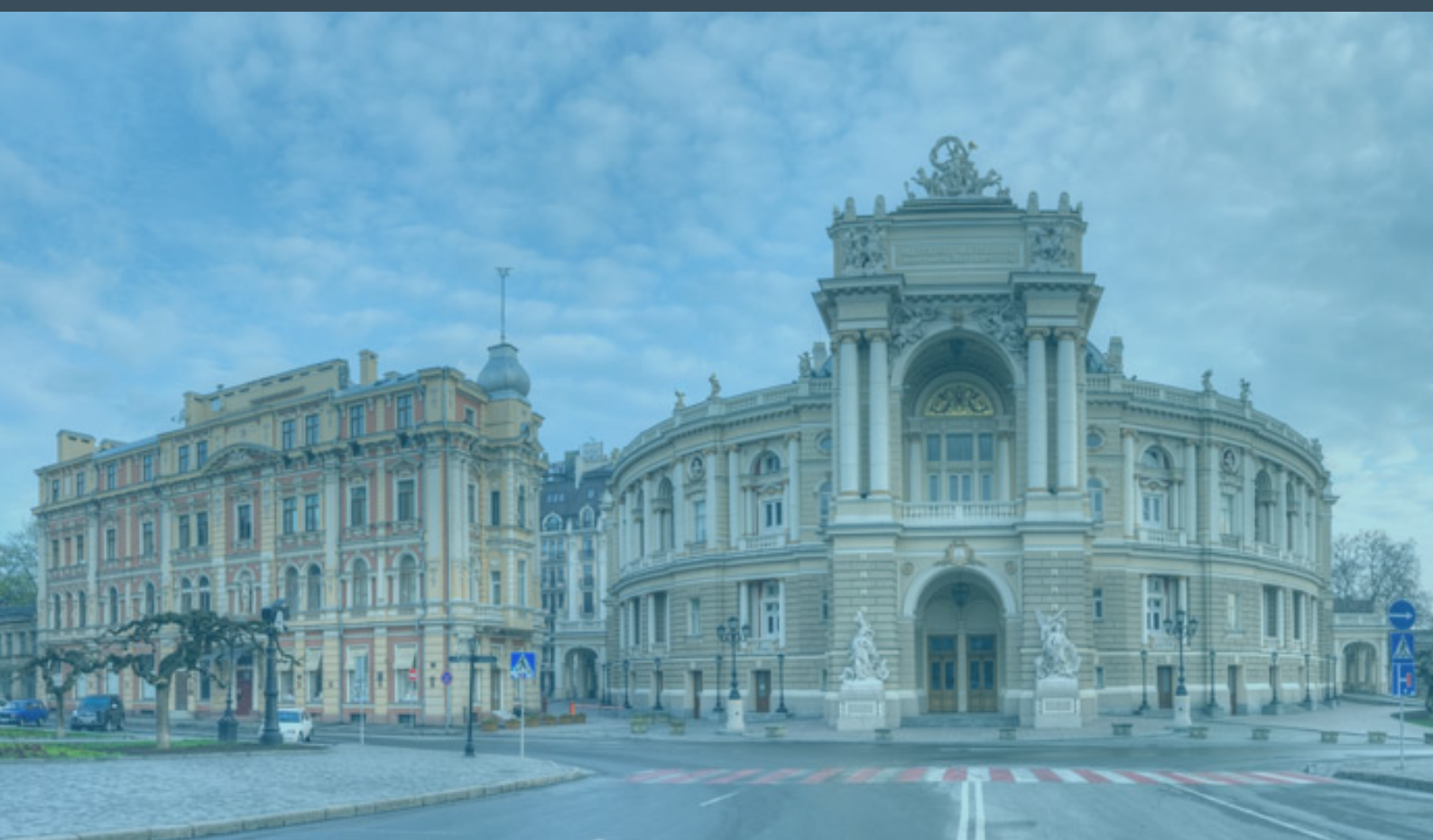


**International scientific conference**

# **“Algebraic and Geometric Methods of Analysis”**

**Book of abstracts**



**May 28 - June 3, 2019**

**Odesa, Ukraine**

Conference webpage: [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2019/](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2019/)

## LIST OF TOPICS

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

## ORGANIZERS

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

## PROGRAM COMMITTEE

<b>Chairman: Prishlyak A.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )	<b>Konovenko N.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Pokas S.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
<b>Balan V.</b> ( <i>Bucharest, Romania</i> )	<b>Lyubashenko V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )	<b>Polulyakh E.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )
<b>Banakh T.</b> ( <i>Lviv, Ukraine</i> )	<b>Maksymenko S.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )	<b>Sabitov I.</b> ( <i>Moscow, Russia</i> )
<b>Fedchenko Yu.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Matsumoto K.</b> ( <i>Yamagata, Japan</i> )	<b>Savchenko A.</b> ( <i>Kherson, Ukraine</i> )
<b>Fomenko A.</b> ( <i>Moscow, Russia</i> )	<b>Mikesh J.</b> ( <i>Olomouc, Czech Republic</i> )	<b>Sergeeva A.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
<b>Fomenko V.</b> ( <i>Taganrog, Russia</i> )	<b>Mormul P.</b> ( <i>Warsaw, Poland</i> )	<b>Shvets V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
<b>Haddad M.</b> ( <i>Wadi al-Nasara, Syria</i> )	<b>Moskaliuk S.</b> ( <i>Wien, Austria</i> )	<b>Shelekhov A.</b> ( <i>Tver, Russia</i> )
<b>Karlova O.</b> ( <i>Chernivtsi, Ukraine</i> )	<b>Mykhailyuk V.</b> ( <i>Chernivtsi, Ukraine</i> )	<b>Vlasenko I.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )
<b>Kiosak V.</b> ( <i>Odessa, Ukraine</i> )	<b>Nykyforchyn O.</b> ( <i>Ivano-Frankivsk, Ukraine</i> )	<b>Volkov V.</b> ( <i>Odessa, Ukraine</i> )
<b>Kirillov V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Plachta L.</b> ( <i>Krakov, Poland</i> )	<b>Zadorozhnyj V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
		<b>Zarichnyi M.</b> ( <i>Lviv, Ukraine</i> )

## ADMINISTRATIVE COMMITTEE

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

## ORGANIZING COMMITTEE

Kirillov V.  
Konovenko N.  
Fedchenko Yu.

Prus A.  
Osadchuk E.

Maksymenko S.  
Khudenko N.  
Cherevko E.

## Formation of algorithmic culture of students in the classroom of higher mathematics

**Absamatov Z.A.**

(Karshi Engineering Economic Institute, Karshi city, Uzbekistan)

*E-mail: zukhriddin-qmii@inbox.uz*

The paper deals with the study and application of algorithms in the lessons of higher mathematics. The course of higher mathematics has sufficiently broad possibilities for the formation, study and application of algorithms, since its content naturally lays down the algorithmic line. The task of the formation of universal computer literacy should be solved when teaching all academic subjects of higher educational institutions. A significant role is given to the course of higher mathematics. When studying this course, students develop stable mathematical skills more successfully if special educational instructions and plans for solving important problems are introduced. They serve as propedeutics of the formation of the algorithmic culture in the future. On the other hand, a firm knowledge of the plans for solving the basic problems of a course in higher mathematics is the initial foundation of students' mathematical preparation.

Applying plans for solving problems in the process of teaching higher mathematics, students should be guided by the fact that they should not just remember one plan or another, but the main thing is to understand which theoretical sentences its application is based on, and each step of the training activity perform consciously, not automatically. Students are familiarized with plans by solving problems at a lecture, their further refinement is carried out in practical classes for various forms of work (frontal, group, individual).

Algorithmic culture of the future teacher of mathematics is an integral part of his general culture. The general culture of the future teacher of mathematics can be characterized as an expression of the maturity of the entire system of professionally significant personal qualities, productively implemented in the process of individual activity. General culture is the result of the qualitative development of knowledge, skills, abilities, interests, beliefs, norms of professional activity and behavior, abilities and social feelings of a future teacher of mathematics.

From the point of view of learning mathematical activity, algorithmic culture is part of mathematical culture. Algorithmic training contributes to the formation and development among students, and through them, students of specific ideas and skills related to understanding the essence of the algorithm and its properties, the essence of the programming language as a means of recording the algorithm, the algorithmic nature of mathematics methods and their applications associated with owning techniques and means of recording problem solving in an algorithmic language.

An algorithmic culture is understood as a set of specific "algorithmic" ideas, knowledge and skills that should be part of the general culture of a future teacher of mathematics at the present stage of society's development and, therefore, determine a purposeful component of a general cultural pedagogical education and student competence.

In conclusion, we note that the line of forming the algorithmic culture of students suggests the prospect of its further convergence at the level of interdisciplinary connections both with the course of mathematics and with other natural-mathematical and humanitarian academic disciplines.

### REFERENCES

- [1] Mukhiddinova S.M. *Algorithmic culture in the professional and pedagogical training of the future teacher, Modern problems of the professional and methodical training of a mathematics teacher in a pedagogical university. Materials rep. scientific conference..* Dushanbe. 33–36. 2007.

## Behavior of the trajectories of a single cubic operator

**A.Yu. Khamrayev**

(Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan)

*E-mail: khamrayev-a@yandex.ru*

**Z.A. Absamatov**

(Karshi Engineering Economic Institute, Karshi city, Uzbekistan)

*E-mail: khamrayev-a@yandex.ru*

In the paper for one cubic Volterra operator on a two-dimensional simplex found all the fixed points and fully understood the behavior of the trajectories generated by this operator.

One of the main tasks in the study of a dynamic system is to study the evolution of the state of the system. Usually, the "descendants" of the state of the system are determined by some law. Numerous problems of biology are solved using the theory of measure and the theory of dynamical systems. These dynamical systems are determined by iterations of nonlinear operators. We give the definition of such operators:

Let  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Consider the set

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

The set  $S^{n-1}$  is called the  $n - 1$  dimensional simplex. Each the element  $x \in S^{n-1}$  is a probability measure on  $E$  and its can be interpreted as a state of the biological (physical, sociological, etc.) system consisting of  $n$  elements.

One of the main tasks for this system is to study the evolution of the system state. Usually, the descendants of the state of the system are determined by certain laws. For solving problems arising in mathematical genetics is used quadratic operators whose theory is currently well developed (see for example [1-3]). In [4] for one all fixed points were found on a Volterra cubic operator on a two-dimensional simplex. A description is given of the limit set of trajectories for some subclasses of such operators.

In this paper, we study dynamical systems defined by cubic operators. Fully studied trajectory of a single cubic operator on  $S^2$ , which arises naturally in the study of certain problems population biology.

In the simplest problem of population genetics is considered biological system  $E$ , consisting of  $n$  species  $1, 2, \dots, n$ . We consider that the species of parents  $i, j, k$  uniquely determine the probability of each species  $l$  for an immediate descendant. Denote this probability by  $P_{ijk,l}$ . Then  $P_{ijk,l} \geq 0$ ,  $\sum_{l=1}^n P_{ijk,l} = 1$  and the values of  $P_{ijk,l}$  do not change with any permutation  $i, j, k$  if the varieties are not related to gender. Population status is described by the set  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  probabilities of varieties. Therefore,  $x \in S^{n-1}$ .

### REFERENCES

- [1] Rozikov U.A., Khamrayev A.Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. *Ukrainian Mathematical Journal*, 56(10) : 1418–1427, 2004.
- [2] Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems. *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob.rel/ fields*, 14(2) : 279–335, 2011.
- [3] Khamrayev A.Yu. On a cubic Volterra operator. *Uzbek Mathematical Journal*, (3) : 65–71, 2009.
- [4] Khamrayev A.Yu. he behavior of the trajectories of a single cubic operator on a two-dimensional simplex. *Uzbek Mathematical Journal*, (1) : 130–137, 2013.

# On nonexistence of Kenmotsu structure on Kirichenko–Uskorev-hypersurfaces of Kählerian manifolds

Galina A. Banaru

(Chair of Applied Mathematics, Smolensk State University, Przhevalski str., 4, Smolensk – 214 000,  
Russian Federation)

*E-mail:* mihail.banaru@yahoo.com

**1.** The almost contact metric (*acm*-) structure is one of the most important differential-geometrical structures on manifolds. As it is known [2], an almost contact metric structure on a odd-dimensional manifold  $N$  is a system  $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$  of tensor fields on this manifold, where  $\Phi$  is a tensor of type  $(1, 1)$ ,  $\xi$  is a vector,  $\eta$  is a covector and  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  is a Riemannian metric. Moreover, the following conditions are fulfilled:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N), \end{aligned}$$

where  $\mathfrak{X}(N)$  is the module of smooth vector fields on  $N$ . As one of the most meaningful and interesting *acm*-structure we mark ut the Kenmotsu structure that is defined by the following condition [2]:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N),$$

In [3], V. F. Kirichenko and I. V. Uskorev have introduced a new class of almost contact metric structure. Namely, they have defined the almost contact metric structure with the close contact form as the structures of cosymplectic type. V. F. Kirichenko and I. V. Uskorev have also proved that their structure is invariant under canonical conformal transformations [3].

Evidently, a trivial example of Kirichenko–Uskorev structure is the cosymplectic structure, and as a non-trivial example we can consider the Kenmotsu structure.

**2.** Now let us consider the *acm*-structure induced on a hypersurface  $N$  of a Kählerian manifold  $M^{2n}$ ,  $n \geq 3$ . The Cartan structural equations of such *acm*-structure are the following [4]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega, \\ d\omega &= -i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta} \omega \wedge \omega^\beta - i\sigma_n^\beta \omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned}$$

Here  $\sigma$  is the second fundamental form of the immersion of  $N$  into  $M^{2n}$ ;  $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$ ;  $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$ ;  $\hat{a} = a + n$ .

Taking into account the results on the matrix of the second fundamental form [5], we obtain the first Theorem.

**Theorem 1.** *The Cartan structural equations of Kirichenko–Uskorev acm-structure induced on a hypersurface of a Kählerian manifold  $M^{2n}$ ,  $n \geq 3$  are the following:*

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + i\sigma^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Comparing these equations with well-known Cartan structural equation of a Kenmotsu structure [2]

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \omega \wedge \omega^\alpha; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha; \\ d\omega &= 0, \end{aligned}$$

we obtain our second result.

**Theorem 2.** *Krichenko–Uskorev almost contact metric structure induced on a hypersurface of a Kählerian manifold  $M^{2n}$ ,  $n \geq 3$ , cannot be a Kenmotsu structure.*

Note that the presented Theorems develop some results on hypersurfaces of Kählerian manifolds [5], [6].

#### REFERENCES

- [1] V. F. Kirichenko. *Differential-Geometrical Structures on Manifolds*, Pechatnyi Dom, Odessa, 2003 (in Russian).
- [2] K. Kenmotsu. A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.*, 24: 93–103, 1972.
- [3] V. F. Kirichenko, I. V. Uskorev. Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures. *Mathematical Notes*, 84(5):783–794, 2008.
- [4] M. B. Banaru, V. F. Kirichenko. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 207(4): 513–537, 2015.
- [5] G. A. Banaru. On the almost contact metric structure of cosymplectic type on a hypersurface of a Kähler manifold. *Differ. Geom. Mnogoobr. Figur*, 49: 7–11, 2018 (in Russian).
- [6] L. V. Stepanova, G. A. Banaru, M. B. Banaru. On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kähler manifolds. *Russian Mathematics*, 60(1): 73–75, 2016.

## On almost contact metric hypersurfaces in $W_4$ -manifolds

Mihail B. Banaru

(Chair of Analytical and Digital Technologies, Smolensk State University, Przhevalski str., 4,  
Smolensk – 214 000, Russian Federation )

*E-mail:* mihail.banaru@yahoo.com

**1.** The famous work by Alfred Gray and Luis M. Hervella [1] contains a classification of the almost Hermitian structures on first order differential-geometrical invariants. In accordance to this classification, all the almost Hermitian structures are divided into 16 classes. Analytical criteria for each concrete structure to belong to one or another class have been obtained [1].

The class of  $W_4$ -manifolds is one of so-called small Gray–Hervella classes of almost Hermitian manifolds. Some specialists identify this class with the class of locally conformal Kählerian (lcK-) manifolds that is not absolutely correct. In fact, the  $W_4$ -class contains all locally conformal Kählerian manifolds, but coincides with the class of lcK-manifolds only for dimension at least six [2].  $W_4$ -manifolds were studied in detail from diverse points of view by such outstanding mathematicians as Alfred Gray (USA), Vadim Feodorovich Kirichenko (Russian Federation) and Izu Vaisman (Israel).

We remark also that the present communication is a continuation of researches of the author in the area of  $W_4$ -manifolds (see, for example, [3], [4], [5] and others).

**2.** As it is known, an almost Hermitian manifold is a  $2n$ -dimensional manifold  $M^{2n}$  with a Riemannian metric  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  and an almost complex structure  $J$ . Moreover, the following condition must hold

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}),$$

where  $\mathfrak{N}(M^{2n})$  is the module of smooth vector fields on  $M^{2n}$  [1]. The fundamental form of an almost Hermitian manifold is determined by the relation

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

An almost Hermitian structure belongs to the  $W_4$ -class, if

$$\begin{aligned} \nabla_X (F) (Y, Z) = & -\frac{1}{2(n-1)} \{ \langle X, Y \rangle \delta F(Z) - \langle X, Z \rangle \delta F(Y) - \\ & - \langle X, JY \rangle \delta F(JZ) + \langle X, JZ \rangle \delta F(JY) \}, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{N}(M^{2n}), \end{aligned}$$

where  $\delta$  is the codifferentiation operator and  $\nabla$  is the Riemannian connection of the metric  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  [1].

**3.** The main results are the following:

1) The Cartan structural equations of the general type almost contact metric structure on an oriented hypersurface in a  $W_4$ -manifold are obtained;

2) The Cartan structural equations of almost contact metric structures on an oriented hypersurface with type number 0, 1 or 2 in a  $W_4$ -manifold are selected;

3) A characterization in terms of the type number (Takagi–Kurihara characterization [6]) of some important classes of almost contact metric structures on hypersurfaces in  $W_4$ -manifolds is obtained;

4) A criterion of the minimality of such hypersurfaces in the terms of their type number is established;

5) It is proved that 2- and 3-hypersurfaces in  $W_4$ -manifolds do not admit almost contact metric structures belonging to any well-studied classes of almost contact metric structures (cosymplectic, nearly cosymplectic, Kenmotsu, Sasaki etc).

Using the above mentioned fact that the class of  $W_4$ -manifolds contains all lcK-manifolds, we conclude that the obtained result are also related to almost contact metric structures on oriented hypersurfaces in lcK-manifolds.



## REFERENCES

- [1] A. Gray, L. M. Hervella. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123 (4): 35–58, 1980.
- [2] V. F. Kirichenko. *Differential-Geometrical Structures on Manifolds*, Pechatnyi Dom, Odessa, 2003 (in Russian).
- [3] M. B. Banaru. The axiom of cosymplectic hypersurfaces and  $W_4$ -manifolds. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 70(5): 213–215, 2015.
- [4] M. B. Banaru. On almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in  $W_4$ -manifolds. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 73(1): 38–40, 2018.
- [5] M. B. Banaru. On some almost contact metric hypersurfaces of  $W_4$ -manifolds. *Differ. Geom. Mnogoobr. Figur*, 49: 12–17, 2018 (in Russian).
- [6] M. B. Banaru, V. F. Kirichenko. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 207(4): 513–537, 2015.

# Quantum calculus and singularities of quasi-discriminant sets

Alexander Batkhin

(Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow) & Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny), Russia)

*E-mail:* batkhin@gmail.com

Let  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$  be a given smooth one-to-one map of the real axis, which is the domain of polynomial  $f(x)$  with arbitrary coefficients. We want to find conditions on the coefficients of the polynomial under which it has at least a pair of roots  $t_i, t_j$  satisfying the relation  $g(t_i) = t_j$  and investigate the structure of the algebraic variety in the space of coefficients possessing such property.

Here we consider a generalization of the classical discriminant of the polynomial. This generalization naturally includes the classical discriminant and its analogs emerging when the  $q$ -differential and difference operators are used. The aim of this research is to propose an efficient algorithm for calculating the parametric representation of all components of the  $g$ -discriminant set  $\mathcal{D}_g(f)$  of the monic polynomial  $f_n(x)$  of degree  $n$ .

Define the  $q$ -bracket  $[a]_q$ ,  $q$ -Pochhammer symbol  $(a; q)_n$ ,  $q$ -factorial  $[n]_q!$ ,  $q$ -binomial coefficients (Gaussian) coefficients  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ,  $g$ -binomial  $\{x; t\}_{n;g}$  as follows:  $[a]_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}$ ,  $(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k)$ ,  $(a; q)_0 = 1$ ,  $[n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n}$ ,  $q \neq 1$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} = \prod_{i=1}^k \frac{q^{n-i+1} - 1}{q^i - 1}$ ,  $\{x; t\}_{n;g} \equiv \prod_{i=0}^{n-1} (x - g^i(t))$ ,  $\{x; t\}_{0;g} = 1$ . Here  $g^k$  is the  $k$ -th iteration of the diffeomorphism  $g$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . As  $q \rightarrow 1$ , all these objects become classical.

Let  $f_n(x)$  be a monic polynomial of degree  $n$  with complex coefficients defined by  $f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ . Let  $\mathbb{P}$  be the space of polynomials over  $\mathbb{R}$  and let  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto qx + \omega$ ,  $q, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq \{-1, 0\}$ , be a linear diffeomorphism on  $\mathbb{R}$  that induces a linear **Hahn operator**  $\mathcal{A}_g$  on  $\mathbb{P}$ , satisfying the following two conditions: (1) the degree reduction:  $\deg(\mathcal{A}_g f_n)(x) = n - 1$ ; in particular,  $\mathcal{A}_g x = 1$ ; (2) Leibnitz rule analogue:  $(\mathcal{A}_g x f_n)(x) = f_n(x) + g(x)(\mathcal{A}_g f_n)(x)$ .

The Hahn operator  $\mathcal{A}_g$  called below  **$g$ -derivative** has the form

$$(\mathcal{A}_g f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{f(qx + \omega) - f(x)}{(q - 1)x + \omega}, & x \neq \omega_0, \\ f'(\omega_0), & x = \omega_0, \end{cases}$$

where  $\omega_0 = \omega/(1 - q)$  is the fixed point of  $g$ . Parameters  $q$  and  $\omega$  are satisfied the following conditions  $q, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq \{-1, 0\}$  and  $(q, \omega) \neq (1, 0)$ . The  $g$ -derivative  $\mathcal{A}_g$  can be considered as a generalization of the  $q$ -differential Jackson operator  $\mathcal{A}_q$  at  $\omega = 0$ ,  $q \neq 1$ , as the difference operator  $\Delta_\omega$  at  $q = 1$  and as the classical derivative  $d/dx$  in the limit  $q \rightarrow 1$  and  $\omega = 0$ .

The  $q$ -calculus has become a part of the more general construct called quantum calculus [1, 2]. It has numerous applications in various fields of modern mathematics and theoretical physics. The pair of roots  $t_i, t_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$  of the polynomial  $f_n(x)$  is called  **$g$ -coupled** if  $g(t_i) = t_j$ .

**Problem 1.** In the coefficient space  $\Pi \equiv \mathbb{C}^n$  of the polynomial  $f_n(x)$ , investigate the  **$g$ -discriminant set** denoted  $\mathcal{D}_g(f_n)$  on which this polynomial has at least one pair of  $g$ -coupled roots.

The sequence  $\text{Seq}_g^{(k)}(t_1)$  of  $g$ -coupled roots of length  $k$  is defined as the finite sequence  $\{t_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$  in which each term, beginning with the second one, is a  $g$ -coupled root of the preceding term:  $g(t_i) = t_{i+1}$ . The initial root  $t_1$  is called the generating root of the sequence  $\text{Seq}_g^{(k)}(t_1)$ .

For each fixed set of parameters  $q, \omega$ , the  $g$ -discriminant set  $\mathcal{D}_g(f_n)$  consists of a finite set of varieties  $\mathcal{V}_k$  on each of which  $f_n(x)$  has  $k$  sequences  $\text{Seq}_g^{(i)}(t_i)$  of  $g$ -coupled roots of length  $i$  with different generating roots  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . To obtain an expression for the generalized (sub)discriminant of the polynomial  $f_n(x)$  in terms of its coefficients, any method available in the classical elimination theory can be used. If we replace the derivative  $f'_n(x)$  by the polynomial  $\mathcal{A}_g f_n(x)$ , then any matrix method for calculating the resultant of a pair of polynomials gives an expression of the generalized  $k$ -th subdiscriminant  $D_g^{(k)}(f_n)$  [3].

**Theorem 2.** *The polynomial  $f_n(x)$  has exactly  $n - d$  different sequences of  $g$ -coupled roots, iff the first nonzero element in the sequence of  $i$ -th generalized subdiscriminants  $D_g^{(i)}(f_n)$  is the subdiscriminant  $D_g^{(d)}(f_n)$  with the index  $d$ .*

Consider the partition  $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$  of a natural number  $n$ . Every partition  $\lambda$  of  $n$  determines the structure of the  $g$ -coupled roots of the polynomial  $f_n(x)$ , and this structure is associated with the algebraic variety  $\mathcal{V}_l^i$ ,  $i = 1, \dots, p_l(n)$  of dimension  $l$  corresponding to the number of different generating roots  $t_i$  in the coefficient space  $\Pi$ . The partition  $[n^1]$  corresponding to the case when there is a unique sequence of roots of length  $n$  specified by the generating root  $t_1$ . Then, the polynomial  $f_n(x)$  is a  $g$ -binomial  $\{x; t_1\}_{n;g}$  and its coefficients  $a_i$  can be represented in terms of the elementary symmetric polynomials  $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  calculated on the roots  $g^j(t_1)$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$ ,  $a_i = (-1)^i \sigma_i(t_1, g(t_1), \dots, g^{n-1}(t_1))$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Theorem 3** ([4]). *Let there be a variety  $\mathcal{V}_l$ ,  $\dim \mathcal{V}_l = l$  on which the polynomial  $f_n(x)$  has different sequences of  $g$ -coupled roots and the sequence of roots  $\text{Seq}_g^{(m)}(t_1)$  has length  $m > 1$ . The roots of the other sequences are not  $g$ -coupled with all roots of the sequence  $\text{Seq}_g^{(m)}(t_1)$ . Let  $\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l)$  be a parameterization of the variety  $\mathcal{V}_l$ . Then for  $0 < k < n$ , the formula*

$$\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) + \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \frac{[m-i]_q!}{[m]_q!} (\mathcal{A}_g^i \mathbf{r}_l)(t_1) \{t_{l+1}; t_1\}_{i;g} \quad (1)$$

*specifies a polynomial parameterization of the part of  $\mathcal{V}_{l+1}$  on which there are two sequences of roots  $\text{Seq}_g^{(m-k)}(g^k(t_1))$  and  $\text{Seq}_g^{(k)}(g(t_{l+1}))$ , and the other sequences of roots are the same as on the original variety  $\mathcal{V}_l$ .*

The structure of singular points of each variety  $\mathcal{V}_{l+1}$  can be described in terms of varieties  $\mathcal{V}_l$ , connected with it by (1).

The same results on the structure and parametrization of the  $g$ -discriminant set  $\mathcal{D}_g(f_n)$  can be obtained for other variants of  $g$ -derivative, e.g. for the case of Hahn symmetric derivative [2]

$$\tilde{\mathcal{A}}_{q,\omega} f(t) = \frac{f(qt + \omega) - f(q^{-1}(t - \omega))}{(q - q^{-1})t + (1 + q^{-1})\omega}$$

as well.

## REFERENCES

- [1] Victor Kac and Pokman Cheung. *Quantum Calculus*. New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 2002.
- [2] Artur Miguel C. Brito da Cruz. *Symmetric Quantum Calculus*. PhD thesis, Universidade de Aveiro, 2012.
- [3] Alexander Batkhin. Parameterization of the discriminant set of a polynomial. *Programming and Computer Software*, 42(2):65–76, 2016. doi:10.1134/S0361768816020031.
- [4] Alexander Batkhin. Parameterization of a set determined by the generalized discriminant of a polynomial. *Programming and Computer Software*, 44(2):75–85, 2018. doi:10.1134/S0361768818020032.

## Derivative Thomae formula for singular half-periods

Julia Bernatska

(National University Kyiv Mohyla Academy, 2, Skovorody vul., Kyiv, 04070, Ukraine)

E-mail: jbernatska@gmail.com, bernatska.julia@ukma.edu.ua

A complete generalization of Thomae theorems [1] in hyperelliptic case is obtained, that is values at zero of the lowest non-vanishing derivatives of theta functions with singular characteristics of arbitrary multiplicity are expressed in terms of branch points  $\{e_i\}_{i=1}^{2g+2}$  and period matrix  $\omega$ .

