# UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

## Lista 1 -Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

**1** — Nos problemas seguintes, determine a ordem da equação diferencial e decida se a equação é linear ou não-linear.

(a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+2y=\operatorname{sen} t,$ (b) $(1+y^2)y''+ty'+y=e^t$

(c) $\dfrac{d^4y}{dt^4}+\dfrac{d^3y}{dt^3}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+y=1,$ (d) $\dfrac{dy}{dt}+ty^2=0$

(e) $y''+\operatorname{sen}(t+y)=\operatorname{sen} t$ (f) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+t\dfrac{dy}{dt}+(\cos^2 t)y=t^3$

**2** — Verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial associada.

(a) $y''-y=0;\quad y_1(t)=e^t,\quad y_2(t)=\cosh t$
(b) $y''+2y'-3y=0;\quad y_1(t)=e^{-3t},\quad y_2(t)=e^t$
(c) $ty'-y=t^2;\quad y(t)=3t+t^2$
(d) $y''''+4y'''+3y=t;\quad y_1(t)=t/3,\quad y_2(t)=e^{-t}+t/3$
(e) $2t^2y''+3ty'-y=0,\quad t>0;\quad y_1(t)=t^{1/2},\quad y_2(t)=t^{-1}$
(f) $t^2y''+5ty'+4y=0,\quad t>0;\quad y_1(t)=t^{-2}\quad y_2(t)=t^{-2}\ln t$
(g) $y''+y=\sec t,\quad 0<t<\pi/2;\quad y(t)=(\cos t)\ln\cos t+t\operatorname{sen} t$
(h) $y'-2ty=1,\quad y(t)=e^{t^2}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}ds+e^{t^2}$

**3** — Determine os valores de $r$ para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y=e^{rt}$.

(a) $y'+2y=0$ (b) $y''-y=0$

(c) $y''+y'-6y=0$ (d) $y'''-3y''+2y'=0$

**4** — Classifique as edo's abaixo em lineares, homogêneas, separáveis e/ou autônomas.

(a) $y'=xy$ (b) $y'=\dfrac{xy^2}{x^2y+y^3}$

(c) $y'=y^3\sin(y)$ (d) $y'=\dfrac{y-x}{2x}$

(e) $y'=\dfrac{x^2}{y^2}$ (f) $t^5y'+\operatorname{arctg}(t)y=\dfrac{1}{1+t^6}$

(g) $\sin(t)y''+\ln(t)y'=t^2+1$ (h) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{3xy}$

(i) $y'=\dfrac{x^4+3x^2y^2+y^4}{x^3y}$ (j) $y\,dx+x\,dy=0$

(k) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

**5** — Resolva:

(a) $x dx + y dy = 0$ (b) $\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0$

(c) $\sin(x) dx + y dy = 0; \quad y(0) = -2$ (d) $\frac{1}{x} dy - dx = 0$

(e) $(x^2 + 1) dx + (y^2 + y) dy = 0$ (f) $x e^{x^2} dx + (y^5 - 1) dy = 0; \quad y(0) = 0$

(g) $y' = \dfrac{y - x}{x}$ (h) $y' = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2}$

(i) $x^3 y dy - (x^4 + 3x^2 y^2 + y^4) dx = 0$ (j) $2xy dy + (x^2 + y^2) dx = 0$

**6** — Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

(a) $y' + 3y = t + e^{-2t}$ (b) $y' - 2y = t^2 e^{2t}$ (c) $y' + (1/t)y = 3\cos 2t,\ t > 0$

(d) $y' + y = te^{-t} + 1$ (e) $y' - 2y = 3e^t$ (f) $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad t > 0$

(g) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$ (h) $2y' + y = 3t$ (i) $ty' - y = t^2 e^{-t}, \quad t > 0$

(j) $y' + y = 5 \operatorname{sen} 2t$ (k) $2y' + y = 3t^2$

**7** — Encontre a solução dos problemas de valor inicial dados:

(a) $y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$

(b) $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2},\ t > 0$

(c) $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$

(d) $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2; \quad y(\pi) = 0,\ t > 0$

(e) $y' - 2y = e^{2t}; \quad y(0) = 2$

(f) $ty' + 2y = \operatorname{sen} t; \quad y(\pi/2) = 1, \quad t > 0$

(g) $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t} \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$

**8** — Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo e use-as para determinar o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

(a) $ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0$

(b) $2y' + y = 3t.$

**9** — Encontre o valor de $y_0$ para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3\sin t, \quad y(0) = y_0$$

permaneça finita quando $t \to \infty$.

**10** — Mostre que, se $a$ e $\lambda$ são constantes positivas e se $b$ é qualquer número real, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade que $y \to 0$ quando $t \to \infty$.

**11** — **Equação de Bernoulli:** Algumas vezes é possível resolver uma equação não-linear fazendo-se uma mudança na variável dependente de forma a transformar a equação em uma equação linear. Um exemplo importante da aplicação dessa técnica se observa em equações da forma

$$y' + p(t)y = g(t)y^n \qquad (*).$$

Este tipo de equação é chamada equação de Bernoulli. Os problemas que seguem dão as diretrizes para resolver uma equação de Bernoulli geral.

(a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$ e quando $n = 1$. Observe que em ambos os casos a equação se torna linear.
(b) Suponha agora $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Mostre que a mudança de variável $u = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear.
(c) Encontre a solução geral $u(x)$ da equação linear resultante do item (b).
(d) Faça a mudança de variável $y = u^{\frac{1}{n-1}}$ e explicite a solução da equação de Bernoulli.
(e) Utilize o método de substituição descrito acima para encontrar a solução geral de $t^2y' + 2ty - y^3 = 0$, para $t > 0$.
(f) Resolva a equação $y' = ry - ky^2$ onde $r, k > 0$.

**12 — Equação de Ricatti:** A equação

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = f(t) \qquad (**)$$

onde $p(t), q(t)$ e $f(t)$ são contínuas em algum intervalo I da reta e $q(t) \neq 0$ em I é conhecida como equação de Ricatti. Seja $y_1(t)$ uma solução particular de $(**)$. Considere a mudança de variável $y = y_1 + 1/z$.
(a) Mostre que essa mudança de variável transforma $(**)$ numa equação de primeira ordem linear em $z$.
(b) Deduza de (a) que a solução geral de uma equação de Ricatti pode ser encontrada, desde que se conheça uma solução particular. Explicite tal solução.
(c) Use os itens anteriores para determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações de Ricatti.
(c.1) $y' - t^3y + t^2y^2 = 1, \quad y_1(t) = t$
(c.2) $y' - ty^2 + (2t-1)y = t - 1, \quad y_1(t) = 1$
(c.3) $y' + y^2 - (1 + 2e^t)y + e^{2t} = 0, \quad y_1(t) = e^t$