Ундулоїди та деякі їх деформації

Подоусова Т.Ю.
(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)
E-mail: tatyana_top@ukr.net

Федченко Ю.С.
(Одеський національний технологічний університет, Одеса, Україна)
E-mail: fedchenko_julia@ukr.net

Вашпанова Н.В.
(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)
E-mail: vasha_nina@ukr.net

Ундулоїд- одна із поверхонь К. Делоне (C.Delaunay) [1], які застосовуються у газовій динаміці при дослідженні мильних плівок та бульбашок.

Пошук поля зміщення нескінченно малої (н.м.) деформації першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі однозв'язної регулярної поверхні у E_3 просторі зводиться до дослідження та розв'язування диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними відносно двох невідомих функцій $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$:

$$\rho^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + s^{\alpha}\mu_{\alpha} = -K(d^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} + l^{\alpha}\varphi_{\alpha} + 2H\varphi), \tag{1}$$

де $\rho^{\alpha\beta}$, $d^{\alpha\beta}$, s^{α}, l^{α}, K, H- відомі функції точки поверхні, $\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\mu}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}$, $\mu_{\alpha} = \frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}}$.

Зокрема, якщо функція $\varphi(x^1, x^2)$ є певною характеристичною функцією (є розв'язком однорідного рівняння Вейнгартена [2]), то (1) буде диференціальним рівнянням гіперболічного типу відносно функції $\mu(x^1, x^2)$.

Доведено, що будь-яка поверхня класу C^5 ненульових гаусової та середньої кривин при певних граничних умовах допускає єдину н.м. деформацію зі стаціонарним тензором Річчі в класі C^2-поверхонь.

Слід зазначити, що рівняння (1) розглядалося у роботі [3] за умови $\mu(x^1, x^2) \in C^3$ є зазделегідь заданою функцією.

Для ундулоїда у лініях кривини за умови $\varphi(x^1, x^2) = 0$ рівняння (1) набуде вигляду:

$$\mu_{12} - \frac{2(2 + \sin x^1)(4\sin^2 x^1 + 16\sin x^1 + 13)\cos x^1}{(1 + 2\sin x^1)(5 + 4\sin x^1)^2}\mu_2 = 0.$$

Скориставшись математичною системою MATHCAD для обчислення інтегралів при розв'язуванні цього рівняння, отримаємо наступний результат.

Ундулоїд допускає н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі за умови, що функція $\varphi(x^1, x^2) = 0$. Тензорні поля при цьому представлені в явній формі та містять знайдену функцію

$$\mu(x^1, x^2) = \frac{1 + 2\sin x^1}{\sqrt[4]{5 + \sin x^1}} e^{-\frac{3}{16(5+4\sin x^1)}} C(x^2),$$

де $C(x^2)$- довільна функція від однієї змінної. У випадку $\mu = 0$ ундулоїд буде жорстким.

References

[1] I.Eells. The surfaces of Delaunay. *Mat. Intelligencer*, 9 : 53–57, 1987.

[2] Векуа І.Н. *Узагальнені аналітичні функції* . М: Наука, 1988.-с.509.

[3] Подоусова Т.Ю., Вашпанова Н.В. Деформації поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі. *Механіка та математичні методи*, Т.2, Вип.2. : 51–62, 2020.