Lista 5

Subespaço Gerado

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ o conjunto $S = \{(1,1),(2,2)\}$.

   a) Mostre que o vector $(-5,-5)$ é combinação linear dos vectores de S.

   b) É também o vector $(1,0)$ combinação linear dos vectores de S?

   c) O conjunto S gera $\mathbb{R}^2$, isto é $[S] = \mathbb{R}^2$?

   d) Determine a forma geral dos vectores $(a,b) \in [S]$.

2. Qual o subespaço do espaço vetorial V gerado por S, se

   a) $S = \{(1,0),(2,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   b) $S = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,2,2)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   c) $S = \{(1,1,1),(2,2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   d) $S = \{1, x, x^2, 1+x^3\}$, $V = P_3(R)$.

   e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

3. Encontre um subconjunto finito S que gera o subespaço vetorial W do espaço vetorial V:

   a) $W = \{(x,y,z) \in V = \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$.

   b) $W = \{(x,y,z) \in V = \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$.

   c) $W = \{p(x) \in V = P_3(\mathbb{R}) \mid p'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$.

   d) $W = \{X \in V = M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Independência Linear

1. Determine se os seguintes conjuntos são linearmente independentes (LI) em $\mathbb{R}^2$:

   a) $S = \{(2,1),(3,2)\}$,

   b) $S = \{(2,3),(4,6)\}$,

   c) $S = \{(-2,1),(1,3),(2,4)\}$.

2. Determine se os seguintes conjuntos são LI em $\mathbb{R}^3$:

   a) $S = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$,

   b) $S = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,2,3)\}$,

   c) $S = \{(2,1,-2),(3,2,-2),(2,2,0)\}$,

   d) $S = \{(1,1,3),(0,2,1)\}$.

3. Determine se os seguintes conjuntos são LI em M_2R:

    a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

    b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

    c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Determine se os seguintes conjuntos são LI em $P_2(\mathbb{R})$:

    a) $S = \{1, x^2, x^2 - 1\}$,

    b) $S = \{x + 2, x^2 - 1\}$,

    c) $S = \{1 + x - x^2, 2 + 5x - 9x^2\}$.

5. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é LI:

    a) $S = \{\cos(\pi x), \sin(\pi x)\}$, $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

    b) $S = \{x, e^x, e^{2x}\}$, $V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

    c) $S = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

    d) $S = \{(1, 2, 2, -3), (-1, 4, -2, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

Base e dimensão

1. Verificar em cada um dos casos se o subconjunto B do espaço vetorial V é uma base para V:

    a) $B = \{(1, 1), (0, 3)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

    b) $B = \{(1, 1), (0, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

    c) $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

    d) $B = \{1, 1 + x, 1 - x^2, 1 - x - x^2 - x^3\}$, $V = P_3(\mathbb{R})$.

    e) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

    f) $B = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

2. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

3. Calcule uma base e a dimensão do subespaço S do espaço vetorial V:

    a) $S = \{(x, y) \in R^2 \mid x + y = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

    b) $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y + 2z = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

    c) $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y + z = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

    d) $S = [(1, 1), (2, 1), (1, 2)]$, $V = \mathbb{R}^2$.

    e) $S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

    f) $S = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p''(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

4. Encontre uma base (e dimensão) de $U,\ W,\ U \cap W$

   a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $W = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
   b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $W = [(1,1,1),(0,1,1)]$, $V = \mathbb{R}^3$.
   c) $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$,
   $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

5. Determinar as coordenadas de $u = (-1,8,5) \in \mathbb{R}^3$ em relação as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$:

   a) base canônica;
   b) $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$;
   c) $\{(1,2,1),(0,3,2),(1,1,4)\}$.

6. Determinar as coordenadas de $p(x) \in P_3(\mathbb{R})$, dado por $p(x) = 10 + x^2 + 2x^3$, em relação as seguintes bases de $P_3(\mathbb{R})$:

   a) base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$;
   b) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$;
   c) $\{4+x, 2, 2-x^2, x+x^3\}$.

7. Determinar as coordenadas de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação as seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$;

   a) base canônica;
   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Respostas

Subespaço Gerado

1. b) Não. c) Não. d) $[S] = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\} = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) $[S] = \mathbb{R}^2$.
   (b) $[S] = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid c - b = 0\} = \{(a,b,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.
   (c) $[S] = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 0\} = \{(a,a,c) \mid a,c \in \mathbb{R}\}$.
   (d) $[S] = P_3(\mathbb{R})$.
   (e) $[S] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

3. (a) $S = \{(2,1,0),(0,0,1)\}$.
   (b) $S = \{(1,2,1),(2,0,-1)\}$.
   (c) $S = \{1\}$.

(d) Separar por casos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } A = 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = a = 0, \;\; b \neq 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = b = 0, \;\; a \neq 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = 0, \;\; a, b \neq 0$$

Similarmente para os outros casos.

Independência Linear

1. (a) LI
   (b) LD
   (c) LD
2. (a) LI
   (b) LD
   (c) LI
   (d) LI
3. (a) LI
   (b) LI
   (c) LD
4. (a) LD
   (b) LI
   (c) LI
5. (a) LI
   (b) LI
   (c) LI
   (d) LI

Base e dimensão

1. (a) Sim

(b) Não

(c) Não

(d) Sim

(e) Sim

(f) Sim

2. O conjunto B é uma base de $\mathbb{R}^3$ se $a \neq 0$ e $a \neq \pm\sqrt{2}$.

   Dica: Considere a equação

$$\lambda_1(a,1,0) + \lambda_2(1,a,1) + \lambda_3(0,1,a) = (0,0,0).$$

   Essa equação possui apenas a solução $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ se e somente se

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = a^3 - 2a \neq 0.$$

3. (a) $\{(-1,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 1$.

   (b) $\{(-1,1,0), (-2,0,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 2$.

   (c) $\{(-1,1,0)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 1$.

   (d) $\{(1,1), (1,2)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 2$.

   (e) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 2$.

   (f) $\{1, x\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 2$.

4. (a) $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ é base de U, logo $\dim(U) = 2$.
   $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ é base de W, logo $\dim(W) = 2$.
   $\{(1,-1,0)\}$ é base de $U \cap W$, logo $\dim(U \cap W) = 1$.

   (b) $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ é base de U, logo $\dim(U) = 2$.
   $\{(1,1,1), (0,1,1)\}$ é base de W, logo $\dim(W) = 2$.
   $\{(-2,1,1)\}$ é base de $U \cap W$, logo $\dim(U \cap W) = 1$.

   (c) $U = \mathbb{R} = [1]$ e $\dim(W) = 1$.
   $W = [x^2 - x]$ e $\dim(W) = 1$.
   $U \cap W = \{0\}$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

5. (a) $[u] = (-1, 8, 5)$

   (b) $[u] = (-3, 9, -1)$

   (c) $[u] = \left(-\frac{9}{11}, \frac{36}{11}, -\frac{2}{11}\right)$

6. (a) $[p(x)] = (10, 0, 1, 2)$

   (b) $[p(x)] = (10, -1, -1, 2)$

   (c) $[p(x)] = (-2, 10, -1, 2)$

7. (a) $[A] = (2, 5, -8, 7)$

   (b) $[A] = (-3, 13, -15, 7)$