Симетричні F-зв'язності локально конформно-келерових многовидів

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

О. Є. Чепурна
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: chepurna67@gmail.com

Означення 1. Ермітовий многовид M_n, має назву *локально конформно-келерового многовиду* (коротше, ЛКК-многовиду), якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система

$$\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$$

гладких функцій таких, що $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ – келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву *локально конформного перетворення структури*. Функція σ має назву *визначальною функцією* конформного перетворення[2].

На ЛКК-многовиді глобально визначено форма Лі(Lee):

$$\omega = \frac{2}{n-2}\delta\Omega \circ J$$

Для ЛКК-многовиду симетричною F-зв'язністю є, очевидно, зв'язність Вейля, компоненти якої можна обчислити за формулою:

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\big(\delta^k_i\omega_j + \delta^k_j\omega_i - \omega^k g_{ij}\big).$$

Тут символом Γ^k_{ij} позначено компоненти зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою g_{ij}. Але, зв'язність Вейля $\hat{\Gamma}$ не є єдиною F-зв'язністю ЛКК-многовиду. Наприклад, симетричну F-зв'язність, можна побудувати таким чином[1]:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P^k_{ij},$$

де P^k_{ij} – тензор афіної деформації:

$$P^k_{ij} = -\frac{1}{4}(\nabla_j J^u_i + \nabla_i J^u_j)J^k_u + \frac{1}{4}(\nabla_j J^k_u - \nabla_u J^k_j)J^u_i. \tag{1}$$

Символом ∇ позначено коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою. Враховуючи, що на ЛКК-многовиді

$$\nabla_j J^k_i = \frac{1}{2}\big(\delta^k_j J^t_i\omega_t - \omega^h J_{ij} - J^k_j\omega_i + J^k_t\omega^t g_{ij}\big),$$

з (1) отримуємо:

$$P^k_{ij} = -\frac{1}{4}\big(\delta^k_j\omega_i + \delta^k_j\omega_j + J^k_j J^t_i\omega_t + J^k_i J^t_j\omega_t - 2\omega^k g_{ij}\big). \tag{2}$$

Тензори Рімана зв'язності Леві-Чівіта Γ^k_{ij} та отриманої F-зв'язності $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ пов'язані наступним чином:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \nabla_j P^k_{ik} - \nabla_k P^h_{ij} + P^t_{ik}P^h_{tj} - P^t_{ij}P^h_{tk},$$

де P_{ij}^h визначено формулою (2). Метрику $\overline{g}_{ij}$, з якою э узгоджена отримана F-зв'язність, можна отримати, розв'язавши систему диференціальних рівнянь:

$$\nabla_k \overline{g}_{ij} = -\frac{1}{4}\big(2\omega_k \overline{g}_{ij} + \omega_j \overline{g}_{ik} + \omega_i \overline{g}_{kj} + J_j^t \omega_t J_k^t \overline{g}_{ti} + J_i^t \omega_t J_k^t \overline{g}_{tj} - 2\omega^t g_{kj} \overline{g}_{ti} - 2\omega^t g_{ki} \overline{g}_{tj}\big). \tag{3}$$

При виконанні умов додатної визначеності $\overline{g}_{ij}$, та ермітовості

$$\overline{g}_{ts} J_i^t J_j^s = \overline{g}_{ij},$$

розв'язок лінійної системи (3) є локально келеровою метрикою. Умови інтегровності системи (3) мають вигляд:

$$\overline{g}_{ti} \overline{R}_{jkl}^t + \overline{g}_{tj} \overline{R}_{ikl}^t = 0.$$

Література

[1] Yano K. *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* New York: Pergamon Press Book – New York: 326p. 1965.

[2] *В. Ф. Кириченко.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия *Матем. сб.*, Т. 51(5), 57—66 1992.