

Національна академія наук України
Інститут математики

Т. В. Рибалкіна
Топологічна класифікація
афінних відображень

Київ • 2012

ПРАЦІ
Інституту математики
НАН України

Том 94

Головний редактор А. М. Самойленко

Редакційна рада

Ю. М. Березанський, М. Л. Горбачук, А. А. Дороговцев,
Ю. А. Дрозд, Ю. Б. Зелінський, В. С. Королук,
А. Н. Кочубей, І. О. Луковський, В. Л. Макаров,
А. Г. Нікітін, В. В. Новицький, М. В. Працьовитий,
О. А. Ребенко, А. С. Романюк, Ю. С. Самойленко,
С. Г. Солодкий, В. В. Шарко, О. М. Шарковський

Засновано в 1994 році

Т. В. Рибалкіна

**Топологічна
класифікація
афінних відображень**

УДК 515.126

Т. В. Рибалкіна. Топологічна класифікація афінних відображень // *Праці Інституту математики НАН України*. (Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.) – Т.94.– Київ: Ін-т математики НАН України, 2012.–153 с.

In this book we give topological classification of a wide class of affine mappings on unitary and Euclidean spaces, and all affine mappings over an algebraically closed field of characteristic zero and over the quaternions. Equivalent criteria of topological conjugacy of Möbius transformations are established. Chains of linear mappings on unitary or Euclidean spaces are classified up to topological isomorphism.

The book is useful to students, graduate students and researchers in the fields of topology, linear algebra, complex analysis, and dynamical systems.

В книзі дано топологічну класифікацію широкого класу афінних відображень на унітарних та евклідових просторах, а також всіх афінних відображень над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль та над тілом кватерніонів. Встановлено еквівалентні критерії топологічної спряженості мөбіусових перетворень. Отримано класифікацію ланцюгів лінійних відображень на унітарних або евклідових просторах з точністю до топологічного ізоморфізму.

Книга буде корисною студентам, аспірантам та науковим працівникам, які працюють в галузях топології, лінійної алгебри, комплексного аналізу та динамічних систем.

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук О. О. Пришляк

д-р фіз.-мат. наук Ю. Б. Зелінський

*Затверджено до друку Вченою радою
Інституту математики НАН України*

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-6682-7

© Інститут математики
НАН України, 2012

Передмова

Книга присвячена дослідженню топологічних властивостей відображень, встановленню критеріїв їхньої топологічної спряженості.

Питання класифікації відображень на многовидах є одним з важливих напрямків топології. Топологічна класифікація лінійних відображень між скінченновимірними лінійними просторами давно привертала увагу математиків.

Класифікація лінійних відображень у комплексних та дійсних векторних просторах впливає з комплексних та дійсних канонічних форм Жордана відносно подібності.

Дослідження класифікації лінійних відображень на \mathbb{R}^n з точністю до топологічної спряженості розпочали Н. Poincaré [40] та G. de Rham [25]. У другій половині XX ст. ці дослідження були продовжені [26]. Нагадаємо, що два неперервні відображення $f, g : M \rightarrow M$ на топологічному просторі M називають топологічно спряженими, якщо існує гомеоморфізм $h : M \rightarrow M$ такий, що $g = h^{-1}fh$. Якщо h – лінійна бієкція, то відображення f та g називають лінійно спряженими.

Значний вклад у вирішення проблеми класифікації лінійних відображень на \mathbb{R}^n з точністю до топологічної спряженості зробили N. H. Kuiper та J. W. Robbin [35, 42], які класифікували лінійні відображення, які не мають власних

чисел, що є коренями з одиниці. Вони показали, що проблема класифікації всіх лінійних відображень з точністю до топологічної спряженості зводиться до аналогічної класифікації лише періодичних відображень. У працях [35, 42] було зроблено припущення, що для періодичних лінійних відображень топологічна спряженість еквівалентна лінійній спряженості, та доведено це припущення для лінійних відображень з періодом 1, 2, 3, 4 або 6.

Пізніше це припущення було доведено і для відображень з деякими іншими періодами, а також для відображень, які задовольняють деяким умовам. Задачу топологічної класифікації лінійних відображень, які мають власні числа, що є коренями з одиниці, частково вирішили N. H. Kuiper та J. W. Robbin [35, 42], S. E. Cappell та J. L. Shaneson [20, 21, 22, 23, 24], W. C. Hsiang та W. Pardon [33], I. Madsen та M. Rothenberg [36], R. Schultz [43] та інші.

Серед цих робіт виділимо результати, що отримали S. E. Cappell та J. L. Shaneson. Вони показали, що для періодичних лінійних відображень, що діють з \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , $n \leq 5$, топологічна спряженість еквівалентна лінійній спряженості, а також побудували [19] два періодичні лінійні відображення, які топологічно спряжені, але не лінійно спряжені (контрприклад до припущення, що зробили N. H. Kuiper та J. W. Robbin).

Відмітимо, що задача класифікації довільних лінійних відображень з точністю до топологічної спряженості залишається відкритою.

У даній книзі наведено критерії топологічної спряженості лінійних відображень, що діють не у дійсних просторах. Дана класифікація з точністю до топологічної спряженості широкого класу комплексних матриць та всіх лінійних відображень на тілі кватерніонів \mathbb{H} .

Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ або алгебраїчно замкненому полю харак-

теристики нуль, A – $n \times n$ -матриця над полем \mathbb{F} , $b \in \mathbb{F}^n$ – фіксований вектор. Відображення вигляду $f(x) = Ax + b$ називають афінним відображенням, а матрицю A – лінійною частиною відображення f . Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, то афінним відображенням на тілі кватерніонів \mathbb{H} називають відображення вигляду $x \mapsto ax + b$ або $x \mapsto xa + b$, де $a, b, x \in \mathbb{H}$.

Задача класифікації афінних відображень є актуальною в різних областях математики. Наприклад, у роботі [15] описано спряжені класи біективних афінних відображень в афінній групі Кремони; тобто в групі, елементами якої є перетворення, що мають такий вигляд:

$$x_i \mapsto f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де f_i – поліноми над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Обернене перетворення також визначене як набір поліномів [16].

У даній книзі ми узагальнили цей результат для довільних афінних відображень над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, а також отримали класифікацію широкого класу афінних відображень на \mathbb{R}^n та \mathbb{C}^n з точністю до топологічної спряженості (тобто спряженості довільним гомеоморфізмом).

Разом із цими задачами сьогодні досить актуальними є проблеми класифікації відображень, що діють у розширених лінійних просторах. Так, *J. Milnor* [37, 38] досліджував класифікацію раціональних відображень. Прикладом біективних раціональних відображень на $\hat{\mathbb{C}}$ є дробово-лінійні перетворення, які ще називають *мебіусові перетворення*. Такі перетворення відіграють важливу роль в моделі Пуанкаре простору Лобачевського, що реалізується на n -вимірному крузі або, що еквівалентно, на підпросторі \mathbb{R}_+^n . Зауважимо, що довільний однозв'язний рімановий многовид

сталого від'ємної кривини ізометричний n -вимірному кругу з гіперболічною метрикою Пуанкаре–Лобачевського. На цьому шляху і виникає вийняtkово змістовна теорія [1] з різноманітними застосуваннями в дифференціальній геометрії, теорії гармонічних функцій на симетричних просторах, загальній теорії гіперболічних многовидів, теорії розривних груп і в інших областях математики.

У цій книзі дана класифікація дробово-лінійних перетворень з точністю до топологічної спряженості. Класифікацію дробово-лінійних перетворень, з точністю до спряженості дробово-лінійним перетворенням, можна знайти в роботі [14], де, використовуючи матричне представлення, було побудовано інваріант, що параметризує спряжені класи таких перетворень.

Зауважимо, що дію мебіусових перетворень простору \mathbb{R}^2 можна продовжити до дії в верхній півплощині

$$H^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\},$$

або й до дії на всьому просторі \mathbb{R}^3 . Для вивчення властивостей мебіусових перетворень у трьохвимірному просторі можна використовувати кватерніони.

У книзі використано роботи автора [3, 4, 5, 10, 17, 18, 41] (“Будницька” – дівоче прізвище автора).

Книга складається з шести розділів. У першому розділі зроблено попередній огляд літератури та викладено основні результати, принципи та ідеї, на яких ґрунтуються отримані результати.

У другому розділі розглянуто проблему класифікації афінних відображень на унітарних та евклідових просторах з точністю до топологічної спряженості.

У третьому розділі дано класифікацію афінних відображень над алгебраїчно замкненим полем характеристики

нуль з точністю до бірегулярної спряженості.

Четвертий розділ присвячений класифікації з точністю до топологічної спряженості афінних відображень над тілом кватерніонів.

У п'ятому розділі встановлено класифікацію дробово-лінійних перетворень на розширеній комплексній площині з точністю до топологічної спряженості. Доведено три еквівалентних критерії топологічної спряженості для таких відображень.

