \mapsto f(t) = (f_n(t))_{n=0}^{\infty} \in F(S_0) \qquad (1.25)$$

із $L^2([0,\infty); F(S_0))$ таких, що для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_1$,

$$f_n(t) = f_n(t; t_1,\dots,t_n) = \varkappa_{[0,t)^n}(t_1,\dots,t_n) f_n(t; t_1,\dots,t_n),$$

де $\varkappa_\alpha(\cdot)$ — індикатор борелевої множини $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Далі компоненти $f_n(t), n \in \mathbb{N}_0$, функції $f \in D$ зручно вважати визначеними при всіх $t \in \mathbb{R}^1$, поклавши

$$f_n(t) := 0, \qquad t \in \mathbb{R}^1 \setminus [0,\infty).$$

Нехай

$$f_n(\cdot; \cdot_1, \dots, \cdot_n) \in S_{0,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{F}_n(S_0)$$

— задана функція. Позначимо через $\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1}), n \in \mathbb{N}_1$, симетризацію даної функції за $n+1$ змінною, тобто

$$\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1}) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} f_n(t_k; t_1,\dots,\cancel{t_k},\dots,t_{n+1})$$

для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1,\dots,t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Очевидно, що якщо $f_n(t; t_1,\dots,t_n)$, $n \in \mathbb{N}_1$, компонента функції

$$f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} \in D$$

, тоді для $m^{\otimes n}$-майже всіх $(t_1,\dots,t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1}) := \frac{1}{n+1} f_n(t_k; t_1,\dots,\cancel{t_k},\dots,t_{n+1}), \qquad (1.26)$$

де $t_k = \max\{t_1,\dots,t_{n+1}\}$. Покладемо $\hat{f}_1(t) := f_0(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 1.2. *Відображення*

$$L^2([0,\infty);F(S_0)) \supset D \ni f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} \mapsto$$
$$\mathbb{J}(f) := (0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n, \dots) \in F(S_0) \tag{1.27}$$

визначене і є лінійним та ізометричним. Більше того, у просторі $\mathcal{F}(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, *має місце рівність*

$$\mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(f) = \mathbb{J}(f), \qquad f \in D. \tag{1.28}$$

Доведення. Нехай $f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^{\infty} \in D$. На основі (1.26) отримаємо

$$\|f\|^2_{L^2([0,\infty);F(S_0))} = \int_{[0,\infty)} \|f(t)\|^2_{F(S_0)} dm(t)$$
$$= \int_{[0,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(t)\|^2_{\mathcal{F}_n(S_0)} n! dm(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{[0,\infty)} \|f_n(t)\|^2_{\mathcal{F}_n(S_0)} dm(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{[0,\infty)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_n(t;t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \right) dm(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,t)^n} |f_n(t;t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \right) dm(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 \times$$
$$\times \int_{[0,\infty)} \left(\int_{0 \le t_1 \le \dots \le t_n < t} |f_n(t;t_1,\dots,t_n)|^2 dm(t_1)\dots dm(t_n) \right) dm(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)!)^2 \times$$
$$\times \int_{0 \le t_1 \le \dots \le t_{n+1} < \infty} |\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1})|^2 dm(t_1)\dots dm(t_{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)! \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{f}_{n+1}(t_1,\dots,t_{n+1})|^2 dm(t_1)\dots dm(t_{n+1})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{f}_{n+1}\|^2_{\mathcal{F}_{n+1}(S_0)}(n+1)! = \|\mathbb{J}(f)\|^2_{F(S_0)}.$$

Звідси випливає ізометричність відображення (1.27), лінійність цього відображення очевидна.

Для встановлення рівності (1.28) досить показати, що

$$\langle \mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(f), \psi\rangle_{F(S_0)} = \langle \mathbb{J}(f), \psi\rangle_{F(S_0)}$$

для довільного $\psi = \varphi^{\otimes k}$, $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Застосувавши до функції

$$[0,\infty) \ni t \mapsto f(t) = (f_n(t))_{n=0}^{\infty} \in F(S_0) \subset \mathcal{F}(-p,-q)$$

оператор $a_+(\delta_t)$, отримаємо (використовуємо (1.19))

$$a_+(\delta_t)f(t) = (0, \delta_t \hat{\otimes} f_0(t), \delta_t \hat{\otimes} f_1(t), \dots) \in \mathcal{F}(-p,-q). \qquad (1.29)$$