**Theorem 1.** Let  $\mathcal{I}_m \cup \mathcal{J}_m$  with  $\mathcal{I}_m = \{i_1, \dots, i_{g+1-2m}\}$  and  $\mathcal{J}_1 = \{j_1, \dots, j_{g+1+2m}\}$  be a partition of the set of indices of all  $2g + 2$  branch points of hyperelliptic curve, and  $[\mathcal{I}_m]$  denotes a singular characteristic of multiplicity  $m$  corresponding to  $\mathcal{A}(\mathcal{I}_m) - K$ . Let  $\Delta(\mathcal{I}_m)$  and  $\Delta(\mathcal{J}_m)$  be Vandermonde determinants built from  $\{e_i \mid i \in \mathcal{I}_m\}$  and  $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}_m\}$ . Then with a set  $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}_m$  of cardinality  $\mathfrak{k} = 2m - 1$  or  $2m$  the following relation holds

$$\frac{\partial}{\partial v_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial v_{n_m}} \theta[\mathcal{I}_m](v) \Big|_{v=0} = \epsilon \left( \frac{\det \omega}{\pi^g} \right)^{1/2} \Delta(\mathcal{I}_m)^{1/4} \Delta(\mathcal{J}_m)^{1/4} \times \\ \times \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m \in \mathcal{K} \\ \text{all different}}} \prod_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^g (-1)^{j-1} s_{j-1}(\mathcal{I}_m \cup \mathcal{K}^{(p_i)}) \omega_{jn_i}}{\prod_{k \in \mathcal{K} \setminus \{p_1, \dots, p_m\}} (e_{p_i} - e_k)}. \quad (1)$$

where  $s_j(\mathcal{I})$  denotes an elementary symmetric polynomial of degree  $j$  in branch points with indices from  $\mathcal{I}$ , and  $\mathcal{K}^{(p_i)} = \mathcal{K} \setminus \{p_i\}$ , and  $\epsilon$  satisfies  $\epsilon^8 = 1$ .

Theta function with characteristic  $[\varepsilon]$  is defined by the formula

$$\theta[\varepsilon](v; \tau) = \exp(i\pi(\varepsilon^t/2)\tau(\varepsilon'/2) + 2i\pi(v + \varepsilon/2)^t \varepsilon'/2) \theta(v + \varepsilon/2 + \tau \varepsilon'/2; \tau). \quad (2)$$

All half-integer characteristics are represented by partitions of  $2g + 2$  indices of the form  $\mathcal{I}_m \cup \mathcal{J}_m$  with  $\mathcal{I}_m = \{i_1, \dots, i_{g+1-2m}\}$  and  $\mathcal{J}_m = \{j_1, \dots, j_{g+1+2m}\}$ , where  $m$  runs from 0 to  $[(g+1)/2]$ , and  $[\cdot]$  means the integer part. Number  $m$  is called *multiplicity*. Infinity with index  $2g + 2$  is usually omitted in the sets. The characteristic  $[\mathcal{I}_m]$  corresponds to partition  $\mathcal{I}_m \cup \mathcal{J}_m$  in the following way

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_m} \mathcal{A}(e_i) - K = \varepsilon(\mathcal{I}_m)/2 + \tau \varepsilon'(\mathcal{I}_m)/2,$$

where  $K$  denotes the vector of Riemann constants. According to Riemann theorem  $\theta(v + \mathcal{A}(\mathcal{I}_m) - K)$  vanishes to order  $m$  at  $v = 0$ , Characteristics of multiplicity 0 and 1 are called non-singular even and odd, respectively. All other characteristics are called *singular*.

Some further results are derived from Theorem 1.

**Corollary 2.** Let  $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{J}_2$  with  $\mathcal{I}_2 = \{i_1, \dots, i_{g-\mathfrak{k}}\}$  and  $\mathcal{J}_2 = \{j_1, \dots, j_{g+1+\mathfrak{k}}\}$ , where  $\mathfrak{k} = 3$  or  $4$ , be a partition of the set of  $2g + 1$  indices of finite branch points, such that singular characteristic  $[\mathcal{I}_2]$ , corresponding to  $\mathcal{A}(\mathcal{I}_2) - K$ , has multiplicity 2. Let  $\Delta(\mathcal{I}_2)$  and  $\Delta(\mathcal{J}_2)$  be Vandermonde determinants built from  $\{e_i \mid i \in \mathcal{I}_2\}$  and  $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}_2\}$ . Then

$$\frac{\partial}{\partial v_{n_1}} \frac{\partial}{\partial v_{n_2}} \theta[\mathcal{I}_2](v) \Big|_{v=0} = \epsilon \left( \frac{\det \omega}{\pi^g} \right)^{1/2} \Delta(\mathcal{I}_2)^{1/4} \Delta(\mathcal{J}_2)^{1/4} \sum_{i,j=1}^g (\hat{S}[\{\mathcal{I}_2\}])_{i,j} \omega_{in_1} \omega_{jn_2} \quad (3)$$

with  $g \times g$  matrix

$$(\hat{S}[\mathcal{I}_2])_{i,j} = (-1)^{i+j} \left( 2s_{i-\epsilon+1}(\mathcal{I}_2)s_{j-\epsilon+1}(\mathcal{I}_2) - s_{i-\epsilon+2}(\mathcal{I}_2)s_{j-\epsilon}(\mathcal{I}_2) - s_{i-\epsilon}(\mathcal{I}_2)s_{j-\epsilon+2}(\mathcal{I}_2) \right), \quad (4)$$

where  $\epsilon$  satisfies  $\epsilon^8 = 1$ , and elementary symmetric functions  $s_l(\mathcal{I}_2)$  are replaced by zero when  $l < 0$ .

**Theorem 3.** For hyperelliptic curves of genera  $g \geq 3$ , when characteristics of multiplicity 2 exist, rank of every matrix of second derivative theta constants equals three, that is

$$\text{rank}(\partial_v^2 \theta[\mathcal{I}_2]) = 3.$$

Therefore,  $\det(\partial_v^2 \theta[\mathcal{I}_2]) = 0$  in genera  $g > 3$ .

**Conjecture 4.** With a characteristic  $[\mathcal{I}_m]$  of multiplicity  $\mathbf{m}$  corresponding to a partition  $\mathcal{I}_m \cup \mathcal{J}_m$  with  $\mathcal{I}_m = \{i_1, \dots, i_{g-\epsilon}\}$  and  $\mathcal{J}_m = \{j_1, \dots, j_{g+1+\epsilon}\}$ , where  $\epsilon = 2\mathbf{m} - 1$  or  $2\mathbf{m}$ , of indices of  $2g + 1$  finite branch points the following holds

$$\partial_u^m \theta[\mathcal{I}_m](\omega^{-1}u)|_{u=0} = \epsilon \left( \frac{\det \omega}{\pi^g} \right)^{1/2} \Delta(\mathcal{I}_m)^{1/4} \Delta(\mathcal{J}_m)^{1/4} \hat{S}[\mathcal{I}_m], \quad (5)$$

where  $u$  are non-normalized variables, and order  $\mathbf{m}$  tensor  $\hat{S}[\mathcal{I}_m]$  belongs to the  $\mathbf{m}$ -th tensor power  $\mathcal{S}_{2\mathbf{m}-1}^{\otimes \mathbf{m}}$  of the vector space  $\mathcal{S}_{2\mathbf{m}-1}$  spanned by  $2\mathbf{m} - 1$  vectors  $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{2\mathbf{m}-2}$  such that  $\mathbf{s}_d = (s_{j-\epsilon+d}(\mathcal{I}_m))_{j=1}^g$ . The basis spanning  $\hat{S}[\mathcal{I}_m]$  could be found from partitions of  $\mathbf{m}(\mathbf{m} - 1)$  of length  $\mathbf{m}$  formed from numbers  $\{0, 1, \dots, 2\mathbf{m} - 2\}$ .

As a byproduct a generalization of Bolza formulas [2] are deduced.

**Proposition 5.** Let  $\mathcal{I}_m$  be a set of  $g - \epsilon$  indices, and  $\mathbf{m} = [(g+1)/2]$ . Elementary symmetric polynomials in branch points  $\{e_i \mid i \in \mathcal{I}_m\}$  of genus  $g$  hyperelliptic curve with period matrix  $\omega$  are defined by

$$s_j(\mathcal{I}_m) = (-1)^j \frac{\partial_{u_{2\epsilon-4(m-1)-1}, \dots, u_{2\epsilon-5}, u_{2\epsilon+2j-1}}^m \theta[\mathcal{I}_m](\omega^{-1}u)}{\partial_{u_{2\epsilon-4(m-1)-1}, \dots, u_{2\epsilon-5}, u_{2\epsilon-1}}^m \theta[\mathcal{I}_m](\omega^{-1}u)} \Big|_{u=0}.$$

In particular,

$$e_\iota = - \frac{\partial_{u_{2(g \bmod 2)+1}, \dots, u_{2g-7}, u_{2g-1}}^{[g/2]} \theta[\{\iota\}](\omega^{-1}u)}{\partial_{u_{2(g \bmod 2)+1}, \dots, u_{2g-7}, u_{2g-3}}^{[g/2]} \theta[\{\iota\}](\omega^{-1}u)} \Big|_{u=0}.$$

Here  $u = \omega v$  are non-normalized coordinates of Jacobian of the curve.

#### REFERENCES

- [1] Carl J. Thomae. Beitrag zur Bestimmung von  $\theta(0, 0, \dots, 0)$  durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen, *J. reine angew. Math.*, 71 : 201–222, 1870.
- [2] Oscar Bolza, Über die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine Transformation vierten Grades, *Math. Ann.*, 28(3) : 447–456, 1887.

# Kuratowski limits of subsets of real line and their applications to pretangent spaces

**Viktoriia Bilet**

(Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Sloviansk)

*E-mail:* viktoriiabilet@gmail.com

**Oleksiy Dovgoshey**

(Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NASU of Ukraine, Sloviansk)

*E-mail:* oleksiy.dovgoshey@gmail.com

Let  $(X, d)$  be an unbounded metric space and  $\tilde{r} = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a scaling sequence of positive real numbers tending to infinity. We define the pretangent and tangent spaces  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  to  $(X, d)$  at infinity as metric spaces whose points are equivalence classes of sequences  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  which tend to infinity with the speed of  $\tilde{r}$ . The detailed description of constructions of these spaces and their basic properties see, e. g., in [2].

Let  $(Y, \delta)$  be a metric space. For any sequence  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of nonempty sets  $A_n \subseteq Y$ , the *Kuratowski limit inferior* of  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is the subset  $\underset{n \rightarrow \infty}{Li} A_n$  of  $Y$  defined by the rule:

$$\left( y \in \underset{n \rightarrow \infty}{Li} A_n \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : B(y, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset),$$

where  $B(y, \varepsilon)$  is the open ball of radius  $\varepsilon > 0$  centered at the point  $y \in Y$ ,

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in Y : \delta(x, y) < \varepsilon\}.$$

Similarly, the *Kuratowski limit superior* of  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  can be defined as the subset  $\underset{n \rightarrow \infty}{Ls} A_n$  of  $Y$  for which

$$\left( y \in \underset{n \rightarrow \infty}{Ls} A_n \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists n_0 \geq n : B(y, \varepsilon) \cap A_{n_0} \neq \emptyset).$$

The Kuratowski limit inferior and limit superior are basic concepts of set-valued analysis in metric spaces and have numerous applications (see, for example, [1]).

We denote  $tA := \{tx : x \in A\}$  for any nonempty set  $A \subseteq \mathbb{R}$  and  $t \in \mathbb{R}$ , and,  $\nu_0 := \tilde{X}_{\infty, \tilde{r}}^0 \in \Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  for any pretangent space  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  of an unbounded metric space  $(X, d)$ . Moreover, for every scaling sequence  $\tilde{r}$ , we denote by  $\boxtimes_{\infty, \tilde{r}}^X$  the set of all pretangent at infinity spaces to  $(X, d)$  with respect to  $\tilde{r}$ . Write

$$Sp(\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X) := \{\rho(\nu_0, \nu) : \nu \in \Omega_{\infty, \tilde{r}}^X\} \text{ and } Sp(X) := \{d(p, x) : x \in X\}.$$

**Proposition 1.** *Let  $(X, d)$  be an unbounded metric space,  $p \in X$ ,  $\tilde{r} = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a scaling sequence and let  $\tilde{\mathbf{R}}$  be the set of all infinite subsequences of  $\tilde{r}$ . Then the equalities*

$$\bigcup_{\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X \in \boxtimes_{\infty, \tilde{r}}^X} Sp(\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X) = \underset{n \rightarrow \infty}{Li} \left( \frac{1}{r_n} Sp(X) \right),$$

$$\bigcup_{\Omega_{\infty, \tilde{r}'}^X \in \boxtimes_{\infty, \tilde{r}'}^X, \tilde{r}' \in \tilde{\mathbf{R}}} Sp(\Omega_{\infty, \tilde{r}'}^X) = \underset{n \rightarrow \infty}{Ls} \left( \frac{1}{r_n} Sp(X) \right)$$

hold.

**Corollary 2.** *Let  $(X, d)$  be an unbounded metric space,  $\tilde{r}$  be a scaling sequence and let  ${}^1\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  be tangent and separable. Then we have*

$$Li_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r_n} Sp(X) \right) = Ls_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r_n} Sp(X) \right) = Sp({}^1\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X).$$

**Corollary 3.** *Let  $(X, d)$  be an unbounded metric space,  $\tilde{r}$  be a scaling sequence. Then the sets*

$$\bigcup_{\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X \in \mathfrak{X}_{\infty, \tilde{r}}^X} Sp(\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X) \quad \text{and} \quad \bigcup_{\Omega_{\infty, \tilde{r}'}^X \in \mathfrak{X}_{\infty, \tilde{r}'}^X, \tilde{r}' \in \bar{\mathbf{R}}} Sp(\Omega_{\infty, \tilde{r}'}^X)$$

are closed subsets of  $[0, \infty)$ .

Recall that a metric space  $(Y, \delta)$  is said to be *strongly rigid* if for all  $x, y, z, w \in Y$  the conditions  $\delta(x, y) = \delta(w, z)$  and  $x \neq y$  imply that  $\{x, y\} = \{z, w\}$ . Let us consider a strongly rigid metric space  $(Y, \delta)$  such that:

(i<sub>1</sub>)  $\delta(x, y) < 2$  for all points  $x, y \in Y$ ; (i<sub>2</sub>)  $\sup\{\delta(x, y) : x, y \in Y\} = 2$ ;

(i<sub>3</sub>) The cardinality of the open ball  $B(y^*, r) = \{y \in Y : \delta(y, y^*) < r\}$  is finite for every  $r \in (0, 2)$  and every  $y^* \in Y$ .

**Corollary 4.** *Let  $(X, d)$  be an unbounded metric space,  $\tilde{r}$  be a scaling sequence,  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  be tangent and let  $(Y, \delta)$  be a strongly rigid metric space satisfying conditions (i<sub>1</sub>)-(i<sub>3</sub>). If  $Y_1 \subseteq Y$  and  $f : \Omega_{\infty, \tilde{r}}^X \rightarrow Y_1$  is an isometry, then  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  is finite.*

**Example 5.** Let  $(Y, \delta)$  be a metric space with  $Y = \mathbb{N}$  and the metric  $\delta$  defined such that:

$$\begin{aligned} \delta(1, 2) &= 1 + \frac{1}{2}; \\ \delta(1, 3) &= 1 + \frac{2}{3}, \quad \delta(2, 3) = 1 + \frac{3}{4}; \\ \delta(1, 4) &= 1 + \frac{4}{5}, \quad \delta(2, 4) = 1 + \frac{5}{6}, \quad \delta(3, 4) = 1 + \frac{6}{7}; \\ \delta(1, 5) &= 1 + \frac{7}{8}, \quad \delta(2, 5) = 1 + \frac{8}{9}, \quad \delta(3, 5) = 1 + \frac{9}{10}, \quad \delta(4, 5) = 1 + \frac{10}{11}; \\ &\dots \end{aligned}$$

Then  $(Y, \delta)$  is a countable, complete and strongly rigid metric space satisfying conditions (i<sub>1</sub>)-(i<sub>3</sub>). By Corollary 4 no tangent space  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  is isometric to  $(Y, \delta)$ .

**Corollary 6.** *Let  $(X, d)$  be an unbounded metric space and let  $\tilde{r}$  be a scaling sequence. Then the following statements are equivalent:*

- (i) *There is a single-point pretangent space  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$ ;*
- (ii) *All  $\Omega_{\infty, \tilde{r}}^X$  are single-point;*
- (iii) *The equality*

$$Li_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r_n} Sp(X) \right) = \{0\}$$

holds.

#### REFERENCES

[1] J.-P. Aubin, H. Frankowska. *Set-valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin: 1990.  
 [2] Viktoriia Bilet, Oleksiy Dovgoshey. Finite asymptotic clusters of metric spaces. *Theory and Applications of Graphs*, 5(2) : 1–33, 2018.

## Algebraic and geometric questions about a FTL physics

Enzo Bonacci

(Liceo Scientifico Statale “G.B. Grassi”, Latina, Italy)

*E-mail:* enzo.bonacci@liceograssilatina.org

The recent proposal of a negative mass fluid to explain both the dark matter and energy [7] has renovated the interest for cosmological solutions based upon non-ordinary masses. Challenging the  $\Lambda$ -CDM paradigm, some fringe models are grounded on hypothetical interactions with antimatter [5] whereas others suppose the influence of faster than light (FTL) imaginary mass ([4], [6], [8]). More than a decade ago ([1, 2, 3]) we supplied an organic description of all the possible states (positive, negative and imaginary mass) subsequent to modified Lorentz’s equations giving physical significance to the energetic condition  $absE < m_0c^2$ . Namely, we assumed that a fermion could pass from negative energy (identified as antimatter) to positive levels (i.e., the ordinary matter) through the interval between  $-m_0c^2$  and  $+m_0c^2$  where it would behave like a luxon ( $v = c$ ) or a tachyon ( $v > c$ ) keeping its half-integer spin. We wish to illustrate the algebraic and geometric questions behind a so formulated FTL physics, included a falsification test currently being assembled at CERN’s Antiproton Decelerator.

### REFERENCES

- [1] Enzo Bonacci. *Special Relativity Extension*. Turin : Carta e Penna, 2006.
- [2] Enzo Bonacci. *Extension of Einstein’s Relativity*, volume 42 of *Physical Sciences*. Rome : Aracne Editrice, 2007.
- [3] Enzo Bonacci. *Beyond Relativity*, volume 43 of *Physical Sciences*. Rome : Aracne Editrice, 2007.
- [4] Paul Charles William Davies. Tachyonic Dark Matter. *International Journal of Theoretical Physics*, 43(1) : 141–149, 2004.
- [5] Hooman Davoudiasl et al. Unified Origin for Baryonic Visible Matter and Antibaryonic Dark Matter. *Physical Review Letters*, 105(21) : 211304, 2010.
- [6] Robert Ehrlich. Review of the Empirical Evidence for Superluminal Particles and the 3 + 3 Model of the Neutrino Masses. *Advances in Astronomy*, 2019(ID2820492), 2019.
- [7] Jamie Stephen Farnes. A Unifying Theory of Dark Energy and Dark Matter: Negative Masses and Matter Creation within a Modified  $\Lambda$ CDM Framework. *Astronomy & Astrophysics*, 620(A92), 2018.
- [8] Herbert Martin Fried and Yves Gabellini. The birth and death of a universe. *European Physical Journal C*, 76(709), 2016.



## Algorithms for solving an algebraic equation

Alexander Bruno

(Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow))

*E-mail:* abruno@keldysh.ru

For finding global approximate solutions to an algebraic equation in  $n$  unknowns, the Hadamard open polygon for the case  $n = 1$  and Hadamard polyhedron for the case  $n = 2$  are used. The solutions thus found are transformed to the coordinate space by a translation (for  $n = 1$ ) and by a change of coordinates that uses the curve uniformization (for  $n = 2$ ). Next, algorithms for the local solution of the algebraic equation in the vicinity of its singular (critical) point for obtaining asymptotic expansions of one-dimensional and two-dimensional branches are presented for  $n = 2$  and  $n = 3$ . Using the Newton polygon (for  $n = 2$ ), the Newton polyhedron (for  $n = 3$ ), and power transformations, this problem is reduced to situations similar to those occurring in the implicit function theorem. In particular, the local analysis of solutions to the equation in three unknowns leads to the uniformization problem of a plane curve and its transformation to the coordinate axis. Then, an asymptotic expansion of a part of the surface under examination can be obtained in the vicinity of this axis. Examples of such calculations are presented.

Для нахождения глобальных приближённых решений алгебраического уравнения с  $n$  неизвестными при  $n = 1$  предлагается ломаная Адамара, а при  $n = 2$  — многогранник Адамара. Найденные решения переводятся в координатное подпространство: для  $n = 1$  — сдвигом, а для  $n = 2$  — заменой координат, использующей униформизацию кривой. Затем излагаются алгоритмы локального решения алгебраического уравнения вблизи особой (критической) точки для  $n = 2$  и  $n = 3$  для получения асимптотических разложений одномерных и двумерных ветвей. С помощью многоугольника Ньютона (при  $n = 2$ ), многогранника Ньютона (при  $n = 3$ ) и степенных преобразований эта задача сводится к ситуациям, аналогичным теореме о неявной функции. В частности, при локальном анализе решений одного уравнения от трёх неизвестных приходим к задаче об униформизации плоской алгебраической кривой и преобразовании её в координатную ось. После этого вблизи этой оси можно получить асимптотическое разложение куска изучаемой поверхности. Приведены примеры таких вычислений.

### REFERENCES

- [1] Alexander Bruno. Algorithms for solving an algebraic equation. *Programming and Computer Software*, 44(6) : 533–545, 2018. DOI: 10.1134/S0361768819100013 = Алгоритмы решения одного алгебраического уравнения. *Программирование*, 45(1) : 59–71, 2019. DOI: 10.1134/S0132347419010084

## Around the homologous sphere of Poincare and its applications

V.S.Dryuma

(IMI «Vladimir Andrunachievici», Moldova, Kishinev )

*E-mail:* valdryum@gmail.com

Topology of a 3-dim manifolds defined by the system of equations

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 1 = 0, \quad z_1^l + z_2^m + z_3^n = 0, \quad (1)$$

where  $z_k = x_k + iy_k$  are the complex coordinates, depends from the values of the parameters  $l, m, n$ . In the case  $l = 2, m = 3, n = 5$  the manifold defined by the conditions (10) is a famous homologous sphere of Poincare, which has a set of homologies same with standard 3D-sphere  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ , but differs from it by self fundamental group. It has an important applications in various branch of modern algebraic topology (J.Milnor,1968).

In this report will be told how to represent the homologous sphere defined by intersection of the five-dimensional sphere with singular manifold ( $l = 2, m = 3, n = 5$ )

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0. \quad (2)$$

in the form of an explicit expression for one function between of the four variables  $H(x, y, u, v) = 0$ .

**Theorem 1.** *In the Eulerian coordinates*

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\theta) e^{-2/3 i \sqrt{3} \phi}, \quad z_2 = -\sin(\theta) \sin(1/2 \beta) e^{-1/2 i (\alpha - \delta + 4/3 \sqrt{3} \phi)}, \\ z_3 &= \sin(\theta) \cos(1/2 \beta) e^{1/2 i (\alpha + \delta - 4/3 \sqrt{3} \phi)}, \end{aligned} \quad (3)$$

the equation of the unit five-dimensional sphere is identically satisfied and the equation of the orbifold  $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$  takes the form

$$\begin{aligned} &(\cos(\theta))^2 e^{-4/3 i \sqrt{3} \phi} - \sin(\theta) \sin(1/2 \beta) e^{-1/2 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha - \sqrt{3} \delta + 4 \phi)} + \\ &+ \sin(\theta) \sin(1/2 \beta) e^{-1/2 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha - \sqrt{3} \delta + 4 \phi)} (\cos(1/2 \beta))^2 + \\ &+ \sin(\theta) \sin(1/2 \beta) e^{-1/2 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha - \sqrt{3} \delta + 4 \phi)} (\cos(\theta))^2 - \\ &- \sin(\theta) \sin(1/2 \beta) e^{-1/2 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha - \sqrt{3} \delta + 4 \phi)} (\cos(\theta))^2 (\cos(1/2 \beta))^2 + \\ &+ \sin(\theta) (\cos(1/2 \beta))^5 e^{5/6 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha + \sqrt{3} \delta - 4 \phi)} - \\ &- 2 \sin(\theta) (\cos(1/2 \beta))^5 e^{5/6 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha + \sqrt{3} \delta - 4 \phi)} (\cos(\theta))^2 + \\ &+ \sin(\theta) (\cos(1/2 \beta))^5 e^{5/6 i \sqrt{3} (\sqrt{3} \alpha + \sqrt{3} \delta - 4 \phi)} (\cos(\theta))^4 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Using then the variable  $\chi$ , defined by the condition  $e^{5/2 i \alpha + 5/2 i \delta - 10/3 i \sqrt{3} \phi} - e^{5 \chi} = 0$ , we express the variable  $\phi$  as  $\phi = -1/4 i (\alpha + i \delta - 2 \chi) \sqrt{3}$  and after separation of the real and imaginary parts of complex equation ((4)), are obtained two equations into the five variables  $\alpha, \delta, \chi$  and  $\theta, \beta$ .

As result of elimination of the variable  $\chi$  from both equations is derived equation of homologous sphere of Poincare in the form of one function of the four variables. The equation is the summa of the functions  $\sin()$  and  $\cos()$  with linear arguments. It contains more than 200 items.

By analogy can be considered the case of tetrahedral space which corresponds to the intersection of the five-dimensional sphere with singular manifold ( $l = 2, m = 3, n = 4$ )

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 = 0. \quad (5)$$

and the octahedral space defined by the condition

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 = 0. \quad (6)$$

**Proposition 2.** *The relation between a four variables  $F(x, y, a, b) = 0$  which defines some 3D-variety can be considered as General Integral of the pair of the second order ODE's  $f(x, y, y', y'') = 0$  and  $g(a, b, b', b'') = 0$ .*

$$\sphericalangle F(x, y, a, b) = 0 \searrow$$

$$y'' = f(x, y, y') \quad \longleftrightarrow \quad b'' = h(a, b, b')$$

*The Liouville-Tresse invariants of both equations with respect to non degenerate transformations of the variables  $x = X(u, v), y = Y(u, v)$  or  $a = A(p, q), b = B(p, q)$  can be used for the studies of topological properties of the manifold  $F(x, y, a, b) = 0$ .*

**Theorem 3.** *Spatial homogeneous the first order system of the equations*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}x(s) &= 4 a_0 z^2 + (4 a_2 y + (3 a_1 - b_2) x) z + 4 a_{22} y^2 + \\ &\quad + (3 a_{12} - 2 b_{22}) xy + (2 a_{11} - b_{12}) x^2, \\ \frac{d}{ds}y(s) &= 4 b_0 z^2 + ((3 b_2 - a_1) y + 4 b_1 x) z + (2 b_{22} - a_{12}) y^2 + \\ &\quad + (-2 a_{11} + 3 b_{12}) xy + 4 b_{11} x^2, \\ \frac{d}{ds}z(s) &= (-b_2 - a_1) z^2 + ((-2 b_{22} - a_{12}) y - b_{12} x - 2 a_{11} x) z, \end{aligned} \quad (7)$$

*is projective extension of planar polynomial differential systems*

$$\frac{dx}{ds} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2, \quad \frac{dy}{ds} = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_{11} x^2 + b_{12} xy + b_{22} y^2 \quad (8)$$

*with the parameters  $a_i, a_{ij}$  and  $b_i, b_{ij}$ .*

*After eliminating of the variables  $(y(x))$  or  $z(x)$  it is reduced to the second-order differential equations  $F(x, y, y', y'') = 0$ .*

*As a result of the exclusion of the function  $y''$  from the system*

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0,$$

*a first order differential equation is arised  $C(x, y, y') = 0$ . Through each point  $M$  of integral curve  $C = Q(x, y)$  passes the integral curve of the equation  $F(x, y, y', y'') = 0$ , for which the point  $M$  is the return point of the second type and this allow to study the limit cycles of the system (6).*

#### REFERENCES

- [1] John Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [2] V. Dryuma. On dual equations in theory of the second order ODE's, arXiv:nlin/0701047 v1 p.1-17, 2007.
- [3] V. Dryuma. Homogenous extensions of the first order ODE's, Algebrai Topology an Abelian Functions, Buchstaber'70 Conference, 18-22 June 2013, Steklov's MI RAS, Moscow, ABSTRACTS, p.78-79, 2013.
- [4] V. S. Dryuma. On the equation of homologous sphere of Poincare. International conference "Classical and modern geometry", (Moscow, April 22-25, 2019), ed. A.V.Tsarev MGPU, 20-21, 2019.

## On the generalization of the Darboux theorems

**Kaveh Eftekharinasab**

(Institute of mathematics of NAS of Ukraine)

*E-mail:* kaveh@imath.kiev.ua

We refer to [1] for the definitions concerning the category of  $MC^k$ -Fréchet manifolds.

We prove that vector fields have local flows.

**Theorem 1.** *Let  $F$  be a Fréchet space,  $X$  an  $MC^k$ -vector field on  $U \subset F$ ,  $k \geq 1$ . There exists a real number  $\alpha > 0$  such that for each  $x \in U$  there exists a unique integral curve  $\ell_x(t)$  satisfying  $\ell_x(0) = x$  for all  $t \in I = (-\alpha, \alpha)$ . Furthermore, the mapping  $\mathbb{F} : I \times U \rightarrow F$  given by  $\mathbb{F}_t(x) = \mathbb{F}(t, x) = \ell_x(t)$  is of class  $MC^k$ .*

Therefore we are able to apply Moser's approach, that is constructing an appropriate isotopy generated by a time dependent vector field that provides the chart transforming of symplectic forms to constant ones to prove the Darboux theorem in the category of  $MC^k$ -manifolds.

**Definition 2.** Let  $M$  be a bounded Fréchet manifold. We say that  $M$  is weakly symplectic if there exists a closed smooth 2-form  $\omega$  such that it is weakly non-degenerate i.e. for all  $x \in M$  and  $v_x \in T_x M$

$$\omega_x(v_x, w_x) = 0 \tag{1}$$

for all  $w_x \in T_x M$  implies  $v_x = 0$ .

