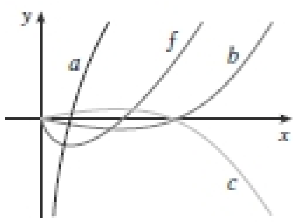
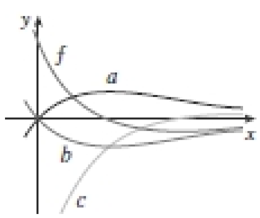
Lista 5

Funções de Uma Variável

Antiderivadas e Integral

1 — O gráfico da função f é apresentado abaixo. Identifique o gráfico da antiderivada de f.

a) 

b) 

2 — Calcule as seguintes antiderivadas:

a) $\int x \, dx$

b) $\int (3x+1) \, dx$

c) $\int x^n \, dx$

d) $\int \left(x^2+x+1\right) \, dx$

e) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

f) $\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) \, dx$

g) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

h) $\int \left(3\sqrt[7]{x^2}+\cos(x)\right) \, dx$

i) $\int e^{4x} \, dx$

j) $\int \cos(3x) \, dx$

k) $\int \left(x+3e^{5x}+\cos(2x)\right) \, dx$

l) $\int \left(1-\cos(4x)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right) \, dx$

m) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

n) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$

o) $\int 3^x \, dx$

p) $\int \sec^2(2x) \, dx$

q) $\int \operatorname{sen}^2(x) \, dx$

3 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

a) $\frac{dx}{dt} = 2t-1$ e $x(0) = 2$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ e $x(0) = 0$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$

d) $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$

e) $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

4 — Ache os valores numéricos das seguintes somas:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{6} (2i+1)$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$

5 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (aditividade)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (homogeneidade)

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (telescópica)

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

6 — Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

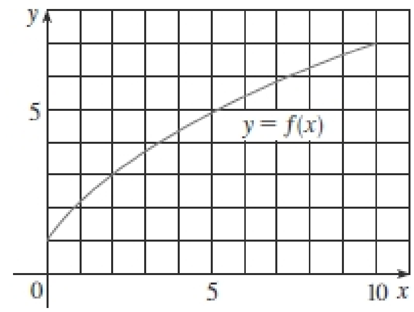
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ (Dica: Use que $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ (Dica: Use o item anterior)

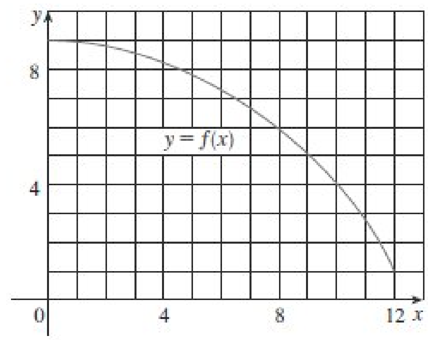
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ (Dica: $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$)

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

7 — Usando as figuras abaixo ache estimativas inferiores e superiores para a área abaixo do gráfico de $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ usando primeiramente 5 retângulos e posteriormente 10 retângulos.



a)



b)

8 —

a) Defina precisamente partição de um intervalo.

b) Defina precisamente soma de Riemann.

9 — Use uma soma de Riemann com extremos a direita e $n = 8$ para achar uma aproximação da integral

$$\int_0^5 x^2 - 3x$$

10 — Use uma soma de Riemann centrado no ponto médio para achar aproximações da integrais

a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\, dx \quad n = 4$

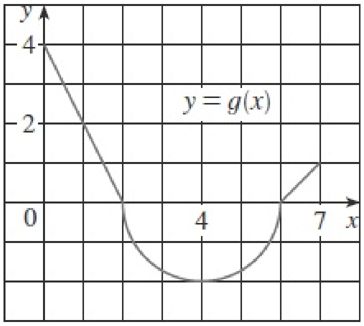
b) $\displaystyle\int_0^1 2^x\, dx \quad n = 10$

11 — O gráfico de g consiste de dois segmentos de retas e um semi-circulo, conforme figura abaixo. Calcule

a) $\displaystyle\int_0^2 g(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int_2^6 g(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^6 g(x)\, dx$



12 — Calcule a partir da definição as seguintes integrais:

a) $\int_a^b x \, dx$

b) $\int_0^1 2x \, dx$

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{2} \, dx$

d) $\int_0^a 1x^3 \, dx$

e) $\int_0^2 x^4 \, dx$

f) $\int_0^3 x^2 + x \, dx$

g) $\int_a^b (x^2 + x) \, dx$

h) $\int_a^b e^x \, dx$

13 — Expresse as seguintes integrais como limite de somatório

a) $\int_0^\pi \cos(x) \, dx$

b) $\int_0^1 e^x \, dx$

c) $\int_0^5 \cos(x) e^x \, dx$

14 — Enuncie a primeira e segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

