Lista 1

Funções de Uma Variável

Derivadas

Derivadas: Definição e Regras de Derivação

1 — Ache o coeficiente angular da reta secante a parábola

$$y = 2x - x^2$$

se as abscissas dos pontos de intersecção são iguais a:

a) $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$
b) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.1$
c) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.01$
d) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1 + h$

2 — A que valor tende o limite da secante no último caso quando $h \to 0$?

3 — Ache a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \dfrac{1}{x}$

a) no ponto 2 e $\Delta x = 1$
b) no ponto 2 e $\Delta x = 0.1$
c) no ponto 2 e $\Delta x = 0.01$

4 — Quanto vale $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \dfrac{1}{x}$?

5 — Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$
b) derivada de $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $a = 1$
c) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$
d) derivada de $f(x) = 3x^3 - x$ no ponto $a = 2$
e) derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$
f) derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$
g) derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$
h) derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$
i) derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $a = 1$
j) derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

6 — Mostre que não existe a derivada de $g(x) = |x|$ em $x = 0$. Calcule a derivada para $x \neq 0$.

7 — Mostre a partir da definição de derivada que

a) $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$.
b) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$.

8 — Mostre $\dfrac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$. (Use que $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$).

9 — Escreva a equação da reta tangente as curvas $y = f(x)$ no ponto especificado. Esboce o gráfico de $f(x)$ e da reta tangente.

a) $y = x^3$ no ponto $x = 3$
b) $y = x^7 + 3x$ no ponto $x = 1$
c) $y = \frac{1}{x-1}$ no ponto $(-1, -\frac{1}{2})$
d) $y = \operatorname{sen}(x)$ no ponto $x = \pi$
e) $y = 2^x$ no ponto $x = 2$
f) $y = \cos(x) + x^2$ no ponto $x = 0$

10 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^4 + 5x + 8$

b) $f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

d) $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$

e) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x + \ln(7)$

f) $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$

g) $f(x) = x^{\frac{a}{2}} + x^{\frac{a+4}{2}} + ax^{a-1}$

h) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}$

11 — Quantas retas tangentes a curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$. Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

12 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(x) + 6\cos(x)$

b) $f(x) = \mathrm{tg}(x) - \mathrm{cotg}(x)$

c) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x) + \cos(x)}{\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}$

d) $f(x) = x\,\mathrm{cotg}(x)$

e) $f(x) = (x-2)\,\mathrm{sen}(x) + x^2\,\mathrm{tg}(x) + \mathrm{sen}(x)\cos(x)$

13 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^7 e^x$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

c) $f(x) = e^x \cos(x)$

d) $f(x) = \frac{x^n}{\ln(x)}$

e) $f(x) = x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3}$

f) $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x$

g) $f(x) = \pi^x + 3^x x + 4^x \cos(x)$

h) $f(x) = \log_2(x) + \log_3(x) + \log_4(x)$

i) $f(x) = 2^x \log_3(x)$

14 — Seja

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{senh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Esboce os gráficos de $\mathrm{senh}(x)$ e de $\cosh(x)$ utilizando os gráficos de e^x e e^{-x}.

15 — Mostre que:

a) $\cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) = 1$

b) $\mathrm{senh}(-x) = -\mathrm{senh}(x)$

c) $\cosh(-x) = \cosh(x)$

d) $(\mathrm{senh}(x))' = \cosh(x)$

e) $(\cosh(x))' = \mathrm{senh}(x)$

16 — Calcule as seguintes derivadas:

a) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c) $f(x) = (3 - 2\,\mathrm{sen}(x))^5$

d) $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{sen}^2(x)} + \frac{1}{\cos^3(x)}$

f) $f(x) = \mathrm{sen}(5x) + \cos(\frac{x}{7}) + \mathrm{tg}(\sqrt{x}$

g) $f(x) = \mathrm{sen}(x^2 - 5x + 1) + \mathrm{tg}(\frac{a}{x})$

h) $f(x) = \log_{10}(\mathrm{sen}(x))$

i) $f(x) = \ln(e^x + 5\,\mathrm{sen}(x) - 4x^3)$

j) $f(x) = \frac{a + bx^n}{a - bx^n}^{m}$

k) $f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$

l) $f(x) = \cosh\left(\mathrm{cotg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

17 — Em que ponto a tangente a parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela a reta $5x + y - 3 = 0$.

18 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(1, -4)$.

19 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2, 5)$.

20 — Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.

