

## Lista 6

### Funções de Uma Variável

#### Integral II

1 — Use o Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada das seguintes funções:

a)  $\int_0^x \sqrt{1+2t} dt$

b)  $\int_1^x \ln(t) dt$

c)  $\int_x^2 \cos(t^2) dt$

d)  $\int_1^{\cos(x)} (t + \cos(t)) dt$

e)  $\int_1^{e^x} (t + \cos(t)) dt$

f)  $\int_{e^{x^2}}^0 \cos^2(t) dt$

g)  $\int_{-e^{x^2}}^{e^x} \cos^2(t) dt$

h)  $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \cos(t) dt$

f)  $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$

g)  $\int_1^4 x^{6/7} dx$

h)  $\int_{-5}^5 \frac{2}{x^3} dx$

i)  $\int_0^2 x(2+x^5) dx$

j)  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

k)  $\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) dx$

l)  $\int_{\pi}^{2\pi} \csc^2(\theta) d\theta$

m)  $\int_0^1 e^{v+1} dv$

n)  $\int_0^1 5^t dt$

o)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$

2 — Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as seguintes integrais ou explique porque elas não existem:

a)  $\int_0^1 x^7 + 3x dx$

b)  $\int_{-1}^4 x^6 dx$

c)  $\int_{-2}^5 \pi dx$

d)  $\int_{-1}^4 x^2 + 3x dx$

e)  $\int_0^1 x^{3/2} dx$

3 — Calcule as integrais fazendo as seguintes substituições:

a)  $\int \cos(3x) dx \quad u = 3x$

b)  $\int x(4+x^2)^{10} dx \quad u = 4+x^2$

c)  $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx \quad u = x^3+1$

d)  $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad u = \sqrt{x}$

e)  $\int e^{\text{sen} \theta} \cos(\theta) d\theta \quad u = \text{sen}(\theta)$

4 — Calcule as seguintes integrais indefinidas:

- a)  $\int 2x(x^2 + 3)^4 dx$
- b)  $\int (3x - 2)^{20} dx$
- c)  $\int (2 - x)^{100} dx$
- d)  $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$
- e)  $\int \frac{1}{5 - 3x} dx$
- f)  $\int \frac{2}{(3t + 1)^{2.4}} dt$
- g)  $\int y^3 \sqrt{2y^4 - 1} dy$
- h)  $\int \sqrt{4 - 2x} dx$
- i)  $\int \text{sen}(\pi t) dt$
- j)  $\int \sec^2(2x) \text{tg}(2x) dx$
- k)  $\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$
- l)  $\int \frac{\text{arctg}(x)}{1 + x^2} dx$
- m)  $\int \frac{z^3}{\sqrt[4]{1 + z^4}} dx$
- n)  $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$
- o)  $\int \sec^3(x) \text{tg}(x) dx$
- p)  $\int x^a (\sqrt{b + cx^{a+1}}) dx \quad c \neq 0, a \neq -1$
- q)  $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$
- r)  $\int x e^{-x^2} dx$
- s)  $\int \frac{x^2}{1 + x^6} dx$

5 — Calcule as integrais usando integração por partes e as seguintes escolhas de  $u$  e  $dv$ :

- a)  $\int x \ln(x) dx, \quad u = \ln(x), dv = x dx$
- b)  $\int \theta \sec^2(\theta) d\theta, \quad u = \theta, dv = \sec^2(\theta) d\theta$

6 — Calcule as seguintes integrais:

- a)  $\int x \cos(5x) dx$
- b)  $\int r e^{r/3} dr$
- c)  $\int x^2 \cos(mx) dx$
- d)  $\int \ln(2x + 1) dx$
- e)  $\int t^3 e^t dt$
- f)  $\int (\ln(x))^2 dx$
- g)  $\int z \text{senh}(z) dz$
- h)  $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} dx$
- i)  $\int_1^4 \sqrt{t} \ln(t) dt$
- j)  $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx$
- k)  $\int_0^1 x 2^x dx$
- l)  $\int \cos(\ln(x)) dx$

7 — Primeiro faça uma substituição e depois use integração por partes para calcular as integrais:

- a)  $\int \text{sen}(\sqrt{x}) dx$
- b)  $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$
- c)  $\int x^5 e^{x^2} dx$

8 — Calcule

- a)  $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\text{tg } x}}{\cos^2 x} dx$
- b)  $\int_1^2 x^2 \ln x dx$
- c)  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \text{sen } \theta d\theta$
- d)  $\int x \cosh x dx$
- e)  $\int \frac{\text{sen } x}{(1 + \cos x)^3} dx$

9 — Calcule

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt$$

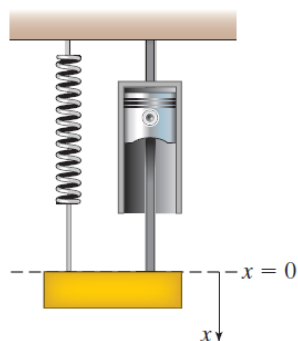
10 — Ache o valor médio da função no intervalo:

