Lista 1

Matrizes e operações com matrizes

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule, se possível, $-2A,\ B - 2A,\ AC,\ CD$.

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz B tal que $2A - B = O$.

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz X tal que $A + X = I_2$.

4. Sejam $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule $x - y$, se $C = A - B$.

5. Multiplicar as matrizes:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Sejam $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Encontre: a) $2A + 3B^T$; b) $3A^T + 4B$.

7. Sejam $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calcule A^TB, B^TA, AB^T e BA^T.

8. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Encontre k (se possível) tal que $AB = BA$.

9. Determine os valores de $a,\ b,\ x$ e y de modo que: $\begin{pmatrix} x + y & 2a + b \\ 2x - y & a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

10. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \quad \text{admite a transposta} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x - 2 & y & 1 \\ 3y & 6 - y & z \end{pmatrix}.$$

    Nestas condições, calcule x, y e z.

11. Determine os valores de a e b para que a matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 8 & x \\ a^3 & 1 & b^2 \\ x & 121 & 0 \end{pmatrix}$ seja simétrica.

12. Sejam $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre as matrizes M e N tais que

$$\begin{cases} 2M + N &= A - B, \\ M + 3N &= 2A + B. \end{cases}$$

13. Sabendo que $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes X e Y tais que

$$\begin{cases} X + Y &= A + 3B, \\ X - Y &= 3A - 2B. \end{cases}$$

14. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $A^3 = pA^2 + qA$.

Matrizes escalonadas e inversíveis

Def. 1. Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, seja $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz reduzida à forma escada equivalente de A. O *posto* de A, denotado por p, é numero de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n - p$.

1. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2 e 2×3 que estão na forma escada reduzida.

2. Determine a forma escalonada reduzida (escada reduzida) e calcule o posto e nulidade das matrizes:

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

   b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$;

   c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Determine, caso exista, matrizes inversas:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

   b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

   c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$. Encontre a matriz X tal que $AX = B$.

5. Resolva a equação: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

6. Mostre que a matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ é inversível para todos $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Mostre que A e A^T tem o mesmo posto.
   Observação: Isso é verdadeiro para toda matriz A.

8. Se A é uma matriz $m \times n$ e o posto de A é m, mostre que $m \leq n$.

9. Em cada caso encontre a matriz A tal que:

   a) $[2A^T - 3I_2]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

   b) $\left[A^T - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Se A é inversível, e A comuta com C, mostre que A^{-1} também comuta com C. Se A e C são inversíveis e comutam, mostre que A^{-1} e C^{-1} também comutam.

11. Que condições $\lambda \in \mathbb{R}$ deve satisfazer para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ seja inversível?

Respostas

Matrizes e operações com matrizes

1. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -7 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; não existe; $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

3. $X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. $x - y = 1$.

5. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -11 \\ -15 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 13 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

6. a) $\begin{pmatrix} 13 & 12 & 14 \\ -5 & -7 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 17 & -8 \\ 19 & 10 \end{pmatrix}$.

7. $A^TB = B^TA = -2a+3b+4c$; $AB^T = \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \\ 4a & 4b & 4c \end{pmatrix}$; $BA^T = \begin{pmatrix} -2a & 3a & 4a \\ -2b & 3b & 4b \\ -2c & 3c & 4c \end{pmatrix}$.

8. $k = 5$.

9. $x = 1, y = 2, a = 2, b = -5$.

10. $x = 4, y = 1, z = 5$.

11. $x = 2, b = \pm 11$.

12. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & -3/5 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 3 & 6/5 \\ 0 & 6/5 \end{pmatrix}$.

13. $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

14. $p = 3,\ q = -2$.

Matrizes escalonadas e inversíveis

1. 2×2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   2×3: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/11 & 13/11 \\ 0 & 1 & -5/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

4. $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.

7. Posto é 3.

8. Dica: Mostre que posto do matriz $m \times n$ é menor ou igual ao $\min\{n, m\}$.

9. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 7/2 & 11/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

10. Dica: multiplica a igualdade $AC = CA$ por A^{-1} ao lado esquerdo e ao lado direito.

11. $\lambda \neq 1$.