Шостий розділ присвячений класифікації ланцюгів лінійних відображень на унітарних або евклідових просторах з точністю до топологічного ізоморфізму.

Подяки. Висловлюю щирі подяку М. Голосінському, В. В. Шарку та В. В. Сергейчуку за постановку задач, постійну увагу і допомогу в роботі. Особливу подяку висловлюю співробітникам відділу топології Інституту математики НАН України С. І. Максименку, Є. О. Полуляху та іншим науковцям, які брали участь у роботі семінарів відділу топології, висловили ряд важливих зауважень і порад під час моїх доповідей.

Т. В. Рибалкіна

Зміст

1	Попередні відомості	15
1.1	Топологічна класифікація лінійних відображень на \mathbb{R}^n	16
1.2	Афінні відображення	25
1.3	Кватерніони	28
1.3.1	Загальні властивості	28
1.3.2	Матричне представлення	30
1.4	Квадратичні раціональні відображення	32
1.5	Дробово-лінійні перетворення	34
1.5.1	Основні властивості	34
1.5.2	Канонічні форми для спряженості	36
1.5.3	Спряжені класи.	44
2	Класифікація афінних відображень на унітарних та евклідових просторах з точністю до топологічної спряженості	47
2.1	Основні результати	47
2.2	Канонічні форми афінних відображень на \mathbb{R}	49
2.3	Канонічні форми В. Єфремовича бієктивних афінних відображень на \mathbb{R}^2	53
2.4	Афінні відображення, які мають нерухому точку	55

2.5	Афінні відображення, які не мають нерухомих точок	64
2.5.1	Зведення до канонічної форми	66
2.5.2	Єдиність канонічної форми	75
2.5.3	Висновки	79
3	Класифікація афінних відображень над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль з точністю до бірегулярної спряженості	81
3.1	Основні результати	81
3.2	Доведення теореми 3.2	85
3.2.1	Зведення до канонічної форми	87
3.2.2	Єдиність канонічної форми	89
4	Класифікація афінних відображень на \mathbb{H} з точністю до топологічної спряженості	93
4.1	Лінійні відображення на \mathbb{H}	94
4.1.1	Топологічно спряжені відображення $x \mapsto ax, a \in \mathbb{H}$	95
4.1.2	Топологічна спряженість відображень $x \mapsto ax$ та $x \mapsto xa, a \in \mathbb{H}$	100
4.1.3	Висновки	101
4.2	Геометрична інтерпретація топологічно спряжених лінійних відображень на \mathbb{H}	102
4.3	Топологічно спряжені афінні відображення на \mathbb{H}	105
5	Класифікація дробово-лінійних перетворень на $\hat{\mathbb{C}}$ з точністю до топологічної спряженості	109
5.1	Введення	110
5.2	Додаткові відомості	113
5.3	Основні результати	118
5.4	Канонічні форми для топологічної спряженості	122

Зміст	13
5.5 Мебіусові перетворення та лінійні відображення	123
6 Класифікація ланцюгів лінійних відображень з точністю до топологічного ізоморфізму	127
6.1 Введення та основні результати	127
6.2 Ізометрія ланцюгів	129
6.3 Лінійний ізоморфізм ланцюгів	133
6.3.1 Класифікація ланцюгів з точністю до лінійного ізоморфізму	133
6.3.2 Приклад	136
6.3.3 Система інваріантів	139
6.4 Топологічний ізоморфізм ланцюгів	144
Література	147
Перелік умовних позначень	151

Розділ 1

Попередні відомості

У цьому розділі наводяться необхідні відомості про об'єкти, топологічна класифікація яких буде встановлена в інших розділах книги. А також викладаються основні ідеї на яких ґрунтуються отримані результати.

Перший підрозділ присвячений класифікації з точністю до топологічної спряженості лінійних відображень на просторі \mathbb{R}^n . У ньому наводяться відомі результати, виписано необхідні та достатні умови топологічної спряженості лінійних відображень, які не мають власних чисел, що є коренями з одиниці.

У другому підрозділі наводяться основні визначення для афінних відображень, розглянуто відомі результати щодо топологічної класифікації, які далі будуть розширені у розділах 2, 3 та 4. Так, у розділі 2 встановлено топологічну класифікацію афінних відображень на унітарних та евклідових просторах, у розділі 3 – над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, у розділі 4 – над тілом кватерніонів.

У третьому підрозділі даються основні відомості про кватерніони, їхні загальні властивості, представлення через ма-

триці.

У четвертому підрозділі наводяться основні властивості дробово-лінійних перетворень. Досліджуються канонічні форми таких перетворень при спряженості та описується їх геометричний зміст. Класифікація дробово-лінійних перетворень з точністю до топологічної спряженості дана у розділі 5.

1.1 Топологічна класифікація лінійних відображень на \mathbb{R}^n

Для доведення результатів в інших розділах ми будемо використовувати класифікацію лінійних відображень на \mathbb{R}^n з точністю до топологічної спряженості, тому нагадаємо відомі результати (див [35, 42]).

Нехай \mathbb{F} - це \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\hat{\mathbb{C}}$, алгебраїчно замкнене поле \mathbb{K} характеристики нуль або тіло кватерніонів \mathbb{H} . Ми будемо розглядати \mathbb{F} як метричний простір з метрикою, породженою скалярним добутком.

Неперервні відображення $f, g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ називають *топологічно спряженими*, якщо існує *гомеоморфізм* $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ (тобто h та h^{-1} - неперервні бієктивні відображення) такий, що виконується рівність

$$g = h^{-1}fh. \quad (1.1)$$

Тобто має місце наступна комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^n \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{F}^n \end{array}$$

Ітерації f^m та g^m топологічно спряжених відображень f та g також топологічно спряжені, тобто з рівності (1.1) отримаємо

$$g^m = h^{-1}f^mh \quad \text{для } m > 1. \quad (1.2)$$

Зауважимо, що умова (1.2) виконується для всіх цілих m , якщо f та g – гомеоморфізми.

Якщо гомеоморфізм h в рівності (1.1) – лінійне відображення, то відображення f та g називають *лінійно спряженими*.

Нагадаємо, що дві $n \times n$ матриці A та B над \mathbb{F} називають *подібними* матрицями, якщо існує невироджена $n \times n$ матриця Q над \mathbb{F} така, що

$$B = Q^{-1}AQ \quad (1.3)$$

Очевидно, що подібним матрицям відповідають лінійно спряжені лінійні відображення. Будемо казати, що матриці топологічно спряжені, якщо відповідні лінійні відображення топологічно спряжені.

Розглянемо випадок $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ та класифікацію лінійних відображень на \mathbb{R}^n з точністю до топологічної спряженості.

Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – довільне лінійне відображення. Тоді простір \mathbb{R}^n можна розкласти в пряму суму своїх f -інваріантних підпросторів [35, 42]:

$$\mathbb{R}^n = W^0(f) \oplus W^{01}(f) \oplus W^1(f) \oplus W^{1\infty}(f).$$

Для власних чисел відображення

$$f_\alpha = f|_{W^\alpha(f)}, \quad \alpha = 0, 01, 1, 1\infty, \quad (1.4)$$

має місце наступна таблиця:

Відображення f_α :	власні числа λ цього відображення:
f_0	$\lambda = 0$
f_{01}	$0 < \lambda < 1$
f_1	$ \lambda = 1$
$f_{1\infty}$	$ \lambda > 1$

Тобто лінійне відображення f можна записати у вигляді прямої суми

$$f = f_0 \oplus f_{01} \oplus f_1 \oplus f_{1\infty}. \quad (1.5)$$

Якщо розглянути простір

$$W^\beta(f) = W^{01}(f) \oplus W^1(f) \oplus W^{1\infty}(f),$$

то $W^\beta(f)$ – найбільший інваріантний підпростір, на якому лінійне відображення f є автоморфізмом. Для f -інваріантних підпросторів $W^{01}(f)$ та $W^{1\infty}(f)$ має місце така лема.

Лема 1.1 ([42]). *Для лінійного відображення $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ виконуються наступні твердження:*

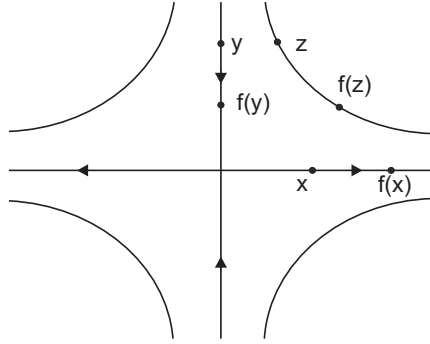
- (a) $x \in W^{01}(f)$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = 0$;
- (b) $x \in W^{1\infty}(f)$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{-m}(x) = 0$.

Підпростір $W^0(f)$ є найбільшим інваріантним підпростором, на якому лінійне відображення f є нільпотентним (тобто $W^0(f)$ є множиною всіх точок $x \in \mathbb{R}^n$ таких, що $f^m(x) = 0$ для деякого натурального числа m).