Враховуючи (1.29) та (1.5), для довільного $f \in D$ одержуємо

$$\langle \mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(f), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)} = \langle \int_{[0,\infty)} a_+(\delta_t)f(t)dm(t), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)}$$
$$= \int_{[0,\infty)} \langle a_+(\delta_t)f(t), \varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)} dm(t)$$
$$= k! \int_{[0,\infty)} \langle \delta_t \hat{\otimes} f_{k-1}(t), \varphi^{\otimes k}\rangle_{\mathcal{F}_k(S_0)} dm(t)$$
$$= k! \int_{[0,\infty)} \overline{\varphi(t)} \langle f_{k-1}(t), \varphi^{\otimes k-1}\rangle_{\mathcal{F}_{k-1}(S_0)} dm(t)$$
$$= k! \int_{[0,\infty)} \overline{\varphi(t)} \Big(\int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_{k-1}(t; t_1,\dots,t_{k-1}) \times$$
$$\times \overline{\varphi^{\otimes k-1}(t_1,\dots,t_{k-1})} dm(t_1)\dots dm(t_{k-1}) \Big) dm(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= k!\int_{[0,\infty)}\overline{\varphi(t)}\Bigg(\int_{[0,t)^{k-1}} f_{k-1}(t;t_1,\dots,t_{k-1})\times \\
&\quad\times\overline{\varphi^{\otimes k-1}(t_1,\dots,t_{k-1})}dm(t_1)\dots dm(t_{k-1})\Bigg)dm(t) \\
&= k!(k-1)!\int_{[0,\infty)}\overline{\varphi(t)}\Bigg(\int\limits_{0\le t_1\le\dots\le t_{k-1}<t} f_{k-1}(t;t_1,\dots,t_{k-1})\times \\
&\quad\times\overline{\varphi^{\otimes k-1}(t_1,\dots,t_{k-1})}dm(t_1)\dots dm(t_{k-1})\Bigg)dm(t) \\
&= (k!)^2\int\limits_{0\le t_1\le\dots\le t_k<\infty}\hat{f}_k(t_1,\dots,t_k)\overline{\varphi^{\otimes k}(t_1,\dots,t_k)}dm(t_1)\dots dm(t_k) \\
&= k!\int_{\mathbb{R}^k}\hat{f}_k(t_1,\dots,t_k)\overline{\varphi^{\otimes k}(t_1,\dots,t_k)}dm(t_1)\dots dm(t_k) \\
&= k!\langle\hat{f}_k,\varphi^{\otimes k}\rangle_{\mathcal{F}_k(S_0)} = \langle\mathbb{J}(f),\varphi^{\otimes k}\rangle_{F(S_0)}.
\end{aligned}
$$

□

2. Образ розширеного стохастичного інтеграла та інтеграл Іто

Оскільки відображення

$$
\mathcal{F}(-p,-q)\ni\xi=(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\mapsto I_\rho^h\xi:=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\xi_n,h_n\rangle\in\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)
$$

унітарне, то таким буде і відображення між відповідними просторами L^2:

$$
\begin{aligned}
L^2([0,\infty);\mathcal{F}(-p,-q))\ni\xi(\cdot)=(\xi_n(\cdot))_{n=0}^{\infty}\mapsto(\mathcal{I}_{-,\rho}^h\xi)(\cdot) \\
:=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\xi_n(\cdot),h_n\rangle\in L^2([0,\infty);\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q)).
\end{aligned}
$$

Використовуючи ці відображення, *визначимо розширений стохастичний інтеграл* $\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}(\xi) \in \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)$ *від функції*

$$\xi \in L^2([0,\infty); \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q)),$$

поклавши

$$\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}(\xi) := (I^h_\rho \mathbb{J}_{\mathrm{ext}}(\mathcal{I}^h_{-,\rho})^{-1})(\xi) = \int_{[0,\infty)} \partial^+(\delta_t)\xi(t)dm(t),$$

де вираз, що праворуч, існує як інтеграл Бохнера від векторнозначної функції

$$[0,\infty) \ni t \mapsto \partial^+(\delta_t)\xi(t) \in \mathcal{H}^h_\rho(-p,-q).$$