Let  $F'_b$  be the strong dual of  $F$  and define the map  $\omega_x^\# : F \rightarrow F'_b$  by

$$\langle w, \omega_x^\#(v) \rangle = \omega_x(w, v),$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is a duality pairing. Condition 1 implies that  $\omega^\#$  is injective.

Let  $x \in U$  be fixed and define  $H_x = \{\omega_x(y, \cdot) \mid y \in F\}$ , this is a subset of  $F'_b$  and its topology is induced from it. We assume that all Fréchet spaces are reflexive.

**Lemma 3.**  $\omega_x^\# : F \rightarrow H_x$  is an isomorphism.

**Theorem 4.** *Let  $(M, \omega)$  be a weakly symplectic smooth bounded Fréchet manifold modeled on  $F$ . Let  $\omega^t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$  for  $t \in [0, 1]$ . Suppose that following hold*

- (1) *There exists an open star-shaped neighborhood  $\mathcal{U}$  of zero such that for all  $x \in \mathcal{U}$  the map  $\omega_x^{t\#} : F \rightarrow H_x$  is isomorphism for each  $t$ ,*
- (2) *for  $x \in \mathcal{U}$  the map  $(\omega_x^{t\#})^{-1} : H_x \rightarrow F$  is smooth for each  $t$ .*

*Then there exists a coordinate chart  $(\mathcal{V}, \varphi)$  around zero such that  $\varphi^* \omega = \omega_0$ .*

### REFERENCES

- [1] Kaveh Eftekharinasab. Geometry of bounded Fréchet manifolds, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 46(3) : 895–913, 2016.

## Discrete sets, discrete measures, quasicrystals Fourier, pure crystals

S. Favorov

(Karazin Kharkiv national university)

*E-mail:* sfavorov@gmail.com

Let  $\mu$  be a measure in  $\mathbb{R}^d$  which is a tempered distribution, let  $\hat{\mu}$  be its Fourier transform, in a general case it is a tempered distribution. If  $\mu$  and  $\hat{\mu}$  are measures with closed discrete supports, then  $\mu$  is called Fourier quasicrystal. For example let  $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta(x - n)$ , where  $\delta$  is Dirac's measure. By Poisson's formula, we get  $\hat{\mu} = \mu$ . If the support of  $\mu$  is a finite union of translates of a single full-rang lattice, then  $\mu$  is called a pure crystal. If the support of  $\mu$  is a finite union of translates of several full-rang lattices, then  $\mu$  is called a comb.

In our talk we show some well-known and new results when Fourier quasicrystal is a pure crystal or a comb. Some of these results we expand to the class of tempered distributions.

# Algebraic-geometric aspects of function field analogues to abelian varieties

Nikolaj Glazunov  
(NAU, Kiev, Ukraine)  
*E-mail:* glanm@yahoo.com

This communication is a continuation of [6, 7, 8, 9].

Let  $p$  be a prime number,  $q = p^n$ ,  $\mathbb{F}_q$  be the field with  $q$  elements and characteristic  $p$ ,  $\mathbb{F}$  be a finite field extension of a finite field  $\mathbb{F}_q$ .

We extend the case of algebraic number fields [6, 7] to the case of function fields in characteristic  $p > 0$  and construct function field analogues to abelian varieties of elliptic and hyperelliptic curves appeared in [8, 9]. In the last case we investigate function field analogues to abelian varieties which are Jacobian varieties of hyperelliptic curves in characteristic  $p > 0$ . Recall that for hyperelliptic curves the function field analogues to abelian varieties are function field analogues to Jacobian varieties of the curves. For Jacobians it is possible to define corresponding  $p$ -divisible groups. We plan to present results on function field analogues to  $p$ -divisible groups of the Jacobian varieties.

**Moduli and estimates for hyperelliptic curves of genus  $g \geq 2$  over  $\mathbb{F}_p$ .**

Let

$$C : y^2 = f(x)$$

be an algebraic curve and let  $Disk(C)$  be the discriminant of  $f(x)$ . Consider hyperelliptic curve of genus  $g \geq 2$  over prime finite field  $\mathbf{F}_p$

$$C_g : y^2 = f(x), \quad D(f) \neq 0.$$

For projective closure of  $C_g$  the quasiprojective variety

$$S_{g,p} = \{\mathbf{P}^{2g+2}(\mathbf{F}_p) \setminus (Disk(C_g) = 0)\}$$

parametrizes all hyperelliptic curves of genus  $g$  over  $\mathbf{F}_p$ . By well known Weil bound (affine case)

$$|\#C_g(\mathbf{F}_p) - p| \leq 2g\sqrt{p}.$$

where  $\#C$  is the number of points on the curve  $C$  over ground field. As we can see from Weil (and some more strong) bounds, for  $p \geq 17$  any hyperelliptic curve of genus  $g = 2$  has points in  $\mathbb{F}_p$  for these prime  $p$ . Also for  $g = 3$  every hyperelliptic (h) curve of genus 3 has points in  $\mathbb{F}_p$  for  $p \geq 37$ . For  $p = 2, 3, 5, 7, 11$  there are examples of h-curves of genus 2 that have not points in  $\mathbb{F}_p$ . By author's computations any h-curve of genus 2 over  $\mathbb{F}_{13}$  has points in the field. Similarly, for  $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$  there are examples of h-curves of genus 3 that have not points in  $\mathbb{F}_p$ .

**Theorem 1.** [8]. *Let  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Under  $p \geq 11$  there is such  $a \in \mathbb{F}_p$  that the equation*

$$y^2 = x^{\frac{p-1}{2}} + a$$

*has no solutions in  $\mathbb{F}_p$ .*

**Global  $\mathfrak{G}$ -shtukas and local  $\mathbb{P}$ -shtukas** [1, 2, 3, 4].

**Definition 2.** (Hartl, Rad [1, 2]) Let  $C$  be a smooth projective geometrically irreducible curve over  $\mathbb{F}_q$ . A global  $\mathfrak{G}$ -shtuka  $\overline{\mathcal{G}}$  over an  $\mathbb{F}_q$ -scheme  $S$  is a tuple  $(\mathcal{G}, s_1, \dots, s_n, \tau)$  consisting of a  $\mathfrak{G}$ -torsor  $\mathcal{G}$  over  $C_S := C \times_{\mathbb{F}_q} S$ , an  $n$ -tuple of (characteristic) sections  $(s_1, \dots, s_n) \in C^n(S)$  and a Frobenius connection  $\tau$  defined outside the graphs of the sections  $s_i$ .

For Jacobian varieties it is possible to define corresponding  $p$ -divisible groups and their function field analogues.

**Definition 3.** (Hartl, Rad [1]) Let  $\mathbb{P}$  be a flat affine group scheme of finite type over  $\text{Spec } \mathbb{F}[[z]]$  and  $\mathfrak{G}$  is a flat affine group scheme of finite type over a smooth projective geometrically irreducible curve over  $\mathbb{F}_q$

Recall that local  $\mathbb{P}$ -shtukas are the functional field analogs of  $p$ -divisible groups with additional structure and moduli stacks of global  $\mathfrak{G}$ -shtukas are the functional field analogs for Shimura varieties. In some cases  $\mathbb{P}$  is a paraholic Bruhat-Tits group scheme by Pappas, Rapoport [5] and  $\mathfrak{G}$  is a parahoric Bruhat-Tits group scheme over a smooth projective curve over finite field  $\mathbb{F}_q$  with  $q$  elements of characteristic  $p$ . Investigations by U. Hartl [3], by Hartl, Arasteh Rad [1, 2], by U. Hartl, E. Viehmann [4] continue works of V. G. Drinfeld, L. Lafforgue, G. Faltings.

If will sufficient time we plan to give a short review of history of these research.

#### REFERENCES

- [1] Urs Hartl, Arasteh Rad. Local  $\mathbb{P}$ -shtukas and their relation to global  $G$ -shtukas. *Münster J. Math.* 7, No. 2, 623-670, 2014.
- [2] Urs Hartl, Arasteh Rad. Uniformizing the moduli stacks of global  $G$ -shtukas, preprint on <http://arxiv.org/abs/1302.6351> 2013.
- [3] Urs Hartl. Number Fields and Function fields – Two Parallel Worlds, Papers from the 4th Conference held on Texel Island, April 2004, *Progress in Math.* 239, Birkhauser-Verlag, Basel, 167-222, 2005.
- [4] U. Hartl, E. Viehmann. *J. reine angew. Math. (Crelle)* 656, 87-129, 2011.
- [5] Georgios Pappas, Michael Rapoport. *Algebraic and Arithmetic Structure of Moduli Spaces*, volume 58 of *Advances Studies in Pure Mathematics*, New York: AMS, 159-171, 2010.
- [6] N. Glazunov. Class groups of rings with divisor theory,  $L$ -functions and moduli spaces, *Int. conf. 'Algebraic and geometric methods of analysis*. Book of abstracts. Institute of Mathematics, Odessa-Kiev, 19-20, 2018. Available at: <https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2018>
- [7] N. Glazunov. Class Fields, Riemann Surfaces and (Multiple) Zeta Values, *Proc. 3-d Int.l Conf. Computer Algebra & Information Technologies*, Mechnikov National University, Odessa, 152–154, 2018.
- [8] N.M. Glazunov, A.G. Postnikov. On Rational Points on Curve  $y^2 = f(x)$  over Prime Finite Field. In: *A.G. Postnikov. Select. Papers. M: Fizmathlit*, 450-453, 2005.
- [9] N. Glazunov. Dualities in abelian varieties and formal groups over local fields. *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, 44–56, 2018

# Extensions of almost orthosymmetric lattice bimorphisms

Omer Gok

(Yildiz Technical University, Mathematics Department, Istanbul, TURKEY)

*E-mail:* gok@yildiz.edu.tr

Let  $E, F$  and  $G$  be vector lattices. We say that a linear operator  $T : E \rightarrow F$  is a lattice homomorphism if  $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$  for every  $x, y \in E$ . A bilinear map  $\Phi : E \times F \rightarrow G$  is said to be positive if  $|\Phi(x, y)| \leq \Phi(|x|, |y|)$  for all  $x \in E$  and  $y \in F$ . The bilinear map  $\Phi : E \times F \rightarrow G$  is said to be lattice bilinear map (or lattice bimorphism) whenever it is separately lattice homomorphisms for each variable or equivalently,  $|\Phi(x, y)| = \Phi(|x|, |y|)$  for all  $x \in E$  and  $y \in F$ . Let  $E$  and  $F$  be Archimedean vector lattices. A bilinear map  $T : E \times E \rightarrow F$  is called an orthosymmetric if  $x \wedge y = 0$  implies  $T(x, y) = 0$  for all  $x, y \in E$ . A vector lattice  $E$  is called Dedekind complete if every non-empty subset of  $E$  which is bounded from above has a supremum. A Dedekind complete vector lattice  $M$  is said to be a Dedekind completion of the vector lattice  $E$  whenever  $E$  is Riesz isomorphic to a majorizing order dense Riesz subspace of  $M$ . Denote by  $E^\delta$  the Dedekind completion of  $E$ . Every Archimedean vector lattice has a unique Dedekind completion. A vector lattice  $E$  is said to be universally complete if  $E$  is Dedekind complete and every pairwise disjoint positive vectors in  $E$  has a supremum in  $E$ . Every Archimedean vector lattice  $E$  has a universal completion  $E^u$ . It means that there exists a unique (up to a lattice isomorphism) universally complete vector lattice  $E^u$  such that  $E$  is Riesz isomorphic to an order dense Riesz subspace of  $E^u$ .

**Definition 1.** Let  $E$  and  $F$  be Archimedean vector lattices. A bilinear map  $T : E \times E \rightarrow F$  is called an almost orthosymmetric if  $x \wedge y = 0$  implies  $T(x, y) \wedge T(y, x) = 0$  for all  $x, y \in E$ , [13].

Every orthosymmetric bilinear map is an almost orthosymmetric, but the converse is not always true.

Let  $E$  be an Archimedean vector lattice and  $F$  be a Dedekind complete vector lattice.

In this talk, we show that if  $T : E \times E \rightarrow F$  is an almost orthosymmetric lattice bimorphism, then extension of  $T, T^\sim : E^\delta \times E^\delta \rightarrow F$ , is an almost orthosymmetric lattice bimorphism.

**Theorem 2.** Let  $E$  be an Archimedean vector lattice and let  $E^\delta$  be its Dedekind completion and let  $F$  be a Dedekind complete vector lattice. If  $\Phi : E \times E \rightarrow F$  is an almost orthosymmetric lattice bimorphism, then  $\Phi$  can be extended to an almost orthosymmetric lattice bimorphism  $\Psi : E^\delta \times E^\delta \rightarrow F$ .

## REFERENCES

- [1] C.D. Aliprantis, Owen Burkinshaw, *Positive Operators*. New York: Academic Press, 1985.
- [2] K.Boulabiar, M.A. Toumi, *Lattice bimorphisms on  $f$ -algebras*, Algebra Univers.,48(2002),103-116.
- [3] K.Boulabair, *Extensions of orthosymmetric lattice bilinear maps revisited*, Proc. Am. Math. Soc., 135 (2007), 2007-2009.
- [4] G.Buskes, A.G. Kusraev, *Representation and extension of orthoregular bilinear operators*, Vladikavkaz. Mat. Zh., 9, 1(2007), 16-29.
- [5] J.J. Grobler, C.C.A. Labuschagne G.Buskes, *The tensor product of Archimedean ordered vector spaces*, Math. Proc. Camb.Philos., Soc. 104 (1988), 331-345.
- [6] Z. Lipecki, *Extension of vector lattice homomorphisms revisited*, Indag. Math. 47 (1985), 229-233.
- [7] B.De Pagter,  *$f$ -Algebras and Orthomorphisms*, Thesis, Leiden,(1981).
- [8] M.A. Toumi, *Extensions of orthosymmetric lattice bimorphisms*, Proc. Am. Math.,134 (2006), 1615-1621.
- [9] M.A. Toumi, *The triadjoint of an orthosymmetric bimorphism*, Czechoslovak Math.J.,60(135)(2010),85-94.
- [10] M.A. Toumi, *Commutativity of almost  $f$ -algebras*, Positivity, 11 (2007), 357-368.
- [11] M.A. Toumi, *On extensions of orthosymmetric lattice bimorphisms*, Math. Bohemica, 138(4) (2013), 425-437.
- [12] R. Yilmaz, *The Arens triadjoints of some bilinear maps*, Filomat,28:5(2014),963-979.
- [13] R. Yilmaz, *The Arens triadjoint of an almost orthosymmetric bilinear map*, CAIM conference (2017).



## The properties of the surface of Minkowski space, which determine the type of its Grassmann image

**Grechneva Marina**

(Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine)

*E-mail:* grechnevamarina@gmail.com

**Stegantseva Polina**

(Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine)

*E-mail:* stegpol@gmail.com

The properties of the surface of the Euclidean space, which determine the values or boundaries of the values of the curvature of the Grassmann manifolds along planes tangential to the Grassmann image of the surface have been investigated [1], [2], [3]. The results of solving the similar problems for the surfaces of the Minkowski space depend on the type of their Grassmann image. In this paper, the properties of the surfaces of different types that determine the type of their Grassmann image are investigated.

In Minkowski space  ${}^1R_4$  (with metric  $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ ), the submanifolds of the space-like and the time-like planes of the Grassman manifold  $PG(2, 4)$  are pseudo-Riemannian four-dimensional manifolds of the pseudo-Euclidean space  ${}^3R_6$ . The tangent space for each of these submanifolds is the space with a signature metric  $(- - ++)$  [4].

The Grassmann image of the space-like (time-like) two-dimensional surface of the space  ${}^1R_4$  is a two-dimensional submanifold of the manifold of time-like (space-like) planes [4]. The induced metric of the Grassmann image may be sign-definite, sign-indefinite or degenerated, and, hence, the Grassmann image can be a two-dimensional space-like, time-like or isotropic surface.

**Proposition 1.** *If the time-like surface  $V^2 \subset {}^1R_4$  has a flat normal connection, then its Grassmann image is a time-like surface.*

**Proposition 2.** *If the time-like (space-like) surface  $V^2 \subset {}^1R_4$  is minimal (maximum), then its Grassmann image is a space-like surface.*

**Proposition 3.** *If the surface  $V^2 \subset {}^1R_4$  is a hypersurface of a some three-dimensional subspace, then the type of its Grassmann image coincides with the type of the surface.*

### REFERENCES

- [1] Muto Y. The Gauss map of submanifold in a Euclidean space *J.Math. Soc. Japan.*, 30(1) : 85–100, 1978.
- [2] Borisenko A. A., Nikolayevskiy Yu.A. O poverkhnostyakh s maksimal'noy kriviznoy grassmanova obraza *Mat. zametki.*, 48(3), 1990.
- [3] Lisitsa V.T. Mnogomernyye poverkhnosti s ploskoy normal'noy svyaznost'yu s postoyannoy kriviznoy grassmanova obraza *Izv. vuzov. Matem.*, 5: 47–51, 2004.
- [4] Stegantseva P. G., Grechneva M. A. Grassmanov obraz neizotropnoy poverkhnosti psevdoyevklidova prostranstva *Izvestiya vuzov. Matematika.*, 2 : 65–75, 2017.

# The semigroup of star partial homeomorphisms of a finite deminsional Euclidean space

Oleg Gutik

(Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine)

*E-mail:* oleg.gutik@lnu.edu.ua

Kateryna Melnyk

(Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine)

*E-mail:* chepil.kate@gmail.com

We follow the terminology of [1, 2].

We shall introduce the notion of a star partial homeomorphism of a finite dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ . By  $\mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n)$  we denote the set of all stars at the origin  $\mathbf{0}$  of  $\mathbb{R}^n$ .

We describe the structure of the semigroup  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  of star partial homeomorphisms of the space  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.**  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  is an inverse submonoid of the symmetric inverse monoid  $\mathcal{I}_c$ .

**Proposition 2.** (i) An element  $\alpha$  of  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  is an idempotent if and only if  $\alpha: S \rightarrow S$  is the identity map for some star  $S \in \mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) The band  $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$  is isomorphic to the semilattice  $(\mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n), \cap)$ .

(iii)  $\varepsilon \leq \iota$  in  $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$  if and only if  $\text{dom } \varepsilon \subseteq \text{dom } \iota$ .

(iv)  $\alpha \leq \beta$  in  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  if and only if  $\beta|_{\text{dom } \alpha} = \alpha$ .

**Proposition 3.** Let be  $\alpha, \beta \in \mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ . Then the following statements hold:

(i)  $\alpha \mathcal{R} \beta$  in  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  if and only if  $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$ ;

(ii)  $\alpha \mathcal{L} \beta$  in  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  if and only if  $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$ ;

(iii)  $\alpha \mathcal{H} \beta$  in  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  if and only if  $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$  and  $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$ .

**Proposition 4.**  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  is a bisimple inverse semigroup.

**Corollary 5.** Every two maximal subgroup in  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  are isomorphic. Moreover every maximal subgroup in  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  is isomorphic to the group of all star homeomorphisms of the unit ball  $\mathbf{B}_1$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Theorem 6.** Every non-unit congruence on  $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$  is a group congruence.

## REFERENCES

- [1] Mark V. Lawson. *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.  
 [2] Maria Moszyńska, *Selected Topics in Convex Geometry*, Basel: Birkhäuser, 2005.

# Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank

**Oleg Gutik**

(Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine)

*E-mail:* oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com

**Oleksandra Sobol**

(Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine)

*E-mail:* o.yu.sobol@gmail.com

We study the semigroup extension  $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$  of a semigroup  $S$  by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank.

**Definition 1.** An subset  $D$  of a semigroup  $S$  is said to be  $\omega$ -unstable if  $D$  is infinite and  $aB \cup Ba \not\subseteq D$  for any  $a \in D$  and any infinite subset  $B \subseteq D$ .

**Definition 2.** An subset  $D$  of a semigroup  $S$  is said to be *strongly*  $\omega$ -unstable if  $D$  is infinite and  $aB \cup Bb \not\subseteq D$  for any  $a, b \in D$  and any infinite subset  $B \subseteq D$ .

It is obvious that a subset  $D$  of a semigroup  $S$  is strongly  $\omega$ -unstable then  $D$  is  $\omega$ -unstable.

**Definition 3.** An *ideal series* (see, for example, [1]) for a semigroup  $S$  is a chain of ideals

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n = S.$$

We call the ideal series (*strongly*) *tight* if  $I_0$  is a finite set and  $D_k = I_k \setminus I_{k-1}$  is an (strongly)  $\omega$ -unstable subset for each  $k = 1, \dots, n$ .

A finite direct product of semigroups with tight ideal series is a semigroup with a tight ideal series and a homomorphic image a semigroup with a tight ideal series with finite preimages is a semigroup with a tight ideal series too [2].

**Proposition 4.** *Let  $S$  be a semigroup which admits a strongly tight ideal series. Then the direct power  $(S)^n$  admits a strongly tight ideal series too.*

**Theorem 5.** *Let  $\lambda$  be an infinite cardinal and  $n$  be a positive integer. If  $S$  is a finite semigroup then*

$$I_0 = \{0\} \subseteq I_1 = \mathcal{S}_\lambda^1(S) \subseteq I_2 = \mathcal{S}_\lambda^2(S) \subseteq \dots \subseteq I_n = \mathcal{S}_\lambda^n(S)$$

*is the strongly tight ideal series for the semigroup  $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$ .*

**Theorem 6.** *Let  $S$  be a semigroup which admits a strongly tight ideal series. Then for every non-zero cardinal  $\lambda$  and any positive integer  $n \leq \lambda$  the semigroup  $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$  admits a strongly tight ideal series too.*

**Definition 7** ([2]). An algebraic semigroup  $S$  is called *algebraically complete* in the class of semitopological semigroups  $\mathfrak{S}$ , if  $S$  with any Hausdorff topology  $\tau$  such that  $(S, \tau) \in \mathfrak{S}$  is  $H$ -closed in  $\mathfrak{S}$ .

**Theorem 8.** *Let  $S$  be an inverse semigroup which admits a strongly tight ideal series. Then for every non-zero cardinal  $\lambda$  and any positive integer  $n \leq \lambda$  the semigroup  $\mathcal{S}_\lambda^n(S)$  is algebraically complete in the class of Hausdorff semitopological inverse semigroups with continuous inversion.*

## REFERENCES

- [1] A. H. Clifford and G. B. Preston. *The Algebraic Theory of Semigroups*, volume. I of *Amer. Math. Soc. Surveys 7*. Providence, R.I., 1961; volume. II of *Amer. Math. Soc. Surveys 7*. Providence, R.I., 1967.

- [2] O. Gutik, J. Lawson, and D. Repovš. Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 78(2): 326–336, 2009.

## Non-Oriented Heegaard Diagrams

**Hossein Hatamian**

( Taras Shevchenko National University of Kyiv 64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* myowngait@gmail.com

**Alexandr Prishlyak**

( Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* prishlyak@yahoo.com

Let  $(F; u_1, u_2; v_1, v_2)$  be a genus 2 Heegaard diagram of a closed 3-manifold  $M$ . Here  $F$  is a closed surface which decomposes  $M$  into two handlebodies  $H_1, H_2$  of genus 2,  $u_1, u_2$  are meridians of  $H_1$ , and  $v_1, v_2$  are meridians of  $H_2$ .

Assume that all crossing points of the meridians are transversal and that the diagram is normalized (the latter means that among the regions into which the meridians split  $F$  here are no biangles). The total number of those crossing points is called the *Heegaard complexity* of the diagram.

Let us cut  $F$  along  $u_1, u_2$ . We obtain a sphere with four holes  $D_1^\pm, D_2^\pm$  which are conveniently interpreted as distinguished disks on the sphere. The meridians  $v_1, v_2$  will then be cut into arcs which join the holes. We agree to depict  $k$  parallel arcs as one arc marked by the number  $k \geq 0$ . We also take into account the orientations of the glued boundaries  $\partial D_i^\pm$  by assigning  $(+1)$  for orientable gluing and  $(-1)$  for non-orientable one. Therefore we get  $(+1, +1), (+1, -1), (-1, +1)$  and  $(-1, -1)$  for pairs of holes.

It is well known that the set of all genus 2 Heegaard diagrams can be decomposed into three types. Each such diagram can be determined by a 7-tuple  $(a, b, c, d, e, f, g)$ , where  $a, b, c, d$  are the arcs joining the holes,  $e, f$  determine the gluing maps  $\varphi_i: \partial D_i^- \rightarrow \partial D_i^+, i = 1, 2$ , and  $g$  is defined to be 0, 1, 2 and 3 for  $(+1, +1), (+1, -1), (-1, +1)$  and  $(-1, -1)$  respectively.

In order to give exact descriptions of  $\varphi_1$ , we introduce topological symmetries  $s_i: \partial D_i^- \rightarrow \partial D_i^+$  and topological rotations  $r_i: \partial D_i^- \rightarrow \partial D_i^+$  by the following results:

- (1)  $s_i: \partial D_i^- \cap (v_1 \cup v_2) \rightarrow \partial D_i^+ \cap (v_1 \cup v_2)$  such that the endpoint of each  $b$ -arc (respectively,  $c$ -arc) is taken to the other endpoint of the same arc.
- (2)  $r_i$  shifts each point of  $D_i^+ \cap (v_1 \cup v_2)$  to the next point of  $D_i^+ \cap (v_1 \cup v_2)$ .

Now we define  $\varphi_1, \varphi_2$  as follows:  $\varphi_1 = r_1^e s_1$ , and  $\varphi_2 = r_2^f s_2$ .

A Heegaard diagram  $(F; u_1, u_2; v_1, v_2)$  of genus 2 has type I, II or III if it can be described as follows:

Type I

- Each  $a$ -arc joins  $D_1^+$  and  $D_2^+$  as well as  $D_1^-$  and  $D_2^-$ .
- Each  $b$ -arc joins  $D_1^+$  and  $D_1^-$ .
- Each  $c$ -arc joins  $D_2^+$  and  $D_2^-$ .
- Each  $d$ -arc joins  $D_1^+$  and  $D_2^-$  as well as  $D_1^-$  and  $D_2^+$ .

Type II

- Each  $a$ -arc,  $b$ -arc and  $d$ -arc can be described in the same way as type I while each  $c$ -arc joins  $D_1^+$  and  $D_1^-$ .

Type III

- Each  $a$ -arc,  $b$ -arc and  $c$ -arc can be described in the same way as type II while each  $d$ -arc is a loop with ends at  $D_1^+$  and  $D_1^-$  embracing  $D_2^+$  and  $D_2^-$  respectively.

**Theorem 1.** *If the Heegaard complexity of a non-orientable 3-manifold  $M$  is no more than 5, then  $M$  is homeomorphic to  $L_{p,q} \# S^1 \tilde{\times} S^2$ .*

*There exists a manifold of complexity 6 that is not homeomorphic to  $L_{p,q}\#S^1\tilde{\times}S^2$ . Its diagram can be represented by the 7-tuple  $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 3)$ .*

#### REFERENCES

- [1] S.V. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, volume 9, Springer, Berlin, 2007.

## Some many-dimensional extremal geometric problems

**Viacheslav Herasymov**

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

*E-mail:* Slavka.gs98@gmail.com

**Sergiy Gefter**

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

*E-mail:* gefter@karazin.ua

**Alexsey Arinenkov**

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

*E-mail:* a.arinenkov@gmail.com

The talk deals with many-dimensional analogs of some classical two-dimensional and three-dimensional geometric problems on an extremum. The asymptotic behavior of parameters of extremal geometric objects with increasing dimension of the space is studied.

It is shown that in some extremal problems (such as in the problem of a cylinder of fixed volume with a minimum total surface area and the problem of the shape of a right circular cone with a maximum volume of an inscribed ball in it) these parameters do not depend on the dimension of the space.

### REFERENCES

- [1] V. Alekseev, E. Galeev, V. Tikhomirov. Collection of optimization problems. Theory. Examples. Tasks. (in Russian) *Moscow, Physics and mathematics literature*, 2011.
- [2] F. Vasiliev. Lectures on methods for solving extremal problems (in Russian). *Moscow, MSU*, 1974.

# On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in $m$ -dimensional bounded domain

**Juraev D.A.**

(Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan)

*E-mail:* juraev\_davron@list.ru

In the paper it is considered the problem of regularization of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in  $m$ -dimensional bounded domain of the type of a curvilinear triangle. Using the results of works [1]-[2], is constructed explicitly Carleman matrix and, based on the regularized solution of the Cauchy problem.

Let  $\mathbb{R}^m$  be a  $m$ -dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Let  $G_\rho \subset \mathbb{R}^m$  be a bounded simply connected domain whose boundary consists of the surface of a cone

$$|y'| = \tau y_m, \quad \tau = tg \frac{\pi}{2\rho}, \quad y_m > 0, \quad \rho > 1,$$

and a smooth piece of the surface  $S$  lying inside the cone, i.e.  $\partial G_\rho = S \cup T$ ,  $T = \partial G_\rho \setminus S$ .

We consider in the domain  $G_\rho$  a system of differential equations

$$D \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) U(x) = 0, \tag{1}$$

where  $D \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  is the matrix of differential operators is of the first order.

We denote by  $A(G_\rho)$  the class of vector functions in the domain  $G$ , of continuous on  $\overline{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho$  and satisfying system (1).

**Problem 1.** Let  $U(y) \in A(G_\rho)$  and

$$U(y)|_S = f(y), \quad y \in S. \tag{2}$$

Here,  $f(y)$  is a given continuous vector function on  $S$ .

It is required to restore the vector function  $U(y)$  in the domain  $G_\rho$ , based on its values  $f(y)$  on  $S$ .

