UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 3 - Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

1 — Encontre o Wronskiano e determine se cada conjunto de funções são linearmente independente ou linearmente dependentes em $(-\infty, \infty)$.

(a) $\{e^{-2t},\ te^{-2t}\}$ (b) $\{\operatorname{sen} 2t,\ \operatorname{sen} t \cos t\}$ (c) $\{e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}\}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

(d) $\{t,\ t^2,\ 4t - 3t^2\}$ (e) $\{t^2 + 5t,\ t^2 - 5t\}$ (f) $\{e^{3x},\ e^{3x-1}\}$.

2 — Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2 y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1 t^2 + c_2 t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.

3 — Se o Wronskiano de f e g é $t^2 e^t$ e $f(t) = t$, encontre $g(t)$.

4 — Verifique que as soluções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

a) $y'' + 4y = 0$; $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$

b) $y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$

5 — Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $4y'' + y' = 0$ (b) $y'' + 16y = 0$

(c) $y'' + 2y' - 3y = 0$ (d) $2y'' - 3y' + y = 0$

(e) $y'' + 5y = 4y'$ (f) $y'' + 2y' + y = 0$

(g) $y'' - y' - 6y = 0$ (h) $y'' - 8y = 0$

(i) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (j) $\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 25y = 0$

(k) $9\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + y = 0$ (l) $y'' + 6y' + 13y = 0$

6 — Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(a) $y'' + 4y = 0$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(b) $y'' - 6y' + 9y = 0$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(c) $y'' + 4y' + 3y = 0$ $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

(d) $4y'' + 12y' + 9y = 0$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -4$

(e) $y'' - 2y' + 5y = 0$ $y(\pi/2) = 0,\ y'(\pi/2) = 2$

(f) $y'' + 4y' + 5y = 0$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(g) $y'' + 8y' - 9y = 0$ $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

7 — Mostre que as soluções não triviais $y(t)$ das seguintes equações
(a) $6y'' - 7y' + 2y = 0$
(b) $y'' - 8y' + 16y = 0$
são tais que

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = \pm\infty.$$

O que se pode dizer do comportamento das soluções não triviais de $y'' - 2y' + 5y = 0$ quando $t \to \pm\infty$?

8 — Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é
(a) $y = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{5t}$
(b) $y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$
(c) $y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t$

9 — Usando o método da redução de ordem, encontre a segunda solução da EDO dada.

(a) $y'' + 5y' = 0$	$y_1 = 1$
(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$	$y_1 = e^{2t}$
(c) $t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0, t > 0$	$y_1(t) = t^2$
(d) $t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0, t > 0$	$y_1(t) = t$

10 — Neste exercício iremos obter a fórmula de Euler seguindo os seguintes passos:
(a) Mostre que $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \operatorname{sen} t$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$.
(b) Em seguida, prove que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$.
(c) Justifique o fato de podermos escrever $e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ para c_1 e c_2 apropriados.
(d) Faça $t = 0$ em $e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ para mostrar que $c_1 = 1$.
(e) Derive $e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ e faça $t = 0$, conclua que $c_2 = i$.

11 — Seja $L \neq 0$ um número real. O problema envolvendo a equação diferencial $y'' + \mu y = 0$ e o valor de y em dois pontos distintos, ou seja,

$$\begin{cases} y'' + \mu y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \end{cases}$$

é chamado *problema de valores de contorno.*
(a) Mostre que o problema acima tem apenas a solução trivial para o caso onde $\mu = 0$ e $\mu < 0$.
(b) Para o caso $\mu > 0$, determine os valores de μ para os quais este problema tenha uma solução não trivial e determine a solução correspondente.