Нехай $\mathcal{I}^h_\rho$ — звуження оператора $\mathcal{I}^h_{-,\rho}$ на гільбертів простір $L^2([0,\infty); F(S_0))$, яке, очевидно, визначає унітарний оператор (див. (1.28))

$$\begin{aligned} L^2([0,\infty); F(S_0)) \ni f(\cdot) = (f_n(\cdot))_{n=0}^\infty \mapsto (\mathcal{I}^h_\rho f)(\cdot) \\ := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n(\cdot), h_n\rangle \in L^2([0,\infty); (L^2_\rho)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Використовуючи оператори (1.10), (2.1), поряд з інтегралом $\mathbb{J}^h_{\mathrm{ext}}$ *визначимо розширений стохастичний інтеграл* $\mathbb{J}^h(f)$ *від функції*

$$f(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n(\cdot), h_n\rangle \in D^h_\rho := \mathcal{I}^h_\rho D \subset L^2([0,\infty); (L^2_\rho)),$$

поклавши

$$\mathbb{J}^h(f) := (I_\rho^h \mathbb{J}(\mathcal{I}_\rho^h)^{-1})(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{f}_{n+1}, h_{n+1} \rangle \in (L_\rho^2), \qquad (2.2)$$

де $\mathbb{J}$ *— оператор, означений в теоремі* 1.2. Підкреслимо, що зараз інтегруються певні функції f із простору $L^2([0,\infty);(L_\rho^2))$

Як наслідок із теореми 1.2 отримуємо такий результат.

Теорема 2.1. *В просторі* $\mathcal{H}_\rho^h(-p,-q), p, q \in \mathbb{N}_1$, *має місце рівність*

$$\mathbb{J}_{\mathrm{ext}}^h(f) = \mathbb{J}^h(f), \qquad f \in D_\rho^h,$$

причому відображення

$$L^2([0,\infty);(L_\rho^2)) \supset D_\rho^h \ni f \mapsto \mathbb{J}^h(f) \in (L_\rho^2)$$

є ізометричним.

Перейдемо до визначення інтегралу Іто. На ймовірнісному просторі $(Q, \mathcal{B}(Q), \rho)$ розглянемо випадковий процес

$$\mathbf{M} = \{M(t) := \langle \varkappa_{[0,t)}, h_1 \rangle \mid t \in [0,\infty)\}, \qquad M(0) := 0$$

(нагадаємо (див. підрозділ 1.2), що

$$\langle \varkappa_{[0,t)}, h_1 \rangle := I_\rho^h(0, \varkappa_{[0,t)}, 0, \ldots) = \lim_{k\to\infty} \langle \varphi^{(k)}, h_1 \rangle \in (L_\rho^2),$$

$$t \in [0,\infty),$$

де $(\varphi^{(k)})_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ — довільна послідовність, збіжна до $\varkappa_{[0,t)}$ за нормою простору $\mathcal{F}_1(S_0) = L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^1, dm(t)))$.

Використавши співвідношення ортогональності (1.12), неважко переконатися, що для $0 \le t_1 \le t_2 < \infty$

$$\begin{aligned} \|M(t_2) - M(t_1)\|^2_{(L^2_\rho)} &= \|\langle \varkappa_{[t_1,t_2)}, h_1 \rangle\|^2_{(L^2_\rho)} \\ &= \|\varkappa_{[t_1,t_2)}\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1, dm(t))} = t_2 - t_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Крім того, оскільки $h(x, 0) = 1$ для всіх x із Q (див. підрозділ 1.2), то

$$h_0(x) = 1, \qquad x \in Q,$$

а тому згідно з (1.12)

$$\int_Q M(t) d\rho(x) = \int_Q \langle \varkappa_{[0,t)}, h_1(x) \rangle d\rho(x) = 0. \tag{2.4}$$

Припустимо, що $\mathbf{M}$ *є процесом з незалежними приростами.* Як і кожен процес з незалежними приростами, що має властивості (2.3), (2.4), процес $\mathbf{M}$ є нормальним квадратично інтегровним мартингалом щодо сім'ї $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_t)_{t \in [0,\infty)}$ породжених ним σ-алгебр $\mathcal{R}_t := \sigma\{M(s) \mid 0 \le s \le t\}$ (див., наприклад, [17, 18]). Вважатимемо, що σ-алгебра $\mathcal{B}(Q)$ поповнена множинами ρ-міри нуль. Більше того, вважатимемо, що й σ-алгебри $\mathcal{R}_t, t \in [0, \infty)$, поповнені множинами з $\mathcal{B}(Q)$, які мають ρ-міру нуль.