Приклад 1.1. Розглянемо біективне лінійне відображення на просторі \mathbb{R}^2

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Дію даного відображення зображено на наступному рисунку:



Використовуючи лему 1.1, неважко перевірити, що у цьому випадку

$$W^{01}(f) = 0 \times \mathbb{R},$$

$$W^{1\infty}(f) = \mathbb{R} \times 0,$$

а підпростори $W^0(f)$, $W^1(f)$ відсутні.

Зауважимо, що гіпербола $x_1x_2 = \text{const}$ є інваріантною при дії даного відображення f .

Позначимо через $\dim(f_\alpha)$ – розмірність простору $W^\alpha(f)$, а через $o(f)$ – знак визначника матриці, що відповідає бієктивному відображенню f :

- якщо $o(f) = 1$, то f зберігає орієнтацію;
- якщо $o(f) = -1$, то f змінює орієнтацію.

Нагадаємо, що відображення f називають *періодичним*, якщо існує натуральне число k таке, що f^k – тотожне відображення. Найменше таке число k називають *періодом* відображення f .

де для власних чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r \quad (1.8)$$

та для власних чисел $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_{n_j}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} C_j & & & 0 \\ I_2 & C_j & & \\ & I_2 & C_j & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & I_2 & C_j \end{bmatrix}, \quad j = s, \dots, t, \quad (1.9)$$

$$C_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}, \quad \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$$

та I_2 – одинична 2×2 матриця. Надалі $m \times m$ матриці $\mathcal{R}_m(\lambda)$ з (1.8) та (1.9) називатимемо *блоками дійсної жорданової форми* з власним числом λ . Причому числа n_1, n_2, \dots, n_t (розміри блоків, що розміщені на головній діагоналі дійсної жорданової форми (1.7)), так само як і власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ (яким відповідають ці блоки), не обов'язково всі різні. Дійсна жорданова форма визначена однозначно з точністю до перестановки діагональних блоків

$$\mathcal{R}_{n_1}, \dots, \mathcal{R}_{n_r}, \mathcal{R}_{n_s}, \dots, \mathcal{R}_{n_t}$$

та з точністю до заміни блока $\mathcal{R}_m(\lambda)$ блоком $\mathcal{R}_m(\bar{\lambda})$ ($\bar{\lambda}$ – комплексно спряжене число до λ).

Очевидно, що замість лінійних відображень можна розглядати відповідні матриці. Тобто згідно (1.5), кожна дійсна

квадратна матриця A подібна

$$A_0 \oplus A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty}, \quad (1.10)$$

де для матриць A_α , $\alpha = 0, 01, 1, 1\infty$, має місце наступна таблиця:

Матриця:	власні числа λ цієї матриці:
A_0	$\lambda = 0$
A_{01}	$0 < \lambda < 1$
A_1	$ \lambda = 1$
$A_{1\infty}$	$ \lambda > 1$

Зауважимо, що для лінійного відображення $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f(x) = Ax$, матриці A_α , $\alpha = 0, 01, 1, 1\infty$, визначаються аналогічно.

Необхідною та достатньою умовою подібності двох дійсних матриць є рівність їхніх дійсних жорданових форм. Тому топологічна класифікація матриць, які не мають власних чисел, що є коренями з одиниці, ґрунтується на порівнянні рангів та знаків визначників відповідних частин матриць, які мають власні числа модулі яких більші за 1 та, відповідно, власні числа модулі яких менші за 1, а також подібності тих частин матриць, які мають, відповідно, нульові власні числа та власні числа, модулі яких дорівнюють 1. Тобто, запишемо теорему 1.1 в наступному матричному вигляді, який ми надалі будемо використовувати.

Теорема 1.2 ([35, 42]). *Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ – лінійні відображення на \mathbb{R}^n , які не мають власних чисел, що є коренями з одиниці; нехай матриці $A_0, \dots, A_{1\infty}$ та*

$B_0, \dots, B_{1\infty}$ визначені через A та B в (1.10). Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } B_0, \quad A_1 \text{ подібна } B_1, \\ \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01}, \quad \det(A_{01}B_{01}) > 0, \\ \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty}, \quad \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ми позначаємо через

size A — розмір матриці A .

Використовуючи теорему 1.1 (або теорему 1.2), можна класифікувати лише ті лінійні відображення, які не мають власних чисел, що є коренями з одиниці. Проблема топологічної класифікації лінійних відображень, які мають власні числа, що є коренями з одиниці, на сьогодні залишається *невирішеною*. Хоча значних успіхів досягли Kuiper та Robbin [35], які довели, що проблема класифікації всіх лінійних відображень з точністю до топологічної спряженості зводиться до аналогічної класифікації лише періодичних лінійних відображень. Вони зробили припущення, що для класу періодичних лінійних відображень топологічна спряженість еквівалентна лінійній спряженості.

Припущення 1.1 ([35, 42]). Лінійні періодичні відображення на \mathbb{R}^n топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли вони лінійно спряжені.

Kuiper та Robbin довели, що умови (1.6) будуть необхідними та достатніми умовами топологічної спряженості довільних лінійних відображень на \mathbb{R}^n , **якщо** вірним є припущення 1.1, істинність якого їм вдалося довести для періодичних відображень з періодом рівним 1, 2, 3, 4 або 6. Проблему топологічної класифікації лінійних відображень,

відповідних матриць з (1.10) виконується така умова:

$$A_1 \text{ подібна } B_1.$$

Об'єднуючи результати, що отримали Kuiper та Robbin, Carrell та Shaneson, маємо наступне твердження, яке ми будемо використовувати у розділах 4 та 5.

Твердження 1.1 ([20, 21, 23, 35, 42]). *Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ – лінійні відображення на \mathbb{R}^n , $n \leq 5$; нехай матриці $A_0, \dots, A_{1\infty}$ та $B_0, \dots, B_{1\infty}$ визначені через A та B в (1.10). Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } B_0, \quad A_1 \text{ подібна } B_1, \\ \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01}, \quad \det(A_{01}B_{01}) > 0, \\ \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty}, \quad \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ще раз зауважимо, що класифікація періодичних лінійних відображень на \mathbb{R}^n з точністю до топологічної спряженості ще й сьогодні залишається *невирішеною* задачею.

1.2 Афінні відображення

У цьому підрозділі ми нагадаємо основні визначення для афінних відображень та розглянемо відомі результати про класифікацію таких відображень.

Ми розглядаємо проблему класифікації афінних відображень на просторі V з точністю до топологічної спряженості.

Нагадаємо, що *афінним відображенням* $f : V \rightarrow V$ називають відображення вигляду $f(x) = Ax + b$, де $A : V \rightarrow V$ – лінійне відображення та $b \in V$.

Ми розглядатимемо простір $V = \mathbb{F}^n$, де \mathbb{F} – це \mathbb{C} , \mathbb{R} , алгебраїчно замкнене поле \mathbb{K} характеристики нуль або тіло

кватерніонів \mathbb{H} , тоді афінне відображення $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ має вигляд

$$f(x) = Ax + b, \quad A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{F}^n. \quad (1.13)$$

Афінні відображення $f, g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ називають *спряженими*, якщо існує бієкція $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$, що перетворює f в g ; тобто

$$g = h^{-1}fh. \quad (1.14)$$

Відображення називають

- (а) *лінійно спряженими*, якщо в (1.14) h – лінійне відображення;
- (б) *афінно спряженими*, якщо h – афінне відображення;
- (с) *бірегулярно спряженими*, якщо h – бірегулярне відображення, тобто h та h^{-1} мають вигляд

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

де всі φ_i – поліноми над \mathbb{F} ;

- (d) *топологічно спряженими*, якщо h – гомеоморфізм.

Спряженості (а)–(с) є топологічними. Очевидно, що

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d);$$

тобто з лінійної спряженості випливає афінна спряженість, випливає бірегулярна спряженість, випливає топологічна спряженість.

Ми коротко розглянемо відомі результати про класифікацію афінних відображень з точністю до спряженостей (а)–(d):

(а) Кожному перетворенню *лінійної спряженості* для афінного відображення $f(x) = Ax + b$ над \mathbb{F} відповідає зміна базису в просторі \mathbb{F}^n ; тобто перетворення лінійної спряженості має вигляд

$$(A, b) \mapsto (S^{-1}AS, S^{-1}b), \quad (1.16)$$

де S – невідроджена $n \times n$ матриця над \mathbb{F} . Канонічну форму афінного відображення при перетвореннях лінійної спряженості легко побудувати: наприклад, у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, згідно умов (1.16), ми можемо розглядати замість матриці A її жорданову нормальну форму, а потім зводити вектор b до найпростішого вигляду, при цьому використовуючи лише ті перетворення лінійної спряженості вигляду (1.16), які зберігають матрицю A ; тобто перетворення, що мають наступний вигляд:

$$b \mapsto S^{-1}b, \quad S^{-1}AS = A.$$

З останньої умови випливає, що матриця S комутує з жордановою матрицею A , тобто вона має вигляд описаний в [29, глава VIII, §1].