**Theorem 2.** Let  $U(y) \in A(G_\rho)$  on the entire boundary of  $\partial G_\rho$  satisfy the boundary condition

$$|U(y)| \leq 1, \quad y \in T.$$

Then we have the estimate

$$|U(x) - U_{\sigma(\delta)}(x)| \leq C_\rho(\lambda, x) \sigma \delta^{\left(\frac{\gamma}{R}\right)^\rho}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G_\rho.$$

**Corollary 3.** The limiting equality

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} U_{\sigma(\delta)}(x) = U(x),$$

holds uniformly on each compact set in the domain  $G_\rho$ .

Thus, the functional  $U_{\sigma(\delta)}(x)$  determines the regularization of the solution of problem (1)-(2).



## REFERENCES

- [1] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 15 : 11–20, 2018.
- [2] Juraev D.A. On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. *Advanced Mathematical Models & Applications*, 4(1) : 86–96, 2019.

# Neighborhood maps on combinatorial trees and their Markov graphs

Sergiy Kozerenko

(Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, 04070 Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* kozerenkosergiy@ukr.net

A combinatorial tree is a finite connected acyclic undirected graph. For a self-map  $\sigma : V(X) \rightarrow V(X)$  on the vertex set  $V(X)$  of a combinatorial tree  $X$ , its Markov graph  $\Gamma = \Gamma(X, \sigma)$  is defined as a directed graph with the vertex set  $V(\Gamma) = E(X)$  and the arc set  $A(\Gamma) = \{(u_1v_1, u_2v_2) : u_2, v_2 \in [\sigma(u_1), \sigma(v_1)]_X\}$  (here  $[a, b]_X$  denotes the metric interval between  $a, b$  in  $X$ ).

A map  $\sigma : V(X) \rightarrow V(X)$  on a tree  $X$  is a neighborhood map provided  $\sigma(u) \in N_G[u]$  for all vertices  $u \in V(X)$  (i.e. if  $\sigma(u) = u$  or  $u\sigma(u) \in E(X)$  for all  $u \in V(X)$ ).

Denote by  $d_G(u)$  the vertex degree of  $u$  in a graph  $G$  and by  $L(G)$  the set of all leaf vertices (i.e. vertices  $u$  with  $d_G(u) = 1$ ) in  $G$ . Also, let  $\text{fix}\sigma$  denotes the set of  $\sigma$ -fixed points.

**Theorem 1.** *For any neighborhood map  $\sigma$  on a tree  $X$  with  $|V(X)| \geq 2$  the number of weak components in the corresponding Markov graph  $\Gamma(X, \sigma)$  equals  $\sum_{u \in \text{fix}\sigma} d_X(u) - |\text{fix}\sigma| + 1$ .*

**Corollary 2.** *A neighborhood map  $\sigma$  on a tree  $X$  with  $|V(X)| \geq 2$  has a weakly connected Markov graph if and only if  $\text{fix}\sigma \subset L(X)$ .*

For a map  $\sigma$  on a tree  $X$  an edge  $uv \in E(X)$  is called  $\sigma$ -positive ( $\sigma$ -negative) provided  $d_X(\sigma(u), u) \leq d_X(\sigma(u), v)$  and  $d_X(\sigma(v), v) \leq d_X(\sigma(v), u)$  ( $d_X(\sigma(u), v) \leq d_X(\sigma(u), u)$  and  $d_X(\sigma(v), u) \leq d_X(\sigma(v), v)$ ). Let  $p(X, \sigma)$  and  $n(X, \sigma)$  denote the number of  $\sigma$ -positive and  $\sigma$ -negative edges in  $X$ , respectively.

**Theorem 3.** *For any neighborhood map  $\sigma$  on a tree  $X$  the number of arcs in the corresponding Markov graph  $\Gamma(X, \sigma)$  equals  $|E(X)| + 2p(X, \sigma) - \sum_{u \in \text{fix}\sigma} d_X(u)$ .*

For a number  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  the first general Zagreb index [4] of  $G$  is defined as the sum  $Z_1^\alpha(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G^\alpha(u)$ . Similarly, for every number  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$  the general Randic index [1] of a graph  $G$  is the sum  $R^\alpha(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_G(u)d_G(v))^\alpha$ .

**Theorem 4.** *For every  $n$ -vertex tree  $X$  the average number of arcs in Markov graphs for neighborhood maps on  $X$  equals*

$$\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot Z_1^{-1}(K_1 + X) + 2R^{-1}(K_1 + X) + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} - 3.$$

Given a graph  $G$ , its Narumi-Katayama index [5] is the product  $\text{NK}(G) = \prod_{u \in V(G)} d_G(u)$  of degrees over all vertices in  $G$ .

**Proposition 5.** *For every  $n$ -vertex tree  $X$  the number of its neighborhood maps equals  $\frac{1}{n} \cdot \text{NK}(K_1 + X)$ .*

## REFERENCES

- [1] B. Bollobas and P. Erdos. Graphs of extremal weights. *Ars Combin.*, 50 : 225–233, 1998.
- [2] S. Kozerenko. Markov graphs of one-dimensional dynamical systems and their discrete analogues. *Rom. J. Math. Comput. Sci.*, 6 : 16–24, 2016.
- [3] S. Kozerenko. Counting the average size of Markov graphs. *J. Int. Math. Virtual Inst.*, 7 : 1–16, 2017.
- [4] A. Milićević and S. Nikolić. On variable Zagreb indices. *Croat. Chem. Acta.*, 77 : 97–101, 2004.
- [5] H. Narumi and H. Katayama. Simple topological index – A newly devised index characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons. *Mem. Fac. Engin. Hokk. Univ.*, 16 : 209–214, 1984.

# First Betti numbers of orbits of Morse functions on surfaces

Iryna Kuznietsova

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str.,3, Kyiv, Ukraine )

*E-mail:* kuznietsova@imath.kiev.ua

Yuliia Soroka

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str.,3, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* sorokayulya@imath.kiev.ua

Let  $\mathcal{G}$  be a minimal class of groups satisfying the following conditions: 1)  $1 \in \mathcal{G}$ ; 2) if  $A, B \in \mathcal{G}$ , then  $A \times B \in \mathcal{G}$ ; 3) if  $A \in \mathcal{G}$  and  $n \geq 1$ , then the wreath product  $A \wr_n \mathbb{Z} \in \mathcal{G}$ .

In other words a group  $G$  belongs to the class  $\mathcal{G}$  iff  $G$  is obtained from trivial group by a finite number of operations  $\times, \wr_n \mathbb{Z}$ . It is easy to see that every group  $G \in \mathcal{G}$  can be written as a word in the alphabet  $\mathcal{A} = \{1, \mathbb{Z}, (, ), \times, \wr_2, \wr_3, \wr_4, \dots\}$ . We will call such word a *presentation* of the group  $G$  in the alphabet  $\mathcal{A}$ . Evidently, the presentation of a group is not uniquely determined.

Denote by  $Z(G)$  and  $[G, G]$  the center and the commutator subgroup of  $G$  respectively.

**Theorem 1.** *Let  $G \in \mathcal{G}$ ,  $\omega$  be an arbitrary presentation of  $G$  in the alphabet  $\mathcal{A}$ , and  $\beta_1(\omega)$  be the number of symbols  $\mathbb{Z}$  in the presentation  $\omega$ . Then there are the following isomorphisms:*

$$Z(G) \cong G/[G, G] \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

*In particular, the number  $\beta_1(\omega)$  depends only on the group  $G$ .*

The groups from the class  $\mathcal{G}$  appear as fundamental groups of orbits of Morse functions on surfaces. Let  $M$  be a compact surface and  $\mathcal{D}$  be the group of  $C^\infty$ -diffeomorphisms of  $M$ . There is a natural right action of the group  $\mathcal{D}$  on the space of smooth functions  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  defined by the rule:  $(f, h) \mapsto f \circ h$ , where  $h \in \mathcal{D}$ ,  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Let  $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}\}$  be the *orbit* of  $f$  under the above action. Endow the spaces  $\mathcal{D}$ ,  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  with Whitney  $C^\infty$ -topologies. Let  $\mathcal{O}_f(f)$  denote the path component of  $f$  in  $\mathcal{O}(f)$ .

A map  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  will be called *Morse* if all its critical points are non-degenerate. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions were calculated in a series of papers by Sergiy Maksymenko [3], [2], Bohdan Feshchenko [4], and Elena Kudryavtseva [1]. As a consequence of Theorem 1 we get the following.

**Corollary 2.** *Let  $M$  be a connected compact oriented surface distinct from  $S^2$  and  $T^2$ ,  $f$  be a Morse function on  $M$ ,  $G = \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \in \mathcal{G}$ ,  $\omega$  be an arbitrary presentation of  $G$  in the alphabet  $\mathcal{A}$ , and  $\beta_1(\omega)$  be the number of symbols  $\mathbb{Z}$  in the presentation  $\omega$ . Then the first integral homology group  $H_1(\mathcal{O}(f), \mathbb{Z})$  of  $\mathcal{O}(f)$  is a free abelian group of rank  $\beta_1(\omega)$ :*

$$H_1(\mathcal{O}(f), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

*In particular,  $\beta_1(\omega)$  is the first Betti number of  $\mathcal{O}(f)$ .*

## REFERENCES

- [1] E. Kudryavtseva. *The topology of spaces of Morse functions on surfaces*, Math. Notes 92, 2012, no. 1-2, 219–236.
- [2] S. Maksymenko. *Homotopy types of right stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces*. Ukrainian Math. Journal, 2012, 64, No. 9, 1186–1203.
- [3] S. Maksymenko. *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces*. Ann. Global Anal. Geom., 2006, 29, No. 3, 241–285.
- [4] B. Feshchenko. *Actions of finite groups and smooth functions on surfaces*. Methods Funct. Anal. Topology, 2016, 22, No.3, 210–219.

## Diffeomorphisms preserving Morse-Bott foliations

**Olexandra Khohliyk**

(Department of Geometry, Topology and Dynamic Systems, Taras Shevchenko National University  
of Kyiv, Hlushkova Avenue, 4e, Kyiv, 03127 Ukraine)

*E-mail:* khokhliyk@gmail.com

**Sergiy Maksymenko**

(Topology Laboratory, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str., 3, Kyiv,  
01004 Ukraine)

*E-mail:* maks@imath.kiev.ua

Let  $M$  be a smooth compact manifold and  $\mathcal{F}$  be a codimension one foliation on  $M$  having singular leaves of Morse-Bott type. This means that there the set  $\Sigma$  of singular leaves of  $\mathcal{F}$  is a disjoint union of compact submanifolds. Let also  $\mathcal{D}(\mathcal{F})$  be the group of diffeomorphisms of  $M$  leaving each leaf invariant, and  $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \Sigma)$  be the subgroup of  $\mathcal{D}(\mathcal{F})$  consisting of diffeomorphisms fixed on  $\Sigma$ .

**Theorem 1.** [1] *The “restriction to  $\Sigma$  map”*

$$\rho: \mathcal{D}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{D}(\Sigma), \quad \rho(h) = h|_{\Sigma_f},$$

*is a locally trivial fibration with fibre  $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \Sigma)$ .*

This result can be regarded as a “foliated” variant of the well know results by Cerf and Palais on local triviality of restrictions. In particular, the map  $\rho$  has a path-lifting property, and so it contains a “foliated” variant of isotopy extension theorem:

**Corollary 2.** [1] *Let  $H: \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$  be a  $C^\infty$  isotopy with  $H_0 = \text{id}_\Sigma$ . Then it extends to an isotopy  $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$  such that  $H_t \in \mathcal{D}(\mathcal{F}, \Sigma)$  for all  $t \in [0, 1]$ .*

### REFERENCES

- [1] Olexandra Khohliyk, Sergiy Maksymenko, *Diffeomorphisms preserving Morse-Bott functions*, [arXiv:1808.03582](https://arxiv.org/abs/1808.03582)

## Singular monotonic functions defined by a convergent positive series and a double stochastic matrix

V. Markitan

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* v.p.markitan@npu.edu.ua

Let

1)  $1 = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$  be normalized alternating binary series that defines a binary negapositional image of the number of the segment  $[0; 1]$ :

$$x = \frac{2}{3} + \frac{\alpha_1(x)}{(-2)^1} + \frac{\alpha_2(x)}{(-2)^2} + \frac{\alpha_3(x)}{(-2)^3} + \dots \equiv \overline{\Delta}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^2;$$

2)  $\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$  be a positive double stochastic matrix i.e.  $p_{ij} > 0$ ,  $p_{i0} + p_{i1} = 1$ ,  $p_{0j} + p_{1j} = 1$ ,  $i = 0, 1$ ,  $j = 0, 1$ ;

3)  $\bar{p} = (p_0; p_1)$  be a vector  $p_0 = \frac{p_{10}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{1}{2}$  and  $p_1 = \frac{p_{01}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{1}{2}$ ;

It is known that a binary negapositional number representation is a recoding of a classical binary representation:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots \equiv \Delta_{a_1(x)a_2(x)\dots a_n(x)\dots}^2, \quad a_n \in \{0; 1\}$$

Considered in the talk is function  $F$ , defined by equality

$$F(x) = F(\overline{\Delta}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^2) = \beta_{\alpha_1(x)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}^{(k)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}), \quad \text{where} \quad (1)$$

$$\beta_{\alpha_1(x)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_1(x) = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{if } \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

$$\beta_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)}^{(2n-1)} = \beta_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_{2n}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{if } \alpha_{2n-1}(x) \neq \alpha_{2n}(x) = 1, \\ p_{10}, & \text{if } \alpha_{2n-1}(x) = \alpha_{2n}(x) = 1, \end{cases}$$

$$\beta_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)}^{(2n)} = \beta_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)}^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_{2n+1}(x) = 1, \\ p_{01}, & \text{if } \alpha_{2n}(x) = \alpha_{2n+1}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{if } \alpha_{2n}(x) \neq \alpha_{2n+1}(x) = 0, \end{cases}$$

and  $\alpha_k(x)$  is  $k$  negapositional digit of representation of the number  $x$ .

**Definition 1.** Let  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  be a orderly set of positive integers. The Cylinder of  $m$  rank with basis  $c_1 c_2 \dots c_m$  is called a set  $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2$  of numbers of  $x \in (0; 1]$  that is first  $m$  negapositional digits of which are  $c_1, c_2, \dots, c_m$  respectively, i.e.

$$\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^2 = \left\{ x : x = \overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m a_{m+1} a_{m+2} \dots}^2, \quad a_{m+i} \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

**Lemma 2.** For a function  $F$  defined by the equality (1) the mapping of the cylinder  $\overline{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2$  is a segment  $[a; b]$ , where

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \left( \beta_{c_k c_{k+1}}^{(k)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}} \right), \quad b = a + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}},$$

**Theorem 3.** *Images of different cylinders of the same rank with the mapping  $F$  do not overlap and in the union give the whole segment  $[0, 1]$ .*

**Theorem 4.** *The function  $F(x)$  denoted by the equality (1) is:*

- 1) correctly identified,*
- 2) continuous,*
- 3) strictly increasing,*
- 4) linear for  $p_{00} = 0.5$  and singular for  $p_{00} \neq 0.5$  (has a derivative equal to zero almost everywhere in the sense of the Lebesgue measure).*

The report proposes the results of studies of the above-mentioned functions.

#### REFERENCES

- [1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

## A Flat $(CHR)_3$ -curvature tensor in a Trans-Sasakian Manifold

Koji Matsumoto

(Yamagata University, 2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan)

*E-mail:* tokiko\_matsumoto@yahoo.com

Recently, we defined a  $(CHR)_3$ -curvature tensor in almost contact Riemannian manifolds([3]) using M. Prvanovic's paper ([4]).

On, 2009, A. A. Shaikh and Y. Matsuyama considered a trans-Sasakian manifold which is a generalization of a Kenmotsu and Sasakian manifold and got some interesting results([5]).

In this paper, we consider this tensor field in a trans-Sasakian manifold. Moreover, we define the notion of the  $(CHR)_3$ -flatness in an almost contact Riemannian manifold. Then, we consider this notion in a trans-Sasakian manifold and determine the curvature tensor, the Ricci tensor and the scalar curvature. Finally, we get a condition which the Ricci tensor becomes a generalized quasi- or quasi-Einstein ([1], [2]).

### REFERENCES

- [1] M. C. Chaki, On generalized quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, **58** (2001), 683 – 691.
- [2] M. C. Chaki and R.K. Maity, On quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, **57** (2000), 297 – 306.
- [3] K. Matsumoto, A new curvaturelike tensor field in an almost contact Riemannian manifold II, to appear.
- [4] M. Prvanovic, Conformally invariant tensors of an almost Hermitian manifold associated with the holomorphic curvature tensor, *J. Geom.* **103** (2012), 89-101.
- [5] A. A. Shaikh and Y. Matsuyama, On trans-Sasakian manifolds, *Sut J. of Mathematics*, **45**, No. 1 (2009), 25 – 41.

## On some fractal-based estimations of subsidence volume for various types of soils

**Tatyana P. Mokritskaya**

(Dnipro National University Gagarin Avenue 72 Dnipro, 49050, Ukraine )

*E-mail: mokritska@i.ua*

**Anatolii V. Tushev**

(Dnipro National University Gagarin Avenue 72 Dnipro, 49050, Ukraine )

*E-mail: avtus@i.ua*

In [1, 2], the particle size distribution  $N_s(L > d_s)$  was defined as the number of particles being of any size  $L$  larger than  $d_s$ , where  $d_s$  runs over the real numbers. In the same way we can introduce the particle size distribution by volume  $V_s(L > d_s)$  (and by mass  $M_s(L > d_s)$ ) as the volume (mass) of particles being of any size  $L$  larger than  $d_s$ , where  $d_s$  runs over the real numbers. Certainly,  $N_s(L > d_s)$ ,  $V_s(L > d_s)$  and  $M_s(L > d_s)$  are real functions.

The fractal dimension  $DV_s$  of the particle size distribution by volume is defined then as the following:

$$DV_s = \lim_{d_s \rightarrow 0} - \frac{\ln(V_s(L > d_s))}{\ln(d_s)}$$

It implies that  $-DV_s \ln(d_s) \approx \ln(V_s(L > d_s))$  hence  $\ln(d_s^{-DV_s}) \approx \ln(V_s(L > d_s))$  and finally

$$V_s(L > d_s) \approx \gamma d_s^{-DV_s},$$

where  $\gamma$  is a constant coefficient and the sign  $\approx$  means "approximately".

On the basis of the fractal characteristics of the pore and particle structure, there were obtained theoretical models describing diffusion, deformation of the compaction and the shift of the medium [3], [4]. Under some additional conditions of fractal nature of the loess soil and developing methods introduced in [5, 6] we obtained certain predictive estimations of the coefficient of porosity after the disintegration of micro-aggregates. In this note we obtain some estimations of soil subsidence volume, based on the introduced above fractal dimension.

The particles forming the ground may have only a finite set of sizes. We denote these sizes  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$  ranging in decreasing order from the largest. We assume that  $\alpha = \alpha_j = d_j/d_{j-1}$ , where  $2 \leq j \leq n$ , does not depend on  $j$ . This assumption corresponds to the idea of the self-similarity of fractal structures. In addition, all known mathematical fractals are constructed on this principle. As the structures formed by particles of a fixed size are self-similar, we also assume that all these structures have the same coefficient of porosity  $k_p$  as well as the same porosity  $K_p = k_p/(1 + k_p)$ . We discovered that under such conditions two different situations may occurred. Let  $k'$  be the coefficient of porosity and  $K'$  be the porosity of the soil after after the disintegration of micro-aggregates.

**Theorem 1.** *In the above denotations we have :*

1. if  $K_p \geq \alpha^{DV_s}$  then  $k' = \frac{(1+k_p)(\alpha^{DV_s}-1)}{(\alpha^{DV_s})^n-1} - 1$  and  $K' = 1 - \frac{(\alpha^{DV_s})^n-1}{(1+k_p)(\alpha^{DV_s}-1)}$  ;
2. if  $K_p < \alpha^{DV_s}$  then  $k' = \frac{k_p(1-\alpha^{-DV_s})}{1-(\alpha^{-DV_s})^n}$  (5.18) and  $K' = \frac{k_p(1-\alpha^{-DV_s})}{k_p(1-\alpha^{-DV_s})+1-(\alpha^{-DV_s})^n}$  .

Since we estimate volumetric characteristics of soils subsidence, the introduced above fractal dimension of the particle size distribution by volume is more convenient and allows us essentially clarify and simplify our calculations.

The results of our experiments and calculations show that on the basis of a new theoretical models and the "Microstructure" technique, having the values of the fractal dimension of the particle size



distribution by volume, it is possible to forecast the volume deformations after the disintegration of the micro-aggregates. Depending on the type of soils and the specific experimental conditions, this may be the amount of subsidence deformation, swelling or suffusion. The details of our experiments and techniques are described in [6].

#### REFERENCES

- [1] N.R.A. Bird, E. Perrier, M. Rieu. The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions. *Eur. J. Soil Sci.*, 51: 55–63, 2000.
- [2] A. R. Russell, O. Buzzi. A fractal basis for soil-water characteristics curves with hydraulic hysteresis. *Geotechnique*, 62(3) : 269–274, 2012.
- [3] A. N Anderson, J. W. Crawford, A. B. McCartney. On Diffusion in Fractal Soil Structures. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 64 : 19-24, 2000.
- [4] Ce Wang Zhan, Zhang Yang Liu, Shi-min Fan. Geometric and fractal analysis of dynamic cracking patterns subjected to wetting-drying cycles. *Soil and Tillage Research*, 170 : 1–13, 2017.
- [5] Tatiana P. Mokritskaya, Anatoliy V. Tushev, Evgeny V. Nikulchev, Ksenia A. Samoylich. On the Fractal Characteristics of Loess Subsidence. *Contemporary Engineering Sciences*, 9(17) : 799–807, 2016.
- [6] Mokritskaya T.P., Tushev A.V., Samoylich K.A. Baranov P.N. Deformations of loess soils caused by changes in the microaggregate structure. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*.2018. <https://doi.org/10.1007/s10064-018-1361-z>

# The Shanin number and the predshanin number of $N_\tau^\varphi$ -kernel of a topological spaces

F. G. Mukhamadiev

(National University of Uzbekistan, Uzbekistan)

*E-mail:* farhod8717@mail.ru

A cardinal  $\tau \geq \aleph_0$  is said to be a caliber of the space  $X$  if for any family  $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$  of nonempty open in  $X$  sets such that  $|A| = \tau$ , there exists  $B \subset A$ , for which  $|B| = \tau$ , and  $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$ . Set  $k(X) = \{\tau : \tau \text{ is a caliber of the space } X\}$ .

The cardinal number  $\min\{\tau : \tau^+ \text{ is caliber of } X\}$  is called the Shanin number of  $X$  and denoted by  $sh(X)$ , where  $\tau^+$  is the least cardinal number from all cardinals strictly greater than  $\tau$ .

A cardinal  $\tau \geq \aleph_0$  is said to be a precaliber of the space  $X$  if for any family  $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$  of nonempty open in  $X$  sets such that  $|A| = \tau$ , there exists  $B \subset A$ , for which  $|B| = \tau$ , and  $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$  is centered. Set  $pk(X) = \{\tau : \tau \text{ is a precaliber of the space } X\}$ .

The cardinal number  $\min\{\tau : \tau^+ \text{ is precaliber of } X\}$  is called the predshanin number of  $X$  and denoted by  $psh(X)$ , where  $\tau^+$  is the least cardinal number from all cardinals strictly greater than  $\tau$ .

A system  $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$  of closed subsets of a space  $X$  is called *linked* if any two elements from  $\xi$  intersect [1].

A.V. Ivanov defined the space  $NX$  of complete linked systems (CLS) of a space  $X$  in a following way:

**Definition 1.** A linked system  $M$  of closed subsets of a compact  $X$  is called a *complete linked system* (a CLS) if for any closed set of  $X$ , the condition

“Any neighborhood  $OF$  of the set  $F$  consists of a set  $\Phi \in M$ ”

implies  $F \in M$  [2].

A set  $NX$  of all complete linked systems of a compact  $X$  is called *the space  $NX$  of CLS of  $X$* . This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of

$E = O(U_1, U_2, \dots, U_n)(V_1, V_2, \dots, V_s) = \{M \in NX : \text{for any } i = 1, 2, \dots, n \text{ there exists } F_i \in M \text{ such that } F_i \subset U_i, \text{ and for any } j = 1, 2, \dots, s, F \cap V_j \neq \emptyset \text{ for any } F \in M\}$ , where  $U_1, U_2, \dots, U_n, V_1, V_2, \dots, V_s$  are nonempty open in  $X$  sets [2].

**Definition 2.** Let  $X$  be a compact space,  $\varphi$  be a cardinal function and  $\tau$  be an arbitrary cardinal number. We call an  $N_\tau^\varphi$ -kernel of a topological space  $X$  the space

$$N_\tau^\varphi X = \{M \in NX : \exists F \in M : \varphi(F) \leq \tau\}.$$

**Theorem 3.** Let  $X$  be an infinity compact space and  $\varphi = d, \tau = \aleph_0$ . Then:

- 1)  $sh(N_\tau^\varphi X) \leq sh(X)$ ;
- 2)  $psh(N_\tau^\varphi X) \leq psh(X)$ .

## REFERENCES

- [1] Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *General Topology. Basic Constructions*. Fizmatlit, Moscow, 2006.
- [2] Ivanov A. V. Cardinal-valued invariants and functors in the category of bicomponents. *Doctoral thesis in physics and mathematics*, Petrozavodsk, 1985.

## The effectiveness of the use of computer programs in the teaching of mathematics in academic lyceums

**J. Sh. Najmiddinov**

(Academic Lyceum at the Samarkand Medical Institute, Samarkand city, Uzbekistan)

*E-mail: najmiddinov-j@inbox.uz*

The article substantiates the role of mathematics in the general education system and reveals the expediency and possibility of using a computer program in mathematics lessons in academic lyceums.

The use of computer in the learning process, in essence, is a formative experiment aimed at studying and developing new personality traits. Important for the modern period of computerization of education is the realization of the fact that the use of computer technology will make the learning process more effective if they are used as a tool of knowledge, and not the transfer of knowledge. The computer is able to realize the many benefits of technical training. Modern computer programs allow you to create texts, various types of graphics, animation with sound, video. With their help, you can simulate the objects under study and conduct experiments to study their properties, simulate processes and phenomena, etc.

Interconnected training in computer science, mathematics and physics provides an opportunity to acquaint students with the use of applied mathematical packages as a tool in solving typical problems. Modeling is one of the difficult sections in the math course. The content-structural component of the model and mathematical modeling is an important component of the discipline, which is constantly being improved, as a result of which the study of the methodology for its study has not yet been completed. At the moment there is a large number of methodical training in computer modeling, which are actively used in the lessons of mathematics.

A model is a simplified resemblance of a real object or process. A key concept in modeling is considered a goal. The purpose of the simulation is the purpose of the future model. The target determines the properties of the original object to be reproduced in the model. You can model both material objects and processes. An information model is a description of a simulation object. On the basis of the presentation of the model are divided into tabular, graphical, object-informational and mathematical.

One of the available modeling tools is the Microsoft Excel office application, since almost all computer labs have MS Office. Microsoft Excel is a spreadsheet program that allows you to analyze large amounts of data. This program uses more than 600 mathematical, financial, statistical and other specialized functions, with which you can link various tables to each other, select arbitrary data presentation formats, create hierarchical structures. Mathcad is an application for engineering and mathematical computing, an industry standard for performing, distributing and storing calculations. Mathcad is a universal system, i.e. can be used in any field of science and technology - wherever mathematical methods are used. Blender is a free program for 3D modeling. The trick in this program is that during the creation of a 3-dimensional scene, the utility window can be divided into parts, each of which will be an independent window with a certain type of 3D scene, a timeline ruler, object settings.

Thus, the construction of simple graphical models, such as solving simple mathematical problems, is appropriate in the basic course of computer science. Independent development of graphical models requires programming knowledge, and this applies to material of increased difficulty, which is studied in a specialized computer science course or as part of an elective course [1].

### REFERENCES

- [1] Korolev A.L. Computer modeling. *Laboratory of Knowledge*, - M: BINOM. 230 p. 2010.

# Gromov-Witten invariants and identification of the energy levels of solitonic states

Tetiana V. Obikhod

(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, 03028 Kiev, Ukraine)

*E-mail:* obikhod@kinr.kiev.ua

Calabi-Yau manifold can be represented in terms of toric data [1]. Such presentation allows us to go to the dual polyhedron, through which are defined the gauge groups. As an example, we can consider Calabi-Yau manifold  $X_{24}(1, 1, 2, 8, 12)_{-480}^{3,243}$  determined by Gromov-Witten invariants [2], presented in table 1. Calabi-Yau manifold is defined by  $n$  - Gromov-Witten invariants, the analogue of the principal

Table 1

Gromov-Witten invariants for  $X_{24}(1,1,2,8,12)_{-480}^{3,243}$

a, b, c	n	a, b, c	n	a, b, c	n	a, b, c	n
(0,0,1)	-1	(0,1,1)	-1	(0,1,2)	-2	(0,1,3)	-3
(0,1,4)	-4	(0,1,5)	-5	(0,2,3)	-3	(0,2,4)	-16
(1,0,0)	240	(1,0,1)	240	(1,1,1)	240	(1,1,2)	720
(1,1,3)	1200	(1,1,4)	1680	(1,2,3)	1200	(2,0,0)	240
(2,0,2)	240	(2,2,2)	240	(3,0,0)	240	(3,0,3)	240
(4,0,0)	240	(5,0,0)	240	(6,0,0)	240	(0,1,0)	0

quantum number in physics and by (a, b, c) - the internal quantum numbers.