Позначимо через D_{I} множину $(\mathcal{B}(Q) \times \mathcal{B}([0, \infty))$-вимірних) функцій $f \in L^2([0, \infty); (L^2_\rho))$, узгоджених з сім'єю σ-алгебр $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_t)_{t \in [0,\infty)}$. Відомо (див., наприклад, [16, 18, 19]), що *існує єдине лінійне ізометричне відображення*

$$L^2([0, \infty); (L^2_\rho)) \supset D_{\mathrm{I}} \ni f \mapsto \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) \in (L^2_\rho) \tag{2.5}$$

таке, що

$$\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(g\varkappa_{[t_1,t_2)}) = g(M(t_2) - M(t_1)) = g\langle \varkappa_{[t_1,t_2)}, h_1\rangle, \tag{2.6}$$

$$0 \le t_1 \le t_2 < \infty,$$

для довільної $\mathcal{R}_{t_1}$-вимірної функції $g \in (L^2_\rho)$. Це відображення називають інтегралом Іто (стохастичним інтегралом), побудованим за мартингалом $\mathbf{M}$, і позначають

$$\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) := \int_{[0,\infty)} f(t)dM(t) \in (L^2_\rho), \qquad f \in D_{\mathrm{I}}.$$

Нарівні з інтегралом $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}$ будемо розглядати інтеграл

$$\int_{[0,s)} f(t)dM(t) := \int_{[0,\infty)} \varkappa_{[0,s)}(t)f(t)dM(t) \in (L^2_\rho), \qquad f \in D_{\mathrm{I}}.$$

Відзначимо, що завдяки ізометричності відображення (2.5) має місце рівність

$$\| \int_{[0,s)} f(t)dM(t)\|^2_{(L^2_\rho)} = \int_{[0,s)} \|f(t)\|^2_{(L^2_\rho)}dm(t), \qquad f \in D_{\mathrm{I}}. \tag{2.7}$$

Із властивостей інтегралу Іто випливає, що для довільної функції

$$f_n \in \mathcal{F}_n(N_0) = \hat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dm^{\otimes n}(t)), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

має сенс інтеграл

$$\mathbb{J}_n(f_n) := \int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<\infty} f_n(t_1,\dots,t_n)dM(t_1)\dots dM(t_n), \tag{2.8}$$

який називатимемо *n-кратним стохастичним інтегралом*, побудованим за мартингалом $\mathbf{M}$. *Якщо*

$$f_n = \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n} \in \mathcal{F}_n(N_0), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

де $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), j \in \{1, \ldots, n\}$, *— півінтервали, що попарно не перетинаються, то*

$$\mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}) = \frac{1}{n!} \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \ldots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1. \quad (2.9)$$

Справді, скориставшись формулами (2.8), (1.23), отримуємо

$$\begin{aligned} &\mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}) \\ &= \int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n < \infty} (\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n})(t_1, \ldots, t_n) dM(t_1) \ldots dM(t_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n < \infty} \varkappa_{\Delta_{\sigma(1)}}(t_1) \ldots \varkappa_{\Delta_{\sigma(n)}}(t_n) dM(t_1) \ldots dM(t_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Далі, без втрати загальності будемо вважати, що

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$$

тоді, використовуючи (2.10) та (2.6), послідовно прийдемо до рівності (2.9):

$$\begin{aligned} &\mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}) \\ &= \frac{1}{n!} \int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n < \infty} \varkappa_{\Delta_1}(t_1) \ldots \varkappa_{\Delta_n}(t_n) dM(t_1) \ldots dM(t_n) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n!} \int\limits_{0 \le t_2 \le \dots \le t_n < \infty} \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \varkappa_{\Delta_2}(t_1) \dots \varkappa_{\Delta_n}(t_n) dM(t_2) \dots dM(t_n)$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{n!} \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \dots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle.$$

