Геодезичні відображення псевдоріманових просторів

В. Кіосак
(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Дідріхсона, 4, Одеса, Україна)
E-mail: `kiosakv@ukr.net`

О. Латиш
(Національний університет «Одеська морська академія», Дідріхсона, 8, Одеса, Україна)
E-mail: `latysh.o@ukr.net`

Необхідною і достатньою умовою того, щоб псевдоріманів простір V_n допускав нетривіальні геодезичні відображення є існування в ньому розв'язків систем диференціальних рівнянь в коваріантних похідних

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \tag{1}$$

відносно тензора $a_{ij} (= a_{ji} \neq c g_{ij})$ та вектора λ_i $(\neq 0)$.

Тут кома знак коваріантної похідної

$$a_{ij,k} = \partial_k a_{ij} - a_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik} - a_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{jk}.$$

Систему (1) називають *лінійною формою основних рівнянь теорії геодезичних відображень.* При відомих розв'язках системи (1) метричні тензори псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ можуть бути знайдені з рівнянь [1, 2]

$$a_{ij} = e^{2\varphi}\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j};$$
$$\lambda_i = -e^{2\varphi}\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta}.$$

Тут $\bar{g}_{ij}$ — елементи оберненої матриці до метричного тензору V_n.

Об'єкти псевдоріманового простору V_n, які визначені за допомогою метричного тензора g_{ij}, називають *внутрішніми об'єктами псевдоріманового простору.* Крім внутрішніх об'єктів вивчають і об'єкти, які не є внутрішніми, зокрема тензор D^h_{ijk} такий, що

$$D^h_{ijk} = R^h_{ijk} - B(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}),$$

де δ^h_i — символи Кронекера, R_{ijk} —тензор Рімана, а B — деякий інваріант.

Якщо тензор $D^h_{ijk} = 0$, то псевдоріманів простір V_n є простором сталої кривини і

$$B = \frac{R}{n(n-1)}. \tag{2}$$

Тут R — скалярна кривина, яка визначається за формулою

$$R = R^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha} g^{\beta\gamma}.$$

І навпаки, якщо виконується умова (2), то тензор D^h_{ijk} співпадає з тензором конциркулярної кривини, який визначається за формулою

$$Y^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}\left(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\right).$$

Псевдоріманові простори, в яких існує тензор $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ такий, що

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_n, k} = \rho_k T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_m} \tag{3}$$

називають *T-рекурентними.*

А якщо умови (3) виконуються для тензора Рімана, то такі простори називають *рекурентними.*

Векторні поля $u_k \neq 0$, які задовольняють для ненульових тензорів $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ умові

$$u_k T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_m} + u_{j_1} T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_2 k \ldots j_m} + u_{j_2} T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{k j_1 \ldots j_n} = 0 \tag{4}$$

називають *векторними оболонками тензора* $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ відносно індексів j_1 та j_2.

Якщо векторна оболонка задається відносно кососиметричної пари індексів тензора Рімана, тобто

$$u_i R^h_{jkl} + u_k R^h_{jli} + u_l R^h_{jik} = 0, \tag{5}$$

то вона називається *векторною оболонкою тензора Рімана.*

Враховуючи властивість тензора Рімана

$$R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0,$$

легко переконатись, що в рекурентних псевдоріманових просторах існує векторна оболонка тензора Рімана. Тому псевдоріманові простори, в яких виконуються умови (5), називають *слабо рекурентними просторами.* Якщо умові (4) буде задовольнять тензор D^h_{ijk}, тобто

$$u_i D^h_{jkl} + u_k D^h_{jli} + u_l D^h_{jik} = 0,$$

то такі простори будемо називать *D"=слабо рекурентними псевдоріманововими просторами.*

Якщо D"=слаборекурентний псевдоріманів простір V_n допускає нетривіальні геодезичні відображення, то він або простір Ейнштейна, або

$$a_{\alpha i} u^{\alpha} = \tau u_i.$$

Просторами Ейнштейна називають псевдоріманові простори, в яких виконуються умови

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}.$$

Простори Ейнштейна, які характеризуються умовами на тензор Річчі мають велике значення, як в рімановій геометрії, так і в її застосуваннях [3, 4].

Чотиривимірні простори Ейнштейна V_4, відмінні від просторів сталої кривини, не допускають нетривіальні геодезичні відображення на псевдоріманові простори $\bar{V}_4$.

Таким чином, в чотирьохмірних D"=слаборекурентних псевдоріманових просторах, відмінних від просторів сталої кривини, які допускають нетривіальні геодезичні відображення, вектор, що задає векторну оболонку, є власним вектором тензора a_{ij} із лінійної форми основних рівнянь теорії геодезичних відображень.

References

[1] V. Kiosak, A. Savchenko, and S. Khniunin. On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302(040003), 2020. https://doi.org/10.1063/5.0033700

[2] V. Kiosak, A. Savchenko, and A. Kamienieva. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature, *AIP Conference Proceedings*, 2302(040002), 2020. https://doi.org/10.1063/5.0033661

[3] D. Doikov, and V. Kiosak. On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302(040001), 2020. https://doi.org/10.1063/5.0033657

[4] V. Kiosak, A. Savchenko, and O. Latysh. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 81-92, 2021. https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936