An embedding of Gromov-Witten invariants is presented by the formula

$$n_{a,b,c} = \sum_d n_{a,b,c,d} . \quad (1)$$

Such an embedding suggests the possibility of a phase transition between different manifolds characterized by different  $n$ . In [3], for the case of an elliptic fibration representing Calabi-Yau manifolds, the matter content of the charged fields of the effective theory is associated with divisors of the base of the fibration. The representations of groups of these fields is determined by the of intersection number of these divisors, in other words, gauge groups are associated with curves of singularities of the manifold and intersecting singularity curves define charged fields classified by gauge groups. Table 2 from [3] represents such a set of fields and the corresponding groups. From table 2 it can be seen that matter content presented by gauge groups can be embedded according to formula (0.1) through transitions between gauge groups

$$E_7 \rightarrow E_6 \rightarrow SU(6) \rightarrow SU(5) \rightarrow SU(4) \rightarrow SU(3) \rightarrow SU(2) ,$$

characterized by different sets of the matter content of the charged fields.

The presence of Gromov-Witten invariants,  $n$  signals about the presence of a central charge,  $Z$  or mass,  $M$  of a solitonic object, [4]

$$e^\eta = e^{2\pi i \tau \eta}, \quad \eta = n\varphi, \quad M = Z = \int_D \Omega = n_i \varphi_i$$

**Matter content of Calabi-Yau models, characterized by gauge groups (for n=2,4,6,8,10,12)**

Group	Matter content
$SU(2)$	$(6n+16)\mathbf{2}$
$SU(3)$	$(6n+18)\mathbf{3}$
$SU(4)$	$(n+2)\mathbf{6}+(4n+16)\mathbf{4}$
$SU(5)$	$(3n+16)\mathbf{5}+(2+n)\mathbf{10}$
$SO(10)$	$(n+4)\mathbf{16}+(n+6)\mathbf{10}$
$E_6$	$(n+6)\mathbf{27}$
$E_7$	$\left(\frac{n}{2}+4\right)\mathbf{56}$

Here the holomorphic 3-form  $\Omega$  is defined on Calabi-Yau  $X$ , ( $D$  is a cycle in  $X$ ). Gromov-Witten invariants,  $n_i$  are connected with the cohomology classes,  $\varphi_i$  of rational curves in  $X$  into central charge,  $Z$ .

Solitonic objects of instanton type are characterized by the condition on the action,  $S$

$$S \geq \left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)|Q| = E$$

where

$$Q = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x Tr[F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}]$$

Pontryagin's homotopy index, defined by the Yang-Mills field strength,  $F_{\mu\nu}$ , [5]. Consequently, the central charge has an interpretation of a multiple topological quantum number or the number of the Bogomolny-Prasad-Sommerfeld, corresponding to the multiplicities of degeneration of different configurations of solitonic type in Calabi-Yau space.

#### REFERENCES

- [1] A. Klemm et al. Calabi-Yau fourfolds for M- and F-theory compactifications. *Nucl. Phys.*, B518: 515–574, 1998.
- [2] M. Bershadsky et al. Geometric singularities and enhanced gauge symmetries. *Nucl. Phys.*, B481: 215–252, 1996.
- [3] P. Candelas, E. Pevralov, G. Rajesh. Matter from toric geometry. *Nucl. Phys.*, B519: 225-238, 1998.
- [4] David R. Morrison. Gromov-Witten invariants and localization, arXiv:1608.02956 [hep-th].
- [5] R. Rajaraman. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North Holland, 418p, 1987.

# On isometries satisfying deformed commutation relations

**Olha Ostrovska**

(National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”)

*E-mail:* olyushka.ostrovska@gmail.com

**Roman Yakymiv**

(Faculty of Computer Sciences and Cybernetics, Kiev National Taras Shevchenko University)

*E-mail:* yakymiv@univ.kiev.ua

We consider certain perturbation of family of pairwise orthogonal isometries. Namely, we study properties and representation theory of  $C^*$ -algebra  $\mathcal{E}_{1,n}^q$  generated by isometries  $t, s_j, j = \overline{1, n}$ , subject to the relations

$$s_i^* s_j = 0, \quad i \neq j, \quad t^* s_j = q s_j t^*.$$

In recent paper [1] was studied the  $C^*$ -algebra  $\mathcal{E}_{n,m}^q$  with  $n, m \geq 2$ , generated by families  $\{t_j\}_{j=1}^m$  and  $\{s_i\}_{i=1}^n$ . In particular, it was shown that for  $|q| < 1$  one has  $\mathcal{E}_{n,m}^q \simeq \mathcal{E}_{n,m}^0$  and for  $|q| = 1$  the  $C^*$ -isomorphism class of quotient of  $\mathcal{E}_{n,m}^q$  by the unique largest ideal is independent of  $q$  and isomorphic to the tensor product of Cuntz algebras  $\mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_m$ .

We show that the result for  $|q| < 1$  remains true for  $\mathcal{E}_{1,n}^q$ .

**Theorem 1.** *For any  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| < 1$ , one has an isomorphism  $\mathcal{E}_{1,n}^q \simeq \mathcal{E}_{1,n}^0$ .*

Notice that the proof contains an explicit construction of the required isomorphism, which is similar to the one given in [1].

For the case  $|q| = 1$  we obtain the following facts.

**Definition 2.** The Fock representation,  $\pi_F^q$ , of  $\mathcal{E}_{1,n}^q$ , is the unique up to unitary equivalence irreducible  $*$ -representation having the vacuum vector  $\Omega$ ,  $\|\Omega\| = 1$ , such that

$$\pi_F^q(s_j^*)\Omega = 0, \quad \pi_F^q(t^*)\Omega = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

**Theorem 3.** *The Fock representation of  $\mathcal{E}_{1,n}^q$  exists and is faithful.*

**Theorem 4.** *The  $C^*$ -algebra  $\mathcal{E}_{1,n}^q$  is nuclear.*

Also we prove an analog of Wold decomposition Theorem for such family of isometries, and study irreducible representations corresponding to each of its components.

## REFERENCES

- [1] A. Kuzmin, V. Ostrovskiy, D. Proskurin and R. Yakymiv. On  $q$ -tensor product of Cuntz algebras, preprint (2019), <https://arxiv.org/abs/1812.08530>

## Three-color graph of the Morse flow on a compact surface with boundary

**Alexandr Prishlyak**

(Taras Shevchenko University of Kyiv)

*E-mail:* prishlyak@yahoo.com

**Andrei Prus**

(Taras Shevchenko University of Kyiv)

*E-mail:* asp00pr@gmail.com

We consider the Morse flows [1] (Morse-Smale flows without closed orbits) on the compact surfaces with boundary. There was constructed a complete topological invariant of these flows – an equipped three-colored graph.

The graph  $T$  will be called *three-color graph*, if all its vertices have a degree not bigger 3, and edges are painted in three colors, so that edges of different colors converge at each vertex. Colors are denoted by the letters  $s, t, u$ . [2, 3] The vertices of three-colored graph correspond to the standard areas on the surface, that look like a curvilinear triangle or quadrilateral. There were found conditions in which a three-colored graph generates a flow.

**Theorem 1.** *For a connected tricolor graph having properties*

1) *each edge of the graph is marked with one of the three letters:  $s, t, u$ , and each vertex is white or black;*

2) *two edges of the same type can not come out from each vertex;*

3) *for each black inner vertex there is a  $su$ -cycle of length 4 that contains it;*

4) *if two black vertices are connected by a  $u$ - or  $s$ - edge and one of them is bounded, then the other will be bound;*

5) *each white vertex is internal. And if it is connected to the black vertex  $u$ - edge ( $s$ - edge), then this black vertex will be the limit.*

*there exists a Morse flow on a connected surface with a boundary, the three-color graph of which is a given graph.*[1]

The number of topologically non-equivalent flows with 2, 3, 4, and 5 standard areas was calculated. For each of them, the surface on which this flow is set is determined. The distribution of the number of flows on the surfaces is shown in the table.

	2 stand.areas	3 stand.areas	4 stand.areas	5 stand.areas
Disk ( $D^2$ )	5	3	18	22
Myobius leaf		1	5	15
Myobius with a hole			2	2
Ring ( $S^1 \times I$ )	1		10	10
Ring with a hole			1	1
Klein bottle				3
Torus with a hole				1

### REFERENCES

- [1] О.О.Пришляк, А.А.Прус. Триколовый граф потока Морса на компактной поверхности с границей. // Нелінійні коливання, 2019.
- [2] В.Е. Круглов, Д.С. Малышев, О.В. Починка. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях. Матем. сб., 2018, том 209, номер 1, 100–126.

- [3] Ошемков А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса на двумерных многообразиях// Мат.сборник, 1998, Т. 189, №8. - С.93-140.



## The Ricci Iteration on Homogeneous Spheres

**Artem Pulemotov**

(School of Mathematics and Physics, The University of Queensland, St Lucia, QLD 4072, Australia)

*E-mail:* a.pulemotov@uq.edu.au

The Ricci iteration is a discrete analogue of the Ricci flow. Introduced in 2007, it has been studied extensively as a new approach to uniformisation. In this talk, we will discuss the Ricci iteration on spheres that are equipped with transitive Lie group actions. Joint work with Timothy Buttsworth (Queensland), Yanir Rubinstein (Maryland) and Wolfgang Ziller (Pennsylvania).

## The construction of squaring the circle

Veselin Rmuš

(Ministry of Education, 84300 Berane, Montenegro)

*E-mail:* veselinrmus12@gmail.com

The paper contains the original method for the construction of squaring the circle, one of the famous Greek problems more than 25 centuries old, known to be unsolvable by using only a ruler and compass. The solution of the problem is possible if the diameter of the given circle is divided by a point using the Thales theorem on proportional length in and the ratio of large real numbers. The process of solving the above-mentioned problem relies on the Euclidean geometry and contains a description of the construction, construction, proof, and discussion. The construction leading to the solution of the problem is based on the assumption that the tools (instruments) are perfectly precise and that the solution is completed if used a finite number of times.

The proof contains two derived formulas in accordance with the rules of Numerical analysis, combined into a single (universal) formula which can be used in practice. In discussion the conditions on which the problem can be solvable, as well as number of solutions are given.

1. Squaring the circle using only a straightedge and compass is possible

Description of construction:

A given circle with a central point  $O$  and radius  $r$  are denoted by  $k(O, r)$ . The length  $AB$  is diameter of an arbitrary circle  $k$ . (Fig.1) As shown by the previous method, when constructing of the length  $X = \sqrt{2}$ , we divide diameter  $AB$  by the point  $C$  in the ratio of integers 11000000 and 3005681, i.e.  $AC : CB = 11000000 : 3005681$ ,

in the following way:

On the arbitrary ray  $A_q$  we determine point  $M$  by "transferring" 11000000 arbitrary unit lengths. Then we determine the point  $N$  so that the length  $MN$  equals 3005681 arbitrary unit lengths.

Then we construct a length  $NB$ . Through the point  $M$  we draw a line  $s$  parallel to the length  $NB$ . The intersection of the line  $s$  and length  $AB$  is denoted by  $C$ . Through the point  $C$  we construct the line  $l$  so that it is parallel to the ray  $A_q$  and its intersection with the length  $NB$  we denote by the point  $L$ . (Fig. 1) The length  $AB$  is divided in the above mentioned ration by the point  $C$ .

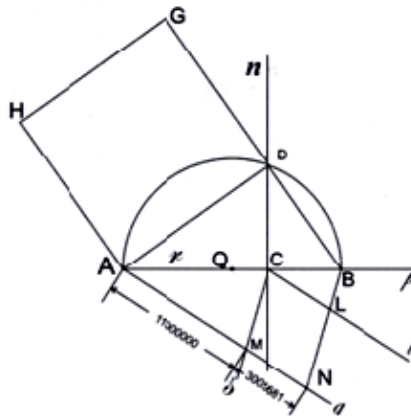


Fig.1

Triangles  $AMC$  and  $CLB$  are similar, so we can form the proportion:

$$AC : AM = CB : CL \dots (3)$$

Based on relation (3), we replace:

$$AM = 11 \cdot 106 \text{ and } MN = CL = 3005681 = 3,005681 \cdot 106$$

It follows that  $AC : CB = 11 \cdot 10^6 : 3,005681 \cdot 10^6$ , Q.E.D. (Quod erat demonstrandum)

After having it shortened with 106, we get:

$$AC : CB = 11 : 3,005681 = t \dots (4)$$

Based on relation (4)  $AC : 11 = t \Rightarrow AC = 11t$  and

$$CB : 3,005681 = t \Rightarrow CB = 3,005681t \dots (5),$$

where  $t$  is a non-negative real number, i.e.  $t > 0$  and  $t \in R$ .

Let us construct a line  $n$  through the point  $C$  to be perpendicular to the diameter  $AB$ , and denote its (one) intersection with the periphery of the circle by  $D$ . Then we draw lengths  $AD$  and  $BD$ .  $AD$  represents the side of the square whose area is equal to the area of the given circle. Then we construct the square  $ADGH$  (Figure 1).

# Riemann-Klein antagonism and problem of energy in general relativity

**S. Samokhvalov**

(DDTU, Kamyanske, Ukraine)

*E-mail:* `serg_samokhval@ukr.net`

B. Riemann and F. Klein had laid different principles at the foundation of geometry: the length principle which requires the possibility to measure the lengths of arbitrary lines no matter how they are situated, and the equality principle which is established by coincidence of figures in the space by means of transformations belonging to a group of transformations of the space - the principal group of the geometry under consideration. According to E. Cartan, there is an antagonism between these principles owing to the absence of any homogeneity in an arbitrary curved Riemannian space.

In the work [1] was constructed the group of parallel translations DP, which realizes for a Riemannian space the equality principle and has as a subgroup the group of Riemannian translations RT which realizes the length principle. Therefore, the group DP unites the two approaches laid at the foundation of geometry by B. Riemann and F. Klein, thus overcoming the Riemann - Klein antagonism.

In the present work the group of parallel translations DP is used for determination of energy-momentum tensor of gravitational field.

## REFERENCES

- [1] S. E. Samokhvalov, E. B. Balakireva. Group-theoretic matching of the length principle and equality principle in geometry. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 9 : 26-37, 2015.

# On generalized spaces of persistence diagrams

Aleksandr Savchenko

(Kherson State Agrarian University, Stretenska st., 23, Kherson, 73006, Ukraine)

*E-mail:* savchenko.o.g@ukr.net

Topological Data Analysis (TDA) is a relative new branch of applied mathematics. It provides some metric and topological structures for analyzing big data represented as point set in the euclidean spaces or more general metric (topological) spaces.

The persistent homology is one of the most important topological tools in TDA (see [1]). In order to visualize the persistent homology one uses the so-called persistence diagrams (see, e.g., [2] and the references therein). The sets of persistence diagrams bear natural metrics or topology and the studying of the metric and topological properties of the obtained spaces is important for understanding properties of the data sets.

Following [3] we consider the generalized spaces of persistence diagrams. Let  $X$  be a set. A diagram on  $X$  is a function  $D: X^2 \rightarrow \mathbb{Z} = 0$  such that  $D(p) = 0$  for all but finitely many  $p \in X^2$ , and  $D(p) = 0$  for all  $p \in \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X^2$ . In [4] it is remarked that the set  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(X)$  of all persistence diagrams can be naturally identified with the infinite symmetric product  $SP^\infty(X^2/\Delta_X)$  (with the base point  $* = \Delta_X$ ).

If  $X$  is a topological space and  $X = \varinjlim X_n$ , where  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ , then one can topologize  $\mathcal{D}$  as  $\varinjlim SP^n(X_n^2/(\Delta_X \cap X_n^2))$  having in mind a natural identification of  $[x_1, \dots, x_n] \in SP^n(X_n^2/(\Delta_X \cap X_n^2))$  with  $[x_1, \dots, x_n, *] \in SP^{n+1}(X_{n+1}^2/(\Delta_X \cap X_{n+1}^2))$ .

Our result is a generalization of one of the main results of [4]. Recall that  $\mathbb{R}^\infty$  is the direct limit of the sequence  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ . An  $\mathbb{R}^\infty$ -manifold is a  $k_\omega$ -space, which is locally homeomorphic to  $\mathbb{R}^\infty$ .

An ANR-space is an absolute neighborhood retract in the class of metrizable spaces.

**Theorem 1.** *Let  $X = \varinjlim X_n$ , where  $(X_n)$  is a sequence of finite-dimensional compact metrizable ANR-spaces. If  $\dim X > 0$ , then the space  $\mathcal{D}(X)$  is an  $\mathbb{R}^\infty$ -manifold.*

One can also find some sufficient conditions on  $X$  such that the space  $\mathcal{D}(X)$  is a  $Q^\infty$ -manifold, where  $Q$  is the Hilbert cube and  $Q^\infty$  is the direct limit of the sequence

$$Q = Q \times \{*\} \hookrightarrow Q \times Q = Q \times Q \times \{*\} \hookrightarrow Q \times Q \times Q = \dots,$$

for an arbitrary  $* \in Q$ .

The proofs are based on Sakai's Characterization Theorem for  $\mathbb{R}^\infty$  and  $Q^\infty$  (see [5]).

## REFERENCES

- [1] G. Carlsson. Topology and data. *Bull. Amer. Math. Soc.* 46:255–308, 2009.
- [2] M. Carrière, M. Cuturi, S. Oudot. Sliced Wasserstein Kernel for Persistence Diagrams. arXiv:1706.03358
- [3] Greg Bell, Austin Lawson, C. Neil Pritchard, Dan Yasaki. The space of persistence diagrams has infinite asymptotic dimension. arXiv:1902.02288
- [4] V. Kiosak, A. Savchenko, M. Zarichnyi. Strong topology on the set of persistence diagrams. (Submitted)
- [5] K. Sakai. On  $\mathbb{R}^\infty$  and  $Q^\infty$ -manifolds. *Topol. Appl.* Volume 18, Issue 1, 69–79, 1984.

## Continual approximate solution with acceleration and condensation mode

Olena Sazonova

(V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine)

*E-mail:* olena.s.sazonova@karazin.ua

The kinetic equation Boltzmann is the main instrument to study the complicated phenomena in the multiple-particle systems, in particular, rarefied gas. This kinetic integro-differential equation for the model of hard spheres has a form [1, 2]:

$$D(f) = Q(f, f), \quad (1)$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2)$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| [f(t, v'_1, x) f(t, v', x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \quad (3)$$

We will consider the continual distribution [3]:

$$f = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(v, u, x, t) du, \quad (4)$$

which contains the local Maxwellian of special form describing the acceleration and condensation flows of a gas (is an analogue of vortices) [4]. They have the form:

$$M(v, u, x, t) = \rho_0 e^{\beta((u - [\omega \times t])^2 + 2[\omega \times x])} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v - u - [\omega \times t])^2}. \quad (5)$$

The purpose is to find such a form of the function  $\varphi(t, x, u)$  and such a behavior of all hydrodynamical parameters so that the uniform-integral remainder [3, 4]

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \quad (6)$$

or its modification "with a weight":

$$\tilde{\Delta} = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + |t|} \int_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \quad (7)$$

tends to zero.

Also some sufficient conditions to minimization of remainder  $\Delta$  or  $\tilde{\Delta}$  are found. The obtained results are new and may be used with the study of evolution of screw and whirlwind streams.

### REFERENCES

- [1] C. Cercignani. *The Boltzman Equation and its Applications*. New York: Springer, 1988.
- [2] M.N. Kogan. *The dynamics of a Rarefied Gas*. Moscow: Nauka, 1967.
- [3] V.D. Gordevskyy, E.S. Sazonova. Continuum analogue of bimodal distributions. *Theor. Math. Phys.*, 171(3) : 839–847, 2012.
- [4] V.D. Gordevskyy. Vortices in a Gas of Hard Spheres. *Theor. Math. Phys.*, 135(2) : 704–713, 2003.

## Approximation by Fourier sums and interpolation trigonometric polynomials in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness

**A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko**

(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Let  $C$  and  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , be the spaces of  $2\pi$ -periodic functions with the standart norms  $\|\cdot\|_C$  and  $\|\cdot\|_p$ . Further, let  $W_{\beta,p}^r$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , be the sets of all  $2\pi$ -periodic functions  $f$ , representable as convolutions of the form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \perp 1, \quad \|\varphi\|_p \leq 1, \quad (1)$$

where  $B_{r,\beta}(\cdot)$  are Weyl-Nagy kernels of the form

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

The classes  $W_{\beta,p}^r$  are called as Weyl-Nagy classes (see, e.g., [1]). If  $r \in \mathbb{N}$  and  $\beta = r$ , then the functions of the form (8) are the well-known Bernoulli kernels and the classes  $W_{\beta,p}^r$  coincide with the well-known classes  $W_p^r$ , which consist of  $2\pi$ -periodic functions with absolutely continuous derivatives up to  $(r-1)$ -th order inclusive and such that  $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$  and  $f^{(r)}(x) = \varphi(x)$  for almost everywhere  $x \in \mathbb{R}$ , where  $\varphi$  is the function from (10).

For arbitrary  $\mathfrak{N} \subset X$ , where  $X = C$  or  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , we consider the quantity

$$\varepsilon_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_X, \quad (3)$$

where  $S_{n-1}(f; x)$  is the partial Fourier sum of order  $n-1$  of the function  $f$ .

In the case of Weyl-Nagy classes  $W_{\beta,\infty}^r$  and  $X = C$  for the exact upper bounds (3) the following asymptotic estimate holds

$$\varepsilon_n(W_{\beta,\infty}^r)_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

For  $r \in \mathbb{N}$  and  $\beta = r$  this estimate was obtained by A.N. Kolmogorov (1935), for arbitrary  $r > 0$  by V.T. Pinkevich (1940) and S.M. Nikol'skii (1941). In the general case the estimate (4) follows from results, which were obtained in the works of A.V. Efimov (1960) and S.A. Telyakovskii (1961). It should be also noticed, that a similar asymptotic equality holds for the classes  $W_{\beta,1}^r$  in the metric of the space  $L_1$ . In these works the parameters  $r$  and  $\beta$  of the Weyl-Nagy classes were assumed to be fixed, and the question about the dependence of the remainder term in the estimate (4) on these parameters was not considered.

The character of the dependence on  $r$  and  $\beta$  of the remainder term in estimate (4) was investigated by I.G. Sokolov (1955), S.G. Selivanova (1955), G.I. Natanson (1961), S.A. Telyakovskii (1968, 1989) and S.B. Stechkin (1980). In the work of S.B. Stechkin [2] the asymptotic behavior, as  $n \rightarrow \infty$  and  $r \rightarrow \infty$ , of the quantities  $\varepsilon_n(W_{\beta,\infty}^r)_C$  was completely investigated. Besides, S.B. Stechkin [2, theorem 4] proved that for rapidly growing  $r$  the remainder can be improved. Namely, for arbitrary  $r \geq n+1$

and  $\beta \in \mathbb{R}$  the following equality holds:

$$\varepsilon_n(W_{\beta,\infty}^r)_C = \frac{1}{n^r} \left( \frac{4}{\pi} + O(1) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-r} \right), \quad (5)$$

where  $O(1)$  is a quantity uniformly bounded with respect to  $n, r$  and  $\beta$ . If  $r/n \rightarrow \infty$ , then the estimate (5) becomes the asymptotic equality. It also follows from [2] that for the quantity  $\varepsilon_n(W_{\beta,1}^r)_{L_1}$  the analogous estimate to (5) takes place. S.A. Telyakovskii (1989) showed that the remainder in formulas (5) can be replaced by a smaller one, namely, write  $O(1)(1 + 2/n)^{-r}$  instead of  $O(1)(1 + 1/n)^{-r}$ .

We establish generalized analogs of estimates (5) for quantities  $\varepsilon_n(W_{\beta,p}^r)_C$  and  $\varepsilon_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p}$ , respectively, for arbitrary values  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Theorem 1.** *Let  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ . Then for  $r \geq n + 1$  the following estimates hold:*

$$\varepsilon_n(W_{\beta,p}^r)_C = \frac{1}{n^r} \left( \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} + O(1) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-r} \right), \quad (6)$$

$$\varepsilon_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p} = \frac{1}{n^r} \left( \frac{\|\cos t\|_p}{\pi} + O(1) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-r} \right), \quad (7)$$

where  $1/p + 1/p' = 1$  and  $O(1)$  are quantities uniformly bounded in all analyzed parameters. The estimates (6) and (7) are the asymptotic equalities, as  $r/n \rightarrow \infty$ .

Let  $f \in C$ . By  $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$  we denote a trigonometric polynomial of degree  $n - 1$ , that interpolates  $f(x)$  at the equidistant nodes  $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , i.e., such that  $\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

For  $\mathfrak{N} \subset C$  and  $X = C$  or  $X = L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , consider the following approximative characteristic

$$\tilde{\varepsilon}_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - \tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)\|_X. \quad (8)$$

The problems of finding of asymptotic behavior for quantity of the form (8) in important functional classes  $\mathfrak{N}$  was investigated by S.M. Nikol'skii, V.P. Motornyi, A.I. Stepanets, A.S. Serdyuk, and others.

The following statement is true [3].

**Theorem 2.** *Let  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ . Then for  $r \geq n + 1$  the following estimates hold:*

$$\tilde{\varepsilon}_n(W_{\beta,p}^r)_C = \frac{1}{n^r} \left( \frac{2}{\pi} \|\cos t\|_{p'} + O(1) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-r} \right), \quad (9)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p} = \frac{1}{n^r} \left( \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}} \|\cos t\|_p^2 + O(1) \left( \frac{1}{n} + \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-r} \right) \right), \quad (10)$$

where  $1/p + 1/p' = 1$  and  $O(1)$  are quantities uniformly bounded in all analyzed parameters. The estimates (9) and (10) are the asymptotic equalities, as  $r/n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Comparing formulas (6), (7), (9) and (10) we see that

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_n(W_{\beta,p}^r)_C &\sim 2\varepsilon_n(W_{\beta,p}^r)_C, \\ \tilde{\varepsilon}_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p} &\sim \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{\frac{1}{p}}} \|\cos t\|_p \varepsilon_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p}, \end{aligned}$$

as  $r/n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .



## REFERENCES

- [1] A.I. Stepanets. *Methods of Approximation Theory*, Utrecht, VSP, 2005.
- [2] S. B. Stechkin. An estimation of the remainders of the Fourier series of differentiable functions. *Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 145, 126–151, 1980.
- [3] A.S. Serdyuk, I.V. Sokolenko. Approximation by interpolation trigonometric polynomials in metrics of the spaces  $L_p$  on the classes of periodic integer functions, *Ukr. Mat. Zh.*, Vol. 71, no 2, 283 – 292, 2019.

## Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums

**Anatoly Serdyuk**

(Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* serdyuk@imath.kiev.ua

**Tetiana Stepanyuk**

(Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM) Austrian Academy of Sciences, Linz, Austria; Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

*E-mail:* tania\_stepaniuk@ukr.net

Let  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , be the space of  $2\pi$ -periodic functions  $f$  summable to the power  $p$  on  $[0, 2\pi)$ , in which the norm is given by the formula  $\|f\|_p = \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ ; and  $C$  be the space of continuous  $2\pi$ -periodic functions  $f$ , in which the norm is specified by the equality  $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$ .

Denote by  $C_\beta^{\alpha,r} L_p$ ,  $\alpha > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , the set of all  $2\pi$ -periodic functions, representable for all  $x \in \mathbb{R}$  as convolutions of the form (see, e.g., [1, p. 133])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \perp 1, \quad \varphi \in L_p, \quad (1)$$

where  $P_{\alpha,r,\beta}(t)$  are generalized Poisson kernels

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \alpha, r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

If the functions  $f$  and  $\varphi$  are related by the equality (1), then function  $f$  in this equality is called generalized Poisson integral of the function  $\varphi$ . The function  $\varphi$  in equality (1) is called as generalised derivative of the function  $f$  and is denoted by  $f_\beta^{\alpha,r}$ .

Let  $E_n(f)_{L_p}$  be the best approximation of the function  $f \in L_p$  in the metric of space  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  by the trigonometric polynomials  $t_{n-1}$  of degree  $n-1$ , i.e.,

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_{L_p}.$$

Our aim is to obtain of asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities, for functions from the class  $C_\beta^{\alpha,r} L_p$ , where norms  $\|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C$  are estimated via best approximations  $E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}$  for  $0 < r < 1$  and  $1 \leq p < \infty$ . Here  $S_{n-1}(f; \cdot)$  is the partial Fourier sums of order  $n-1$  for a function  $f$ . For  $r \geq 1$  such inequalities were established in [1]–[3].

For arbitrary  $\alpha > 0$ ,  $r \in (0, 1)$  and  $1 \leq p < \infty$  we denote by  $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$  the smallest integer  $n$  such that

$$\frac{1}{\alpha r} \frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r p}{n^{1-r}} \leq \begin{cases} \frac{1}{14}, & p = 1, \\ \frac{1}{(3\pi)^3} \cdot \frac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty. \end{cases}$$

We use Gauss hypergeometric function  $F(a, b; c; d)$  of the form

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

where  $(x)_k$  is the Pochhammer symbol, defined by  $(x)_k := x(x+1)\dots(x+k-1)$ .

We showed that the following theorems hold.

**Theorem 1.** Let  $0 < r < 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $1 < p < \infty$ , and  $n \in \mathbb{N}$ . Then for any function  $f \in C_{\beta}^{\alpha,r} L_p$  and  $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ , the following inequality is true:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C &\leq e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left( \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left( \frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) + \right. \\ &+ \gamma_{n,p} \left( \left( 1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} \frac{1}{n^r} \right) \left. E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \right. \end{aligned} \quad (2)$$

where  $F(a, b; c; d)$  is Gauss hypergeometric function.

