

Lista 7

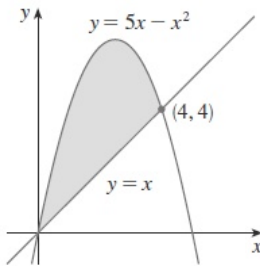
Funções de Uma Variável

Aplicações de Integração

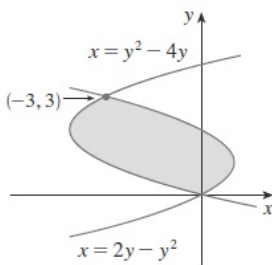
$$i) \quad y = \sec^2(x) \quad y = \cos(x), \quad x = -\frac{\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

Áreas

1 — Determine a área da região em cinza:



a)



b)

2 — Esboce a região delimitada pelas curvas e decida se a integração deve ser feita com relação a variável x ou y . Desenhe um retângulo típico com sua altura e largura. Finalmente ache a área da região.

- $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$
- $y = \sin(x), \quad y = x^2$
- $y = x^2, y = x^4$
- $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad x + y = 1$
- $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$
- $x = 2y^2 \quad x + y = 1$
- $y = \cos(x) y = 1 - 2x/\pi$
- $y = \sin(\pi x) \quad y = x^2 - x \quad x = 2$

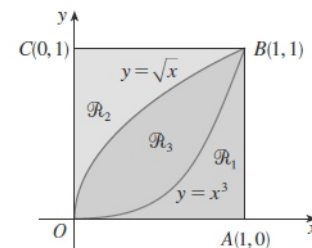
3 — Ache a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$ a reta tangente a esta parábola no ponto $(1, 1)$ e o eixo x .

4 — Ache o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

5 — Determine c para que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

Volumes

6 — Dada a figura abaixo ache o volume do sólido gerado rotacionando a região indicada em torno da reta especificada:

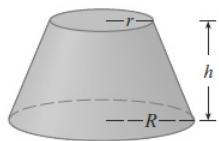


- \mathcal{R}_1 ao longo de OA
- \mathcal{R}_1 ao longo de OC
- \mathcal{R}_1 ao longo de AB
- \mathcal{R}_1 ao longo de BC
- \mathcal{R}_2 ao longo de OA
- \mathcal{R}_2 ao longo de OC

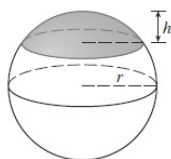
- g) \mathcal{R}_2 ao longo de AB
- h) \mathcal{R}_3 ao longo de OA
- i) \mathcal{R}_3 ao longo de OC

7 — Determine o volume dos sólidos S , usando integração.

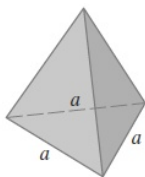
- a) Um cone circular reto de altura h e base r .
- b) Um cone truncado de base circular



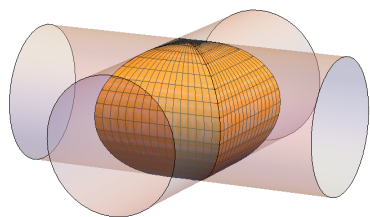
- c) Uma calota esférica



- d) Uma pirâmide de altura h e base um triângulo equilátero de lado a .



- e) A região delimitada por dois cilindros circulares retos que se interceptam perpendicularmente.



- f) Ache o volume comum a duas esferas de raio r se o centro de cada esfera está na superfície da outra.

8 — Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume da região gerada pela rotação em torno do eixo y da região delimitada pelas curvas abaixo:

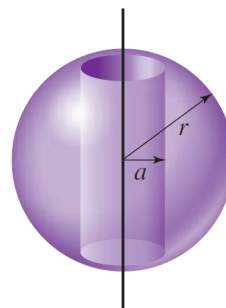
- a) $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$
- b) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$
- c) $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

9 — Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume da região gerada pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pelas curvas abaixo:

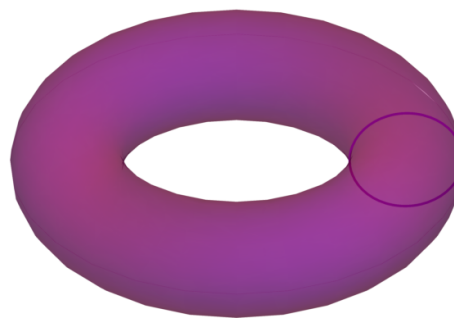
- a) $x = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$
- b) $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 1$

10 — Encontre o volume do sólido que permanece depois que um furo circular de um raio a é perfurado através do centro de uma esfera sólida de raio $r > a$ por:

- a) Seções transversais.
- b) Cascas cilíndricas.



