Lista 4

Espaços e subespaços vetoriais

1. Determine quais dos conjuntos abaixo, com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, formam um espaço vetorial real. Justifique sua resposta.

   a) O conjunto dos vetores $v = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$.

   b) O conjunto $M(2, 2)$ das matrizes reais 2×2.

   c) O conjunto $P_3(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

   d) O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções reais.

   e) O conjunto das matrizes 2×2 cujo traço é zero.
   Obs. Para $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, o traço de A é definido por $tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

   f) O conjunto das matrizes 2×2 cujo determinante é zero.

   g) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$.

   h) O conjunto das funções reais tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^2$ o conjunto de pares ordenados reais (x, y). Em cada um dos itens abaixo, determine se V é um espaço vetorial real para as operações de adição $\oplus$ e de multiplicação por escalar $\otimes$ dadas por:

   a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \qquad \lambda \otimes (x, y) = (x, \lambda y).$

   b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0); \qquad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$

   c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1); \qquad \lambda \oplus (x, y) = (\lambda x, y).$

   d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1 + y_2); \qquad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$

3. Verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

   c) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A$ é invertivel$\}$.

   d) $V = M_n(\mathbb{R})$, dada $B \in M_n(\mathbb{R})$, defina $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid BA = 0\}$.

   e) $V = M_n(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$.

   f) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.

   g) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1)\}$.

   h) $V = C^2(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + c = 0\}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   i) $V = C(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

   j) $V = C(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f^2(x)dx = 0\}$.

4. Em cada item abaixo encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

   a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, c, d \in \mathbb{R} \right\}, V = M_2(\mathbb{R})$.

c) $U = \{p(t) \in V \mid p''(t) = 0\},\ W = \{q(t) \in V \mid q'(t) = 0\}, V = P_3(\mathbb{R})$.

5. Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.

a) $V = \mathbb{R}^2,\ U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

b) $V = M_3(\mathbb{R}),\ U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$,

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$.

c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
$W = \{q(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid q'(t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$.

d) $V = M_2(\mathbb{R}), U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}, W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$.

Respostas

1. a), b), c), d), e), g) são espaços vetoriais [para demonstrar, é preciso verificar que as operações de adição e multiplicação por escalar estão bem definidas e que os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos]; f) e h) não são espaços vetoriais [apesar dos 8 axiomas serem validos, as operações não estão bem definidas].

2. Nenhum é espaço vetorial [pelo menos um dos 8 axiomas não é valido em cada caso.

   (a) axioma 7 não é valido: $(\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u$.

   (b) axioma 3 não é valido: $u + 0 = u$.

   (c) axioma 1 não é valido: $u + v \neq v + u$.

   (d) axioma 1 não é valido.

3. Para verificar, é preciso demonstrar que os axiomas de fechamento são satisfeitos ou não.

   (a) Sim.

   (b) Não, pois $(1, 1, 1) \in W$, mas $\sqrt{2} \cdot (1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin W$

   (c) Não, pois $0 \notin W$.

   (d) Sim.

   (e) Sim.

   (f) Não, pois $p(t) = t^2 \in W$ e $-p(t) = -t^2 \notin W$.

   (g) Sim.

   (h) Observe que W é subespaço se, e somente se, $c = 0$.

   (i) Sim.

   (j) Sim. Dica: mostre primeiro que $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x \in (0, 1)\}$.

4. (a) $U + W = U = W = U \cap W$

(b)

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Observe que $U = P_1(\mathbb{R})$ e $W = \mathbb{R}$. Assim

$$U + W = P_1(\mathbb{R}) := \{p(t) = at + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad U \cap W = \mathbb{R}.$$

5. (a) Observe que U, W são subespaços de V, $U \cap W = (0,0)$ e para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$(a, b) = \lambda_1(1, -\frac{2}{3}) + \lambda_2(1, 1)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{3}{5}(a - b)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{5}(2a + 3b)$$

(b) Similarmente U, W são subespaços de V, $U \cap W = 0$ e

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Observe que

$$U = \{at^3 + bt^2 + ct \mid a + b + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

e além disso, $p(t) = t \in P_3(\mathbb{R})$ mas $p \notin U + W$.

(d) Note que U, W são subespaços de V, $U \cap W = 0$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$