Moreover for any function  $f \in C_{\beta}^{\alpha,r} L_p$  one can find a function  $F(x) = F(f; p; n; x)$ , such that  $E_n(F_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p} = E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}$  and for  $n \geq n_0(\alpha, r, p)$  the following equality is true

$$\begin{aligned} \|F(\cdot) - S_{n-1}(F; \cdot)\|_C &= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left( \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left( \frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) + \right. \\ &+ \gamma_{n,p} \left( \left( 1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} \frac{1}{n^r} \right) \left. E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \right. \end{aligned} \quad (3)$$

In (2) and (3) the quantity  $\gamma_{n,p} = \gamma_{n,p}(\alpha, r, \beta)$  is such that  $|\gamma_{n,p}| \leq (14\pi)^2$ .

**Theorem 2.** Let  $0 < r < 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Then, for any  $f \in C_{\beta}^{\alpha,r} L_1$  and  $n \geq n_0(\alpha, r, 1)$ , the following inequality holds:

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C \leq e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left( \frac{1}{\pi \alpha r} + \gamma_{n,1} \left( \frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_1}. \quad (4)$$

Moreover for any function  $f \in C_{\beta}^{\alpha,r} L_1$  one can find a function  $F(x) = F(f; n, x)$  in the set  $C_{\beta}^{\alpha,r} L_1$ , such that  $E_n(F_{\beta}^{\alpha,r})_{L_1} = E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_1}$  and for  $n \geq n_0(\alpha, r, 1)$  the following equality holds

$$\|F(\cdot) - S_{n-1}(F; \cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left( \frac{1}{\pi \alpha r} + \gamma_{n,1} \left( \frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_1}. \quad (5)$$

In (4) and (5), the quantity  $\gamma_{n,p} = \gamma_{n,p}(\alpha, r, \beta)$  is such that  $|\gamma_{n,p}| \leq (14\pi)^2$ .

#### Acknowledgements

The first author is partially supported by the Grant H2020-MSCA-RISE-2014 project number 645672 (AMMODIT: Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools) and the second author is supported by the Austrian Science Fund FWF project F5506-N26 (part of the Special Research Program (SFB) ‘‘Quasi-Monte Carlo Methods: Theory and Applications’’) and partially is supported by grant of NAS of Ukraine for groups of young scientists (project No16-10/2018).

#### REFERENCES

- [1] Stepanets A.I. *Methods of Approximation Theory*. VSP: Leiden, Boston, 2005.
- [2] Musienko, A.P., Serdyuk, A.S. Lebesgue-type inequalities for the de la Vallée-Poussin sums on sets of entire functions. *Ukr. Math. J.*, 65(5):709–722, 2013.
- [3] Musienko, A.P., Serdyuk, A.S. Lebesgue-type inequalities for the de la Vallée-Poussin sums on sets of analytic functions. *Ukr. Math. J.*, 65(4): 575–592, 2013.

## Spaces of primitive elements in dual modules over Steenrod algebra 2

Alexander N. Vasilchenko

(19 Cheluskintsev, apt.32, Samara)

*E-mail:* vass-alexandr@yandex.ru, phone +78463027287, +79372076904

I present a way to generate all primitive elements  $PB(n)$  in  $B(n) = (A(n-1)/A(n))^*$  modules over  $A^*$  dual Steenrod algebra, where  $A(n)$  are annihilator modules over Steenrod algebra  $A$ . This work began in [7]. For useful notions see also [1, 2, 3, 4] and references summarized in [8, 5, 6, 7]. The filtration described in [6] Theorem 1 property 2 and 3 yields  $PB(n) = \bigcup_t PB(n)_t$  and  $PB(n)_t = \bigoplus_s PB(n)_t^s$ , where  $s$  is the number of  $\tau$  operations and  $t$  is the biggest index of such operations. From Theorem 1 [7] property 5 and 1 it is known  $\dim PB(n)_t^{s,deg} \leq 1$  and the following diagram is exact

$$0 \rightarrow PC(n)_{k-1} \xrightarrow{\iota_k} PC(n)_k \xrightarrow{\lambda_k} PC(n-1)_{k-1}$$

For given  $\alpha \in PB(n-1)_{t-1}$  how to find a primitive  $\alpha' \in PB(n)_t$  such that  $\pi_t(\alpha') = \alpha$ ? Properties 2 and 6 state for even  $n$  that  $PB(n)_{-1} = PB(n)_0 = \langle \xi_1^{n/2} \rangle$ ; and for odd  $n$ :  $PB(n)_0 = \langle \xi_1^{(n-1)/2} \tau_0 \rangle$  and for  $s \geq 1$  that  $\alpha \tau_0$  is also a primitive. And we can generate new primitives taking products of primitives. Do all primitives in  $PB(n)_k^1 \setminus PB(n)_0^1$  also have form  $\alpha \tau_0$ ? So  $\alpha \tau_1 \in B(n)$  yields coproduct  $\phi^*(\alpha \tau_1) = \phi^*(\alpha)(\xi_1 \otimes \tau_0 + 1 \otimes \tau_1)$  and hence  $\alpha \tau_1$  is primitive if and only if  $\alpha = \alpha' \tau_0 \in PB(n-1)$ . If  $\alpha \in PB(n)_{-1}$  then  $\alpha \tau_1 = \xi_1^{n/2} \tau_1$  is not primitive. But for example product of not primitive  $\alpha = \xi_1^{(n-1)/2} + \tau_0 \xi_2^{(n-1)/2} \in B(n)_0^1$  with primitive  $\tau_0$  is primitive. The primitivity condition in  $B(n)$  leads to the following inductive definition of transformations  $R_i$  generating primitives, preserving primitivity.

**Definition 1.**

$$R_k(\alpha) = \xi_1^{\frac{p^{k-1}-1}{p-1}} \tau_k \alpha - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_1^{\frac{p^{k-1}-p^i}{p-1}} \xi_{k+1-i}^{p^{i-1}} R_i(\alpha)$$

for  $k > 1$  and  $R_0(\alpha) = \alpha \tau_0$ ,  $R_1(\alpha) = \alpha \tau_1$

These maps have the following properties.

- Theorem 2.**
- (1)  $\forall i, k \in N, \forall \alpha \in B: R_i(\alpha \tau_k) = -R_i(\alpha) \tau_k$
  - (2)  $\forall i, k \in N, \forall \alpha \in B: R_i(\alpha \xi_k) = R_i(\alpha) \xi_k$
  - (3)  $\forall i, j \in N, \forall \alpha \in B: R_i R_j(\alpha) = -R_j R_i(\alpha)$
  - (4)  $\forall \alpha \in PB(n) \cap Im R_0: R_i(\alpha) \in PB(n+1+2\frac{p^{i-1}-1}{p-1})$

**Remark 3.** From the definition 1:  $R_i(\alpha) = \alpha R_i(1)$ . Therefore by induction  $R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_k}(\alpha) = \alpha R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_k}(1)$ . And for example  $R_2(1), R_3(1)$  e.t.c. are primitives in  $B(n)^1$ .

Therefore all primitives have form  $\alpha \tau_0$  except  $PB(n)_k^1 \setminus PB(n)_0^1$ . Induction arguments based on Theorem 1 [7] lead to the general form of primitive elements.

**Definition 4.**  $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \xi_1^l \tau_{i_1} \tau_{i_2} \dots \tau_{i_k} + \beta$  is a primitive in  $PB(n)_{i_k}^k$  associated with  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ ,  $i_k > i_{k-1} > \dots > i_1 = 0$  if it has projection on  $J(n)^{k,deg} = B(n)^{k,deg} / (I \cap B(n)^{k,deg})$  equal  $a \xi_1^l \tau_{i_1} \tau_{i_2} \dots \tau_{i_k}$ ,  $l = \frac{n-k}{2}$ ,  $a \in Z/p$ .

**Corollary 5.** *There exists the primitive  $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  associated with  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ ,  $i_k > i_{k-1} > \dots > i_1 = 0$  and it is satisfied  $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k} \xi_1^l = R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_k}(1)$ .*

**Remark 6.** Corollary 5 also presents a way to calculate all associated primitives.

The following theorem is a result of construction of all primitive elements in  $B(n)$ .

**Theorem 7.** All  $PB(n)^{s,deg}$  in  $PB(n) = \cup_k PB(n)_k$  where  $PB(n)_k = \oplus PB(n)_k^s$  are zero or one dimensional spaces.  $PB(n)^{s,deg}$  has dimension one if and only if there is a sequence  $(i_1, i_2, \dots, i_t)$ ,  $i_s > i_{s-1} > \dots > i_1 = 0$  with conditions

- (1)  $n - s$  is even,
- (2) degree of  $PB(n)^{s,deg}$  is  $deg = (p - 1)(n - s) + \sum_{j=1}^s dim(\tau_{i_j})$ ,
- (3)  $\frac{n-s}{2} \geq l$ , where  $l$  is calculated below:
- (4)  $l = \sum_{j=2}^s \frac{p^{i_j-1}-1}{p-1} - \sum_{j=2}^{s-1} \frac{p^{i_j-1}}{p-1}$ ,

When  $\frac{n-s}{2} = l$

$$PB(n)^{s,deg} = \langle \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_s} \rangle$$

When  $\frac{n-s}{2} > l$

$$PB(n)^{s,deg} = \langle \xi_1^{\frac{n-s}{2}-l} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_s} \rangle$$

where  $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_s} = \xi_1^{i_1} \tau_{i_1} \tau_{i_2} \dots \tau_{i_s} + \beta$  is the primitive in  $B(n)_{i_s}^s$  associated with the sequence  $(i_1, i_2, \dots, i_t)$ ,  $i_s > i_{s-1} > \dots > i_1 = 0$  with conditions 1,2,4 mentioned above and  $\frac{n-s}{2} = l$ .

Knowledge of primitive elements on  $B(n) = (A(n-1)/A(n))^*$  make a feasible to find all indecomposable elements of  $(A(n-1)/A(n))$  [8, sec 4] .

#### REFERENCES

- [1] H. Cartan. Algebres d'Eilenberg-MacLane at Homotopie. *Seminare Cartan ENS*, 7e, 1954–1955.
- [2] J. Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Annals of Mathematics*, 67 : 150–171, 1958.
- [3] J. Milnor, J. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Annals of Mathematics*, 81 : 211–264, 1965.
- [4] N. Steenrod, D. B. A. Epstein. *Cohomological Operations*, Princeton University Press, 1962.
- [5] A. Н. Васильченко. Свойства дуальных модулей над алгеброй Стиррода. Abstracts of the International Conference «Geometry in Odessa» – 2014, Odessa the 26th of May – the 31st of May 2014: p.26
- [6] A. Н. Васильченко. Свойства дуальных модулей над алгеброй Стиррода. Abstracts of the International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis» 2017, Odessa the 31st of May – the 6 June 2017: p.96
- [7] A. Н. Vasilchenko. Spaces of primitive elements in dual modules over Steenrod algebra. Abstracts of the International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis» 2019, Odessa the 31st of May – the 6 June 2018: p.96
- [8] A. Н. Васильченко. Свойство дуальных модулей над алгеброй Стиррода. *Вестник СамГУ* 7(118) : 9–16, 2014.

## A Geometrical Version of the Maxwell-Vlasov Hamiltonian Structure

**Michel Vittot**

(Centre de Physique Théorique (CPT), CNRS, Aix-Marseille Université, UMR 7332, Luminy, 13288 Marseille cedex 9, France)

*E-mail:* vittot@cpt.univ-mrs.fr

**P. J. Morrison**

(Department of Physics and Institute for Fusion Studies, The University of Texas at Austin, Austin, TX, 78712, USA)

*E-mail:* morrison@physics.utexas.edu

We present a geometrization of the Hamiltonian approach of classical electrodynamics, via (non-canonical) Poisson structures. This relativistic Hamiltonian framework (introduced by Morrison, Marsden, Weinstein) is a field theory written in terms of differential forms, independently of the gauge potentials. This algebraic and geometric description of the Vlasov kinetics is well suited for a perturbation theory, in a strong inhomogeneous magnetic field (expansion in  $1/|B|$ , with all the curvature terms...), like in magnetically confined plasmas, and in any coordinates, for instance adapted to a Tokamak (toroidal coordinates, or else...).

## Note on congruent numbers

Marek Wójtowicz

(Instytut Matematyki, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego 85-072 Bydgoszcz, Pl. Weyssenhoffa 11, Poland)

*E-mail:* mwojt@ukw.edu.pl

A positive integer  $A$  is said to be a *congruent number* if  $A$  is the area of a right triangle with rational sides. One may consider only  $A$  square-free.

In 1998, F. R. Nemenzo [3] listed all congruent numbers less than 40 000, and non-congruent numbers were studied by F. Lemmermeyer [2] and W. Cheng and X. Guo [1] among others.

I will present short proof of the following

**Theorem 1.** *Every positive integer  $A$  fulfilling the Diophantine equation*

$$A^2 = x^2 + y^4$$

*is a congruent number.*

### REFERENCES

- [1] W. Cheng, X. Guo. *Some new families of non-congruent numbers*, J. Numb. Theory 196 (2019), 291–305.
- [2] F. Lemmermeyer. *Some families of non-congruent numbers*, Acta Arith. 110 (2003)
- [3] F. R. Nemenzo. *All congruent numbers less than 40000*, Proc. J. Acad. 74 (1998), 29–31.

# Про число топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на двовимірному торі

Кадубовський О.А.

(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ, Україна)

E-mail: kadubovs@ukr.net

Нехай  $M_g$  – замкнена гладка орієнтовна поверхня роду  $g \geq 0$ , а  $C_{k,l}(M_g)$  – клас гладких функцій на  $M_g$  (з трьома критичними значеннями), які мають точно  $k$  локальних мінімумів (максимумів),  $l$  локальних максимумів (мінімумів) та одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить  $1 - n = 2 - 2g - k - l$  (напр. [6], [7]).

Через  $C_n(M_g)$  позначимо клас гладких функцій на  $M_g$  (з трьома критичними значеннями), які окрім локальних мінімумів та локальних максимумів мають лише одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить  $1 - n = 2 - 2g - \lambda$ , де  $\lambda \geq 2$  — сумарне число локальних мінімумів та максимумів.

Функції  $f_1$  і  $f_2$  з класу  $C_n(M_g)$  називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми  $h : M_g \rightarrow M_g$  і  $h' : R^1 \rightarrow R^1$  ( $h'$  зберігає орієнтацію), такі що  $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$ .

Якщо  $h$  зберігає орієнтацію, то функції  $f_1$  та  $f_2$  називають топологічно спряженими (напр. [6]) або ж  $O$ -топологічно еквівалентними (напр. [7]).

В загальному випадку, для довільних натуральних  $g, k, l$  (або ж  $k, l$  і  $n = 2g + k + l - 1$ , тобто для функцій з фіксованим сингулярним типом), задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_g)$  виявилась досить важкою та нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Серед найбільш суттєвих просувань в цьому напрямі слід відзначити наступні.

Задачу про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,1}(M_g)$  (для довільного роду  $g \geq 1$ ) повністю розв'язано в роботі [7].

Одержані в роботі [2] точні формули цілком вирішують питання про підрахунок числа як  $O$ -топологічно нееквівалентних, так і числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_n(M_0)$ .

В роботі [8] для довільних натуральних  $k$  і  $l$  повністю розв'язані задачі про підрахунок числа  $O$ -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_0)$ .

Як з'ясувалося ([1] з посиланням на роботу [4]), задача про перерахування одноклітинкових двокольорових карт з  $n$  ребрами (одне з яких є поміченим),  $k$  білими та  $l$  чорними вершинами тісно пов'язана із задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_g)$ . Відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [4] та роботі [1].

Так, наприклад, з урахуванням результатів роботи [1], для довільного роду  $g \geq 0$  та натуральних  $k$  і  $l$ , при яких  $n = 2g + k + l - 1$  є **простим** числом, в [10] наведено точні формули для підрахунку числа  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_g)$ .

Для двовимірного тору  $T^2 = M_1$  задачі про підрахунок числа  $O$ -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій повністю розв'язані лише на класах  $C_{1,l}(T^2)$  ( $C_{k,1}(T^2)$ ) в роботі [9] та  $C_{2,l}(T^2)$  ( $C_{k,2}(T^2)$ ) в роботі [11].

В загальному випадку — для фіксованих натуральних  $k$  і  $l$  — задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(T^2)$  також залишається нерозв'язаною.

Якщо ж розглянути (більш ємний) клас функцій  $C_n(T^2)$ , то, з урахуванням результатів робіт [1], [5] і [3], можна встановити справедливості наступного твердження

**Theorem 1** (основна). Число  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_n(T^2)$  можна обчислити за формулою

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{6} C_{n-1}^2 C_{2(n-1)}^{n-1} + a(n) + 2b \left( \frac{2n}{3} \right) + 2c \left( \frac{n}{2} \right) + 2d \left( \frac{n}{3} \right) \right), \quad (1)$$

$$\text{де } n \geq 3, u(p) = \frac{(2p)!}{p!p!} = C_{2p}^p,$$

$$a(2p+1) = 0, \quad a(2p) = \frac{p(p-1)}{6} \cdot C_{2p}^p = \frac{p(p-1)}{6} \cdot u(p);$$

$$c(2p+1) = 0, \quad c(2p) = p \cdot C_{2p}^p = p \cdot u(p);$$

$$d(2p+1) = 0, \quad d(2p) = p \cdot C_{2p}^p = p \cdot u(p);$$



$$b(2p+1) = 0, \quad b(2p) = (2p-1) \cdot C_{2(p-1)}^{p-1} = (2p-1) \cdot u(p-1).$$

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$t^*(n)$	1	4	14	76	330	1 522	6 680	29 256	125 970	539 292	2 288 132	9 659 416

TABLE 1.1. Початкові значення числа  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_n(T^2)$

На думку автора, цілком досяжним є одержання точних формул для підрахунку й числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_n(T^2)$ .

#### REFERENCES

- [1] Адрианов Н.М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.
- [2] Callan D., Smiley L. Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
- [3] Cori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams. *Theoretical Computer Science*, 204 : 55–73, 1998.
- [4] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.
- [5] Goupil A., Schaeffer G. Factoring  $n$ -cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.
- [6] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. *Topology and its Applications*, 119(3) : 257–267, 2002.
- [7] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.
- [8] Кадубовский А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. *Труды международного геометрического центра*, 8(1) : 46–61, 2015.
- [9] Кадубовський О.А., Баляса Н.П. Перерахування двокольорових хордових  $O$ -діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та дієдральної груп. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*, 6 : 31–46, 2016.
- [10] Кадубовський О.А. До задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на орієнтовних поверхнях. *XII Літня школа «Алгебра, топологія, аналіз» 10 – 23 липня 2017 р.*, село Колочава, Закарпатська обл., Міжгірський район, Україна: Тези доповідей. Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С. 4–5. 55 с.
- [11] Кадубовський О.А., Калініченко Я.В. Перерахування двокольорових хордових  $O$ -діаграм роду 1, які мають два чорних (або сірих) циклів, відносно дії групи дієдра. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*, 8 : 30–45, 2018.

## Щодо геометричної характеристики спеціальних майже геодезичних перетворень просторів афінного зв'язку зі скрутом

Ладиненко Лада Павлівна

(ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна)

*E-mail:* kolyalada74@gmail.com

Розглядаються простори  $A^n$  класу  $C^r$  ( $n > 2, r > 1$ ) афінного зв'язку зі скрутом. Крива  $L$  називається майже геодезичною лінією простору  $A^n$ , якщо існує такий компланарний вздовж  $L$  двовимірний розподіл, якому у кожній точці належить дотичний вектор цієї кривої, [1]. З точки зору теорії кривини кривих у просторах афінного зв'язку, майже геодезичні лінії характеризуються як криві, перша кривина яких є довільною, а друга і всі наступні кривини тотожно дорівнюють нулю.

Нескінченно мале перетворення

$$\tilde{x}^h = x^h + \varepsilon \xi^h(x^1; x^2; \dots; x^n)$$

простору  $A^n$  називається майже геодезичним перетворенням, якщо у наслідок такого перетворення кожна геодезична лінія простору  $A^n$  переходить у криву, яка, нехтуючи доданками другого і більш високих порядків малості відносно параметру  $\varepsilon$ , є майже геодезичною лінією простору  $A^n$ .

Існують три типи майже геодезичних перетворень просторів афінного зв'язку зі скрутом, [2]. Перетворення другого типу  $\Pi_2$  характеризується тим, що у результаті таких перетворень геодезичні лінії переходять у криві, які, у головному, є майже геодезичними лініями спеціального виду, так званими  $F$ -кривими, визначеними спеціальним аффіном  $F$ , [2].

Досліджено перетворення типу  $\Pi_2$ , які задовольняють умову взаємності, у тому розумінні, що обернені для них перетворення також є майже геодезичними перетвореннями типу  $\Pi_2$ , що відповідають тому ж самому аффіну. Для спеціальних перетворень типу  $\Pi_2$  знайдені диференціально-алгебраїчного характеру обмеження на аффіно  $F$ , які визначають такі перетворення, як перетворення, що, у головному, зберігають клас відповідних  $F$ -кривих. Наведені необхідні приклади.

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Синюков Геодезические отображения римановых пространств., // М.: Наука, 1979, 256 с.,
- [2] Н. С. Синюков, Н. В. Яблонская Группы Ли обобщенных симметрий пространств аффинной связности // *Всесоюз. симпозиум по теории симметрии и её обобщениям.* Кишинев, 1980, С. 99-100.

## Життєвий та науковий шлях Марка Григоровича Крейна

Овчаренко Олена Валеріївна

(Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»)

*E-mail: lena\_rum@ukr.net*

Народився М.Г. Крейн 3 квітня 1907 року в Києві в багатодітній (мав трьох братів та двох сестер) ремісничій родині. Зацікавлення математикою проявилось з ранніх років. В тринадцятирічному віці почав слухати лекції одного з молодих тоді вихованців знаменитої Київської алгебраїчної школи – професора Бориса Миколайовича Делоне (згодом члена-кореспондента академії наук СРСР). З 14 років починає брати участь у роботі Київського алгебраїчного семінару професора Дмитра Олександровича Граве. В сімнадцятирічному віці переїздить до Одеси. За однією з версій причиною переїзду було бажання почати самостійне доросле життя і вступ до Одеського циркового училища. Але тут чекала відмова і юнак почав замислюватися над кар'єрою моряка. Більш ймовірною причиною переїзду до Одеси було те, що за два роки до цього у 1922 році до Одеси переїхав працювати вихованець Київської алгебраїчної школи – Микола Григорович Чеботарьов. Після виступу М.Г. Крейна на семінарі М.Г. Чеботарьова з доповіддю про свої наукові результати було прийнято рішення відразу зарахувати юного дослідника до аспірантури, без диплому про вищу освіту. Науковим керівником Крейна став професор М.Г. Чеботарьов. З цього часу розпочинається стрімка наукова кар'єра молодого математика: після закінчення аспірантури, в 22 роки, він стає доцентом, а в 26 років – професором. В 32-річному віці його обирають членом – кореспондентом Академії наук України. Працював в навчальних та науково-дослідних закладах Одеси, Харкова, Києва. На початку 50-х років минулого століття, після так званої справи лікарів, В Радянському Союзі розпочалася антисемітська компанія. Це не могло не відбитися на долі Марка Григоровича. В 1954 році він зайняв посаду завідувача кафедри теоретичної механіки в Одеському інженерно-будівельному інституті, що очевидним чином не відповідало Значимості М.Г. Крейна як математика. Працював він на цій посаді аж 20 років. В 1974 році керівництво вирішило відправити М.Г. Крейна на пенсію, але втрутилася математична громадськість Країни і він був зарахований на посаду провідного наукового співробітника Південного відділення АН України. На цій посаді працював до самої смерті 17 жовтня 1989 року. Наукова спадщина М.Г. Крейна велика та значима. Він є автором близько 300 наукових праць, в тому числі 8 монографій, які перекладалися і видавалися в найбільш престижних видавництвах світу. Спектр наукових інтересів Крейна дуже широкий: алгебра, функціональний аналіз, теорія функцій, теорія інтегральних та диференціальних рівнянь, математична фізика, аналітична механіка. Особливо відомий своїм вкладом у розвиток методів функціонального аналізу, теорії операторів в функціональних просторах, пов'язаних з конкретними проблемами математичної фізики. Напевне, не буде перебільшенням сказати, що значна частина сучасної математики має свої корені в дослідженнях Крейна.

## LGT-лінії та А-деформації мінімальних поверхонь

Подоусова Т.Ю.

(Одеська державна академія будівництва та архітектури)

*E-mail:* tatyana1985top@gmail.com

Вашпанова Н.В.

(Одеська національна академія харчових технологій)

*E-mail:* vasha\_nina@ukr.net

Відомо [1], що будь-який ненульовий розв'язок  $T^\alpha$  наступної системи диференціальних рівнянь

$$\left( \frac{HT_{,\gamma}}{2H^2 - K} \right)_{,\alpha} g^{\alpha\beta} - \left( \frac{K \left( d^{\alpha i} T_{,i}^\beta + d^{\beta i} T_{,i}^\alpha \right)}{2(2H^2 - K)} \right)_{,\alpha} + b_\alpha^\beta T^\alpha = 0 \quad (1)$$

визначатиме нетривіальну ареальну нескінченно малу (н.м.) деформацію (А-деформацію) однозв'язної регулярної поверхні  $S$  класу  $C^4$  ненульової гаусової кривини без омбілічних точок, гомеоморфної області  $\bar{G}$  площини у  $E_3$ - просторі, зі стаціонарними лініями геодезичного скруту (LGT-лініями).

Будемо шукати розв'язок (1) у випадку, коли  $S$ -мінімальна поверхня ( $2H = 0$ ).

Справедлива

**Теорема 1.** *Кожна мінімальна поверхня допускає нетривіальну А-деформацію зі збереженням LGT-ліній в достатньо малій області  $G$ . Тензори деформації мають представлення*

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( d^{\alpha i} T_{,i}^\beta + d^{\beta i} T_{,i}^\alpha \right), \quad T^\alpha = -g^{\alpha i} u_i,$$

де функція  $u(x^1, x^2) \in C^3$  є розв'язком диференціального рівняння

$$u_{11} + u_{22} + pu_1 + qu_2 + eu = 0$$

і залежить від довільної функції  $\nu(x^1, x^2) \in C^3$ ,  $u_\alpha = \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}$ ,  $u_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ ,  $p, q, e \in C^1(\bar{G})$  - відомі функції точки  $S$ .

Нехай  $Q$ - частина поверхні  $S$ , яка гомеоморфна області  $D \subset \bar{G}$ . Позначимо границю  $Q$  через  $L$ , а її образ на площині - через  $\Gamma$ . Враховуючи знайдений геометричний зміст функції  $u(x^1, x^2)$ , отримано наступний результат:

**Теорема 2.** *Будь-яка мінімальна поверхня при кожній із наступних граничних умов*

$$1) c^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta (\delta \mathbf{n})_{,\alpha} = 2K\omega(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in \Gamma$$

$$2) \epsilon_{\alpha\beta} \rho^{\alpha\beta} = -K\omega(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in \Gamma$$

де  $\omega(x^1, x^2) \neq 0$  - наперед задана функція класу  $C^1(\Gamma)$ , допускає єдину нетривіальну А-деформацію зі збереженням LGT-ліній.

Слід відзначити, що у випадку  $\omega(x^1, x^2) \equiv 0$  на  $\Gamma$  поверхня  $Q$  буде жорсткою відносно вказаних А-деформацій.

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова. Математична модель задачі про існування деяких нескінченно малих деформацій. *Матер.Всеукр.наук.-метод. конф. "Проблеми матем. моделювання"*, м. Кам'янськ, : 123–127, 2018.
- [2] А. В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Москва, Изд-во "Наука" 1966, 202 с.

## Алгоритм побудови унітального дільника для многочленної матриці

Володимир Прокіп

(ІІІММ НАН України, вул. Наукова 3б, м. Львів, Україна, 79060)

*E-mail:* v.prokip@gmail.com

Нехай  $\mathbb{F}_{n \times n}$  та  $\mathbb{F}_{n \times n}[x]$  – кільця  $(n \times n)$ -матриць над полем  $\mathbb{F}$  та кільцем многочленів  $\mathbb{F}[x]$  відповідно. Позначимо:  $I_n$  – одинична  $(n \times n)$ -матриця і  $O$  – нульова  $(n \times n)$ -матриця.

Для неособливої нижньої трикутної матриці  $A(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}(x) & a_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \dots & a_n(x) \end{bmatrix}$ , де  $a_i(x) \in \mathbb{F}[x]$

$\mathbb{F}[x]$  – унітальні многочлени і  $\deg a_{ij}(x) < \deg a_i(x)$  для всіх  $i > j$ , вкажемо умови її зображення у вигляді добутку  $A(x) = B(x)C(x)$ , де  $B(x) = I_n x^r + \sum_{i=1}^r B_i x^{r-i} \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$  – унітальна многочленна матриця степеня  $r \geq 1$  із визначником  $\det B(x) = b(x)$ .

Якщо матриця  $B(x) = I_n x^r + \sum_{i=1}^r B_i x^{r-i} \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$  є лівим дільником трикутної матриці  $A(x)$ , то з рівності  $A(x) = B(x)C(x)$  отримуємо  $A(x) = D(x)G(x)$ , де  $D(x) = [d_{ij}(x)]$  – нижня трикутна матриця з наступними властивостями:  $d_{ii}(x) \in \mathbb{F}[x]$  – унітальні многочлени,  $\deg d_{ij}(x) < \deg d_{ii}(x)$  для всіх  $i > j$ ,  $\deg \prod_{i=1}^k d_{ii}(x) \leq kr$ ,  $\prod_{i=1}^n d_{ii}(x) = \det B(x) = b(x)$ . Отже,  $a_i(x) = d_{ii}(x)g_{ii}(x)$  для всіх  $1 \leq i \leq n$ . Нижче вкажемо алгоритм побудови унітального дільника  $B(x)$  із неособливої трикутної матриці  $A(x) \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$ .

