Розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона

Анатолій Сердюк
(Інститут математики НАН України)
E-mail: sanatolii@ukr.net

Тетяна Степанюк
(Інститут математики НАН України)
E-mail: stepaniuk.tet@gmail.com

Через $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $\alpha>0$, $r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leq p\leq\infty$, позначимо множину 2π–періодичних функцій $f(x)$, які при всіх $x\in\mathbb{R}$ можна представити у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \ \varphi\perp 1,\ \ \varphi\in L_p,\ \ ||\varphi||_p\leq 1, \tag{1}$$

з ядрами вигляду

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big),\quad \alpha,r>0,\ \ \beta\in\mathbb{R}.$$

Функцію f у рівності (1) називають узагальненим інтегралом Пуассона функції φ і позначають через $\mathcal{J}^{\alpha,r}_{\beta}\varphi$, з іншого боку функцію φ у рівності (1) називають узагальненою похідною функції f і позначають через $f^{\alpha,r}_{\beta}$ (тобто, $\varphi(\cdot)=f^{\alpha,r}_{\beta}(\cdot)$) [1].

Для будь–якої функції $f(x)$ із простору неперрвних 2π–періодичних функцій C через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у вузлах $x_k^{(n-1)}=\frac{2k\pi}{2n-1}$, $k\in\mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f;x_k^{(n-1)})=f(x_k^{(n-1)}),\ k=0,1,...,2n-2. \tag{2}$$

Поліноми $\widetilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$ однозначно задаються інтерполяційними умовами (2) і називаються інтерполяційними поліномами Лагранжа.

Позначимо через $\tilde{\rho}_n(f;\cdot)$ відхилення від функції $f\in C$ її інтерполяційного полінома Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$

$$\tilde{\rho}_n(f;x)=f(x)-\tilde{S}_{n-1}(f;x).$$

Мета нашого дослідження полягає в тому, щоб при всіх $x\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $r\in(0,1)$ і $1\leq p\leq\infty$, знайти розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ вигляду (2) на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, тобто встановити асимптотичні при $n\to\infty$ рівності для величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)=\sup_{f\in C^{\alpha,r}_{\beta,p}}|\tilde{\rho}_n(f;x)|\,. \tag{3}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $r\in(0,1)$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leq p\leq\infty$ і $x\in\mathbb{R}$. Тоді при $p=1$ і $n\geq n_*(\alpha,r,1)$*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x)=e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi\alpha r}+\delta^*_{n,1}\left(\frac{1}{n^{1-r}}+\frac{1}{(\alpha r)^2n^r}\right)\right); \tag{4}$$

при $1<p<\infty$ і $n\geq n_*(\alpha,r,p)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|$$
$$\times\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \delta^*_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \qquad (5)$$

а при $p=\infty$ *і* $n \geq n_*(\alpha,r,\infty)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x) = e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \delta^*_{n,\infty}\right). \qquad (6)$$

У формулах (4)–(6) *для величин* $\delta^*_{n,p} = \delta^*_{n,p}(\alpha,r,\beta,x)$ *виконується оцінка* $|\delta^*_{n,p}| < 40\pi^4$.

Оцінки (4)–(6) доповнюють результати робіт [2]–[4], де було знайдено розв'язок вказаної задачі Колмогорова–Нікольського на класах $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ при всіх $r\geq 1$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $1\leq p\leq\infty$.

Література

[1] А.И. Степанец, *Методы теории приближений*: В 2 ч., Пр. Ін-ту математики НАН України, Ин-т математики НАН Украины, Київ, **40**, Ч. I 2002. — 468 с.

[2] А.И. Степанец, А.С. Сердюк, *Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами*, Укр. мат. журн., 59, №12, 1689–1701, 2000.

[3] А.С. Сердюк, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій*, Укр. мат. журн., 64, №5, 698–712, 2012.

[4] А.С. Сердюк, В.А. Войтович, *Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена*, Збірник праць Інституту математики НАН України, 7, № 1: Теорія наближення функцій та суміжні питання.- Київ: Ін-т математики НАН України, 274-297, 2010.