Геометрія чисел у задачах конструктивної теорії локально складних функцій

Микола Працьовитий
(УДУ імені Михайла Драгоманова, ІМ НАН України)
E-mail: prats4444@gmail.com

Ольга Бондаренко
(УДУ імені Михайла Драгоманова)
E-mail: omar2011@meta.ua

Яніна Гончаренко
(УДУ імені Михайла Драгоманова)
E-mail: goncharenko.ya.v@gmail.com

Софія Ратушняк
(ІМ НАН України, УДУ імені Михайла Драгоманова)
E-mail: ratush404@gmail.com

Неперервні функції з локально складною структурою тополого-метричного, інтегрально та диференціального, варіаційного та фрактального змісту не можуть бути аналітично заданими виразами зі скінченною кількістю бінарних операцій. Існують різні підходи до їх визначення, зокрема, метод ітераційних функцій, задання функції системою функціональних рівнянь, з використанням різних систем зображення чисел, з застосуванням перетворювачів цифр, проектування одного зображення в інше тощо.

Доповідь присвячена локально складним функціям, визначеним нескінченними системами функціональних рівнянь, залежним від нескінченної кількості дійсних параметрів. В класі розглядуваних функцій ніде не монотонні та ніде не диференційовні функції, функції канторівського типу, функції розподілу випадкових величин, абсолютно неперервні функції та сингулярні функції.

Розглядається чотири послідовності дійсних чисел: (Θ_n), (b_n), (p_n), (σ_n), які визначають нескінченну систему функціональних рівнянь

$$f(b_n + \Theta_n x) = \sigma_n + p_n f(x), n \in Z. \qquad (1)$$

Остання система є основним об'єктом дослідження, результатам якого присвячена дана доповідь.

Theorem 1. *Якщо*
1) $\Theta_{-n} = \Theta_n > 0$ *і* $\sum\limits_{n \in Z} \Theta_i = 1$*;*
2) $b_n = b_{n-1} + \Theta_{n-1} = \sum\limits_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i$*;*
3) $|p_i| < 1, \sum\limits_{i=\in Z} p_i = 1$*;*
4) $\sigma_n = \sigma_{n-1} + p_{n-1} = \sum\limits_{i=-\infty}^{n-1} p_i > 0$,
то система (1) має у класі неперервних функцій, визначених на відрізку $[0; 1]$*, єдиний розв'язок.*

Remark 2. Далі вважається, що умови 1) — 4) для функції f, що задовольняє систему (1), виконуються. Якщо $p_i = \Theta_i$ для будь-якого $i \in Z$, то $f(x) = x$.

Theorem 3. *Якщо серед членів послідовності* (p_n) *немає від'ємних елементів, то* f *— функція розподілу на відрізку* $[0; 1]$.

Theorem 4. *Якщо існує* $p_i = 0$, *то міра Лебега множини несталості (тобто доповнення до об'єднання інтервалів сталості) рівна нулю, а отже,* f *є функцією канторівського типу.*

Theorem 5. *Якщо* $f(x)$ *— функція канторівського типу, а* X *— випадкова величина, рівномірно розподілена на* $[0;1]$, *то випадкова величина* $Y = f(X)$ *має чисто дискретний розподіл.*

Theorem 6. *Якщо серед членів послідовності* (p_n) *існують від'ємні числа, то* f *є функцією необмеженої варіації.*

Theorem 7. *Якщо серед членів послідовності* (p_n) *немає нулів, але є від'ємні числа, то функція* f *є ніде не монотонною.*

Theorem 8. *Якщо серед членів послідовності* (p_n) *існують від'ємні числа і нулі, то* f *є функцією необмеженої варіації, яка не має проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості.*

Lemma 9. *Графік* Γ_f *функції* f *є структурно фрактальною множиною, а саме* N*-самоафінною множиною з наступною структурою самоафінності:*

$$\Gamma_f = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \Gamma_i, \quad \Gamma_i = f_i(\Gamma_f), \quad f_i = \begin{cases} x' = \Theta_i x + b_i, \\ y' = p_i y + \sigma_i. \end{cases}$$

Theorem 10. *Має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sum\limits_{i \in Z} \sigma_i \Theta_i}{1 - \sum\limits_{i \in Z} \Theta_i p_i}.$$

References

[1] М. В. Працьовитий. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: *Наукова думка*, 2022, 316 с.

[2] М. В. Працьовитий. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: *НПУ імені М.П.Драгоманова.* 1998, 296 с.