21 — Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$ $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

Funções Definidas por Partes

22 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leqslant c \\ ax + b \text{ se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

23 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) \text{ se } x \leqslant c \\ ax + b \text{ se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

24 — Dado $c > 0$, seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} \text{ se } |x| > c \\ a + bx^2 \text{ se } |x| < c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

25 — Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{se} x \neq 0 \\ 0 & \text{se} x = 0 \end{cases}$$

é contínua no 0 mas não diferenciável no 0

Respostas dos Exercícios

1 a)-1 b) -0.1 c) d) - h

2 0

3 a) -1/6 b) -5/21 c) -50/201

5 **a.)** $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{0+h-0}{h} = 1.$
b.) 2.
c.) 2.
d.)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h)^3 - 2 - h - 3\cdot 2^3 + 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{35h + 18h^2 + 3h^3}{h} = 35 \end{aligned}$$

e.) 3
f.) 0
g.)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

i.) -1

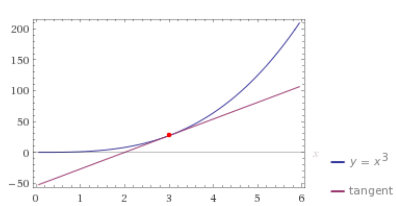
6 Dica: calcule as derivadas laterais pela direita e pela esquerda.
Se $x > 0$ então $g'(x) = 1$. Se $x < 0$ então $g'(x) = -1$. Conclua

7

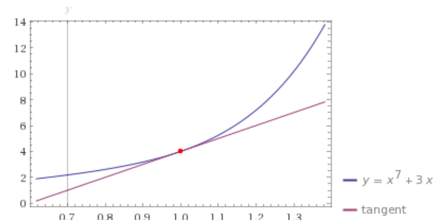
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} &= \\ = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) &= \\ = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) &= \\ = 1 \end{aligned}$$

8 Se $y = a^x$ então $\ln(y) = x \ln a$ e logo $y = e^{x \ln a}$. Use a regra da Cadeia e conclua.

9 **a.)** $y = 27(x-3) + 27$



b.) $y = 10(x-1) + 4$



c.) $y = \frac{1}{4}(-x-1) - \frac{1}{2}$ **d.)** $y = \pi - x$

10 **a.)** $12x^3 + 5$
b.) $2x + 9x^2 + 4x^3 + x^4 + 36x^5 + 7x^6$ **c.)** $2ax + b$ **d.)** $amx^{m-1} + b(m+n)x^{m+n-1}$ **f.)** $\frac{1}{2}x^{\frac{a}{2}-1}\left(ax^2 + a + 4x^2\right)!$

11 Dois pontos, $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \mp \sqrt{3})/2)$

12 **b.)** $\operatorname{cossec}(x)^2 + \sec(x)^2$
d.) $\operatorname{cotg}(x) - x \operatorname{cossec}(x)^2$ e) $(-2+x)\cos(x) + \cos(x)^2 + x^2 \sec(x)^2 + \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)^2 + 2x \operatorname{tg}(x)$

13 a)$7e^x x^6 + e^x x^7$ b) $(-2e^x)/x^3 + e^x/x^2$ f) $2^x \ln(2) + 3^x \ln(3) + 4^x \ln(4) + 5^x \ln(5) + 6^x \ln(6) + 7^x \ln(7)$ h) $1/(x \ln(2)) + 1/(x \ln(3)) + 1/(x \ln(4))$ i) $2^x/(x \ln(3)) + (2^x \ln(2) \ln(x))/\ln(3)$

15 **a.)**

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = [\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})]^2 - [\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})]^2 = 1$$

d.) Use que $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e derive.

16 a) $30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(3 - 10x)$ b) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $-10\cos(x)(3 - 2\operatorname{sen}(x))^4$ d) $\dfrac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$ f) $5\operatorname{sen}(5x) - \dfrac{1}{7}\operatorname{sen}(\dfrac{x}{7}) + \dfrac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ h) $\operatorname{cotg}(x)\log_{10} e$ j) $2abmnx^{n-1}\dfrac{(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$ l) $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$

17 $\frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{41}\right)$

19 $y - 5 = 0$ $x + 2 = 0$

22 $a = 2c, b = -c^2$

23 $a = \cos(c), b = -c\cos(c + \operatorname{sen}(c)$

24 $a = \dfrac{3}{2c}$ $b = -\dfrac{1}{2c^3}$