Відмітимо ще один простий факт. Послідовно використовуючи рівність (2.7), для довільного вектора $f_n \in \mathcal{F}_n(N_0)$ отримаємо

$$\|\mathbb{J}_n(f_n)\|^2_{(L^2_\rho)} = \Big\| \int\limits_{0 \le t_1 \le \dots \le t_n < \infty} f_n(t_1, \dots, t_n) dM(t_1) \dots dM(t_n) \Big\|^2_{(L^2_\rho)}$$

$$= \Big\| \int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{0 \le t_1 \le \dots \le t_{n-1} \le t_n} f_n(t_1, \dots, t_n) dM(t_1) \dots dM(t_{n-1}) \Big) dM(t_n) \Big\|^2_{(L^2_\rho)}$$

$$= \int\limits_{[0,\infty)} \Big\| \int\limits_{0 \le t_1 \le \dots \le t_{n-1} \le t_n} f_n(t_1, \dots, t_n) dM(t_1) \dots dM(t_{n-1}) \Big\|^2_{(L^2_\rho)} dm(t_n)$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \int\limits_{0 \le t_1 \le \dots \le t_n < \infty} |f_n(t_1, \dots, t_n)|^2 dm(t_1) \dots dm(t_n) \le \frac{1}{n!} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)}.$$

Звідси випливає, що *відображення*

$$\mathcal{F}_n(N_0) \ni f_n \mapsto \mathbb{J}_n(f_n) \in (L^2_\rho), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

є неперервним.

Вище відзначалося, що у гауссовому та пуассоновому випадках розширений стохастичний інтеграл є узагальненням інтеграла Іто, побудованого за мартингалом **M** (див., наприклад, [4, 10], а також розділ 3). В зв'язку з цим виникає природне питання: за яких умов, накладених на функцію h, інтеграл $\mathbb{J}^h$ збігається з інтегралом $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}$. Відповідь дає така теорема.

Теорема 2.2. *Якщо функція h така, що у просторі (L^2_ρ)*

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle = \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \ldots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1, \tag{2.11}$$

для довільних півінтервалів

$$\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), \qquad j \in \{1, \ldots, n\},$$

що попарно не перетинаються, то $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ і

$$\mathbb{J}^h(f) = \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f), \qquad f \in D^h_\rho. \tag{2.12}$$

Навпаки, якщо $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ і інтеграл Іто $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f)$ від функції $f \in D^h_\rho$ збігається з розширеним стохастичним інтегралом $\mathbb{J}^h(f)$, то для довільних півінтервалів

$$\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), \qquad j \in \{1, \ldots, n\},$$

що попарно не перетинаються, у просторі (L^2_ρ) має місце рівність (2.11).

Доведення. Припустимо, що для довільних півінтервалів

$$\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), \qquad j \in \{1, \ldots, n\},$$

що попарно не перетинаються, у просторі (L^2_ρ) має місце рівність (2.11). Справедливість вкладення $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ випливає з того, що для кожного $t \in [0, \infty)$ функції

$$\langle \sum_{k=1}^{s} c_k \varkappa_{\Delta_1^{(k)}} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n^{(k)}}, h_n \rangle = \sum_{k=1}^{s} c_k \langle \varkappa_{\Delta_1^{(k)}}, h_1 \rangle \ldots \langle \varkappa_{\Delta_n^{(k)}}, h_1 \rangle,$$

побудовані за півінтервалами $\Delta_j^{(k)} = [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \subset [0, t)$ такими, що

$$\Delta_i^{(k)} \cap \Delta_j^{(k)} = \varnothing, \qquad i \neq j, \qquad k \in \{1, \ldots, s\},$$

є $\mathcal{R}_t$-вимірними і ними у просторі (L^2_ρ) можна апроксимувати довільну функцію f із множини D^h_ρ.