- a)  $2x^2 - 3x$   $[-1, 2]$
- b)  $1 + \sqrt{x}$   $[0, 4]$
- c)  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$   $[0, 3]$

11 — **Movimento Harmônico Amortecido.** Considere o sistema mostrado na figura abaixo. Nesse sistema o peso está ligado a uma mola e um dispositivo de amortecimento. Suponha-se que no instante  $t = 0$ , o peso é colocado em movimento a partir de sua posição de equilíbrio de modo que a sua velocidade em qualquer instante  $t$  é

$$v(t) = 3e^{-4t}(1 - 4t)$$

Encontre a função posição  $x(t)$  do corpo.



12 — Considere o sistema mostrado na figura acima. O peso é colocado em movimento de um ponto 12 pés abaixo da posição de equilíbrio, de modo que a sua velocidade em qualquer instante  $t$  é

$$v(t) = e^{-2t}(\cos 4t - 3 \sin 4t)$$

Encontre a função posição do corpo

13 — Calcule o centro de gravidade da região  $R$  limitada pelo gráfico  $y = \sin x$  e  $y = \frac{2}{\pi}x$  em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

O centro de gravidade  $(\bar{x}, \bar{y})$  de uma região limitada pelas funções contínuas  $f$  e  $g$  com  $f(x) \geq g(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \left[ \frac{f(x) + g(x)}{2} \right] [f(x) - g(x)] dx,$$

sendo  $A$  a área da região:  $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

# Respostas dos Exercícios

1 a.)  $\sqrt{1+2x}$

b.)  $\ln(x)$

c.)  $\int_x^2 \cos(t^2) dt = -\int_2^x \cos(t^2) dt$ . Assim,  $\frac{d}{dx} \int_x^2 \cos(t^2) dt = -\cos(x^2)$

d.) Defina  $F(x) = \int_1^x (t + \cos(t)) dt$ . Assim,  $\int_1^{\cos(x)} (t + \cos(t)) dt = F(\cos(x))$ . Portanto,  $\frac{d}{dx} \int_1^{\cos(x)} (t + \cos(t)) dt = \frac{d}{dx} F(\cos(x)) = F'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = -(\cos(x) + \cos(\cos(x))) \sin(x)$

e.)  $(e^x + \cos(e^x))e^x$

f.)  $-2x \cdot e^{x^2} \cos(e^{x^2})$

g.)  $\int_{-e^{x^2}}^{e^x} \cos^2(t) dt = \int_0^{e^x} \cos^2(t) dt + \int_{-e^{x^2}}^0 \cos^2(t) dt = \int_0^{e^x} \cos^2(t) dt - \int_0^{-e^{x^2}} \cos^2(t) dt$  Assim, a resposta é:  $e^x \cos^2(e^x) - 2xe^{x^2} \cos^2(e^{x^2})$ .

h.)  $3x^2 \sqrt{x^3} \cos(x^3) - \frac{\sqrt[4]{x} \cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

2 b.)  $\frac{4^7 + 1}{7}$

c.)  $7\pi$

f.)  $\int_1^8 \sqrt{x} dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = \frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 16\sqrt{2} - \frac{2}{3} = \frac{32\sqrt{2} - 2}{3}$

j.)  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$

l.)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta$

dividindo em cima e embaixo por  $\cos^2(\theta)$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2 \theta} d\theta$$

Faça a substituição  $u = \tan(\theta)$  e conclua.

m.) Faça a substituição  $u = v + 1$ .

n.) Faça a substituição  $u = 5^t$ .

4 a.) Substituição  $u = x^2 + 3$ . Então  $du = 2x dx$ . Assim  $\int 2x(x^2 + 3)^4 dx = \int u^4 du$ .

d.) Substituição  $u = x^2 + 1$ , então  $\frac{1}{2} du = x dx$ .  $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^4} dx = \int \frac{du}{2u^2} + c$

f.) Substituição  $u = 3t + 1$ , então  $dt = \frac{1}{3} du$ .  $\int \frac{2}{(3t + 1)^{2.4}} dt = \int \frac{2}{3u^{2.4}} du = -u^{-1.4} \frac{2}{3(1.4)} + c = -\frac{1}{2.1(3t + 1)^{1.4}} + c$

g.) Substituição  $u = 2^4 - 1$ .

j.) Substituição  $u = \cos(2x)$ , então  $\frac{1}{2} du = -\sin(2x)$ . Assim  $\int \sec^2(2x) \tan(2x) dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos^3(2x)} dx = -\int \frac{du}{2u^3} =$

$$\frac{1}{4u^2} = \frac{1}{4 \cos^2(2x)} + c = \frac{\sec^2(2x)}{4} + c$$

k.) Substituição  $u = \ln(x)$ .