11 — Deduza a fórmula do volume do toro obtido ao girarmos o círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ em torno do eixo x .



Comprimento de Arco

12 — Encontre o comprimento de arco do gráfico da equação dada entre os pontos P e Q ou no intervalo especificado.

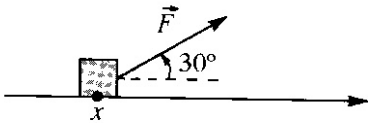
- a) $y = -2x + 3$ $P : (-1, 5), Q : (2, -1)$;
- b) $\cosh(x)$ $[0, \ln(2)]$
- c) $\ln \cos x$ $[0, \pi/4]$
- d) $\sqrt{4 - x^2}$ $[0, 2]$

Trabalho

13 — Calcule o trabalho realizado pela força $F(x)$ quando a partícula se desloca de a até b :

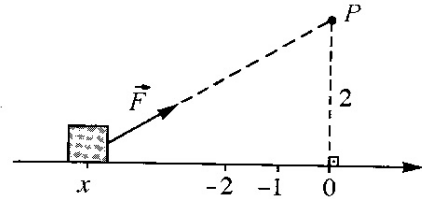
- a) $F(x) = 3$ de $a = 0$ até $b = 2$
- b) $F(x) = x^2 + 3x$ de $a = -1$ até $b = 2$
- c) $F(x) = \frac{-1}{x^2}$ de $a = 1$ até $b = 2$
- d) $F(x) = \text{sen}(x)$ de $a = 0$ até $b = \pi$
- e) $F(x) = x^5$ de $a = 1$ até $b = 3$

14 — Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força \vec{F} de intensidade $3x$ e que forma com o eixo x um ângulo de 30°



Calcule o trabalho realizado por \vec{F} ao deslocar a partícula de $x = 0$ até $x = 3$.

15 — Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força \vec{F} sempre dirigida para o ponto P e cuja intensidade é igual ao inverso do quadrado da distância da partícula a P

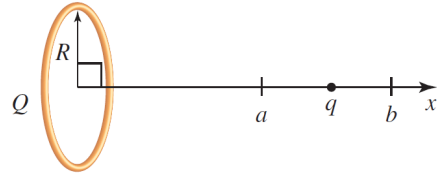


Calcule o trabalho realizado por \vec{F} ao deslocar a partícula de $x = -2$ até $x = -1$.

16 — **Trabalho feito por uma Carga Repulsiva.** Uma carga elétrica Q uniformemente distribuída ao longo de um condutor em forma de anel de raio a repele uma carga q como ao longo da linha perpendicular à plano do anel, através do seu centro. A magnitude do força que atua sobre a carga q quando está no ponto x é dado por

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQx}{x^2 + R^2}$$

e a força atua na direção do eixo x positivo. Encontre o trabalho realizado pela força de repulsão em mover o carga q de $x = a$ a até $x = b$.

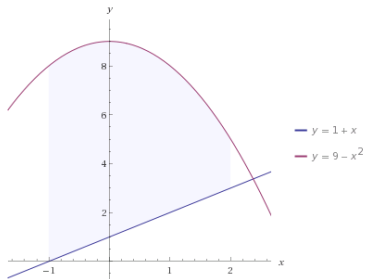


17 — Uma partícula se move ao longo do eixo x com uma função velocidade $v(t) = t^2 e^{-t}$ Qual a distância percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 5$?

Respostas dos Exercícios

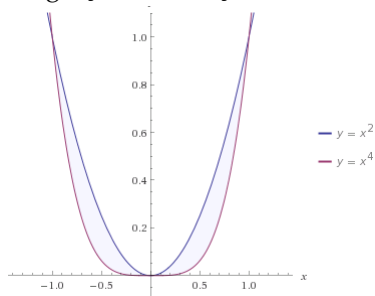
$$1 \int_0^4 (5x - x^2) - x \, dx = 32/3$$

$$2 \text{ a.) } \int_{-1}^2 (8 - x - x^2) \, dx = 39/2$$

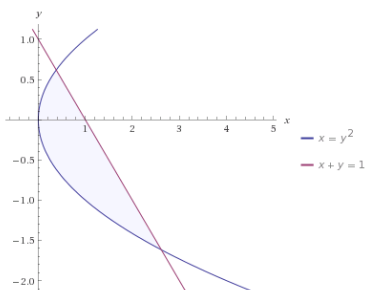


c.)

Integração em relação a x



$$\int_{-1}^1 x^2 - x^4 \, dy = 4/15$$



f.)

