Знаходження форми квантових графів за умов Діріхле на висячих вершинах

Анастасія Чернишенко
(Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса, Україна)
E-mail: nastya.chernyshenko12@gmail.com

Проблема існування коспектральних (або інакше ізоспектральних) графів виникла ще у минулому сторіччі. У класичній теорії графів коспектральними вважають неізоморфні графи з однаковим спектром матриці суміжності (див. [5], Розділ 6.1). У [4] був наведений перший приклад коспектральних графів.

У багатьох випадках більш важливу роль ніж матриця суміжності відіграє нормований лапласіан. Існують різні означення нормованого лапласіана, котрий ще називають дискретним лапласіаном (див. [7], С.2). Ми розуміємо під нормованим лапласіаном матрицю $D^{-1/2}AD^{-1/2}$, де A - матриця суміжності графа, а $D = diag\{d(v_1), d(v_2), ..., d(v_p)\}$ - матриця степенів вершин, де $d(v_j)$ - степінь вершини v_j.

У теорії квантових графів розглядають спектральні задачі, породжені рівняннями Штурма-Ліувілля на рівнобічних графах (метричних графах, з ребрами однакової довжини) з крайовими умовами Неймана або Діріхле на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана (умовами неперервності і Кірхгофа) у внутрішніх вершинах. Тут також виникає проблема коспектральності.

У [9] було показано, що існують коспектральні графи (неізометричні графи з однаковим спектром задачі Штурма-Ліувілля) у квантовій теорії графів. Слід зауважити, що у випадку графа з несумірними довжинами ребер спектр однозначно визначає форму графа [8].

Спектр задачі теорії квантових графів зв'язаний з нормованим лапласіаном відповідного комбінаторного графа наступним чином: власні значення нормованого лапласіана взаємно однозначно пов'язані з другими членами асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля з (узагальненими) умовами Неймана на вершинах цього графа (див. [3], де використані результати [2], [6] та [1]). Це дає змогу отримати інформацію про форму графа користуючись асимптотикою власних значень.

Для задачі Штурма-Ліувілля з умовами Неймана на висячих вершинах і умовами неперервності та Кіргофа у внутрішніх було доведено, що спектр однозначно визначає форму простого звязного рівнобічного графу, якщо кількість вершин не перевищує 5 і форму дерева, якщо кількість вершин не перевищує 8.

У даній роботі ми розглядаємо спектральну задачу Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі зі стандартними умовами у внутрішніх вершинах та умовами Діріхле на висячих вершинах (орієнтація ребер довільна):

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad (j = 1, 2, ..., g), \tag{1}$$

з умовами неперервності

$$y_j(0) = y_k(l) \tag{2}$$

для всіх $j \in W^-(v_i)$, всіх $k \in W^+(v_i)$, де $W^+(v_i)$ множина індексів ребер, які входять у вершину v_i, $W^-(v_i)$ множина індексів ребер, що виходять із вершини v_i, умовами Кірхгофа

$$\sum_{k \in W^+(v_i)} y_k'(l) = \sum_{j \in W^-(v_i)} y_j'(0) \tag{3}$$

у внутрішніх вершинах та умовами Діріхле

$$y_j(0) = 0 \tag{4}$$

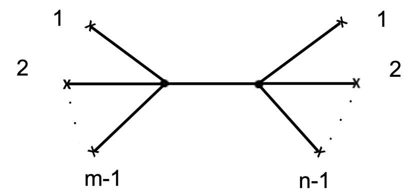

Рис 1. Граф подвійна зірка.

на висячих вершинах.

Отримано такий результат.

Теорема 1 *Нехай спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}=\bigcup_{i=1}^{s}\{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ *задачі (1)-(4), складається з підпослідовностей з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l}+\gamma+O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для} \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{2\pi k}{l}-\gamma+O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для} \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(3)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l}+\gamma+O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для} \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(4)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l}-\gamma+O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для} \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{\pi k}{l}+O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для} \ \ i=5,6,...,s \ \ \text{та} \ \ k\in\mathbb{N}.$$

Тоді ця асимптотика однозначно визначає форму графа як подвійної зірки з кількістями периферичних ребер інцидентних з внутрішніми вершинами $m-1$ *та* $n-1$ *(див. рис. 1), де натуральні числа* m *і* n *становлять розв'язок системи рівнянь*

$$m+n=s-1, \quad mn=(\cos\gamma l)^{-2}. \tag{5}$$

Ця система рівнянь має 2 розв'язки, котрі відповідають ізоморфним графам.

Доповідь грунтується на результатах статті [10], де, також, отримані теореми, подібні до теореми 1 для інших графів.

Література

[1] R. Carlson, V. Pivovarchik. Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths J. Phys. A: Math. Theor. Vol.41 (2008) 145202, 16 pp.

[2] C. Cattaneo, The spectrum of the continuous Laplacian on a graph, Monatsh. Math. 124 (1997), no. 3, 215-235.

[3] A. Chernyshenko, V. Pivovarchik. Recovering the shape of a quantum graph. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 92, (2020), Art. 23.

[4] L. Collatz, U. Sinogowitz. Spektren endlicher Grafen. Abh. Math, Sem. Univ. Hamburg, Vol. 21 (1957) 63–77.

[5] D. M. Cvetkovic', M. Doob, H. Sachs. Spectra of Graphs. Theory and Applications. Berlin, !980. Amsterdam 1988.

[6] P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A **66** (1997), 359–371.

[7] Fan R. K.Chung *Spectral graph theory* AMS Providence, R.I. 1997.

[8] B. Gutkin, U. Smilansky, Can one hear the shapeof a graph? J. Phys. A Math. Gen. **34** (2001), 6061–6068.

[9] J. von Below, *Can One Hear the Shape of a Network*, Partial Differential Equations on Multistructures, Lecture Notes in Pure Mathematics, **219**, M. Dekker, NY, (2001), 19-36.

[10] Пивоварчик В.М., Чернишенко А.А. *Коспектральні квантові графи за умов Діріхле на висячих вершинах*, прийнятої до друку в Українському математичному журналі.