1). Нехай визначник неособливої нижньої трикутної матриці  $A(x) \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$  зображений у вигляді добутку  $\prod_{i=1}^n a_i(x) = b(x)c(x)$ , де  $b(x) \in \mathbb{F}[x]$  – унітальний многочлен степеня  $nr$ ,  $r < \deg A(x)$ .

2). Діагональні елементи  $a_i(x)$  матриці  $A(x)$  запишемо у вигляді  $a_i(x) = d_{i,m_i}^{(l)}(x)g_{i,m_i}^{(l)}(x)$ , де  $d_{i,m_i}^{(l)}(x) \in \mathbb{F}[x]$  – унітальні многочлени або елементи поля  $\mathbb{F}$  для всіх  $m_i = 1, 2, \dots$ ;  $l = 1, 2, \dots$ . За елементами  $d_{i,m_i}^{(l)}(x)$  побудуємо множину діагональних  $(n \times n)$ -матриць наступним чином:

$$\mathbf{D}_b =$$

$$\left\{ D^{(l)}(x) = \text{diag}(d_{1,m_1}^{(l)}(x), d_{2,m_2}^{(l)}(x), \dots, d_{n,m_n}^{(l)}(x)), \text{ де } \deg \prod_{i=1}^k d_{i,m_i}^{(l)}(x) \leq kr \text{ і } \prod_{i=1}^n d_{i,m_i}^{(l)}(x) = b(x) \right\}.$$

3). Для кожної матриці  $D^{(l)}(x) \in \mathbf{D}_b$  для  $A(x)$  будемо факторизації  $A(x) = T_b^{(l)}(x)G(x)$ , де  $T_b^{(l)}(x) =$

$$\begin{bmatrix} d_{1,m_1}^{(l)}(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_{m_2,1}^{(l)}(x) & d_{2,m_2}^{(l)}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m_n,1}^{(l)}(x) & t_{m_n,2}^{(l)}(x) & \dots & \dots & d_{n,m_n}^{(l)}(x) \end{bmatrix} \quad \text{– трикутна матриця така, що } \deg t_{m_i,j}^{(l)}(x) < \deg d_{i,m_i}^{(l)}(x) \text{ для всіх } j < i.$$

Очевидно, що для деяких матриць  $D^{(l)}(x)$  факторизації матриці  $A(x) = T_b^{(l)}(x)G(x)$  може і не існувати. Пошук елементів  $t_{m_i,j}^{(l)}(x)$  базується на знаходженні розв'язків  $\{u_{ij}(x), v_{ij}(x)\}$  рівняння  $b_i(x)u_{ij}(x) + c_j(x)v_{ij}(x) = \tilde{a}_{ij}(x)$  таких, що  $\deg v_{ij}(x) < b_i(x)$ . Якщо ж ці розв'язки існують, то остання нерівність гарантує їхню єдиність. Зауважимо, що коефіцієнтами многочленів  $t_{m_i,j}^{(l)}(x)$  можуть бути параметри із поля  $\mathbb{F}$ . Множину таких трикутних матриць позначимо через

$$\mathbf{Tr}_b = \left\{ T_b^{(l)}(x) = [t_{i,j}^{(l)}(x)], \text{ де } \begin{cases} t_{i,j}^{(l)}(x) = 0, & \text{якщо } j > i; \\ t_{i,k}^{(l)}(x) = d_{i,m_k}^{(l)}(x), & \text{якщо } k = m_i; \\ \deg t_{m_i,j}^{(l)}(x) < \deg d_{i,m_i}^{(l)}(x) & \text{для всіх } j < m_i. \end{cases} \right\}.$$

Зрозуміло, якщо одна з наведених вище умов не виконується, то для  $A(x)$  не існує лівих унітальних дільників із визначником  $\det B(x) = b(x)$ . Враховуючи теорему 2 із [1] та наведені вище міркування отримуємо.

**Теорема 1.** Для трикутної неособливої матриці  $A(x)$  існує факторизація  $A(x) = B(x)C(x)$ , де  $B(x) \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$  – унітальна многочленна матриця степеня  $r \geq 1$  із визначником  $\det B(x) = b(x)$ , тоді і тільки тоді, коли в множині  $\mathbf{Tr}_b$  існує матриця  $T(x) = \sum_{i=0}^s T_i x^{s-i}$ , для якої

$$\text{rank} \begin{bmatrix} T_0 & \text{O} & \cdots & \text{O} \\ T_1 & T_0 & & \vdots \\ T_2 & T_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & T_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_s & T_{s-1} & \vdots & T_{s-r} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} T_0 & \text{O} & \cdots & \cdots & \text{O} \\ T_1 & T_0 & & \vdots & \vdots \\ T_2 & T_1 & & \vdots & \text{O} \\ \vdots & \vdots & & T_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \text{O} \\ T_s & T_{s-1} & \vdots & T_{s-r} & I_n \end{bmatrix}.$$

**Приклад 2.** Для матриці  $A(x) = \begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ x^2 + 1 & x(x^2 + x + 1) \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}_{2,2}[x]$  вкажемо дільники  $I_2x + B_0$  із визначниками  $x^2 + x$ ,  $x^2$  і  $x^2 + x + 1$  відповідно та дільники  $I_nx^2 + B_1x + B_2$  із визначниками  $x^2(x^2 + x + 1)$  і  $(x^2 + x)(x^2 + x + 1)$  відповідно. Результати обчислень наведено у таблиці.

$b(x)$	$x^2 + x$	$x^2 + x$	$x^2$	$x^2 + x + 1$
$\text{diag}(d_1(x), d_2(x))$	$\text{diag}(x^2 + x, 1)$	$\text{diag}(x + 1, x)$	$\text{diag}(x, x)$	$\text{diag}(1, x^2 + x + 1)$
$\mathbf{Tr}_b$	$\begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ ax + b & 1 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Q}$	–	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$
$I_2x + B_0$	–	–	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x + 1 & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$
$b(x)$	$x^2(x^2 + x + 1)$	$(x^2 + x)(x^2 + x + 1)$	$(x^2 + x)(x^2 + x + 1)$	
$\text{diag}(d_1(x), d_2(x))$	$\text{diag}(x, x^3 + x^2 + x)$	$\text{diag}(x^2 + x, x^2 + x + 1)$	$\text{diag}(x + 1, x^3 + x^2 + x)$	
$\mathbf{Tr}_b$	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x^2 + x + 1 & x^3 + x^2 + x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ x^2 + 1 & x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$	–	
$I_2x^2 + B_1x + B_2$	$\begin{bmatrix} x^2 + 0,5x & 0,5x \\ 0,5(1-x) & x^2 + 0,5(x+1) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2 + x & 0 \\ -x & x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$	–	

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Bell J.H. Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrix equations. *American J. Math.*, 71(2) : 249–256, 1949.

## Про геодезичні відображення просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою

Синюкова Олена Миколаївна  
(ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна)  
E-mail: o1achepok@ukr.net

Дослідження у межах інваріантної теорії наближень геометричних об'єктів ріманова простору  $V^n$ ,  $n \in N$ , дозволяють побудувати на дотичному розшаруванні  $T(V^n)$  різні метрики та різні об'єкти афінного зв'язку [1]. Кожна з таких метрик породжує на  $T(V^n)$  певну геометрію, схожу на фінслерову, але відмінну від неї [2].

У роботі розглянуто простір  $T(V^n)$  з метрикою

$$ds^2 = 3g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta - \tilde{g}_{\alpha\beta}(x; y)dx^\alpha \tilde{D}y^\beta, \quad (1)$$

де  $g_{\alpha\beta}(x)$  — компоненти метричного тензора базового ріманова простору  $V^n$ ,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x; y) = g_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(x)y^i y^j;$$

$$\tilde{D}y^\alpha = dy^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(x; y)y^\beta dx^\gamma;$$

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(x; y) = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) - \frac{1}{3}R_{(\beta\gamma)\sigma}^\alpha(x)y^\sigma,$$

де  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x)$ ,  $R_{\beta\gamma\sigma}^\alpha(x)$ ,  $R_{i\alpha\beta j}(x)$  — відповідно, компоненти афінного зв'язку, тензора Рімана і тензора кривини базового ріманова простору  $V^n$ .

Компоненти  $g_{ij}(x; y)$  метричного тензора метрики (1) підраховані у явному вигляді. Спираючись на них, за формулами, аналогічними до стандартних формул ріманової геометрії, побудовані символи Кристофеля другого роду, отримані рівняння, що визначають криві, які називаються геодезичними лініями простору  $T(V^n)$ .

Далі природним чином введено поняття геодезичного відображення простору  $T(V^n)$ , у локальному аспекті проаналізовано проблему існування таких відображень, знайдено критерій існування таких відображень у випадку, коли базовий простір  $V^n$  є простором Ейнштейна.

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Синюков., Е. Н. Синюкова., Ю. А. Мовчан Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обобщений *Иzv.вузов. Математика*, 3(382) : 76–80, 1994.
- [2] Е. Н. Синюкова. Геометрия касательного расслоения риманова пространства, индуцированная инвариантной теорией приближений базового пространства. *Сборник трудов Международной научной конференции "Современная геометрия и её приложения"* Казань, Изд-во Казан ун-та.: 125–127, 2017.

## Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції

М. В.Щеглов

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, 01601)

E-mail: [santa-krus@ukr.net](mailto:santa-krus@ukr.net)

Нехай  $C$  - простір неперервних функцій на відрізку  $I := [0, 1]$  зі стандартною нормою

$$\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|$$

Нехай  $k \in \mathbb{N}$ , визначимо

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_n^k f(x + ih)$$

$k$ -ий модуль неперервності функції  $f$  в точці  $1/k$  визначається наступним чином:

$$\omega_k(f, 1/k) := \sup_{x, x+kh \in I} |\Delta_h^k f(x)|$$

Розглянемо многочлени, які інтегрально наближають функцію  $f$  на  $I$ , тобто

$$\int_0^{i/k} (f(t) - Q_{k-1}(f, t)) dt = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

де  $\deg Q_{k-1}(f, t) \leq (k-1)$

З [1] відомо, що

$$\|f - Q_{k-1}\| \leq \widetilde{W}(k) \omega_k(f, 1/k)$$

де  $\widetilde{W}(k) = 2$  при  $k \leq 82000$  і  $\widetilde{W}(k) = 2 + \exp(-2)$  при  $k > 82000$ .

Однак така оцінка "досягається" лише на кінцях відрізка  $I$  (якщо точно, то на відрізках  $[0; 1/k]$  і  $[(k-1)/k; 1]$ ). Тому постає запитання, чи можна цю оцінку покращити всередині відрізка, тобто отримати, що для  $x \in [1/k; (k-1)/k]$  виконується нерівність

$$|f(x) - Q_{k-1}(x)| \leq p(x) \omega_k(f, 1/k),$$

де  $p(x)$  - функція, яка залежить від  $x$  (можливо, є константою), але значення якої менші за 2, оцінки, яка вже є відомою.

Основним результатом є наступна теорема:

### Теорема 1.

$$|g(x)| \leq \frac{4m \ln k}{C_k^m}$$

де  $x \in [m/k, (m+1)/k]$ ,  $m < k/2$ , а  $g := f - Q$ .

Оцінка на відрізку симетрична ( $Q(f(1-x), t) = Q(f, 1-t)$ ), тому для тих  $x$ , у яких  $m > k/2$ , отримаємо аналогічну формулу, помінявши в ній  $m$  на  $k-m$ .

Цей вираз уже при  $m \geq 1$  буде малим за рахунок того, що  $C_k^m \geq k$  при  $m \geq 1$  і є набагато меншим за 2 (відому рівномірну оцінку). Крім того, чим більше  $m$ , тим ця оцінка краща за попередню отриману оцінку.

Отже, таким чином на відрізку  $[1/k; (k-1)/k]$  покращено раніше отриману оцінку для многочлена інтегрального наближення. Отримана в роботі оцінка приблизно дорівнює  $O(\frac{m \ln m}{C_k^m})$  на відрізку  $[m/k, (m+1)/k]$ . Це ще раз підкреслює, що многочлен інтегрального наближення "найгірше" поводить себе близько до кінців відрізка, а всередині наближує його набагато краще. Оскільки це не є досить природним, то дає підстави для подальшого дослідження неперервної на відрізку функції та поліномів, які їх наближають.

Крім того, за умови, що максимум і мінімум на відрізках  $[0, 1/k]$  і  $[(k-1)/k, 1]$ , то за рахунок зміни полінома на сталу або лінійну функцію, можна покращити оцінку найкращого наближення на всьому відрізку. Це покращення буде тим більше, чим більша буде різниця абсолютних величин максимуму і мінімуму на кінцях відрізка.



## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Gilewicz, Kryakin, Shevchuk, Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant, Journal of Approximation Theory 119, 271-290.

## Про R-деформації поверхонь обертання

Федченко Ю.С.

(Одеська національна академія харчових технологій)

E-mail: fedchenko\_julia@ukr.net

Раніше у роботах [1], [2] вивчалися нескінченно малі геодезичні деформації (R-деформації) поверхонь в евклідовому просторі  $E^3$ . Для таких деформацій знайдено нову форму основних рівнянь, яку представлено через тензорні поля  $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$ ,  $T^\alpha$  та функцію  $\psi$  похідної вектора зміщення  $\bar{U}_i = c_{i\alpha} \left( \overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} - \frac{3}{2}\psi c^{\alpha\beta} + c_1 c^{\alpha\beta} \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}$ , виписано ознаки афінних деформацій. У результаті дослідження основних рівнянь отримано наступні результати.

**Теорема 1.** Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні  $S$  (ненульової повної кривини  $K \neq 0$ ) класу  $C^3$  була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції  $\psi$ ,  $\varphi$ , які задовольняють наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{K_i}{3K^2} (3\nabla_h \psi_m + \lambda g_{mh}) - \frac{1}{3K} (3\nabla_{hi} \psi_m + \lambda_i g_{mh}) &= \psi_h g_{im} - \psi_i g_{hm} + \psi_m g_{hi}, \\ -\frac{\psi_\alpha c^{\alpha\beta}}{K^2} (K_\gamma b_\beta^\gamma - 2K_\beta H) + \nabla_\beta (\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi &= 0, \end{aligned}$$

$$d\epsilon = -\frac{3}{2}\nabla_\beta \psi_\alpha g^{\alpha\beta}, \quad \lambda_i = \partial_i \lambda, \quad \nabla_{hi} = \nabla_i \nabla_h.$$

Тоді тензорні поля  $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$ ,  $T^\alpha$ , що представляють похідну вектора зміщення, мають вигляд

$$\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{K} \left( \frac{\varphi K}{2} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \nabla_h \psi_k g^{h\beta} c^{k\alpha} - \frac{1}{4} \nabla_h \psi_k g^{h\alpha} c^{k\beta} \right), \quad (1)$$

$$T^\alpha = \frac{1}{2} (-\psi_h c^{hk} d_k^\alpha + \varphi_k d^{k\alpha}). \quad (2)$$

Тут  $K_i = \partial_i K$ ,  $H$  - середня кривина поверхні,  $d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}$ ,  $d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta_j^i$ .

**Теорема 2.** Поверхні обертання  $\bar{r} = (u \cos v, u \sin v, f(u))$  ( $K \neq \text{const}$ ) допускають нетривіальні R-деформації при  $\varphi = 0$ . При цьому

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T}^{11} = \overset{\circ}{T}^{22} = 0, \quad \overset{\circ}{T}^{12} &= \frac{Cu}{4\sqrt{1+f'^2}}, \\ T^1 = 0, \quad T^2 &= -\frac{Cu}{2f'}, \quad \psi = C \frac{u^2}{2} + C_2, \quad C, C_2 - \text{const}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Для того, щоб поверхня  $S$  класу  $C^3$  сталої повної кривини ( $K = \text{const} \neq 0$ ) допускала R-деформацію, необхідно і достатньо, щоб існували функції  $\psi$ ,  $\varphi$ , що задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \nabla_{hi} \psi_m &= -K(2\psi_i g_{mh} + \psi_h g_{im} + \psi_m g_{hi}), \\ \nabla_\beta (\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Тоді тензорні поля  $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$ ,  $T^\alpha$  похідної вектора зміщення  $\bar{U}_i$  мають вигляд (1), (2).

Серед поверхонь  $K = \text{const} \neq 0$  вибрано сферу та розглянуто випадок  $\varphi = 0$ .

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ю. С. Федченко. Нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь. *Праці міжнародного геометричного центру.*, Т4, №1: 50–63, 2011.
- [2] Ю. С. Федченко. О бесконечно малых R-деформациях поверхности. *Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г.Белинского.*, Т1, №26: 282–287, 2011.

## QA-деформація зі стаціонарним ортом нормалі еліптичного параболоїда

Юлія Хомич

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)

E-mail: khomuch.yuliia@gmail.com

Нехай векторно-параметричне рівняння еліптичного параболоїда задано у вигляді

$$\bar{r}(u, v) = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{2} \right\}.$$

В роботі досліджується його квазіреальна нескінченно мала деформація (або коротко QA-деформація) вигляду

$$\bar{r}^*(u, v, t) = \bar{r}(u, v) + t\bar{U}(u, v),$$

де  $\bar{U}(u, v)$  – поле зміщення,  $t \rightarrow 0$ , при якій залишається стаціонарним орт нормалі поверхні.

Задача про QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі поверхні від'ємної гауссової кривина  $K$  розглянута в статті [1]. В даній роботі досліджується така деформація поверхні додатної гауссової кривини, зазначимо, що поверхня еліптичного параболоїда задовольняє цій умові.

Представимо поле зміщення через його компоненти

$$\bar{U}(u, v) = U^\alpha \bar{r}_\alpha + U^\circ \bar{n}.$$

Розглядувана задача звелась до відшукування розв'язків неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно невідомої функції  $U^\circ$  :

$$U_{\alpha, \beta}^\circ d^{\alpha\beta} - \frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha\beta} U_\beta^\circ + 2HU^\circ = 2\mu, \quad K \neq 0.$$

Це рівняння узагальнює відоме однорідне характеристичне рівняння Вейнгартена для нескінченно малих згинань [2]. Закон змінювання елемента площі поверхні при її нескінченно малій деформації виражається через функцію  $\mu$  [1].

Має місце теорема.

**Теорема 1.** *Поверхня еліптичного параболоїда допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі, при якій координати поля зміщення мають вигляд*

$$\bar{U}(u, v) = \left\{ \frac{c((1+u^2)\sin v - u^2v\cos v)}{u\sqrt{1+u^2}}, \frac{-c((1+u^2)\cos v + u^2v\sin v)}{u\sqrt{1+u^2}}, \frac{cv}{\sqrt{1+u^2}} \right\},$$

де стала  $c \neq 0$ . При цьому функція  $\mu = \frac{cv(2+u^2)}{2\sqrt{(1+u^2)^3}}$ .

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич. QA-деформація поверхні від'ємної гауссової кривини. Дослідження в математиці і механіці, Т. 23, 1(31) : 14–22, 2018.  
 [2] И. Н. Векуа *Обобщенные аналитические функции*. М.:Наука, 1998, 512 С.

## Конформные и геодезические отображения на Риччи-симметрические пространства

**В. Е. Березовский**

(Уманский национальный университет садоводства, ул. Институтская, д. 1, г. Умань, Черкасская обл.,  
20305, Украина)

*E-mail:* berez.volod@gmail.com

**Й. Микеш**

(Университет Палацкого в Оломоуце, ул. 17 Листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77147, Чешская республика)

*E-mail:* josef.mikes@upol.cz

**Е. В. Черевко**

(Одесский национальный экономический университет, ул. Преображенская, 8, м. Одесса, 65082, Украина)

*E-mail:* cherevko@usa.com

Конформные отображения римановых пространств рассматривались во многих работах. Эти отображения имеют существенное приложение в общей теории относительности.

Вопрос о том, допускает или не допускает риманово пространство конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна был сведен Г. Бринкманом [1] к проблеме существования решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Коши относительно неизвестных функций. Эта задача детально изложена в монографии А. З. Петрова [2].

В работах [3, 4] основные уравнения указанных отображений сведены к линейной системе дифференциальных уравнений в ковариантных производных.

Теория геодезических отображений идейно восходит к работе Т. Леви-Чивита [5], в которой он поставил и решил в специальной системе координат задачу о нахождении собственно римановых пространств с общими геодезическими. Примечательно, что она была связана с изучением уравнений динамики механических систем. Затем теория геодезических отображений развивалась в работах Томаса, Вейля, Широкова, Солодовникова, Синюкова, Микеша и других.

Самыми известными уравнениями геодезических отображений являются уравнения Леви-Чивита. Затем Г. Вейль получил эти уравнения и для геодезических отображений аффинносвязных пространств.

Н. С. Синюков [6] доказал, что основные уравнения геодезических отображений (псевдо)-римановых пространств эквивалентны некоторой линейной системе уравнений типа Коши в ковариантных производных.

В работе [7] эти результаты обобщены на случай геодезических отображений эквиаффинных пространств на (псевдо)-римановы пространства.

Аффинносвязное или риманово пространство называют Риччи-симметрическим, если тензор Риччи в нем абсолютно параллелен. Таким образом, Риччи-симметрические пространства  $\bar{A}_n(\bar{V}_n)$  характеризуются условием

$$\bar{R}_{ij|k} = 0,$$

где символ  $|$  обозначает ковариантную производную в  $\bar{A}_n(\bar{V}_n)$ ,  $\bar{R}_{ij}$  – тензор Риччи пространства  $\bar{A}_n(\bar{V}_n)$ .

В работе [8] рассмотрены конформные отображения римановых пространств  $V_n$  на Риччи-симметрические римановы пространства  $\bar{V}_n$ . Основные уравнения таких отображений получены в виде замкнутой системы уравнений типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение полученной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных.

В работе [9] изучены геодезические отображения пространств аффинной связности  $A_n$  на Риччи-симметрические пространства  $\bar{A}_n$ . Основные уравнения указанных отображений получены в виде замкнутой системы уравнений типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение полученной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. W. Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, 94(1):119–145, 1925.
- [2] А. З. Петров. *Новые методы в общей теории относительности*, Наука 496 с. 1966.
- [3] Й. Микеш , М. Л. Гаврильченко , Е. И. Гладышева. О конформных отображениях на пространства Эйнштейна. *Вестн. Моск. ун-та*, No 3:13–17, 1994.
- [4] L. E. Evtushik, I. Hinterleitner, N. I. Guseva, J. Mikeš. Conformal mappings onto Einstein spaces. *Russian Mathematics*, 60(10):5–9, 2016.
- [5] T. Levi-Civita. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 24(1):252–300, 1896.
- [6] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств*, М., Наука, 256 с. 1979.
- [7] J. Mikeš, V. E. Berezovski. Geodesic mappings of affinely connected spaces onto Riemannian spaces. *Publ. Comp. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 56:491–494, 1992.
- [8] V. E. Berezovskii, N. I. Guseva, I. Hinterleitner, J. Mikeš. Conformal mappings of Einstein spaces onto Ricci symmetric spaces. *Mathematical Notes*, 103(1-2):304–307, 2018.
- [9] V. E. Berezovskii, I. Hinterleitner, J. Mikeš. Geodesic mappings of manifolds with affine connection onto the Ricci symmetric manifolds. *Filomat*, 32(2):379–385, 2018.

## Компьютерное моделирование упрочняющего фазового перехода в дисперсно-армированных материалах

Крывченко Ю.В., Кириллов В.Х., Гергега А.Н.

(Научно-производственный центр, Одесса, Украина)

*E-mail:* aherega@gmail.com

Существенная особенность дисперсно-армированных гетерогенных материалов – наличие в их структуре кластеров фибры, которые при критической концентрации образуют связную область перколяционного типа [1], [2], провоцируя структурный фазовый переход, и, следовательно, скачкообразно изменяя свойства образца.

В предложенной модели упрочняющего структурного фазового перехода реализована возможность исследования в компьютерных экспериментах результатов армирования материала смесью фибры и порошка. Для этого сформулирована новая континуальная перколяционная задача, описывающая кластерную систему с квазиточечными и квазилинейными элементами.

Задача решается методом Монте-Карло в кубе размером  $10^6$  условных единиц длины. Элементы, из которых формируется модельный кластер, создаются генератором случайных чисел (ГСЧ) с равномерным распределением. В каждом эксперименте фибра имеет фиксированную длину, и ее положение определяет ГСЧ: он задаёт координату ее начала и выбирает угол поворота относительно ребер куба. Единичные фибры считаются соединёнными, если у них либо есть общая точка, либо расстояние между ними не превышает некоторое заданное, играющее в модели, как и длина фибры, роль управляющего параметра.

Этот феномен обнаруживает интересную особенность перколяционной задачи с необычным составом элементов, а значит, и самой технологии – невозможность обеспечить статистическую устойчивость явления. Потеря стабильности при фиксированном значении максимального угла поворота фибры и ее длины связана с зависимостью интервалов ряда значений параметров задачи, в частности, порога протекания и фрактальной размерности от степени вариативности параметров конкретных реализаций перколяционного кластера, которая, как оказалось, излишне велика. Обсуждение ситуации возможно в рамках представления о гиперслучайных величинах, для которых «статистические оценки в общем случае не являются состоятельными, т.е. при увеличении объема выборки их погрешность не стремится к нулю» [3]. При этом каждый из результатов, полученный при фиксированных значениях управляющих параметров, имеет стандартную для таких задач погрешность, равную, примерно,  $12 \div 15$  процентов.

Идея одновременного использования фибры и порошка для упрочнения материала принадлежит авторам работы [4], которые успешно использовали ее при создании бетона, обладающего повышенной прочностью при растяжении.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Feder. Fractals. New York: Plenum Press, (1988).
- [2] A. Herega. The Selected Models of the Mesostructure of Composites: Percolation, Clusters, and Force Fields. Springer-Verlag, Heidelberg, (2018).
- [3] И.И. Горбань. Гиперслучайные функции и их описание. Известия вузов. Радиоэлектроника 1, 3, (2006).
- [4] А.Г. Вандоловский и др. Технология создания сталефибробетона с повышенной прочностью на растяжение. Сб. трудов Харьковского нац. унив. возд. сил 2(56), 126, (2018).

## Проективная классификация рациональных функций

Кононенко Н.

(Кафедра высшей и прикладной математики, ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail: konovenko@ukr.net

Рассматриваем группу Галуа  $Aut(\mathbb{C}(z)/\mathbb{C})$ , которая изоморфна группе Ли  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$  и преобразования Мёбиуса имеют вид

$$f(z) \mapsto f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  и  $ad - bc = 1$ .

Представление алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  в векторных полях на  $\mathbb{C}P^1$  имеет вид:  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle \partial_z, z\partial_z, z^2\partial_z \rangle$ .

Пусть  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - векторное поле из алгебры. Обозначим через  $X^{(k)}$  продолжение этого векторного поля на многообразии  $k$ -джетов  $\mathbf{J}^k$  функций. Тогда соответствие  $X \mapsto X^{(k)}$  даёт представление алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  в векторных полях на  $\mathbf{J}^k$ .

Например, взяв  $k = 3$ , мы получаем следующую реализацию алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} \partial_z, z\partial_z - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2} - 3u_3\partial_{u_3}, \\ z^2\partial_z - 2zu_1\partial_{u_1} - (4zu_2 + 2u_1)\partial_{u_2} - (6zu_3 + 6u_2)\partial_{u_3}, \end{aligned}$$

в стандартных координатах.

Мы говорим, что рациональная функция  $F$  на многообразии  $\mathbf{J}^k$  является проективным дифференциальным инвариантом порядка  $\leq k$  ([1], [2], [3]), если  $X^{(k)}(F) = 0$ , для всех векторных полей  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

**Теорема 1.** (1) Существует два независимых проективных дифференциальных инварианта порядка  $\leq 3$

$$J_0 = u, J_3 = u_1^{-3}u_3 - \frac{3}{2}u_1^{-4}u_2^2,$$

и все остальные инварианты порядка  $\leq 3$  являются рациональными функциями  $J_0$  и  $J_3$ .

(2) Эти инварианты разделяют регулярные орбиты, т.е.  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - орбиты точек, где  $u_1 \neq 0$ .

Отметим, что

(1) Значение инварианта  $J_3$  на рациональной функции  $f(z)$  равно производной Шварца функции, обратной к  $f(z)$ .

(2) Регулярные  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - орбиты в  $\mathbf{J}^3$  имеют размерность 3. Есть также особые орбиты размерности 3, они  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - орбиты в области  $u_1 = 0, u_2 \neq 0$ .

(3) Сингулярные орбиты размерности 2 являются  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - орбитами в области  $u_1 = u_2 = 0, u_3 \neq 0$ .

(4) Сингулярные орбиты размерности 1 являются  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - орбитами в области  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ .

(5) Сингулярные орбиты размерностей 3, 2 и 1 соответственно задаются уравнениями:

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 \neq 0,$$

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 \neq 0,$$

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

где  $c$  константа.

**Теорема 2.** (1) Поле проективных дифференциальных инвариантов порождается инвариантами  $J_0, J_3$  и производной Трессе  $\nabla = \frac{1}{u_1} \frac{d}{dz}$ , т.е. любой проективный дифференциальный инвариант является рациональной функцией инвариантов  $J_0, J_3$  и их инвариантных производных.