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} (1 - y - y^2) \, dy$$

$$4 \text{ Queremos determinar } b \text{ tal que } \int_{-b}^b \sqrt{y} \, dy = \int_{-4}^{-b} \sqrt{y} \, dy + \int_b^4 \sqrt{y} \, dy$$

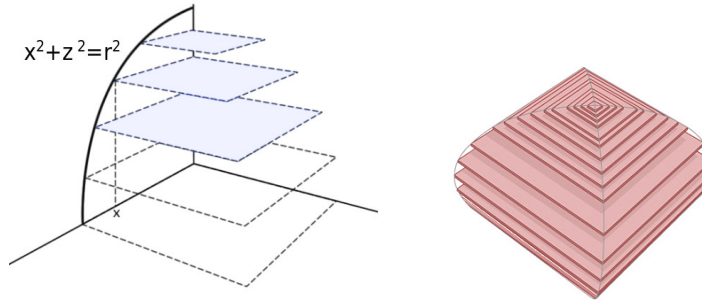
$$\text{Logo } b = 4^{2/3}.$$

$$6 \text{ a.) } \int_0^1 \pi(x^3)^2 \, dx = \pi/7 \text{ c.) } \int_0^1 \pi(1 - \sqrt[3]{y})^2 \, dy = \pi/10 \text{ e.) } \int_0^1 \pi(1^2 - (\sqrt{x})^2) \, dx = \pi/2 \text{ g.) } \int_0^1 \pi(1^2 - (1 - y^2)^2) \, dy = 7\pi/15$$

$$7 \text{ a.) O cone pode ser obtido rotacionando a reta } y = \frac{r}{h}x \text{ em torno do eixo } x. \text{ Logo } V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{c.) } V = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - y^2) \, dy = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

e.)



Uma seção vertical do sólido de é um quadrado de lado a . Uma vez que o sólido é obtido a partir da intersecção de dois cilindros de raio r , a largura do quadrado x e a altura z são relacionadas por

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Desta forma área do quadrado é $A = x^2$ que pode ser expressa em termos de z como z :

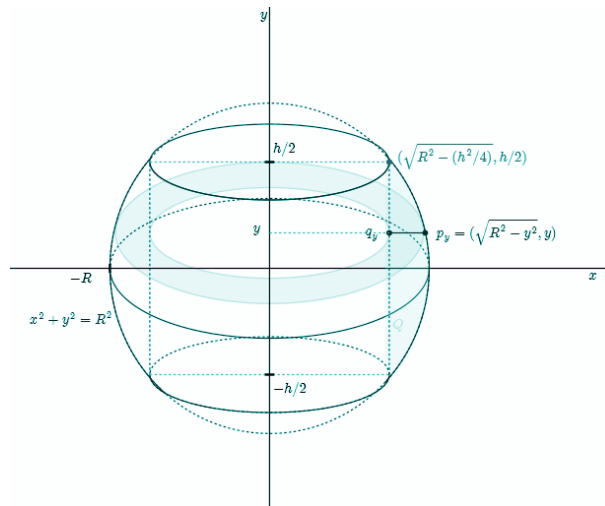
$$A(z) = x^2 = r^2 - z^2$$

O método de integração por fatias cilíndricas fornece então que o é dada por

$$V = 8 \int_0^r A(z) dz = 8 \int_0^r (r^2 - z^2) dz = 8 \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{16}{3} r^3$$

Destacamos que é necessário multiplicar por 8 pois a integral acima representa apenas 1/8 do sólido

10 a.)



$$V = \int_{-h/2}^{h/2} \pi \left[\underbrace{\left(\sqrt{R^2 - y^2} \right)^2}_{\text{raio de fora}} - \underbrace{\left(\sqrt{R^2 - (h^2/4)} \right)^2}_{\text{raio de dentro}} \right] dy = \int_{-h/2}^{h/2} \pi \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy.$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \pi \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy \tag{1}$$

$$= 2 \int_0^{h/2} \pi \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy \tag{2}$$

$$= 2\pi \left[\frac{h^2}{4} y - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_0^{h/2} \tag{3}$$

$$= 2\pi \left[\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right] \tag{4}$$

$$= \frac{\pi h^3}{6}. \tag{5}$$

11 A região é delimitada superiormente por $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e inferiormente por $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ com $x \in [-r, r]$. Assim, definindo $K = \sqrt{r^2 - x^2}$, o volume do toro é dado pela integral

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \pi[(R + K)^2 - (R - K)^2] dx &= \int_{-r}^r 4\pi RK dx \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Como $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ é metade da área do círculo de raio r , esta integral vale $\frac{\pi r^2}{2}$. Assim o volume do toro é $4\pi R \frac{\pi r^2}{2} = (2\pi R)(\pi r^2)$.

12 $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\cosh^2 x} dx$
 Dica: $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$