Афінне відображення $x \mapsto Ax + b$ над \mathbb{F} називають *невідродженим*, якщо його матриця A , що задана над полем \mathbb{F} , невідроджена.

(б) Кожному перетворенню *афінної спряженості* відповідає афінна заміна базису в просторі \mathbb{F}^n . Влас [15] довів, що невідроджені афінні відображення $x \mapsto Ax + b$ та $x \mapsto Cx + d$, задані над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, афінно спряженні тоді і тільки тоді, коли їхні матриці A та C подібні.

(с) Влас [15] встановив критерій та канонічну форму для невідродженого афінного відображення при *бірегулярній спряженості* над алгебраїчно замкненим полем хара-

ктеристики нуль. Даній класифікації присвячено розділ 3, в якому результати, що отримав Власс, ми узагальнимо для довільних афінних відображень над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль.

(d) Класифікація біективних афінних відображень на просторі \mathbb{R}^2 з точністю до *топологічної спряженості* була встановлена В. Єфремовичем [6]. У розділі 2 ми узагальнимо його результати до класифікації афінних відображень на \mathbb{R}^n та \mathbb{C}^n . У підрозділах 2.4 та 2.5 ми класифікуємо афінні відображення наступних двох типів відповідно: афінні відображення, що мають нерухому точку та не мають власних чисел, що є коренями з одиниці; та афінні відображення без нерухомих точок.

1.3 Кватерніони

1.3.1 Загальні властивості

Кватерніони – система гіперкомплексних чисел, яка була запропонована У. Р. Гамільтоном у 1843 році.

Кватерніон визначають як формальну суму

$$a_1 + a_2i + a_3j + a_4k, \quad \text{де } a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

та i, j, k – "уявні одиниці" з такою таблицею множення:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	- j
j	j	- k	-1	i
k	k	j	- i	-1

наприклад, $ij = k$, а $ji = -k$ та $ijk = -1$.

Множення кватерніонів не комутативне, вони утворюють тіло, яке позначають \mathbb{H} . Тобто

$$\mathbb{H} = \{x \mid x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k\}$$

– тіло кватерніонів, де $x_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, 4$ та i, j, k – "уявні одиниці".

Тіло кватерніонів \mathbb{H} є векторним простором розмірності чотири над полем дійсних чисел або векторним простором розмірності два над полем комплексних чисел. Розглядаючи \mathbb{H} як чотирьохвимірний векторний простір, довільний кватерніон

$$a + bi + cj + dk$$

можна представити як суму скалярної частини a і векторної частини $bi + cj + dk$. Таке представлення є досить зручним і здобуло широке застосування в математиці, зокрема в алгебрі та механіці.

Тіло кватерніонів \mathbb{H} розглядають наступним чином [2, 7]: підпростір

$$\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{H}$$

отоотожнюють з \mathbb{R} , а підпростір \mathbb{R}^3 вкладають в \mathbb{H} як підпростір

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \subset \mathbb{H}$$

і називають *простором уявних кватерніонів*.

Кватерніон

$$\bar{q} = a - (bi + cj + dk)$$

називають *спряженим* до $q = a + bi + cj + dk$.

Нормою (модулем) кватерніона $q = a + bi + cj + dk$ називають скаляр, що визначає довжину кватерніона та обчи-

слюють наступним чином:

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (1.17)$$

Обернений кватерніон до q задають формулою:

$$q^{-1} = \|q\|^{-2} \bar{q}.$$

1.3.2 Матричне представлення

Для встановлення певних властивостей кватерніонів та для практичних обчислень зручно користуватися матрицями, що відповідають кватерніонам. Причому додаванню та множенню кватерніонів відповідає додавання та множення відповідних матриць, тобто існує гомоморфізм між відповідними множинами. Можна використовувати комплексні 2×2 матриці або дійсні 4×4 матриці.

Так, використовуючи комплексні 2×2 матриці, кватерніон

$$q = a + bi + cj + dk$$

можна представити у наступному матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix},$$

де $u, v \in \mathbb{C}$. Дійсно, якщо позначити

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

та $u = a + bi$, $v = c + di$, то отримаємо, що

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} = a + bi + cj + dk = u + vj. \quad (1.18)$$

Кватерніон записаний у такому вигляді інколи називають *комплексним кватерніоном*. Таке представлення (1.18) має наступні властивості:

- норма кватерніона в квадраті дорівнює визначникові відповідної матриці;
- спряженому кватерніону відповідає спряжена транспонована матриця.

Використовуючи дійсну 4×4 матрицю, кватерніон

$$q = a + bi + cj + dk$$

можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \\ + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таке представлення має наступні властивості:

- норма кватерніона в четвертому степені дорівнює визначникові відповідної матриці;
- спряженому кватерніону відповідає транспонована матриця.

1.4 Квадратичні раціональні відображення

Раціональним відображенням степеня d (d – ціле додатне число) називають відображення вигляду

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

на розширеній комплексній площині $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$, де

$$p(x) = a_0x^d + \dots + a_d \quad \text{та} \quad q(z) = b_0z^d + \dots + b_d$$

– комплексні поліноми, які не мають однакових коренів та коефіцієнти a_0 та b_0 одночасно не рівні нулю. Простір усіх раціональних відображень степеня d на $\hat{\mathbb{C}}$ позначають Rat_d (див. наприклад [37]). Зауважимо, що у випадку $d = 1$ простір раціональних відображень Rat_1 складається з дробово-лінійних перетворень, тобто відображень заданих на $\hat{\mathbb{C}}$, що мають наступний вигляд:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такі, що $ad - bc \neq 0$. Вивченню таких перетворень присвячені підрозділ 1.5 та розділ 5.

У цьому розділі ми розглянемо Rat_2 – простір всіх *квадратичних раціональних відображень*, тобто раціональних відображень степеня $d = 2$. Кожне відображення f , що належить простору Rat_2 , має такий вигляд:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0z^2 + a_1z + a_2}{b_0z^2 + b_1z + b_2},$$

де степінь d цього відображення, що визначений наступним чином:

$$d = \max(\deg(p), \deg(q)),$$

рівний 2.

Раціональні відображення $f, g \in \text{Rat}_2$ називають *голоморфно спряженими*, якщо виконується $g = h^{-1}fh$, для деякого мобіусового перетворення $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, тобто $h \in \text{Rat}_1$.

Простір всіх голоморфно спряжених класів квадратичних раціональних відображень позначають \mathcal{M}_2 . Щоб описати структуру цього простору, дослідимо нерухомі точки квадратичних раціональних відображень.

Нагадаємо, що *мультиплікатор* μ раціонального відображення f , що має нерухому точку z , визначається наступним чином (див. [37, 38]):

$$\mu := \begin{cases} f'(z), & \text{якщо } z \neq \infty, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f'(z)}, & \text{якщо } z = \infty, \end{cases}$$

Кожне раціональне відображення $f \in \text{Rat}_2$ має три не завжди різні нерухомі точки $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$. Нехай μ_1, μ_2, μ_3 – мультиплікатори відображення f , що відповідають нерухомим точкам z_1, z_2, z_3 , відповідно; і нехай

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ \sigma_2 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3, \\ \sigma_3 &= \mu_1\mu_2\mu_3 \end{aligned} \tag{1.19}$$

– *елементарні симетричні функції* цих мультиплікаторів. (Зауважимо, що $\mu_i = 1$ тоді і тільки тоді, коли z_i – кратна нерухома точка, тобто $z_i = z_j$ для $j \neq i$.)

Лема 1.2 ([37]). *Мультиплікатори μ_1, μ_2, μ_3 визначають квадратичне відображення f з точністю до голоморфного*

спряження, причому для μ_1, μ_2, μ_3 виконується наступне співвідношення:

$$\mu_1\mu_2\mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2 = 0 \quad (1.20)$$

або, використовуючи симетричні функції (1.19),

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2.$$

Тобто, \mathcal{M}_2 канонічно ізоморфний \mathbb{C}^2 з координатами σ_1 та σ_2 .

Інколи використовують позначення

$$\langle f \rangle = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$$

для спряженого класу відображення f , яке має мультиплікатори μ_1, μ_2, μ_3 . Якщо $\mu_1\mu_2 \neq 1$, то з (1.20) ми можемо знайти

$$\mu_3 = \frac{2 - \mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1\mu_2}. \quad (1.21)$$

Якщо $\mu_1\mu_2 = 1$, то згідно (1.20), отримаємо $\mu_1 = \mu_2 = 1$, тобто $z_1 = z_2$ — кратна нерухома точка, а значення мультиплікатора μ_3 — може бути довільним.