Встановимо рівність (2.12). Використовуючи формули (2.9) та (2.11), неважко переконатися, що у просторі (L^2_ρ) довільна функція

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle \in (L^2_\rho)$$

допускає зображення

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle = n! \mathbb{J}_n(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}),$$

де $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset [0, \infty), j \in \{1, \ldots, n\}$, — півінтервали, що попарно не перетинаються. Звідси безпосередньо випливає, що довільна функція $\langle f_n, h_n \rangle \in (L^2_\rho)$, де носій $\sup f_n \subset [0, \infty)^n$, допускає зображення

$$\begin{aligned} \langle f_n, h_n \rangle &= n! \mathbb{J}_n(f_n) \\ &= n! \int\limits_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n < \infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) dM(t_1) \ldots dM(t_n). \end{aligned}$$

Врахувавши останнє та (1.26), для довільної функції

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n(\cdot), h_n \rangle \in D^h_\rho$$

отримаємо

$$\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) = \int_{[0,\infty)} f(t)dM(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} \langle f_n(t), h_n\rangle dM(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} n! \Big(\int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_n<t} f_n(t;t_1,\ldots,t_n)dM(t_1)\ldots dM(t_n)\Big) dM(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int\limits_{0\le t_1\le\cdots\le t_{n+1}<\infty} \hat{f}_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1})dM(t_1)\ldots dM(t_{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{f}_{n+1}, h_{n+1}\rangle = \mathbb{J}^h(f).$$

Навпаки, нехай $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$ і $\mathbb{J}^h(f) = \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f)$, $f \in D^h_\rho$. Переконаємося у справедливості рівності (2.11). Зафіксуємо півінтервали $\Delta_1 = [a_1, b_1), \ldots, \Delta_n = [a_n, b_n)$ — такі, як і в умові теореми, причому вважатимемо, що $a_n > a_i$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тоді, очевидно, що функція

$$[0,T) \ni t \mapsto f(t) := \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1}\rangle \varkappa_{\Delta_n}(t) \in (L^2_\rho),$$

входить до множини $D^h_\rho \subset D_{\mathrm{I}}$. Більше того, функція

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1}\rangle$$

є $\mathcal{R}_{a_n}$-вимірною, а тому на підставі (2.6)

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) &= \int_{[0,\infty)} \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1}\rangle \varkappa_{\Delta_n}(t)dM(t) \\ &= \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}}, h_{n-1}\rangle \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1\rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

З іншого боку, оскільки інтеграл Іто збігається з розширеним стохастичним інтегралом, на підставі (2.2) одержуємо

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f) = \mathbb{J}^h(f) &= \mathbb{J}^h(\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_{n-1}} \otimes \varkappa_{\Delta_n}(\cdot), h_{n-1}\rangle) \\ &= \langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n\rangle.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Порівнюючи (2.13) з (2.14), за індукцією отримуємо (2.11). $\square$

Справедлива така теорема.

Теорема 2.3. *Якщо*

$$\left.\frac{\partial^n h(x, z_1\varphi_1 + \cdots + z_n\varphi_n)}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}\right|_{z_1=\ldots=z_n=0} \tag{2.15}$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial z_1} h(x, z_1\varphi_1)\right|_{z_1=0} \cdots \quad \left.\frac{\partial}{\partial z_n} h(x, z_n\varphi_n)\right|_{z_n=0}$$

для будь-якого $x \in Q$ та довільних функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ таких, що $\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j = \varnothing$ при $j \neq i,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$, то у просторі (L^2_ρ)

$$\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n\rangle = \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1\rangle \ldots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

для довільних півінтервалів $\Delta_j = [a_j, b_j) \subset \mathbb{R}^1, j \in \{1, \ldots, n\}$, що попарно не перетинаються.

Доведення. Припустимо, що рівність (2.15) виконується. Тоді врвховуючи (1.8) та (2.15),

$$\langle \varphi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_n, h_n(x)\rangle = \langle \varphi_1, h_1(x)\rangle \ldots \langle \varphi_n, h_1(x)\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_1, \tag{2.16}$$

для будь-якого $x \in Q$ та довільних функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ таких, що $\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j = \varnothing$ при $j \neq i,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Як відомо, для довільних півінтервалів $\Delta_1, \dots, \Delta_n \subset \mathbb{R}^1$, що попарно не перетинаються, знайдуться функції $\varphi_{j,\varepsilon}, \varepsilon > 0$, із простору $\mathcal{S}$ такі, що $\operatorname{supp} \varphi_{j,\varepsilon} \subset \Delta_j$ і $\varphi_{j,\varepsilon} \to \varkappa_{\Delta_j}$ при $\varepsilon \to 0$ за нормою простору $S_0 = L^2(\mathbb{R}^1, dm(t))$. Тому, на підставі (2.16)

$$\begin{aligned}
&\langle \varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}, h_n \rangle = I_\rho^h(\varkappa_{\Delta_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varkappa_{\Delta_n}) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} I_\rho^h(\varphi_{1,\varepsilon} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_{n,\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \varphi_{1,\varepsilon} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_{n,\varepsilon}, h_n \rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \varphi_{1,\varepsilon}, h_1 \rangle \dots \langle \varphi_{n,\varepsilon}, h_1 \rangle = \langle \varkappa_{\Delta_1}, h_1 \rangle \dots \langle \varkappa_{\Delta_n}, h_1 \rangle.
\end{aligned}$$

