Наближення для просторів афінної зв'язності та індуковані відображення

Покась Сергій Михайлович
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

Ніколайчук Анна Олександрівна
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна)
E-mail: nickolaychuck@stud.onu.edu.ua

Розглянемо простір афінної зв'язності без скруту A_n, віднесений до довільної системи координат $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, з об'єктом зв'язності $\Gamma^h_{ij}(x)$; $M_0(x^h_0)$ "— фіксована точка цього простору.

Побудуємо новий простір $\tilde{A}_n$, віднесений до координат $\{y^1, y^2, \ldots, y^n\}$, зі своїм об'єктом зв'язності $\tilde{\Gamma}^h_{ij}(y)$, який задається співвідношенням

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij}(y) = -\frac{1}{3}\underset{0}{R}^h_{.(ij)l}\, y^l, \text{ де } \underset{0}{R}^h_{.ijl} = R^h_{.ijl}(M_0). \tag{1}$$

Вивчаються деякі геометричні об'єкти простору $\tilde{A}_n$. Зокрема, знайдено тензор Рімана:

$$\tilde{R}^h_{.ijk} = \underset{0}{R}^h_{.ijk} + \frac{1}{9}\left(R^\alpha_{.(ik)l_1}R^h_{.(\alpha j)l_2} - R^\alpha_{.(ij)l_1}R^h_{.(\alpha k)l_2}\right)\Bigg|_0 y^{l_1}y^{l_2}\,. \tag{2}$$

Згорнувши останнє співвідношення за індексами h та k, отримаємо тензор Річчі:

$$\tilde{R}_{ij} = \underset{0}{R}_{ij} + \frac{1}{9}\left(R_{il_1}R_{jl_2} + R^\alpha_{.(ij)l_1}R_{\alpha l_2}\right)\Bigg|_0 y^{l_1}y^{l_2}\,. \tag{3}$$

Підраховано компоненти параметрів Томаса:

$$\tilde{T}^h_{.ij} = -\frac{1}{3}\left[R^h_{.(ij)l} + \frac{1}{n+1}\left(R_{il}\delta^h_j + R_{jl}\delta^h_i\right)\right]\Bigg|_0 y^l\,. \tag{4}$$

Компоненти тензора проєктивної кривини (тензора Вейля):

$$\begin{aligned}\tilde{W}^h_{.ijk} = \underset{0}{W}^h_{.ijk} + \frac{1}{9}\Bigg[&R^\alpha_{.(ik)l_1}R^h_{.(\alpha j)l_2} - R^\alpha_{.(ij)l_1}R^h_{.(\alpha k)l_2} \;-\; \frac{1}{n-1}\times\\ \times\Bigg[&\left(R_{il_1}R_{jl_2} + R^\alpha_{.(ij)l_1}R_{\alpha l_2}\right)\delta^h_k - \left(R_{il_1}R_{kl_2} + R^\alpha_{.(ik)l_1}R_{\alpha l_2}\right)\delta^h_j\Bigg]\Bigg]\, y^{l_1}y^{l_2}.\end{aligned} \tag{5}$$

Далі розглядаються два простори афінної зв'язності: $\bar{A}_n$ з об'єктом зв'язності $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ $(\bar{M}_0 \in \bar{A}_n)$ і A_n з об'єктом зв'язності Γ^h_{ij}. Будуються їх наближення першого порядку "— простори $\tilde{A}_n$ і $\tilde{\bar{A}}_n$. Вихідні простори допускають нетривіальне геодезичне відображення $\tilde{\gamma} : \tilde{\bar{A}}_n \to \tilde{A}_n$ у загальній системі координат $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$.
Отримано тензор деформації $\tilde{P}^h_{ij} = \tilde{\bar{\Gamma}}^h_{ij} - \tilde{\Gamma}^h_{ij}$ відображення між просторами наближення:

$$\tilde{P}^h_{ij} = \varphi_{(i}\,\delta^h_{j)} + \frac{2}{3}\underset{0}{\psi}_{ij}y^h, \text{ де } \varphi_i = -\frac{1}{3}\underset{0}{\psi}_{il}y^l. \tag{7}$$

З'ясовано питання відносно властивості індукованого відображення $\tilde{\gamma} : \tilde{\bar{A}}_n \to \tilde{A}_n$.

Theorem 1. *Відображення просторів наближення $\tilde{\bar{A}}_n$ і $\tilde{A}_n$, яке індукується геодезичним відображенням вихідних просторів афінної зв'язності, не є геодезичним.*

References

[1] А. П. Норден. Пространства аффинной связности. *М.: Наука*, 1976. – с. 431
[2] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. *М.: Наука*, 1979. – с. 255
[3] А. З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. *М.: Наука*, 1966. – с. 496
[4] Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. *М.: ИЛ*, 1948. – с. 303