1.5 Дробово-лінійні перетворення

1.5.1 Основні властивості

Дробово-лінійним перетворенням називають перетворення вигляду

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такі, що $ad - bc \neq 0$. Остання умова гарантує те, що відображення f не є константою, а також, що числа c та d одночасно не рівні нулю. Таким чином, f визначене на всій комплексній площині \mathbb{C} при $c = 0$, і на $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ при $c \neq 0$. Довизначивши

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \infty && \text{при } c = 0; \\ f(-\frac{d}{c}) &= \infty \text{ та } f(\infty) = \frac{a}{c} && \text{при } c \neq 0, \end{aligned}$$

отримаємо взаємно однозначне дробово-лінійне перетворення f на розширеній комплексній площині $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

Нагадаємо деякі властивості дробово-лінійних перетворень (див. [12, 13]).

1. Довільне дробово-лінійне перетворення є гомеоморфізмом на $\hat{\mathbb{C}}$.

2. Кругова властивість дробово-лінійних перетворень: довільне дробово-лінійне перетворення відображає будь-яке коло на $\hat{\mathbb{C}}$ також в коло на $\hat{\mathbb{C}}$. При цьому колом на $\hat{\mathbb{C}}$ будемо називати коло чи пряму на комплексній площині.

3. Якими б не були різні точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ та $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$, то завжди існує, і причому єдине, дробово-лінійне перетворення f таке, що

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Це дробово-лінійне перетворення f можна побудувати, використовуючи формулу:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

4. Довільне дробово-лінійне перетворення можна представити як композицію найпростіших перетворень:

- (i) $f_1(z) = z + d/c$ (переміщення, зсув);
- (ii) $f_2(z) = 1/z$ (інверсія, відбиття);
- (iii) $f_3(z) = -(ad - bc)/c^2 \cdot z$ (розширення чи стиск та поворот);
- (iv) $f_4(z) = z + a/c$ (переміщення, зсув),

тобто

$$f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Такий розклад є дуже зручним, оскільки робить багато властивостей дробово-лінійних перетворень очевидними.

1.5.2 Канонічні форми для спряженості

Визначення канонічних форм дробово-лінійних перетворень та їх властивостей можна знайти у багатьох книгах, наприклад [12, 13, 14]. У цьому пункті ми встановимо канонічні форми дробово-лінійного перетворення

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.22}$$

для спряженості та визначимо їх геометричний зміст.

Дробово-лінійні перетворення $f, g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ називають *спряженими*, якщо існує дробово-лінійне перетворення $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ таке, що $g = h^{-1}fh$.

Точку $z \in \hat{\mathbb{C}}$ називають *нерухомою точкою* відображення $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, якщо $f(z) = z$.

Довільне нетотожне дробово-лінійне перетворення (1.22) має 1 або 2 нерухомі точки, які визначаються як корені рівняння

$$z = \frac{az + b}{cz + d},$$

тобто

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (1.23)$$

З цієї рівності очевидно, що дробово-лінійне перетворення f має одну нерухому точку тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова:

$$(a - d)^2 + 4bc = 0.$$

Можливий випадок, коли нерухомою точкою буде ∞ – нескінченно віддалена точка комплексної площини. Очевидно, що це буде тоді і тільки тоді, коли $c = 0$, тобто у випадку, коли f – афінне перетворення. Випадок, коли дві нерухомі точки будуть рівними між собою та будуть дорівнювати ∞ можливий лише коли $c = 0$ та $d = a$, тобто у випадку паралельного переносу.

В залежності від кількості нерухомих точок у дробово-лінійного перетворення, розглянемо можливі випадки.

Дробово-лінійні перетворення, що мають по 2 різні нерухомі точки.

Нехай дробово-перетворення $w = f(z)$ з (1.22) має нерухомі точки z_1 та z_2 , причому $z_1 \neq z_2$. Для зручності ми будемо зображати z та w точками однієї площини. Перейдемо до допоміжної площини, в якій ми будемо зображати змінні ν та ξ , де

$$\nu = \frac{w - z_1}{w - z_2} = S(w), \quad \xi = \frac{z - z_1}{z - z_2} = S(z),$$

якщо $z_2 \neq \infty$ та будемо вважати, що

$$\nu = w - z_1 = S(w), \quad \xi = z - z_1 = S(z).$$

якщо $z_2 = \infty$. Поєднуючи формули $w = S(z)$, $w = f(z)$ та $z = S^{-1}(\xi)$ (де S^{-1} – перетворення обернене до S), ми отримаємо відображення $w = S f S^{-1}(\xi)$.

Для дробово-лінійного перетворення $S f S^{-1}$, що встановлює залежність між змінними w та ξ , нерухомими точками є 0 та ∞ , тому ця залежність повинна мати вигляд $w = k \xi$, де k – деяке комплексне число. Звідси випливає, що дане дробово-лінійне перетворення f можна представити у такому вигляді:

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{якщо } z_2 \neq \infty, \quad (1.24)$$

або

$$w - z_1 = k(z - z_1), \quad \text{якщо } z_2 = \infty. \quad (1.25)$$

Канонічною формою дробово-лінійного перетворення, що має *тільки дві різні нерухомі точки*, називають перетворення вигляду:

$$w(z) = kz. \quad (1.26)$$

Стала k легко може бути виражена через коефіцієнти дробово-лінійного перетворення f , якщо помітити, що з умови (1.24)

$$k = \frac{w - z_1}{w - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}, \quad \text{якщо } z_2 \neq \infty,$$

або з умови (1.25)

$$k = \frac{w - z_1}{z - z_1}, \quad \text{якщо } z_2 = \infty,$$

та є величиною сталою, тобто не залежить від значень змінної z . Припускаючи, що $z = 0$ та $w = \frac{b}{d}$, і враховуючи значення нерухомих точок z_1 та z_2 з умови (1.23), ми знайдемо

значення сталої:

$$k = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}, \quad \text{якщо } z_2 \neq \infty,$$

або $k = \frac{a}{d}$, якщо $z_2 = \infty$.

Визначимо геометричний зміст перетворення $w(z) = kz$ з (1.26). Оскільки ми розглядаємо дробово-лінійне перетворення f , яке має тільки дві різні нерухомі точки, а f та w спряжені, то w теж має тільки дві різні нерухомі точки, а це можливо тоді і тільки тоді, коли $k \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. В залежності від значення числа k розглянемо 3 можливі типи перетворень:

- 1) k дійсне та додатне;
- 2) $k = e^{\alpha i}$ ($\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$);
- 3) $k = re^{\alpha i}$ ($r \neq 1$, $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$).

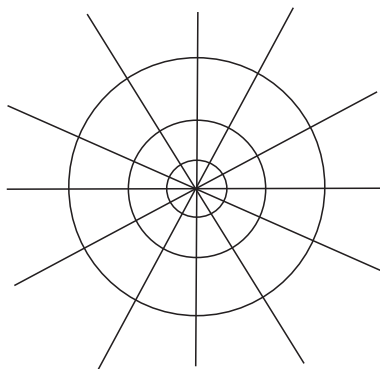
У першому випадку дробово-лінійне перетворення f називають *гіперболічним*, у другому – *еліптичним*, а в третьому – *локсодромічним*.

Канонічній формі гіперболічного перетворення відповідає перетворення подібності, канонічній формі еліптичного перетворення – відображення повороту, а канонічній формі локсодромічного перетворення – відображення, що поєднує перетворення подібності та поворот.

Для канонічних форм *гіперболічного* та *еліптичного* перетворень особливу роль відіграють дві сім'ї таких кривих:

- сім'я прямих ліній, що проходять через точку 0,
- сім'я кіл з центром у точці 0,

які зображені на наступному рисунку:



Ці дві сім'ї ліній залишаються інваріантними при перетвореннях цих двох типів. Так, при дії гіперболічного перетворення в канонічній формі, кожна з вище згаданих прямих переходить сама в себе, а відповідні кола переставляються між собою. У випадку дії еліптичного перетворення в канонічній формі, навпаки, кожне із згаданих кіл переходить саме в себе, а відповідні прямі переставляються між собою.

Щоб розкрити геометричний зміст дробово-лінійного перетворення (1.24) гіперболічного та еліптичного типів, розглянемо дві сім'ї ліній, які ми отримуємо в площині z з вищезгаданих кривих: сім'ю прямих ліній та сім'ю кіл, за допомогою перетворень, що мають вигляд:

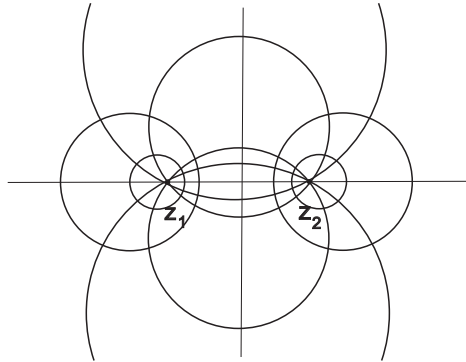
$$\xi = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{якщо } z_2 \neq \infty$$

або

$$\xi = z - z_1, \quad \text{якщо } z_2 = \infty.$$

У випадку $z_2 \neq \infty$ це будуть дві сім'ї ліній, зображені на

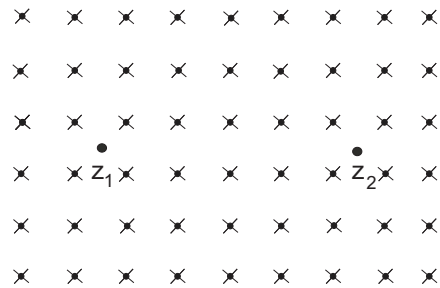
рисунку



З яких перша сім'я ліній складається з усіх кіл, що проходять через нерухомі точки z_1 та z_2 , а друга сім'я – з кіл, до них ортогональних.