□

3. Класичні приклади

Гауссів аналіз білого шуму. Нехай $Q = S_{-1}$, $\rho = \gamma$ — міра Гаусса на $\mathcal{B}(S_{-1})$, яка на підставі теореми Мінлоса однозначно визначається своїм перетворенням Фур'є

$$\int_{S_{-1}} \exp(i\langle x, \lambda \rangle) d\gamma(x) = \exp(-\frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda \rangle), \qquad \lambda \in S_1.$$

Очевидно, що породжуюча функція

$$h(x,\lambda) = H(x,\lambda) := \exp(\langle x, \lambda \rangle - \frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda \rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes}, H_n(x) \rangle$$

для поліномів Ерміта $h_n(x) = H_n(x)$ задовольняє вимогам підрозділу 1.2 (див., наприклад, [11]). Як наслідок, спираючись на результати вказаного підрозділу, можна побудувати теорію узагальнених функцій нескінченновимірної змінної $x \in S_{-1}$ зі спарюванням, породженим інтегруванням відносно міри Гаусса γ. Зрозуміло, що при такій побудові унітарний ізоморфізм $I_\rho^h = I_\gamma^H$ (1.10) є класичним ізоморфізмом Вінера–Іто–Сігала.

Неважко бачити, що у даному випадку функція $H(x,\lambda)$ задовольняє рівність (2.15) із вказаними там $\varphi_j \in \mathcal{S}$. Тому з теорем 2.2 та 2.3 випливає добре відомий результат (див., наприклад, [10]) про те, що інтеграл Іто $\mathbb{J}_{\mathrm{I}}(f)$ від функції $f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n(\cdot), H_n\rangle \in D_\gamma^H = I_\gamma^H(D)$, побудований за броунівським процесом

$$\{B(t) := \langle \varkappa_{[0,t)}, H_1(\cdot)\rangle = \langle \varkappa_{[0,t)}, \cdot\rangle \mid t \in [0,T)\}, \quad B(0) := 0,$$

збігається з розширеним стохастичним інтегралом

$$\mathbb{J}_\gamma^H(f) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle \hat{f}_{n+1}(\cdot), H_{n+1}\rangle.$$

Пуассонів аналіз білого шуму. Нехай $Q = S_{-1}$, $\rho = \pi$ — міра Пуассона на $\mathcal{B}(S_{-1})$, перетворенням Фур'є якої має вигляд:

$$\int_{S_{-1}} \exp(i\langle x,\lambda\rangle) d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle, \qquad \lambda \in S_1.$$

В якості функції $h(x,\lambda)$ візьмемо функцію

$$h(x,\lambda) = C(x,\lambda)$$
$$:= \exp(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1,\lambda\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes}, C_n(x)\rangle,$$

що є породжуючою для поліномів Шарльє $h_n(x) = C_n(x)$. Згідно з [12] функція $C(x,\lambda)$ задовольняє умовам підрозділу 1.2. Тому визначено унітарне відображення

$$F(S_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_\pi^C f)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, C_n\rangle \in (L_\pi^2)$$

під дією якого оснащення (1.4) простору Фока $F(S_0)$ переходить у відповідне оснащення простору $(L^2_\pi) = L^2(S_{-1}, d\pi(x))$.

Як і у попередньому прикладі, добре відомий результат (див., наприклад, [4]) про те, що інтеграл Іто (побудований за пуассоновим процесом $\{P(t) := \langle \varkappa_{[0,t)}, C_1(\cdot)\rangle \mid t \in [0,T)\}$, $P(0) := 0$) збігається з розширеним стохастичним інтегралом одразу ж випливає із справедливості рівності (2.15) для $C(x,\lambda)$ із вказаними в (2.15) $\varphi_j \in \mathcal{S}$.