15 — Calcule

a) $\int_0^1 (x+3) \, dx$

b) $\int_0^4 \frac{1}{3} \, dx$

c) $\int_0^1 \left(5x^3 + 2x + 4\right) \, dx$

d) $\int_1^4 \left(2x + 5\sqrt{x}\right) \, dx$

e) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(2x) \, dx$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x) \, dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

h) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(x) \, dx$

i) $\int_{-1}^1 e^{-3x} \, dx$

j) $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$

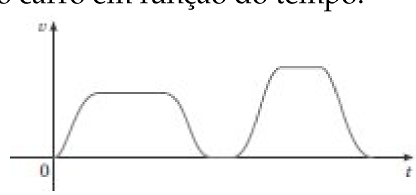
k) $\int_{-1}^1 x^3 e^{-x^4} \, dx$

l) $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \, dx$

m) $\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) \, dx$

n) $\int_0^1 4^x \, dx$

16 — O gráfico abaixo representa a velocidade de um carro em função do tempo. Esboce o gráfico da posição do carro em função do tempo.



Respostas dos Exercícios

2 a.) $\frac{x^2}{2}+c$ **b.)** $\frac{3x^2}{2}+c$ **c.)** $3x+c$ **d.)** $\frac{3x^2}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$ **e.)** $\frac{-1}{x}+c$ **f.)** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}+c$ **g.)** $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c$ **h.)** $\frac{7}{3}x^{\frac{9}{7}}+\operatorname{sen}(x)+c$ **i.)** $\frac{1}{4}e^{4x}+c$ **j.)** $\frac{1}{3}(7x^{\frac{9}{7}}+\operatorname{sen}(3x))+c$ **k.)** $(3e^(5x))/5+x^2/2+1/2Sin[2x]+c$ **l.)** $x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)-7\cos\left(\frac{x}{7}\right)+c$ **m.)** Substituição $x=\operatorname{sen}(u)$ **n.)** Substituição $x=tg(u)$, então $dx=\sec^2(u)du$. Assim $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{\sec^2(u)}{1+tg^2(u)}du=\int\frac{\sec^2(u)}{\sec^2(u)}du=\int 1du=u+c=\operatorname{arctg}(x)+c$. **o.)** Substituição $u=3^x$, então $du=\ln(3)3^x dx$. Assim $3^x dx=\frac{du}{\ln(3)}$. Portanto,

$$\int 3^x dx=\int\frac{du}{\ln(3)}=\frac{u}{\ln(3)}+c=\frac{3^x}{\ln(3)}+c$$

q.) $\int\operatorname{sen}^2(x)dx=\int\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\int\frac{\cos(2x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+c=\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen}(x)\cos(x)$. Acima fizemos a substituição $u=2x$, então $du=2dx$.

3 a.) $x(t)=2-t+t^2$ **b.)** $x(t)=\operatorname{arctg}(t)$ **c.)** $x(t)=\frac{1}{2}\left(2+2t+3t^2\right)$ **d.)** $x(t)=e^{-t}+t$

4 a.) 170 **b.)** 49 **c.)** 15

5 c.) Base de indução: $n=1$ $\sum_{k=1}^{1}(a_k-a_{k-1})=a_1-a_0$.

Portanto o fato é válido para a base de indução. Provemos a tese de indução.

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k-1})=a_{n-1}-a_0$. Tese: $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_{n-1}-a_0$.

Note que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k-1})+(a_n+a_{n-1}).$$

Usando a hipótese de indução, temos que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k-1})+(a_n+a_{n-1})=a_{n-1}-a_0+(a_n+a_{n-1})=a_n-a_0.$$

Como queríamos demonstrar.

6 a.) Como sugere o enunciado,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2).$$

Note que, se tomarmos $a_k=k^2$, podemos usar a soma telescópica (item c do exercício 5) para obtermos a seguinte igualdade,

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)=n^2-0^2=n^2.$$

7 A resposta não é única. Uma resposta: **a.)** Inferior

$$1+2+3+3+4+4+5+5+6+6=39$$

Superior

$$2+3+4+5+5+6+6+7+7+7=52$$

9 Particionando o intervalo de modo a obter 8 subintervalos de tamanhos iguais, i.e., $\Delta x=\frac{5}{8}$, temos que os pontos da partição são dados por $x_0=0$, $x_1=\frac{5}{8},\ldots,x_k=k.\frac{5}{8},\ldots,x_8=5$. Como utilizaremos o extremo direito para a aproximação, a altura do i-ésimo retângulo é dada por $f(x_i)$. Assim, a soma de Riemann em questão é dada por

$$\sum_{k=1}^{8}f(x_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{8}f(k.\frac{5}{8})\frac{5}{8}=$$