У випадку $z_2 = \infty$ перша сім'я ліній складається з пучка прямих з центром в z_1 , а друга – з кіл із центром в z_1 .

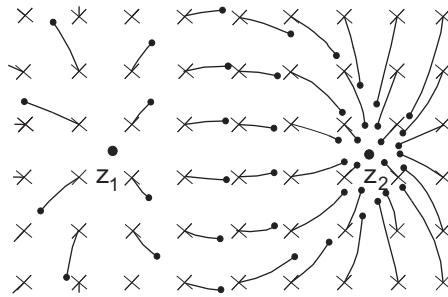
На рисунку



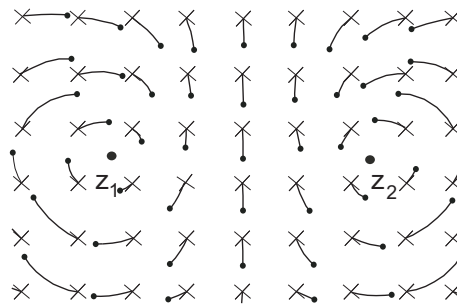
зображена стереографічна проекція сфери Рімана на площину і на ній – дві різні нерухомі точки z_1 та z_2 довільного дробово-лінійного перетворення.

При *гіперболічному* перетворенні кожне коло з першої сім'ї переходить саме в себе, також самі в себе переходять і області, що обмежені цими колами, тобто відображення

діє як "розтяг та стиск по цим лініям з центрами у точках z_1 та z_2 , відповідно". Схематичну дію такого перетворення зображено на наступному рисунку:



При *еліптичному* перетворенні така ж властивість має місце по відношенню до кіл з другої сім'ї, тобто відбуваються, умовно кажучи, "повороти навколо точок z_1 та z_2 ". Приклад такого перетворення зображено на цьому рисунку:



Зауважимо, що при *локсодромічному* перетворенні не існує прямих та кіл, які б переходили самі в себе разом з обмеженими ними областями.

Дробово-лінійні перетворення, що мають тільки по одній нерухомій точці.

Довільне дробово-лінійне перетворення, яке має тільки одну нерухому точку називають *параболічним*.

Щоб знайти канонічну форму при спряженні для дробово-лінійного перетворення, що має тільки одну нерухому точку z_0 , будемо зображати z та w точками однієї площини. Перейдемо до допоміжної площини зі змінними ν та ξ , де

$$\nu = \frac{1}{w - z_0}, \quad \xi = \frac{1}{z - z_0},$$

якщо $z_0 \neq \infty$, та будемо вважати, що

$$\nu = w, \quad \xi = z.$$

якщо $z_0 = \infty$.

Перетворення, що відображає ξ в ν , має єдину нерухому точку в нескінченності, а тому воно має вигляд: $\nu = \xi + h$, де h – ненульове число.

Канонічною формою параболічного перетворення називають перетворення вигляду:

$$w(z) = z + h. \quad (1.27)$$

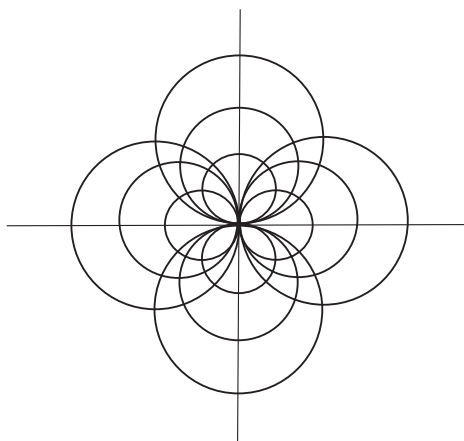
(Оскільки h ненульове, то вважатимемо, що $h := 1$.)

Отже, частинним випадком параболічного перетворення, до якого зводиться загальний випадок, буде перетворення паралельного переносу.

В площині ξ важливу роль відіграють дві сім'ї ліній: прямі паралельні вектору h та прямі до них ортогональні. Кожна пряма лінія, яка паралельна вектору h , переходить при дії параболічного перетворення в канонічній формі (1.27), сама в себе, в той час як прямі ортогональні до вектора h переставляються між собою.

В площині z роль щойно згаданих двох сімей прямих лі-

ній приймають відповідні їм дві ортогональні сім'ї кіл, що проходять через точку z_0 . Кола з кожної сім'ї, які є зображеннями паралельних прямих, повинні мати один і той же напрямок в точці z_0 , тобто повинні дотикатися до однієї і тієї ж прямої, як зображено на наступному рисунку:



При параболічному перетворенні самі в себе переходять кола кожної з вказаних сімей, причому обмежені ними області теж переходять самі в себе.

1.5.3 Спряжені класи.

У цьому пункті ми розглянемо класифікацію дробово-лінійних перетворень на $\hat{\mathbb{C}}$ з точністю до спряженості. Для цього використаємо матричне представлення таких відображень.

Кожна матриця $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ визначає дробово-лінійне перетворення g_A наступним чином:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Надалі будемо казати, що матриця A визначає g_A . Але й інша матриця, отримана множенням матриці A на ненульове комплексне число, теж визначає те саме дробово-лінійне перетворення, тобто дробово-лінійне перетворення однозначно матрицю не визначає.

Позначимо через Φ відображення групи $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ на множину всіх дробово-лінійних перетворень. Легко перевірити, що

$$g_A g_B(z) = g_{AB}(z), \quad z \in \hat{\mathbb{C}},$$

де AB – добуток двох матриць. Таким чином відображення Φ є гомоморфізмом. Ядро K цього гомоморфізму складається з матриць таких, що $g_A(z) = z$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$. При послідовній підстановці $z = 0, 1, \infty$, отримуємо обмеження на коефіцієнти матриці, тобто ядро K складається з матриць вигляду

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Отже, між множиною дробово-лінійних перетворень та $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})/K$ існує ізоморфізм, а це означає, що довільне дробово-лінійне перетворення g_A визначає матрицю A з точністю до ненульового множника.

У розділі 5 ми досліджуватимемо зв'язок між квадратними 2×2 комплексними матрицями з визначником рівним 1 та дробово-лінійними перетвореннями, тому нас цікавить обмеження відображення Φ на множину $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Ядром цього обмеження є

$$K_0 = K \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{I, -I\},$$

де I – одинична матриця. Отже, множина дробово-лінійних перетворень ізоморфна $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$. Тобто довільне дробово-лінійне перетворення g_A визначається тільки дво-

ма матрицями A та $-A$ з множини $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$.

Beardon [14] розглянув функцію, яка є інваріантною відносно перетворення $A \mapsto \lambda A$, $\lambda \neq 0$, та визначив її на множині дробово-лінійних перетворень наступним чином:

$$\text{trace}^2(g_A) = \frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)} (= \text{tr}^2(g_A)), \quad (1.28)$$

де A – довільна матриця, що визначає перетворення g_A .

Використовуючи те, що $\text{tr}^2(g_A)$ є інваріантною відносно спряження і, як зазначалося у пункті 1.5.2, кожне дробово-лінійне перетворення спряжене з однією із канонічних форм (1.26) або (1.27), Beardon встановив наступний критерій спряженості дробово-лінійних перетворень.

Теорема 1.3 ([14]). *Нехай f та g – нетотожні дробово-лінійні перетворення на $\hat{\mathbb{C}}$. Перетворення f та g спряжені тоді і тільки тоді, коли $\text{tr}^2(f) = \text{tr}^2(g)$.*

Зауважимо, що функція $\text{tr}^2(g_A)$, визначена в (1.28), має важливий геометричний зміст, оскільки параметризує спряжені класи дробово-лінійних перетворень.

Розділ 2

Класифікація афінних відображень на унітарних та евклідових просторах з точністю до топологічної спряженості

2.1 Основні результати

У цьому розділі ми розглядаємо проблему класифікації афінних відображень на унітарному або евклідовому просторі V з точністю до топологічної спряженості.

