Про нижню оцінку діаметра образу круга

Ігор Пєтков
(Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова, Миколаїв, Україна)
E-mail: igorpetkov83@gmail.com

Руслан Салімов
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Марія Стефанчук
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: stefanmv43@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0,\infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in adm\,\Gamma$, якщо $\int\limits_{\gamma} \rho(z)|dz| \geqslant 1$ для кожної кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1,\infty)$. Тоді *p-модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\,dxdy\,.$$

Для довільних множин E, F, і G в $\mathbb{C}$, через $\Delta(E,F;G)$ позначимо сім'ю всіх кривих $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Покладемо $\mathbb{A}(z_0,r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$, $S_i = S(z_0,r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r_i\}$, $\quad i = 1,2$.

Нехай D — область в комплексній площині $\mathbb{C}$ та $Q : D \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ є *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці* $z_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\,\eta^p(|z-z_0|)\,dxdy$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0,r_1,r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0,\partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такої, що $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1$.

Всюди далі будемо вважати, що $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{S(z_0,r)} Q(z)|dz|$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}$.

Нижче наведено теорему про нижню оцінку діаметра образу круга.

Теорема 1. *Припустимо, що $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{z_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці z_0 при $p > 2$, де z_0 — деяка точка в $\mathbb{C}$, $r_0 > 0$. Тоді для будь-якого $R > r_0$ виконується оцінка*

$$\mathrm{diam}\,(fB(z_0,R)) \geqslant 2\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-2}},$$

де $B(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| \leqslant R\}$.