l.) Substituição  $u = \arctg(x)$ , então  $du = \frac{dx}{1+x^2}$ . Então  $\int \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\arctg^2(x)}{2} + c$ .

m.) Substituição  $u = 1 + z^4$ .

n.) Substituição  $1 + e^x$ .

o.) Substituição  $u = \cos(x)$ .

p.) Substituição  $u = b + cx^{a+1}$ , então  $x^a dx = \frac{du}{c(a+1)}$ . Assim,  $\int x^a \sqrt{b + cx^{a+1}} dx = \int \frac{u}{c(a+1)} du = \frac{u^2}{2c(a+1)} + c = \frac{(b + cx^{a+1})^2}{2c(a+1)} + c$ .

q.) Substituição  $u = x^2$ , então  $\frac{1}{2} du = x dx$ . Assim,  $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctg(u) + c = \arctg(x^2) + c$ .

r.) Substituição  $u = x^2$ .

s.) Substituição  $u = x^3$ .

6 a.) Substituição  $y = 5x$ ,  $dx = \frac{dy}{5}$ .  $\int x \cos(5x) dx = \frac{1}{25} \int y \cos(y) dy$ . Integração por partes com  $u = y$  e  $dv = \cos(y) dy$ . Então  $du = dy$  e  $v = \sin(y)$ . Assim

$$\frac{1}{25} \int y \cos(y) dy = \frac{1}{25} (y \sin(y) - \int \sin(y) dy) =$$

$$\frac{1}{25} (y \sin(y) + \cos(y)) + c =$$

$$\frac{1}{25} (5x \sin(5x) + \cos(5x)) + c.$$

b.) Partes  $u = r$ ,  $dv = e^{\frac{r}{3}} dr$ .

c.)  $\int x^2 \cos(mx) = x^2 \frac{\sin(mx)}{m} - \frac{2}{m} \int x \sin(mx) dx =$   
 $x^2 \frac{\sin(mx)}{m} - \frac{2}{m} \left( -x \frac{\cos(mx)}{m} + \frac{1}{m} \int \cos(mx) dx \right) =$   
 $x^2 \frac{\sin(mx)}{m} - \frac{2}{m} \left( -x \frac{\cos(mx)}{m} + \frac{1}{m^2} \sin(mx) \right) + c =$   
 $\frac{(x^2 m^2 - 2) \sin(mx) + 2mx \cos(mx)}{m^3} + c$

d.) Substituição  $u = 2x + 1$ .

e.) Aplique integração por partes algumas vezes até sumir com o termo  $t^3$ . Inicialmente,  $u = t^3$  e  $dv = e^t dt$ .

f.) Substituição  $x = e^y$ .  $\int (\ln(x))^2 dx = \int y^2 e^y dy = y^2 e^y - 2 \int y e^y dy =$

h.) Partes com  $u = x^2 + 1$  e  $dv = e^{-x}$ .

i.) Partes  $u = \ln(t)$  e  $dt = \sqrt{t} dt$ .

$$\int_1^4 \sqrt{t} \ln(t) dt = \left[ \frac{2}{3} \ln(t) \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - \frac{2}{3} \int_1^4 \sqrt{t} dt =$$

$$\frac{16}{3} \ln(4) - \frac{4}{9} \left[ \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{16}{3} \ln(4) - \frac{28}{9}$$

j.) Partes  $u = \ln(x)$  e  $dv = x^{-2} dx$ .

k.) Partes  $u = x$  e  $dv = 2^x dx$ . Então  $du = dx$  e  $v = \frac{2^x}{\ln(2)}$ .

l.) Substituição  $x = e^u$ .

$$\int \cos(\ln(x)) dx =$$

$$\int \cos(u) e^u du = \cos(u) e^u + \int \sin(u) e^u du = \cos(u) e^u + \sin(u) e^u - \int \cos(u) e^u du$$

Então

$$\int \cos(u) e^u du = e^u (\cos(u) + \sin(u)) - \int \cos(u) e^u du$$

. Somando  $\int \cos(u)e^u du$  a ambos os lados temos:

$$2 \int \cos(u)e^u du = e^u(\cos(u) + \text{sen}(u))$$

Assim,

$$\int \cos(u)e^u du = \frac{e^u(\cos(u) + \text{sen}(u))}{2}$$

Voltando à variável inicial,  $x$ , temos

$$\int \cos(\ln(x)) dx = \frac{x(\cos(\ln(x)) + \text{sen}(\ln(x)))}{2}$$

**9** Defina

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{5+t^2} dt.$$

Note que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} = F'(2)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo 1,

$$F'(2) = \sqrt{5+2^2} = 3.$$

$$\mathbf{10 \ a.)} \ f_{\text{med}} = \frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 2x^2 - 3x dx = \frac{\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^2}{3} = 3$$