Надалі ми розглядатимемо простір $V = \mathbb{F}^n$ зі звичайним скалярним добутком, де \mathbb{F} дорівнює \mathbb{C} або \mathbb{R} . Нагадаємо, що скалярний добуток двох векторів $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ та $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ n -вимірного евклідового простору \mathbb{R}^n

дорівнює сумі добутків координат цих векторів:

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Якщо $x, y \in \mathbb{C}^n$, то скалярний добуток визначається наступним чином:

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n,$$

де \bar{y}_i – комплексно спряжене число до y_i .

Афінне відображення $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ має вигляд

$$f(x) = Ax + b, \quad A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{F}^n.$$

Для кожної квадратної матриці A заданої над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} завжди існує невироджена матриця A_* та нільпотентна матриця A_0 , задані над відповідним полем \mathbb{F} , такі, що

$$A \text{ подібна } A_* \oplus A_0, \quad (2.1)$$

Основним результатом цього розділу є наступна теорема, в якій сформульовано необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінних відображень на унітарному або евклідовому просторі.

Теорема 2.1 ([17]). *Нехай $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$ – афінні відображення над $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} .*

- *Якщо f та g мають нерухомі точки, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли лінійні відображення $x \mapsto Ax$ та $x \mapsto Cx$ топологічно спряжені.*

- Якщо f має нерухому точку, а g не має нерухомої точки, то f та g не топологічно спряжені.
- Якщо f та g не мають нерухомих точок та
 - нехай $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли A_0 подібна B_0 ,
 - нехай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли визначники відповідних матриць A_* та C_* мають однаковий знак (тобто $\det(A_*C_*) > 0$) та A_0 подібна C_0 .

2.2 Канонічні форми афінних відображень на \mathbb{R}

Для кращого розуміння суті задачі, що вивчається, розглянемо випадок афінних відображень на \mathbb{R} та встановимо необхідні та достатні умови їх топологічної спряженості, а також підрахуємо точну кількість класів топологічно спряжених афінних відображень.

Розглянемо спочатку частинний випадок афінних відображень – лінійні відображення на \mathbb{R} (тобто, афінні відображення вигляду $f(x) = ax + 0$, $a \in \mathbb{R}$). Якщо відображення топологічно спряжені, то вони мають однакові топологічні властивості; тому, щоб довести, що деякі відображення f та g не топологічно спряжені, достатньо показати ті топологічні властивості відображення f , яких не має g .

Приклад 2.1. (і) Лінійні відображення $f(x) = 3x$ та $g(x) = 27x$, $x \in \mathbb{R}$, топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$ такий, що виконується $f = h^{-1}gh$.

- (ii) Лінійні відображення $f(x) = 3x$ та $g(x) = -3x$, $x \in \mathbb{R}$, не топологічно спряжені, бо відображення f зберігає орієнтацію, а g не зберігає.
- (iii) Лінійні відображення $f(x) = 3x$ та $g(x) = \frac{1}{3}x$, $x \in \mathbb{R}$, не топологічно спряжені, бо f та g мають різні топологічні властивості:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = \infty \notin \mathbb{R} \quad \text{для всіх } x \neq 0,$$

та

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(x) = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R},$$

Класифікацію лінійних відображень на \mathbb{R} з точністю до топологічної спряженості дає наступне твердження.

Твердження 2.1 ([35]). *Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, – лінійне відображення. Існує 7 класів топологічно спряжених лінійних відображень. Три класи визначаються числами $a = 0, 1, -1$, а інші – відкритими інтервалами між числами 0, 1 та -1 на \mathbb{R} .*

Тобто, лінійні відображення

$$f(x) = ax \quad \text{та} \quad g(x) = cx,$$

$a, c \in \mathbb{R}$, на \mathbb{R} топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли a та c або одночасно належать до одного інтервалу з $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, або одночасно дорівнюють числу 0, 1 або -1 .

Для афінних відображень має місце аналогічне твердження.

Твердження 2.2 ([3]). *Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, – афінне відображення. Існує 8 класів топологічно спряжених афінних відображень. Два класи визначаються*

числами $a = 0, -1$, два класи – парами чисел $a = 1, b = 0$ та $a = 1, b \neq 0$, а інші – відкритими інтервалами між числами $0, 1$ та -1 на \mathbb{R} .

Тобто, афінні відображення

$$f(x) = ax + b \quad \text{та} \quad g(x) = cx + d,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, на \mathbb{R} топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли a та c або одночасно належать до одного інтервалу з $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ або одночасно дорівнюють $0, 1$ або -1 . Якщо $a = c = 1$, то b та d або одночасно дорівнюють 0 або одночасно відмінні від 0 .

Доведення. Топологічно спряжені відображення мають однакові топологічні властивості. Для доведення умов твердження ми перерахуємо ті топологічні властивості, які розділяють афінні відображення $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, на вісім топологічно неспряжених класів відображень:

- (i) f – сталі відображення ($f(x) = b \equiv const$) тоді і тільки тоді, коли $a = 0$;
- (ii) f – тотожне відображення тоді і тільки тоді, коли $a = 1$ та $b = 0$;
- (iii) f не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $a = 1$ та $b \neq 0$;
- (iv) f^2 – тотожне відображення, а f не є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли $a = -1$;
- (v) f зберігає орієнтацію тоді і тільки тоді, коли $a > 0$;
- (vi) $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = \frac{b}{1-a} \in \mathbb{R}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли $|a| < 1$.

Властивості (v) та (vi) породжують розбиття прямої \mathbb{R} на чотири інтервали, а властивості (i)-(iv) – точки 0, 1 та -1 між ними. Враховуючи те, що числу $a = 1$ при $b = 0$ та $b \neq 0$ відповідають два різні класи топологічно спряжених афінних відображень (це впливає з властивостей (ii) та (iii)), в результаті отримаємо вісім класів топологічно неспряжених афінних відображень, які відповідають точкам та інтервалам на прямій \mathbb{R} .

Афінні відображення

$$f(x) = ax + b, \quad a \in \mathbb{R} \setminus 1, \quad b \in \mathbb{R},$$

та

$$g(x) = cx + d, \quad c \in \mathbb{R} \setminus 1, \quad d \in \mathbb{R},$$

причому числа a та c

- або одночасно належать до одного інтервалу з $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$,
- або одночасно дорівнюють 0 або -1 ,

топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, визначений наступним чином:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{d}{1-c}, & \text{якщо } x = \frac{b}{1-a}, \\ (x - \frac{b}{1-a})|x - \frac{b}{1-a}|^{l-1} + \frac{d}{1-c}, & \text{якщо } x \neq \frac{b}{1-a}, \end{cases}$$

(де значення l визначається з умови $|a|^l = |c|$) такий, що $f = h^{-1}gh$,

Афінні відображення

$$f(x) = x + b \quad \text{та} \quad g(x) = x + d, \quad b, d \in \mathbb{R} \setminus 0,$$

топологічно спряжені, бо існує гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$\varphi(x) = \frac{d}{b} x$ такий, що $f = \varphi^{-1}g\varphi$. □

Зауваження 2.1. В монографії [9] наведені розв'язки функціонального рівняння $hf = gh$ для широкого класу відображень $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де h – невідоме відображення на \mathbb{R} .

2.3 Канонічні форми В. Єфремовича бієктивних афінних відображень на \mathbb{R}^2

Наведемо канонічні форми бієктивних афінних відображень на \mathbb{R}^2 відносно топологічної спряженості, які побудував В. Єфремович [6]:

- (i) Якщо відображення f має нескінченно багато нерухомих точок, то канонічна форма f має один з наступних виглядів:

- коли f зберігає орієнтацію, то

$$\begin{aligned} [x, y]^T &\mapsto [x, y]^T, \\ [x, y]^T &\mapsto [2x, y]^T, \\ [x, y]^T &\mapsto [x, x + y]^T; \end{aligned}$$

- коли f змінює орієнтацію, то

$$\begin{aligned} [x, y]^T &\mapsto [x, -y]^T, \\ [x, y]^T &\mapsto [x, -2y]^T, \end{aligned}$$

- (ii) Якщо відображення f має одну нерухому точку, то канонічна форма f має один з наступних виглядів:

- коли f зберігає орієнтацію, то

$$[x, y]^T \mapsto [2x, 2y]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [-2x, -\frac{1}{2}y]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [2x, \frac{1}{2}y]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [-2x, -y]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [-x, -(x + y)]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta]^T, \quad 0 < \theta \leq \pi;$$

- коли f змінює орієнтацію, то

$$[x, y]^T \mapsto [2x, -2y]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [2x, -\frac{1}{2}y]^T,$$

$$[x, y]^T \mapsto [2x, -y]^T;$$

(iii) Якщо відображення f не має нерухомих точок, то канонічна форма f має один з наступних виглядів:

- коли f зберігає орієнтацію, то

$$[x, y]^T \mapsto [x + 1, y]^T;$$

- коли f змінює орієнтацію, то

$$[x, y]^T \mapsto [x + 1, -y]^T.$$

Використовуючи теорему 2.1 та твердження 1.1, результати В. Єфремовича можна узагальнити на довільні афінні відображення на \mathbb{R}^n при $n \leq 5$ та \mathbb{C}^n при $n \leq 2$, а також на ті афінні відображення на \mathbb{R}^n при $n > 5$ та \mathbb{C}^n при $n > 2$,

матриці яких не мають власних чисел, що є коренями з одиниці.

