UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 4 - Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

1 — Resolva as seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

b) $y''' - y = 0$

c) $y^{(4)} + y^{(3)} + y'' = 0$

d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

2 — Usando o método dos coeficientes indeterminados, encontre a solução geral das equações diferenciais dadas.

(a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

(b) $y'' + 2y' + 5y = 3\,\text{sen}\,2t$

(c) $y'' - y' = -3$

(d) $y'' + 2y' = 3 + 4\,\text{sen}\,2t$

(e) $y'' + y = 3\,\text{sen}\,2t + t\cos 2t$

(f) $y'' + y = 2t\,\text{sen}\,t$

(g) $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$

(h) $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$

(i) $y'' - 10y' + 25y = 30t + 3$

3 — Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(a) $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

(b) $y'' - y = te^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(c) $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

(d) $y'' + 4y = 3sen2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

(e) $y'' + y' - 2y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

4 — Resolva a equação diferencial usando o método da variação dos parâmetros.

a) $y'' + 4y = t$

b) $y'' - 3y' + 2y = \text{sen}\,t$

c) $y'' - 2y' + y = e^{2t}$

d) $y'' - y' = e^t$

e) $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$

5 — Uma mola com uma massa de 4kg tem um comprimento natural de 1m e é mantida esticada até um comprimento de $1,3$m por uma força de $24,3$ N. Se a mola for comprimida até um comprimento de $0,8m$ e for solta com velocidade zero, determine a posição da massa em qualquer instante t.

6 — Na ausência de amortecimento um sistema massa-mola satisfaz o problema de valor inicial,

$$mu'' + ku = 0, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b$$

onde m é a massa e k a constante elástica da mola.

a) Mostre que a energia cinética dada inicialmente à massa é $mb^2/2$ e que a energia potencial armazenada inicialmente na mola é $ka^2/2$, de modo que a energia total inicial do sistema é $(mb^2 + ka^2)/2$.

b) Resolva o problema de valor inicial dado.

c) Usando a solução do item (b), determine a energia total no sistema em qualquer instante t.

7 — Uma massa de $2kg$ provoca uma distensão de $0,32m$ em uma mola. A massa é solta de uma posição $2/3$ acima da posição de equilíbrio com uma velocidade de $5m/s$ para baixo.

a) Encontre a equação de movimento.

b) Determine a amplitude e o período do movimento.

8 — Uma massa de $1kg$ é atada a uma mola cuja a constante elástica é $16\,N/m$ e o sistema inteiro é submerso em um líquido que oferece uma força de amortecimento numericamente igual a 10 vezes a velocidade instantânea. Determine as equações do movimento quando

a) A massa parte do repouso a um ponto $1m$ abaixo da posição de equilíbrio.

b) A massa parte de um ponto $1m$ abaixo da posição de equilíbrio com velocidade $12m/s$.

9 — A uma mola de constante elástica $k = 1N/m$ é atada uma massa de $1kg$. A massa sofre ação de uma força externa de $3\cos \omega t$ N. Se a massa é colocada em movimento de sua posição de equilíbrio e com velocidade inicial zero. Determine

a) Determine o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa.

b) Encontre a solução do problema de valor inicial para $\omega \neq 1$.

c) Qual é o comportamento da solução obtida quando $t \to \infty$.

d) O que acontece quando ω assume valores cada vez mais próximos de 1.

e) Encontre a solução do problema de valor inicial para $\omega = 1$ e esboce o gráfico da solução.

10 — Dado um circuito RLC com $L = 5/3H$, $R = 10\Omega$, $C = 1/30F$, $V(t) = 300V$, com carga inicial $q(0) = 0C$ e corrente inicial $i(0) = 2A$. Encontre a carga no capacitor $q(t)$ e a corrente $i(t)$ para qualquer instante t.

11 — A mola de um sistema massa mola tem constante de $3N/m$. É presa uma massa de $2kg$ na mola e o movimento se dá em um fluido viscoso que oferece resistência numericamente igual ao módulo da velocidade instantânea. Se o sistema sofre a ação de uma força externa de $3\cos 3t - 2\,\text{sen}\, 3t$N.Determine:

a) A equação do movimento.

b) A solução do estado estacionário.