Зауважимо також наступне. У роботах М. О. Качановського [8, 9] введено поняття розширеного стохастичного інтеграла, що узагальнює інтеграл Іто, побудований за гамма-процесом. Фактично, конструкція побудови розширеного стохастичного інтеграла в [8, 9] збігається з нашою. Основна відмінність полягає в тому, що в якості простору Фока береться розширений простір Фока (це істотно ускладнює конструкцію), який під дією перетворення типу Вінера–Іто–Сігала переходить у простір L^2, побудований за гамма-мірою (щодо визначення розширеного простору Фока див. [20, 21, 22]).

Автори глибоко вдячні М. О. Качановському за корисні обговорення і критичні зауваження.

Література

[1] *Hitsuda M.* Formula for Brownian partial derivatives // In: Proc. Second Japan – USSR Symphosium on Probability Theory. – 1972. – **2**. – P. 111-114.

[2] *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Стохастические интегралы относительно случайной нормально распределенной функции множеств // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**, № 3. – С. 512–515.

[3] *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов // Теория вероят. и ее примен. – 1974. – **19**, № 4. – С. 845–849.

[4] *Кабанов Ю. М.* О расширенных стохастических интегралах // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – **20**, № 4. – С. 725–737.

[5] *Кабанов Ю. М., Скороход А. В.* Расширенные стохастические интегралы // Тр. шк.-семинара по теории случайн. процессов. – Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1975. – Ч. 1. – Р. 123–167.

[6] *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – **20**, № 2. – С. 223–228.

[7] *King R.* Stochastic integrals and metadistributions. Applications to stochastic partial differential equations and quantum field theory // Ph. D. dissertation, Cornell University, 1975.

[8] *Kachanovsky N. A.* On the extended stochastic integral connected with the gamma-measure on an infinite-dimensional space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 2. – P. 10–32.

[9] *Kachanovsky N. A.* A generalized Malliavin derivative connected with the Poisson- and Gamma-measures // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 3. – P. 213–240.

[10] *Hida T., Kuo H. - H., Potthoff J., Streit L.* White Noise. An Infinite Dimensional Calculus. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – xiii+516 p.

[11] *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Простори основних і узагальнених функцій, пов'язані з узагальненим зсувом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 12. – С. 1587–1658.

[12] *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних та пуассонів аналіз білого шуму // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 12. – С.

[13] *Kachanovsky N. A.* On analog of stochastic integral and Wick calculus in non-Gaussian infinite dimensional analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – **3**, № 3. – P. 1–12.

[14] *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral Methods in Infinite Dimensional Analysis. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – xvii+572 p.; Vol. 2. – viii+427 p. (Russian edition: Kiev: Naukova Dumka, 1988. - 680 p.).

[15] *Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F.* Functional Analysis, vols. 1, 2. – Basel etc.: Birkhäuser, 1996. – Vol. 1. – xix+423 p.; Vol. 2. – xvi+293 p. (Russian edition: Kiev: Vyshcha Shkola, 1990. - 600 p.).

[16] *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

[17] *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 320 с.

[18] *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – **3**. – 496 с.

[19] *Protter P.* Stochastic Integration and Differential Equations. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1990. – 293 p.

[20] *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L., and Us G. F.* Analysis on Poisson and Gamma spaces // Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. Related Topics. – 1998. – **1**, № 1. – P. 91–117.

[21] *Kondratiev Yu. G., Lytvynov E. W.* Operators of Gamma white noise calculus // Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. Related Topics. – 2000. – **3**, № 3. – P. 303–335.

[22] *Berezansky Yu. M., Mierzejewski D. A.* The Construction of the Chaotic Representation for the Gamma Field // Infinite Dimen. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2003. – **6**, № 1. – P. 33–56.

Зміст

Наукове видання

Березанський Юрій Макарович
Теско Володимир Анатолійович

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗШИРЕНОГО СТОХАСТИЧНОГО ІНТЕГРАЛА

Редактор В. Е. Гонтковська

Підп. до друку 24.02.2005. Формат $60 \times 84/16$. Офс. друк. Папір тип. Фіз. друк. арк. 2,5. Ум. друк. арк. 2,3. Тираж 60 прим. Зам. 48.

Інститут математики НАН України.
01601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3