Закономірності квазі-геодезичних відображень узагальнено-рекурентно-параболічних просторів

Піструіл М.І.
(ОНУ, Одеса, Україна)
E-mail: margaret.pistruil@gmail.com

Розглянемо рекурентно-параболічний простір [1], [3] (V_n, g_{ij}, F_i^h), з метричним тензором $g_{ij}(x)$ та афінором $F_i^h(x)$, який допускає квазі-геодезичні відображення (КГВ) [2] на простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. Тоді в загальній за відображенням системі координат (x^i) виконуються основні рівняння даного відображення [1]:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \phi_{(i}(x)F_{j)}^h(x),$$
$$F_i^h = \overline{F}_i^h(x),$$
$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0,$$
$$g_{i\alpha}F_j^\alpha = -g_{j\alpha}F_i^\alpha, \quad \overline{g}_{i\alpha}F_j^\alpha = -\overline{g}_{j\alpha}F_i^\alpha,$$
$$F_{i,j}^h = F_{i|j}^h = q_j F_i^h,$$
$$i, h, j, ... = 1, 2, ..., n.$$

Тут $\Gamma_{ij}^h, \overline{\Gamma}_{ij}^h$ – компоненти об'єктів зв'язності $V_n, \overline{V}_n$, відповідно; ψ_i, ϕ_i, q_i – деякі ковектори; «,» та «|» – знак коваріантної похідної в просторах $V_n, \overline{V}_n$, відповідно; дужками позначена операція симетрування.

Доведена [4]

Theorem 1. *Для того, щоб рекурентно-параболічний простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетрівіальне КГВ, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував неособливий симетричний двічі коваріантний тензор a_{ij}, який задовольняє рівнянням*

$$a_{ij,k} = \lambda_\alpha F_i^\alpha g_{jk} + \lambda_\alpha F_j^\alpha g_{ik} + \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik}, \tag{1}$$

і

$$a_{i\alpha}F_j^\alpha = -a_{j\alpha}F_i^\alpha, \quad det||a_{ij}|| \neq 0 \tag{2}$$

при деякому ковекторі $\lambda_i \neq 0$.

Питання про існування КГВ простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) зводиться до дослідження диференціальних рівнянь (1) відносно вектора λ_i і тензора a_{ij}, який задовольняє (2).

Має місце

Theorem 2. *Для того, щоб псевдорімановий простір з інтегровною рекурентно-параболічною структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав КГВ, необхідно і достатньо, щоб замкнена система диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку типу Коші відносно функцій a_{ij}, λ_i, ξ:*

$$a_{ij,k} = \lambda_\alpha F_i^\alpha g_{jk} + \lambda_\alpha F_j^\alpha g_{ik} + \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik},$$

$$\lambda_{i,l} = \frac{2}{n} a_{\alpha\beta} \tilde{\tilde{R}}_{il}^{\alpha\beta} - \lambda_i q_l + \frac{2}{n}\xi F_{il},$$

$$\xi_{,k} = a_{\alpha\beta} P_k^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \widetilde{T}_k^\alpha - 2\xi q_k,$$

мала нетривіальний розв'язок $a_{ij}(x)$, $\lambda_i(x) \neq 0$, $\xi(x)$, *який задовольняє умовам (2),* $\lambda_\alpha F_i^\alpha$ *– градієнтний вектор,* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. *Тут* $\tilde{\tilde{R}}_{il}^{hj}$, P_k^{hj}, $\widetilde{T}_k^h$ *виражаються через внутрішні об'єкти простору* V_n.

Дана теорема дає можливість звести дослідження існування КГВ до системи, яка може бути розв'язана за допомогою регулярних методів теорії диференціальних рівнянь.

Theorem 3. *Для того, щоб псевдоріманової простір з інтегровною рекурентно-параболічною структурою* (V_n, g_{ij}, F_i^h) *допускав КГВ, необхідно і достатньо, щоб система однорідних алгебраїчних рівнянь*

$$a_{\alpha\beta} S_{iklj}^{\alpha\beta} = 0,$$
$$a_{\alpha\beta} \tilde{P}_{ilk}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \tilde{\tilde{T}}_{ilk}^{\alpha} = 0,$$
$$a_{\alpha\beta} Q_{ik}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha Q_{ik}^{\alpha} + \xi Q_{ik} = 0$$

та їх диференціальних продовжень в (V_n, g_{ij}, F_i^h) *мала нетривіальний розв'язок* $a_{ij}(x)$, $\lambda_i(x) \neq 0$, $\xi(x)$, *який задовольняє умовам (2),* $\lambda_\alpha F_i^\alpha$ *– градієнтний вектор,* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. *Тут* S_{iklj}^{hd} $\tilde{P}_{ilk}^{hj}$, $\tilde{\tilde{T}}_{ilk}^{h}$, Q_{ik}^{hj}, Q_{ik}^{h}, Q_{ik} *виражаються через внутрішні об'єкти простору* V_n.

Теореми 2 та 3 допомагають для будь-якого рекурентно-параболічного простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) або знайти всі псевдоріманові простори, на які V_n допускає КГВ, або довести, що їх немає. Теореми 2 і 3 називають фундаментальними теоремами теорії КГВ рекурентно-параболічних просторів.

References

[1] І.М. Курбатова, М.І. Піструіл. Квазі-геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. *Proc.Intern.Geom.Center*, 13(3) : 18-32, 2020.

[2] А.З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, (4-5): 7-21, 1968.

[3] М.І. Піструіл, І.М. Курбатова. On quasi-geodesic mappings of special pseudo-Riemannian spaces. *Proc.Intern.Geom.Center*, 15(2), 121-139, 2022.

[4] М.І. Піструіл, І.М. Курбатова. Canonical quasi-geodesic mappings of special pseudo-Riemannian spaces. *Proc.Intern.Geom.Center*, 15(3-4), 163-176, 2022.