Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E(2)}$

Ігор Гавриленко
(Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна)
E-mail: igorgavrilenko0898@gmail.com

Євген Петров
(Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна)
E-mail: petrov@karazin.ua

Відомо, що у тривимірному евклідовому просторі повна зв'язна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли є площиною. Цей результат був отриманий незалежно О.В. Погорєловим, М. до Кармо і К.К. Пенгом та Д. Фішер-Колбрі і Р. Шоеном (див., наприклад, [1]). Він узагальнює класичну теорему С.Н. Бернштейна, згідно з якою будь-яка повна явно задана мінімальна поверхня є площиною. У [2] було введене поняття мінімальної поверхні в субрімановому многовиді. У подальшому такі поверхні та їхня стійкість вивчалися для різних субріманових геометрій, див. огляд у [4]. Зокрема, у [3] були отримані результати типу Бернштейна, тобто опис стійких мінімальних поверхонь, у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга.

Субрімановим многовидом зветься гладкий многовид M разом з гладким векторним розподілом $\mathcal{H}$ на M (він зветься горизонтальним розподілом) і гладким полем евклідових скалярних добутків $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ (субрімановою метрикою). Розглянемо гладку орієнтовану поверхню Σ у тривимірному субрімановому многовиді M, субріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ якого будується як обмеження на $\mathcal{H}$ деякої ріманової метрики M. Сингулярна множина Σ_0 цієї поверхні складається з тих точок $p \in \Sigma$, для яких дотична площина $T_p\Sigma$ збігається з $\mathcal{H}_p$. Якщо N – одиничне нормальне поле Σ у рімановому сенсі, то можно описати сингулярну множину як $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \mid N_h(p) = 0\}$, де N_h – ортогональна проекція поля N на $\mathcal{H}$. Субріманова площа області $D \subset \Sigma$ визначається як $A(D) = \int_D |N_h| d\Sigma$, де $d\Sigma$ – ріманова форма площі Σ. Нормальною варіацією Σ, що задана гладкою функцією u, будемо називати відображення $\varphi\colon \Sigma \times I \to M$, що визначене умовою $\varphi_s(p) = \exp_p(su(p)N(p))$. Тут I – деякий окіл нуля в $\mathbb{R}$, а $\exp_p$ – ріманове експоненційне відображення. Іншими словами, ми будуємо варіацію традиційним для ріманової геометрії чином, випускаючи геодезичні з точки p в напрямку $u(p)N(p)$. Позначимо $A(s) = \int_{\Sigma_s} |N_h| d\Sigma_s$, де $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$. Тоді $A'(0)$ зветься першою варіацією площі, що відповідає φ, а $A''(0)$ – другою. Поверхня Σ називається мінімальною, якщо $A'(0) = 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. Зауважимо, що тут ми слідуємо рімановій традиції, називаючи мінімальними поверхнями стаціонарні точки субріманового функціонала площі. Мінімальна поверхня Σ називається стійкою, якщо $A''(0) \geq 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. У [3] було, зокрема, встановлено, що у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга повна зв'язна мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є вертикальною евклідовою площиною.

Многовид $\widetilde{E(2)}$ визначається як універсальне накриття групи власних рухів площини. Це простір $\mathbb{R}^3$ з координатами (x, y, z) (де (x, y) відповідає паралельному перенесенню, а z – куту обертання), на якому структура групи Лі визначає наступний базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Розглянемо на $\widetilde{E(2)}$ ріманову метрику $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ таку, що $\{X_1, X_2, X_3\}$ є ортонормованим базисом в кожній точці. Зауважимо, що вона виявляється евклідовою. У якості горизонтального розподілу $\mathcal{H}$ візьмемо розподіл, що натягнутий на $\{X_1, X_2\}$, а у якості $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ – обмеження евклідової метрики на $\mathcal{H}$. Нехай Σ тепер – гладка орієнтована поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Введемо деякі додаткові позначення. На регулярній частині $\Sigma \setminus \Sigma_0$ поверхні визначимо горизонтальне гаусове відображення $\nu_h = \frac{N_h}{|N_h|}$ та характеристичне векторне поле Z, яке у кожній точці утворюється з ν_h обертанням на прямий кут у площині $\mathcal{H}_p$ (в орієнтації, що визначена $N(p)$). Позначимо $S = \langle N, X_3 \rangle - |N_h| X_3 \in T_p\Sigma$. Векторне поле S доповнює Z до базису дотичної площини. Через ∇ позначатимемо ріманову коваріантну похідну. Нехай B – оператор Вейнгартена поверхні Σ відносно N, що визначається для будь-якого дотичного до Σ векторного поля W умовою $B(W) = -\nabla_W N$.

Теорема 1. *Нехай Σ – поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Тоді перша нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N_h|^{-1} \left(- \langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle \right) u \, d\Sigma.$$

Якщо Σ мінімальна, то друга нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:

$$A''(0) = \int_{\Sigma\setminus\Sigma_0} -2|N_h| \langle B(Z), S \rangle^2 u^2 + 2|N_h| \langle B(Z), Z \rangle \langle B(S), S \rangle u^2 +$$

$$+2|N_h| \langle B(Z), Z \rangle u^2 (\langle B(S), S \rangle + \langle B(Z), Z \rangle) - 2 \langle N, X_3 \rangle \langle B(S), Z \rangle Z(u) u +$$

$$+|N_h|^{-1} (Z(u) + \langle N, X_3 \rangle |N_h| \langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z \rangle u)^2 -$$

$$-2|N_h|^2 \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle u - |N_h|^3 \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle^2 u^2 \quad d\Sigma.$$

Твердження 2. *Евклідова площина у $\widetilde{E(2)}$ є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це горизонтальна або вертикальна площина. Усі мінімальні евклідові площини у $\widetilde{E(2)}$ є стійкими.*

Іншими прикладами мінімальних поверхонь є явно задані $y = A \cos z + B$ та $y = x + A(\sin z + \cos z) + B$, де A, B постійні. Наведені приклади демонструють, що з мінімальності поверхні у рімановому сенсі не випливає її субріманова мінімальність та навпаки. Будемо називати поверхню Σ у тривимірному субрімановому многовиді вертикальною, якщо $T_p\Sigma \perp \mathcal{H}_p$ для кожної $p \in \Sigma$. Зокрема, такі поверхні не містять сингулярних точок.

Теорема 3. *Будь-яка повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня у $\widetilde{E(2)}$ – це горизонтальна евклідова площина $z = C$ або паралельно перенесений уздовж площини (x, y) стандартний гелікоїд $x \cos z + y \sin z = 0$. При цьому гелікоїди є нестійкими.*

Звідси отримуємо наступний частковий результат типу Бернштейна.

Наслідок 4. *У $\widetilde{E(2)}$ повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є горизонтальною евклідовою площиною.*

Література

[1] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(2) : 199–211, 1980.

[2] N. Garofalo, D.-M. Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(3) : 1081–1144, 1996.

[3] A. Hurtado, M. Ritoré, C. Rosales. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$. *Adv. in Math.*, 224(2) : 561–600, 2010.

[4] M. Ritoré, C. Rosales. Area-stationary and stable surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group $\mathbb{H}^1$. *Matemática Contemporânea*, 35 : 185–203, 2008.