Тополого-метрична теорія G-зображення чисел

Микола Працьовитий
(м.Київ, вул. Пирогова, 9)
E-mail: prats4444@gmail.com

Ірина Лисенко
(м.Київ, вул. Пирогова, 9)
E-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

Юлія Маслова
(м.Київ, вул. Пирогова, 9)
E-mail: julia0609mas@gmail.com

Нехай g_0–фіксоване число з проміжку $(0; \frac{1}{2}]$, $g_1 \equiv g_0 - 1$; $A \equiv \{0; 1\}$ – алфавіт; $L \equiv A \times A \times ....$

Theorem 1. *Для будь–якого числа $x \in [0; g_0]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що*

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}. \tag{1}$$

Подання числа x рядом (1) називається його G–представленням, а символічний запис $\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ – G–зображенням. Майже всі числа відрізка $[0; g_0]$ (за винятком зліченної множини) мають єдине G–зображення і називаються G–унарними, а числа зліченної всюди щільної множини мають два зображення (вони називаються G–бінарними). Має місце рівність: $\Delta^G_{c_1...c_m 01(0)} = \Delta^G_{c_1...c_m 11(0)}$.

Специфічною особливістю G–зображення чисел є те, що оператор лівостороннього зсуву цифр G–зображення, означений рівністю $\omega(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^G_{\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...}$, є неперервною коректно означеною функцією, а інверсор цифр $I(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^G_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]...[1-\alpha_n]...}$ є ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.

Theorem 2. *Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то має місце формула взаємозв'язку G–зображення і класичного двійкового зображення $\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = \Delta^2_{0a_1a_2...a_n...}$,*

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{коли } \alpha_1 = 0; \\ 1, & \text{коли } \alpha_1 = 1; \end{cases} a_{n+1} = \begin{cases} \alpha_{n+1}, & \text{коли } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \text{– парне}, \\ 1 - \alpha_{n+1}, & \text{коли } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \text{– непарне.} \end{cases}$$

Theorem 3. *Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то для будь–якого натурального числа a існує набір нулів та одиниць $(a_1, a_2, ..., a_n)$ такий, що $a = 2^n + \sum\limits_{k=1}^{n} [(-1)^{1+\sigma_k} a_k 2^{n-k}] \equiv (1a_1 \ldots a_n)_G$, де $\sigma_1 = 0$, $\sigma_k = a_1 + ... + a_{k-1}$, причому таких наборів існує рівно два.*

Theorem 4. *а) Якщо у G–зображенні натурального числа a більше цифр, ніж у G–зображенні натурального числа b, то $a \geq b$.*
б) Числа $a = (1a_1...a_{k-1}1a_{k+1}...a_n)_G$ і $b = (1a_1...a_{k-1}0b_{k+1}...b_n)_G$ перебувають у відношенні
1) $a \geq b$, якщо σ_k–непарне, 2) $a \leq b$, якщо σ_k–парне.

Доповідь присвячена геометрії G–зображення чисел (геометричному змісту цифр, властивостям циліндричних та хвостових множин) і результатам дослідження тополого–метричних і фрактальних властивостей множин $E_n(a) = \{x : \omega^n(x) \leq a = const\}$, $E_n = \{x : \omega^n(x) < x\}$, $E[G, \nu_0, \nu_1] = \{x = \Delta^G_{\alpha_1...\alpha_n...}, \nu_1(x) = \lim\limits_{k\to\infty} k^{-1}(\alpha_1 + ... + \alpha_k), \nu_0(x) = 1 - \nu_1(x)\}$, $E[G, \nu_i(x)] = \{x : \nu_i(x)\text{– не існує}\}$.

References

[1] Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел і їх застосування. *К.: Наукова думка*, 2022 — 316 с.