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\left(k.\frac{5}{8}\right)^2-3(k.\frac{5}{8})\right)\frac{5}{8}=\frac{5}{8}\left(\frac{5^2}{8^2}\sum_{k=1}^{8}k^2-\frac{15}{8}\sum_{k=1}^{8}k\right)=$$

$$\frac{5^2}{8^2}\left(\frac{5}{8}\sum_{k=1}^{8}k^2-3\sum_{k=1}^{8}k\right)=\frac{5^2}{8^2}\left(\frac{5}{8}204-3.36\right)=\frac{975}{128}$$

11 c.) Note que

$$g(x)=\begin{cases}-2x+4, & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 2\\ -\sqrt{4-(x-4)^2}, & \text{se } 2\leqslant x\leqslant 6\\ x-6, & \text{se } 6\leqslant x\leqslant 7\end{cases}$$

Ainda,

$$\int_0^6 g(x)dx=\int_0^2 g(x)dx+\int_2^6 g(x)dx=\int_0^2(-2x+4)dx+\int_2^6-\sqrt{4-(x-$$

$$\left[-x^2+4x\right]_0^2-2\pi=4-2\pi.$$

Nota, $\int_2^6\sqrt{4-(x-4)^2}dx=2\pi$ por se tratar da metade da área do círculo de raio 2.

Mas poderíamos fazer pela substituição $x-4=2\operatorname{sen}(y)$. Assim, $dx=\cos(y)dy$. Logo,

$$\int_2^6\sqrt{4-(x-4)^2}dx=\int_{\operatorname{arcsen}(-1)}^{\operatorname{arcsen}(1)}\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(y)}\cos(y)dy=$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)dy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\cos(2y)dy=2\left[y+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2y)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$$

12 a.)

Vamos começar subdividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = a \qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \qquad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = b$$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_k$. E logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[a + k\frac{b-a}{n}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[a + k\frac{b-a}{n}\right] \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} k\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \left[a + \frac{b-a}{2}\frac{n(n+1)}{n^2}\right] \\
&= (b-a) \left[a + \frac{b-a}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2}\right] \\
&= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)
\end{aligned}$$

c.) Vamos começar subdividindo o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{n}, \qquad x_2 = 2\frac{1}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = k\frac{1}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = 1$$

Agora escolheremos c_k como o extremo esquerdo do subintervalo, isto é, $c_k = x_{k-1}$. E logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{x^2}{2}\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(c_k)}{2}\Delta x \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\frac{1}{n}\right]^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + n\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

d.)

Vamos começar subdividindo o intervalo $[0,a]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{a}{n}, \qquad x_2 = \frac{2a}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = \frac{ka}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = a$$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_{k-1}$. E logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{ka}{n}\right]^3 \frac{a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^4}{n^4} \left(\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^4(n+1)^2}{4n^2} \\
&= \frac{a^4}{4}
\end{aligned}$$

h.)

Vamos começar subdividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são $x_k = a + k\Delta x$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_k$. E logo

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{a+k\Delta x}\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^a\Delta x \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{\Delta x^k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^a\Delta x\frac{e^{\Delta x}\left(e^{\Delta x^n}-1\right)}{e^{\Delta x}-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^a\Delta x\frac{e^{b-a}-1}{e^{\Delta x}-1}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^b-e^a}{(e^{\Delta x}-1)/\Delta x}$$
$$= e^b - e^a$$

13 a.)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k.\frac{\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$$

b.)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{k.\frac{1}{n}}\frac{1}{n}$$

c.)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k.\frac{5}{n}\right)e^{k.\frac{5}{n}}\frac{5}{n}$$

15 g.) Fazendo a substituição $t = \text{tg}(x)$ temos que $dt = \sec^2(x)dx$. Assim,

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^2(x)}.\sec^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx = \frac{\pi}{4}$$

i.) Substituição $y = -3x$. Então $x = -\frac{y}{3}$ e, portanto, $dx = -\frac{dy}{3}$. Logo,

$$\int_{-1}^{1} e^{-3x}dx = -\int_{-3}^{3} e^y.\left(-\frac{1}{3}\right)dy = \frac{1}{3}(e^3 - e^{-3})$$

j.) Substituição $y = x^2$, então $dy = 2xdx$. Logo,

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx = \int_0^1 e^{x^2}2xdx = \int_0^1 e^y dy = [e^y]_0^1 = e - 1$$

k.) Faça a substituição $y = x^4$.

n.) Substituição $y = 4^x$. Assim, $dy = 4^x\ln(4) = y\ln(4)$. Portanto, $dx = \frac{dy}{y\ln(4)}$. Logo,

$$\int_0^1 4^x dx = \int_1^4 y\frac{dy}{y\ln(4)} = \frac{1}{\ln(4)}\int_1^4 dy = \frac{3}{\ln(4)}$$