UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 2 - Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

1 — É possível garantir a unicidade de solução para a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ passando pelo ponto $(1, 4)$? E passando pelo ponto $(2, -3)$? Justifique.

2 — Nos itens seguintes, determine a região no plano ty onde as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções são satisfeitas.

(a) $y' = \dfrac{t - y}{2t + 5y}$

(b) $y' = (1 - t^2 - y^2)^{1/2}$

(c) $y' = \dfrac{\ln|ty|}{1 - t^2 + y^2}$

(d) $y' = (t^2 + y^2)^{3/2}$

(e) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1 + t^2}{3y - y^2}$

3 — O problema de valor inicial

$$y' - \frac{2}{x}y = 0, \quad y(0) = 0$$

tem duas soluções $y = 0$ e $y = x^2$. Por que este resultado não contradiz o teorema de Existência e Unicidade das soluções?

4 — Uma colônia de bactérias cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presente. Se o número duplica em 5 horas, quando ela triplicará? Quantas horas serão necessárias para que o número de bactérias aumente de 100 vezes a quantidade original?

5 — A meia-vida do Césio-137 é de 30 anos. Suponha que tenhamos uma amostra de $200mg$.

(a) Ache a massa que restará após t anos.

(b) Quanta massa a amostra terá após 90 anos?

(c) Depois de quanto tempo teremos apenas $1mg$ da amostra?

6 — A taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. Seja T a temperatura de corpo e T_m a temperatura do meio ambiente. Então temos

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$$

Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de $0°C$. Se após 20 minutos a temperatura do corpo é $40°C$ e após 40 minutos é $20°C$, determine a temperatura inicial do corpo.

7 — Um tanque contém $400l$ de uma mistura de água e cloro com uma concentração de $0,05g$ de cloro por litro. Para reduzir a concentração de cloro, água doce é bombeada para o tanque a uma taxa $4l/min$. A mistura é agitada e é retirada a uma taxa de $10l/min$. Calcule a quantidade de cloro no tanque em função do tempo.

8 — Psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as **curvas de aprendizado**. Uma curva de aprendizado é o gráfico de uma função $P(t)$, o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. Um modelo para o aprendizado é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde M é o nível máximo de desempenho e k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma expressão para $P(t)$. Qual é o limite dessa expressão quando $t \to \infty$?

9 — Um circuito RC possui uma fonte de $5V$, resistência de 10Ω, capacitância de $10^{-2}F$ e inicialmente uma carga de $5C$ no capacitor. Determine
(a) a corrente transitória $i(t)$;
(b) a corrente estacionária $i \to \infty$.

10 — Uma outra equação que tem sido usada para modelar o crescimento populacional é a equação de Gompertz

$$\frac{dy}{dt} = ry \ln(K/y)$$

onde r e K são constantes positivas.
(a) Esboce o gráfico de $f(y) = ry \ln(K/y)$ em função de y. A partir daí encontre os pontos críticos da equação diferencial autônoma e determine se cada um deles é assintoticamente estável ou instável.
(b) Resolva a equação de Gompertz sujeita a condição inicial $y(0) = y_0$.
(c) O modelo de Gompertz foi aplicado à uma certa população de peixes. Seja y a massa total desta população num instante t medido em quilogramas. Os parâmetros da equação foram estimados, tendo como valores $r = 0,71$/ano e $K = 80,5 \times 10^6$kg. Se a massa inicial é $y_0 = 0,25K$, encontre a massa total desta população após 2 anos.
(d) Para os mesmos dados do item anterior determine o instante τ no qual $y(\tau) = 0,75K$.