(2) Это поле разделяет регулярные  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  - орбиты в пространствах джетов, где регулярность орбиты в  $\mathbf{J}^k, k > 3$ , означает, что ее проекция в  $\mathbf{J}^3$  регулярная орбита.

Чтобы описать  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -орбиты в  $\mathbb{C}(z)$  отметим, что значения  $J_0(f)$  и  $J_3(f)$  базисных дифференциальных инвариантов  $J_0, J_3$  на рациональной функции  $f(z)$  также рациональные функции.

Степень трансцендентности поля  $\mathbb{C}(z)$  равна 1, и поэтому идеал полиномиальных соотношений

$$P(J_0(f), J_3(f)) = 0 \quad (1)$$

между ними порождается неприводимым полиномом.

Коэффициенты последнего полинома зависят от  $f$ , поэтому мы будем обозначать соответствующий неприводимый многочлен  $P_f(X, Y)$ . Тогда соотношение (1) можно рассматривать как утверждение, что  $f$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка:

$$\varepsilon_f = \left\{ P_f \left( u, u_1^{-3} u_3 - \frac{3}{2} u_1^{-4} u_2^2 \right) = 0 \right\} \subset J^3.$$

Проективная группа  $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  является группой симметрий дифференциального уравнения  $\mathcal{E}_f$  и, следовательно, действует на его пространстве решений.

**Теорема 3.** *Стабилизатор рациональной функции  $h(z)$  для  $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  - действия дискретен, если  $h \neq const$ .*

Мы говорим, что рациональная функция  $h(z)$  является *регулярной*, если  $h \neq const$ .

Например, стабилизатор функции Жуковского  $f(z) = \frac{z^2+1}{2z}$  является группой  $\mathbb{Z}_2$ , порождённой инверсией  $z \mapsto z^{-1}$ .

**Теорема 4.** *Две регулярные рациональные функции  $f$  и  $g$  являются  $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$  - эквивалентными тогда и только тогда, когда  $P_f = \lambda P_g$ .*

Отметим, что для трансцендентных расширений поля  $\mathbb{C}$  дифференциальные инварианты, а также соответствующие дифференциальные уравнения играют роль неприводимых многочленов для конечных расширений Галуа.

Так например для функции Жуковского  $f(z) = \frac{z^2+1}{2z}$

$$P_f(X, Y) = (X^2 - 1)^2 Y + \frac{3}{8},$$

а соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$(u^2 - 1)^2 \left( u_1 u_3 - \frac{3}{2} u_2^2 \right) + \frac{3}{8} u_1^4 = 0.$$

Все регулярные решения этого уравнения являются рациональными функциями, которые  $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ -эквивалентны функции Жуковского.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и  $\mathfrak{sl}_2$ -геометрии // Київ: "Наукова Думка" НАН України, (2013), 192 с.
- [2] N. Kononenko, V. Lychagin. Projective classification of rational CP1-mappings // Anal.Math.Phys. (2019), 12p. <https://doi.org/10.1007/s13324-019-00281-2>
- [3] M. Rosenlicht. A remark on quotient spaces // An. Acad. Brasil. Ci., **35**, (1963), 487–489.
- [4] A. Tresse. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations // Acta Math., **18**, (1894), 1–88.



## Инфинитезимальные преобразования в симметрическом римановом пространстве 1-го класса $V_n$

**А. В. Крутоголова**

(Дворянская 2, Одесса, Украина)

*E-mail:* 01link01@rambler.ru

**С. М. Покась**

(Дворянская 2, Одесса, Украина)

*E-mail:* pokas@onu.edu.ua

П. А. Широковым ([1]) было изучено симметрическое риманово пространство 1-го класса  $V_n$ . Для  $n = 4$  метрический тензор такого пространства  $V_n$  имеет вид:

$$g_{ij}(x) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta$$

$$R_{i\alpha\beta j} = b_{\alpha j} b_{i\beta} - b_{ij} b_{\alpha\beta}$$

$$\left( \begin{matrix} g_{ij} \\ \circ \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_i = \pm 1 \quad (1)$$

Из (10) следует, что пространство 2-го приближения  $\tilde{V}_n^2$  ([2], [3]) для симметричного  $V_n$  1-го класса изометрично исходному  $V_n$ . Поэтому группа Ли  $\tilde{G}_r$  инфинитезимальных преобразований в  $\tilde{V}_n^2$  изоморфна группе Ли  $G_r$  исходного  $V_n$ . Используя это обстоятельство, доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Симметрическое риманово пространство  $V_n$  1-го класса допускает группу Ли движений  $G_8$ .*

Найден базис этой группы и её структурные константы.

**Теорема 2.** *Инфинитезимальные конформные преобразования 2-ой степени в симметрическом римановом пространстве  $V_n$  первого класса являются гомотетическими преобразованиями.*

Найдены  $\xi_{|p|}^h$ , ( $p = 10$ ) - линейно независимые с постоянными коэффициентами гомотетические векторы Киллинга.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. А. Широков. *Избранные работы по геометрии*. Казань, 1966.
- [2] С. М. Покась. Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения, *Известия Пензенского государственного педагогического университета им. Белинского*, №26, 2011, 173-183 с.
- [3] С. М. Покась. Бесконечно малые конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения, Vol. 7 of *Proc. of the Intern. Geom. Center*, №2, 2014, 36-50 с.

## О некоторых диффеоморфизмах псевдоримановых пространств со структурой Яно-Хоу-Чена

**Курбатова И.Н.**

(ОНУ, Одесса, Украина)

*E-mail:* irina.kurbatova27@gmail.com

**Хаддад М.**

(г.Хомс, Сирия)

*E-mail:* akkad@ukr.net

Структурой Яно-Хоу-Чена мы называем аффинорную структуру, структурный аффинор  $F$  которой удовлетворяет уравнению 4-й степени  $F^4 \pm F^2 = 0$ . К понятию такой квадриструктуры К.Яно, С.Хоу и В.Чен пришли при изучении подмногообразий в почти контактных многообразиях [2].

Структура Яно-Хоу-Чена является естественным обобщением *e-структуры* [3], которая определяется наличием на многообразии  $X_n$  тензорного поля типа  $(1,1)$   $F_i^h$ , удовлетворяющего условиям

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e \delta_i^h, \quad e = \pm 1, 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n,$$

а также *f-структуры* [2], для которой

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0.$$

Мы рассматриваем псевдориманово пространство  $(V_n, g_{ij})$ , на котором определена структура Яно-Хоу-Чена, согласованная с метрикой в виде

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha,$$

и ковариантно постоянная, то есть

$$F_{i,j}^h = 0.$$

Здесь «,» - знак ковариантной производной в  $V_n$ .

Изучались различные диффеоморфизмы таких пространств. В частности, доказано, что такие  $V_n$  не допускают нетривиальных геодезических [3],  $F$ -планарных и  $2F$ -планарных отображений [1] с сохранением аффинорной структуры на  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ , в котором

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0, \quad \bar{F}_{ij} = \bar{g}_{i\alpha} \bar{F}_j^\alpha.$$

Этот факт представляет собой обобщенный аналог известной в теории геодезических отображений келеровых пространств теоремы Яно-Вестлейка.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. Москва : Наука, 1979.
- [2] Yano Kentaro, Houh Chong-Shi, Chen Bang-Yen. Structures defined by a tensor field  $\phi$  of type  $(1,1)$ , satisfying  $\phi^4 \pm \phi^2 = 0$ . *Tensor*, 23(1) : 81–87, 1972.
- [3] Raad Kadem. О  $2F$ -планарных отображениях пространств аффинной связности. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary* : 20–25, 1989.
- [4] А.П.Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Сер.Мат.Алгебра.Топол.Геом.1967*: 127–188, 1969.

## Закономерности теории квази-геодезических отображений рекуррентно-параболических пространств

**Лозиенко Д.В.**

(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

*E-mail: lozienkodv@gmail.com*

**Курбатова И.Н.**

(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

*E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com*

Рассмотрим римановы пространства  $(V_n, g_{ij})$  и  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ , находящиеся в квази-геодезическом отображении, основные уравнения которого в общей по отображению системе координат  $(x^i)$  имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) &= \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \\ \bar{F}_{(ij)}(x) &= 0, \quad \bar{F}_{ij}^\alpha(x) = F_j^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x),\end{aligned}$$

где  $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$  - компоненты объектов связности пространств  $\bar{V}_n$  и  $V_n$ , соответственно;  $\psi_i, \varphi_i$  - ковекторы;  $F_i^h$  - аффинор.

В [2] было введено понятие *рекуррентно-параболической* структуры  $F_i^h(x)$  на  $(V_n, g_{ij})$ , для которой

$$\begin{aligned}F_i^\alpha F_\alpha^h &= 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \\ F_{i,j}^h &= \rho_j(x)F_i^h(x), \quad i, h, j, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

где  $\rho_j$  - ковектор, «,» - знак ковариантной производной в  $V_n$ . Само  $V_n$  при этом также названо *рекуррентно-параболическим*.

Мы построили по аналогии с тем, как это сделано в теории геодезических отображений римановых пространств [3], инвариантное преобразование, которое из пары рекуррентно-параболических пространств, состоящих в квази-геодезическом соответствии, позволяет получить новую пару также рекуррентно-параболических квази-геодезически соответствующих пространств. Более того, применение этого инвариантного преобразования многократно дает возможность построить бесконечную последовательность пар рекуррентно-параболических пространств, находящихся в квази-геодезическом отображении.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, No. 4-5 : 7-21, 1968.
- [2] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proceedings of the International Geometry Center*, volume 8, No. 1 : 57-66, 2015.
- [3] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств . Москва : Наука, 1979.

## Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности

**Нарманов Отабек Абдигаппарович**

(Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан)

*E-mail:* otabek.narmanov@mail.ru

Методы группового анализа широко используются для исследования уравнений в частных производных и для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1], [2],[3], [4],[5],[6] рассматриваются вопросы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений в частных производных, на основе известных инфинитезимальных симметрий. В работе [3] разработан вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольного дифференциального уравнения в частных производных. В работе [4] рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. В работе [2] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [6].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (k_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u) \quad (1)$$

где  $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$  — температурная функция,  $k_i(u) \geq 0$ ,  $Q(u)$  — функции от температуры  $u$ . Функция  $Q(u)$  описывает процесс тепловыделения, если  $Q(u) > 0$  и процесс теплопоглощения, если  $Q(u) < 0$ .

Исследования показывают, коэффициенты теплопроводности  $k_1(u), k_2(u)$  в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры, т. е. имеет вид  $k(u) = u^\sigma$ .

Рассмотрим случай  $k_1(u) = k_2(u) = u^\sigma$ ,  $Q(u) = u$ . В этом случае уравнение (1.1) имеет следующий вид:

$$u_t = u^\sigma \Delta u + \sigma u^{\sigma-1} (\nabla u)^2 + u \quad (2)$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  — оператор Лапласа,  $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\}$  — градиент функции  $u$ .

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (1.2):

$$X_1 = \sigma x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = \exp(-\sigma t) \frac{\partial}{\partial t} + \exp(-\sigma t) u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3)$$

Потоки векторных полей  $X_1, X_2$  порождают следующие группы преобразований соответственно

$$(t, x_1, x_2, u) \rightarrow (t, x_1 e^s, x_2 e^s, u e^{2s}), \quad s \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$(t, x_1, x_2, u) \rightarrow \left( \frac{1}{\sigma} \ln(e^{\sigma t} + \sigma s), x_1, x_2, u(e^{\sigma t} + \sigma s)^{\frac{1}{\sigma}} \right), \quad s \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Мы найдем решения уравнения (1.2), инвариантные относительно групп преобразований (1.4), (1.5). Для этого сначала находим инвариантные функции этих преобразований.

Известно, что [3, с. 117] гладкая функция  $f: M \rightarrow R$  является инвариантной функцией группы преобразований  $G$ , действующей на многообразии  $M$  тогда и только тогда, когда  $Xf = 0$  для каждой инфинитезимальной образующей  $X$  группы  $G$ .

Используя этот критерий мы находим, что функции  $I_1 = \frac{(x_1+x_2) \exp(\sigma t/2)}{\sqrt{u^\sigma}}$ ,  $I_2 = \frac{x_1}{x_2}$  являются инвариантными функциями группы преобразований (1.4),(1.5), что вытекает из следующих равенств  $X_1(I_1) = 0$ ,  $X_1(I_2) = 0$ ,  $X_2(I_1) = 0$ ,  $X_2(I_2) = 0$ .

**Теорема 1.** Решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4),(5) имеют вид

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{\sigma}{2} e^t \frac{(x_1 + x_2)^{2/\sigma}}{2} V(\xi) \quad (6)$$

где  $V(\xi)$  – общее решение дифференциальное уравнение второго порядка:

$$f(\xi)VV'' + f(\xi)V'^2 + 4\sigma(\xi + 1)\left[\frac{\sigma}{2}(\xi^2 + \xi) - 2\xi + 2\right]VV' + 4\left[2 + 2\left(\frac{2}{\sigma} - 1\right)\right]V^2 = 0, \quad (7)$$

где  $f(\xi) = (\xi + 1)^2(\xi^2 + 1)$ ,  $g(\xi) = \sigma(\xi + 1)\left[\frac{\sigma}{2}(\xi^2 + \xi) - 2\xi + 2\right]$ .

Теперь рассмотрим случай, когда есть поглощение тепла:  $k_1(u) = k_2(u) = u^\sigma$ ,  $Q(u) = -u$ . В этом случае уравнение (1.1) имеет следующий вид:

$$u_t = u^\sigma \Delta u + \sigma u^{\sigma-1} (\nabla u)^2 - u \quad (8)$$

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (8):

$$X_1 = \sigma x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \exp(\sigma t) \frac{\partial}{\partial t} + \exp(\sigma t) u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (9)$$

Используя вышеприведенный критерий мы находим, что функции  $I_1 = \frac{(x_1+x_2) \exp(-\sigma t/2)}{\sqrt{u^\sigma}}$ ,  $I_2 = \frac{x_1}{x_2}$  являются инвариантными функциями группы преобразований (1.5),(1.6), что вытекает из следующих равенств  $X_1(I_1) = 0$ ,  $X_1(I_2) = 0$ ,  $X_2(I_1) = 0$ ,  $X_2(I_2) = 0$ .

**Теорема 2.** Решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4),(5) имеют вид

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{\sigma}{2} e^{-t} \frac{(x_1 + x_2)^{2/\sigma}}{2} V(\xi) \quad (10)$$

где  $V(\xi)$  общее решение дифференциальное уравнение второго порядка (7).

**Выводы.** В уравнении (2) есть источник тепловыделения, поэтому в каждой точке области переменных  $(x_1, x_2)$ , отличных от точек  $(0, 0)$ , температурная функция (6) возрастает экспоненциально при возрастающем  $t$ . В уравнении (1.12) есть источник поглощения, в каждой точке области переменных  $(x_1, x_2)$ , отличных от точек  $(0, 0)$ , температурная функция (10) убывает экспоненциально при возрастающем  $t$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ли С., Шефферс. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. Москва - Ижевск: Научно-издательский центр: "Регулярная и хаотическая динамика". 2011. 704 с.
- [2] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Дифференциальные уравнения, 1983, том 19, номер 7, С. 1215–1223. <http://mi.mathnet.ru/de4904>
- [3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
- [4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978. 398 с.
- [5] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука, 1987, 481стр.
- [6] Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018,6, С.373–381. DOI: 10.4236/jamp.2018.62035

## Новый вид условий нежесткости многогранников

**И.Х. Сабитов**

(Ленинские Горы, Москва, 119234, ГСП-1 )

*E-mail:* isabitov@mail.ru

Известно, что нежесткость симплицального многогранника рода 0 с  $n$  вершинами определяется тем фактом, что ранг матрицы линейной системы

$$AX = 0 \quad (1)$$

для компонент векторов поля бесконечно малого изгибания должен быть меньше  $3n - 6$ . Элементы матрицы  $A$  выражаются через координаты соединенных ребрами вершин многогранника и поэтому при изменении системы координат или при движении многогранника как твердого тела ее элементы должны измениться. Но если мы умножим уравнение (1) слева на транспонированную матрицу  $A^T$ , получим уравнение вида  $BX = 0$ , котором элементы матрицы  $B$  уже будут зависеть только от квадратов длин ребер и диагоналей, и тем самым формально подтверждается, что, во-первых, жесткость/нежесткость многогранника не зависит от выбора системы координат, во-вторых, она зависит не только от длин ребер, но также и от длин диагоналей.

## Заузленные сферы с постоянным отношением

**Савельев Валерий Михайлович**  
(Украина, г. Луганск, Оборонная 2)  
*E-mail: svm59@mail.ru*

В полупространстве  $E_+^3(0)$ , определяемом условием  $x_4 = 0$ ,  $x_3 \geq 0$ , возьмем дугу  $\gamma$  с концами на плоскости  $\pi : x_4 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Полупространство  $E_+^3(0)$  будем вращать вокруг плоскости  $\pi$ . Пространство  $E_+^3(0)$ , повернутое на угол  $\varphi$ , будем обозначать  $E_+^3(\varphi)$ . При вращении на  $360^\circ$  точки дуги  $\gamma$ , находящиеся в  $E_+^3(\varphi)$ , заметут множество  $S$ , гомеоморфное сфере  $S^2$ . Полученная поверхность заузлена (см [1]). Поэтому эта гладкая поверхность называется *заузленной сферой*. Радиус-вектор заузленной сферы можно записать в виде

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \\ x_3(u) \cos v - x_4(u) \sin v \\ x_3(u) \sin v + x_4(u) \cos v \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где кривая  $\mathbf{X}(u, 0)$  есть профильная кривая этой поверхности.

В настоящей работе рассматривается случай заузленной сферы у которой профильная кривая плоская, радиус-вектор которой имеет вид

$$\mathbf{X}(u, 0) = (\rho(u) \cos u, \rho(u) \sin u, \rho(u) \cos u, \rho(u) \sin u). \quad (2)$$

Несложно подсчитать касательную  $\mathbf{X}^T$  и нормальную  $\mathbf{X}^\perp$  компоненты радиус-вектора заузленной сферы. Имеем

$$\|\mathbf{X}^T\| : \|\mathbf{X}^\perp\| = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Если отношение длины касательной компоненты к длине нормальной компоненты постоянно на подмногообразии  $F^n \subset E^{n+m}$ , то говорят о подмногообразии *постоянного отношения*. Таким образом имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $F^2 \subset E^4$  есть заузленная сфера, заданная радиус-вектором (1). Тогда поверхность  $F^2$  есть поверхность постоянного отношения если и только если профильная кривая является кривой постоянного отношения и  $\rho(u) = c_1 e^{c_2 u}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  есть действительные постоянные.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аминов Ю.А. *Геометрия подмногообразий*. Киев: Наукова думка, 2002, 468 с.  
[2] Chen В. Y. *Constant ratio Hypersurfaces*, Soochow J. of Math. 28 (2001), 353-362.

## О построении псевдоримановых пространств с $f$ -структурой, находящихся в каноническом $2F$ -планарном отображении II типа

**Сикаченко И.**

(ОНУ, Одесса, Украина)

*E-mail: inna.sikachenko@gmail.com*

**Курбатова И.Н.**

(ОНУ, Одесса, Украина)

*E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com*

Рассмотрим римановы пространства  $(V_n, g_{ij}, F_i^h)$  и  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ , на которых определены аффинорные структуры. В [1] показано, что  $2F$ -планарное отображение ( $2F$ ПО)  $(V_n, g_{ij}, F_i^h)$  на  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$  по необходимости сохраняет структуру, то есть в общей по отображению системе координат  $(x^i)$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x),$$

и основные уравнения  $2F$ ПО имеют вид

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i \delta_j^h + \phi_{(i} F_{j)}^h + \sigma_{(i} F_{j)}^h,$$

где  $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$  - компоненты объектов связности  $V_n, \bar{V}_n$ ;  $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$  - некоторые ковекторы, а круглыми скобками обозначена операция симметрирования.  $2F$ ПО считается тривиальным при  $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$ .

Здесь обозначено

$$F_i^h = F_i^h, \quad F_i^h = F_\alpha^h F_i^\alpha.$$

Мы показали, что нетривиальные  $2F$ ПО могут быть лишь одного из трех типов:

$$I \quad \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0;$$

$$II \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0, \quad \sigma_i \neq 0;$$

$$III \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0.$$

При этом  $2F$ -планарное отображение названо *каноническим I(II) типа* (обозначается  $2F$ ПО(I)( $2F$ ПО(II)) в случае I(II)) и просто  $2F$ ПО в случае III.

Говорят, что  $F_i^h$  определяет  $f$ -структуру [2] на псевдоримановом пространстве  $(V_n, g_{ij})$ , если имеют место условия

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n,$$

$$Rg \| F_i^h \| = 2k \quad (2k < n).$$

Полагаем  $f$ -структуру согласованной с метрикой в виде

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha$$

В дальнейшем полагаем аффинор ковариантно постоянным:

$$F_{i,j}^h = 0,$$

где « $\cdot$ » - знак ковариантной производной в  $V_n$ .

Мы рассмотрели  $2F$ ПО(II) псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной  $f$ -структурой и построили преобразование, которое дает возможность из одной пары таких пространств, находящихся в  $2F$ ПО(II), получить новую пару псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной  $f$ -структурой, принципиально отличающихся от исходной пары и при этом также находящихся в  $2F$ ПО(II).



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Raad Kadem. О  $2F$ -планарных отображениях пространств аффинной связности. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary* : 20–25, 1989.
- [2] А.П.Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Сер.Мат.Алгебра.Топол.Геом.1967*: 127–188, 1969.
- [3] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств . Москва : Наука, 1979.

## Зміст

<b>Absamatov Z.A.</b> <i>Formation of algorithmic culture of students in the classroom of higher mathematics</i>	<b>3</b>
<b>Absamatov Z. A., Khamrayev A. Yu.</b> <i>Behavior of the trajectories of a single cubic operator</i>	<b>4</b>
<b>Banaru G. A.</b> <i>On nonexistence of Kenmotsu structure on Kirichenko–Uskorev-hypersurfaces of Kählerian manifolds</i>	<b>5</b>
<b>Banaru M. B.</b> <i>On almost contact metric hypersurfaces in <math>W_4</math>-manifolds</i>	<b>7</b>
<b>Batkhin A. B.</b> <i>Quantum calculus and singularities of quasi-discriminant sets</i>	<b>9</b>
<b>Bernatska J.</b> <i>Derivative Thomae formula for singular half-periods</i>	<b>11</b>
<b>Bilet V., Dovgoshey O.</b> <i>Kuratowski limits of subsets of real line and their applications to pretangent spaces</i>	<b>13</b>
<b>Bonacci E.</b> <i>Algebraic and geometric questions about a FTL physics</i>	<b>15</b>
<b>Bruno A. D.</b> <i>Algorithms for solving an algebraic equation</i>	<b>16</b>
<b>Dryuma V. S.</b> <i>Around the homologous sphere of Poincare and its applications</i>	<b>17</b>
<b>Eftekharinasab K.</b> <i>On the generalization of the Darboux theorems</i>	<b>19</b>
<b>Favorov S.</b> <i>Discrete sets, discrete measures, quasicrystals Fourier, pure crystals</i>	<b>20</b>
<b>Glazunov N.</b> <i>Algebraic-geometric aspects of function field analogues to abelian varieties</i>	<b>21</b>
<b>Gok O.</b> <i>Extensions of almost orthosymmetric lattice bimorphisms</i>	<b>23</b>
<b>Grechneva M., Stegantseva P.</b> <i>The properties of the surface of Minkowski space, which determine the type of its Grassmann image</i>	<b>24</b>
<b>Gutik O., Melnyk K.</b> <i>The semigroup of star partial homeomorphisms of a finite deminsional Euclidean space</i>	<b>25</b>
<b>Gutik O., Sobol O.</b> <i>Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank</i>	<b>26</b>
<b>Prishlyak A., Hatamian H.</b> <i>Non-Oriented Heegaard Diagrams</i>	<b>28</b>
<b>Herasymov V., Gefter S., Arinenkov A.</b> <i>Some many-dimensional extremal geometric problems</i>	<b>30</b>
<b>Juraev D. A.</b> <i>On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in <math>m</math>-dimensional bounded domain</i>	<b>31</b>
<b>Kozerenko S.</b> <i>Neighborhood maps on combinatorial trees and their Markov graphs</i>	<b>33</b>
<b>Kuznietsova I., Soroka Yu.</b> <i>First Betti numbers of orbits of Morse functions on surfaces</i>	<b>34</b>
<b>Maksymenko S., Khohlyk O.</b> <i>Diffeomorphisms preserving Morse-Bott foliations</i>	<b>35</b>
<b>Markitan V.</b> <i>Singular monotonic functions defined by a convergent positive series and a double stochastic matrix</i>	<b>36</b>
<b>Matsumoto K.</b> <i>A Flat <math>(CHR)_3</math>-curvature tensor in a Trans-Sasakian Manifold</i>	<b>38</b>

<b>Mokritskaya T. P., Tushev A. V.</b> <i>On some fractal-based estimations of subsidence volume for various types of soils</i>	<b>39</b>
<b>Mukhamadiev F. G.</b> <i>The Shanin number and the predshanin number of <math>N_T^\varphi</math>-kernel of a topological spaces</i>	<b>41</b>
<b>Najmiddinov J. Sh.</b> <i>The effectiveness of the use of computer programs in the teaching of mathematics in academic lyceums</i>	<b>42</b>
<b>Obikhod T.</b> <i>Gromov-Witten invariants and identification of the energy levels of solitonic states</i>	<b>43</b>
<b>Ostrovska O., Yakymiv R.</b> <i>On isometries satisfying deformed commutation relations</i>	<b>45</b>
<b>Prishlyak A., Prus A.</b> <i>Three-color graph of the Morse flow on a compact surface with boundary</i>	<b>46</b>
<b>Pulemotov A.</b> <i>The Ricci Iteration on Homogeneous Spheres</i>	<b>48</b>
<b>Rmuš V.</b> <i>The construction of squaring the circle</i>	<b>49</b>
<b>Samokhvalov S.</b> <i>Riemann-Klein antagonism and problem of energy in general relativity</i>	<b>51</b>
<b>Savchenko A.</b> <i>On generalized spaces of persistence diagrams</i>	<b>52</b>
<b>Sazonova O.</b> <i>Continual approximate solution with acceleration and condensation mode</i>	<b>53</b>
<b>Serdyuk A. S., Sokolenko I. V.</b> <i>Approximation by Fourier sums and interpolation trigonometric polynomials in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness</i>	<b>54</b>
<b>Serdyuk A., Stepanyuk T.</b> <i>Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums</i>	<b>57</b>
<b>Vasilchenko A.</b> <i>Spaces of primitive elements in dual modules over Steenrod algebra 2</i>	<b>59</b>
<b>Morrison P. J.</b> <i>A Geometrical Version of the Maxwell-Vlasov Hamiltonian Structure</i>	<b>61</b>
<b>Wojtowicz M.</b> <i>Note on congruent numbers</i>	<b>62</b>
<b>Кадубовський О. А.</b> <i>Про число топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на двовимірному торі</i>	<b>63</b>
<b>Ладиненко Л. П.</b> <i>Щодо геометричної характеристики спеціальних майже геодезичних перетворень просторів афінного зв'язку зі скрутом</i>	<b>65</b>
<b>Овчаренко О. О.</b> <i>Життєвий та науковий шлях Марка Григоровича Крейна</i>	<b>66</b>
<b>Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В.</b> <i>LGT-лінії та A-деформації мінімальних поверхонь</i>	<b>67</b>
<b>Прокіп В. М.</b> <i>Алгоритм побудови унітального дільника для многочленної матриці</i>	<b>68</b>
<b>Синюкова О.</b> <i>Про геодезичні відображення просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	<b>70</b>
<b>Щеглов М. В.</b> <i>Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізьку функції</i>	<b>71</b>
<b>Федченко Ю.С.</b> <i>Про P-деформації поверхонь обертання</i>	<b>73</b>
<b>Хомич Ю.</b> <i>QA-деформація зі стаціонарним ортом нормалі еліптичного параболоїда</i>	<b>74</b>

<b>Березовский В. Е., Микеш Й.А., Черевко Е. В.</b> Конформные и геодезические отображения на Риччи-симметрические пространства	<b>75</b>
<b>Кривченко Ю.В., Кириллов В.Х., Гергега А.Н.</b> Компьютерное моделирование упрочняющего фазового перехода в дисперсно-армированных материалах	<b>77</b>
<b>Коновенко Н.</b> Проективная классификация рациональных функций	<b>78</b>
<b>Крутоголова А. В., Покась С. М.</b> Инфинитезимальные преобразования в симметрическом римановом пространстве 1-го класса $V_n$	<b>80</b>
<b>Курбатова И. Н., Хаддад М.</b> О некоторых диффеоморфизмах псевдоримановых пространств со структурой Яно-Хоу-Чена	<b>81</b>
<b>Лозиенко Д. В., Курбатова И. Н.</b> Закономерности теории квази-геодезических отображений рекуррентно-параболических пространств	<b>82</b>
<b>Нарманов О. А</b> Инварианты решения двумерного уравнения теплопроводности	<b>83</b>
<b>Сабитов И. Х.</b> Новый вид условий жесткости многогранников	<b>85</b>
<b>Савельев В.</b> Заузленные сферы с постоянным отношением	<b>86</b>
<b>Сикаченко И., Курбатова И. Н.</b> О построении псевдоримановых пространств с $f$ -структурой, находящиеся в каноническом $2F$ -планарном отображении $\Pi$ типа	<b>87</b>