Аналог теореми Гана для диференційовних за Фреше функцій

В.К. Маслюченко
(м. Чернівці, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)
E-mail: `v.maslyuchenko@chnu.edu.ua`

В.С. Мельник
(м. Чернівці, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)
E-mail: `windchange7@gmail.com`

Австрійський математик Г. Ган у своїй статті 1917 року [1] довів таку теорему: для метричного простору X, напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ і напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Ж. Д'єдонне [2] переніс теорему Гана на паракомпактні простори, а Г. Тонґ [3] і М. Катетов [4] показали, що ця теорема є характеристичною для нормальності в класі T_1-просторів. Окрім того, теорема Гана має застосування в теорії наближень.

В останній час з'явилися нові аналоги та модифікації теореми Гана про проміжну функцію, зокрема, ті з них, що стосуються існування нескінченно диференційовних проміжних функцій на замкнених паралелепіпедах в $\mathbb{R}^n$ чи на сепарабельних гільбертових просторах [5]. Тут ми продовжимо дані дослідження, розглянувши властивість диференційовності за Фреше.

Нагадаємо деякі означення:

Означення 1. Відображення $f : X \to Y$ називається *диференційовним за Фреше у точці* x з X, якщо існує такий оператор A з $L(X,Y)$, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{||h||} = 0.$$

Такий оператор визначається однозначно, він називається *похідною Фреше* відображення f у точці x і позначається символом $f'(x)$.

Означення 2. Дійсний банаховий простір X називається *асплундовим* [17, с. 27], якщо для довільного його сепарабельного підпростору L спряжений з ним простір L^* теж сепарабельний.

Використовуючи результат про те, що існування в сепарабельному банаховому просторі диференційовної за Фреше при $x \neq 0$ еквівалентної до вихідної норми еквівалентне його асплундовості (результат з [6]) ми доводимо наступні результати.

Лема 3. *Нехай $(X, ||\cdot||)$ — дійсний банаховий простір з диференційовною при $x \neq 0$ нормою $||\cdot||$, $x_0 \in X$ і $0 < r < R$. Тоді існує диференційовна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 1$ на $B[x_0, r]$, $suppf = B(x_0, R)$ і $||f'(x)|| \le \frac{M}{R-r}$ на X.*

Тут $I = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{t^2-1}} dt$ і $M = \frac{2}{eI}$.

Використовуючи сепарабельність простору X, для довільної обмеженої множини $G \subset X$ можна побудувати диференційовну за Фреше функцію f з носієм $\mathrm{supp} f = G$. З цих результатів, використовуючи розбиття одиниці, отримаємо наступне:

Теорема 4. *Нехай X — сепарабельний асплундовий простір, $g : X \to \mathbb{R}$ — напівнеперервна зверху, а $h : X \to \mathbb{R}$ — знизу, такі, що $g(x) < h(x)$ на X. Тоді існує така диференційовна за Фреше функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) < f(x) < h(x)$.*

Література

[1] Hahn H. Uber halbstetige und unstetige Functionen *Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa.*, 126 : 91–110, 1917.

[2] Dieudonne J. Une généralisation des espaces compacts *J. de Math. Pyres et Appl.*, 23 : 65–76, 1944.

[3] Tong H. Some characterizations of normal and perfectly normal spaces *Duke Math.J.*, 19 : 282–292, 1952.

[4] Katetov M. Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' *Fund.Math.*, 40 : 203–205, 1953.

[5] Маслюченко В.К., Мельник В.С. Про побудову проміжних диференційовних функцій *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта 22-25 лютого 2017 р.): Тези доповідей*, 105–106, 2017.

[6] Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. *Longman Scientific & Technical*, 1993, 359 p.