2.4 Афінні відображення, які мають нерухому точку

У цьому підрозділі ми розглядаємо афінне відображення $f(x) = Ax + b$, яке має нерухому точку та матриця A якого не має власних чисел, що є коренями з одиниці. Ми встановимо канонічний вигляд цього відображення відносно топологічної спряженості.

Надалі у цьому підрозділі ми будемо розглядати тільки лінійні відображення, бо згідно з наступною лемою проблема класифікації афінних відображень, що мають нерухому точку зводиться до проблеми аналогічної класифікації лінійних відображень.

Лема 2.1 ([3]). *Афінне відображення $f(x) = Ax + b$ над \mathbb{C} або \mathbb{R} топологічно спряжене зі своєю лінійною частиною $f_{\text{lin}}(x) = Ax$ тоді і тільки тоді, коли f має нерухому точку.*

Доведення. Якщо p – нерухома точка відображення f , то

$$f_{\text{lin}} = h^{-1}fh, \quad h(x) := x + p,$$

бо виконується $f(p) = p$, тобто $Ap + b = p$ та

$$\begin{aligned} h^{-1}fh(x) &= h^{-1}f(x + p) = h^{-1}(A(x + p) + b) \\ &= h^{-1}(Ax + (p - b) + b) = h^{-1}(Ax + p) \\ &= Ax = f_{\text{lin}}(x). \end{aligned}$$

Навпаки, якщо відображення f та f_{lin} топологічно спряжені, то f та f_{lin} мають однакову кількість нерухомих точок. Оскільки 0 – нерухома точка f_{lin} (тобто $f_{\text{lin}}(0) = 0$), то f також має нерухому точку. \square

Для довільного афінного відображення та відповідного лінійного відображення на \mathbb{R}^n має місце наступна лема.

Лема 2.2 ([3]). *Нехай $f(x) = Ax + b$ – афінне відображення та $g(x) = Ax$ – лінійне відображення на \mathbb{R}^n .*

Якщо відображення f та g топологічно спряжені, то завжди існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такий, що $g = h^{-1}fh$ та $h(0) = p$, де p – нерухома точка відображення f .

Доведення. Нехай відображення f та g топологічно спряжені, тоді існує гомеоморфізм $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такий, що

$$g = \psi^{-1}f\psi \quad (2.2)$$

(тобто $\psi g = f\psi$). Оскільки топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, а лінійне відображення $g(x) = Ax$ має нерухому точку 0 , тому й афінне відображення f теж має нерухому точку, яку позначимо через p .

Визначимо шуканий гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$h(x) := \psi(x + \psi^{-1}(p)). \quad (2.3)$$

Якщо $y = h(x)$, то обернений гомеоморфізм має вигляд

$$h^{-1}(y) = \psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(p). \quad (2.4)$$

Згідно (2.3) та (2.2), отримаємо, що відображення

$$\begin{aligned} h^{-1}fh(x) &= h^{-1}f\psi(x + \psi^{-1}(p)) \\ &= h^{-1}\psi g(x + \psi^{-1}(p)) \\ &= h^{-1}(\psi g(x + \psi^{-1}(p))). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Згідно (2.4), відображення (2.5) запишемо у наступному вигляді:

$$\psi^{-1}(\psi[g(x + \psi^{-1}(p))]) - \psi^{-1}(p). \quad (2.6)$$

Використовуючи лінійність відображення g та те, що p – нерухома точка f (тобто $f(p) = p$), відображення (2.6) має вигляд

$$\begin{aligned} g(x + \psi^{-1}(p)) - \psi^{-1}(p) &= g(x) + g\psi^{-1}(p) - \psi^{-1}(p) \\ &= g(x) + \psi^{-1}(f(p)) - \psi^{-1}(p) \\ &= g(x) + \psi^{-1}(p) - \psi^{-1}(p) = g(x). \end{aligned}$$

Тобто ми довели, що виконується рівність $h^{-1}fh(x) = g(x)$ для довільного $x \in \mathbb{R}^n$, де h – гомеоморфізм побудований в (2.3) такий, що $h(0) = p$, де p – нерухома точка відображення f . \square

Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ визначимо $n \times n$ жордановий блок

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Якщо кожен елемент $n \times n$ комплексної матриці $A = [a_{kl} + b_{kl}i]$, $a_{kl}, b_{kl} \in \mathbb{R}$, замінити на комплексно спряжений, тобто

$$a_{kl} + b_{kl}i \quad \longleftrightarrow \quad a_{kl} - b_{kl}i,$$

то отримаємо матрицю

$$\bar{A} = [a_{kl} - b_{kl}i]. \quad (2.8)$$

Якщо кожен елемент $a_{kl} + b_{kl}i$ матриці A замінити на 2×2 дійсний блок

$$a_{kl} + b_{kl}i \longleftrightarrow \begin{array}{cc} a_{kl} & -b_{kl} \\ b_{kl} & a_{kl} \end{array} \quad (2.9)$$

то отримаємо $2n \times 2n$ дійсну матрицю, яку позначатимемо $A^{\mathbb{R}}$.

У підрозділі 1.1 ми розглядали лише дійсні матриці, для яких виконувалася умова (1.10). Очевидно, що комплексні матриці мають таку ж властивість. Отже, кожна квадратна матриця A над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або \mathbb{C} подібна

$$A_0 \oplus A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty}, \quad (2.10)$$

де всі власні числа λ матриці A_0 (відповідно, A_{01} , A_1 та $A_{1\infty}$) задовольняють умові

$$\lambda = 0 \quad (\text{відповідно, } 0 < |\lambda| < 1, |\lambda| = 1 \text{ та } |\lambda| > 1).$$

Зауважимо, що A_0 є тією ж матрицею, що й в (2.1), а

$$A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty} \text{ подібна } A_*$$

в умові (2.1).

У цьому підрозділі ми доведемо наступну теорему, яка доведена у [17]; її частину (а) у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ довели Kuiper та Robbin [35, 42].

Теорема 2.2 ([17, 35, 42]). (а) *Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ – лінійні відображення над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або \mathbb{C} , які не мають*

власних чисел, що є коренями з одиниці; нехай матриці $A_0, \dots, A_{1\infty}$ та $B_0, \dots, B_{1\infty}$ визначені через A та B в умові (2.10).

- (i) Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } B_0, \quad A_1 \text{ подібна } B_1 \\ \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01}, \quad \det(A_{01}B_{01}) > 0, \\ \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty}, \quad \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

- (ii) Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } B_0, \quad A_1 \oplus \bar{A}_1 \text{ подібна } B_1 \oplus \bar{B}_1, \\ \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01}, \quad \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

(b) Кожне лінійне відображення над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або \mathbb{C} , яке не має власних чисел, що є коренями з одиниці, топологічно спряжене з лінійним відображенням, матриця якого є прямою сумою, однозначно визначеною з точністю до перестановки доданків, що складається з

- (i) у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

– довільного числа доданків

$$J_k(0), \quad [1/2], \quad J_k(\lambda)^{\mathbb{R}}, \quad [2] \quad (2.13)$$

($[1/2]$ та $[2]$ – це 1×1 матриці з елементами $1/2$ та 2), де λ – комплексне число, модуль якого рівний 1, що визначене з точністю до заміни на комплексно спряжене $\bar{\lambda}$ та не є коренем з одиниці, $J_k(\lambda)^{\mathbb{R}}$ – матриця, визначена в (2.7) та (2.9),

- хоча б одного доданку $[-1/2]$, та
- хоча б одного доданку $[-2]$;

(ii) у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$J_k(0), \quad [1/2], \quad J_k(\lambda), \quad [2], \quad (2.14)$$

де λ – комплексне число, модуль якого рівний 1, що визначене з точністю до заміни на комплексно спряжене $\bar{\lambda}$ та не є коренем з одиниці.

Доведення. Оскільки у твердженні (а) частину (i) довели Куїрег та Роббін [35, 42], то ми будемо доводити тільки частину (ii).

Абелеву групу $V = \mathbb{C}^n$ відносно операції додавання можна розглядати і як n -вимірний векторний простір $V_{\mathbb{C}}$ над \mathbb{C} , і як $2n$ -вимірний векторний простір $V_{\mathbb{R}}$ над \mathbb{R} . Більш того, ми можемо розглядати $V_{\mathbb{C}}$ як унітарний простір з ортонормованим базисом

$$\begin{aligned} e_1 &= [1, 0, \dots, 0]^T, \\ e_2 &= [0, 1, \dots, 0]^T, \\ &\vdots \\ e_n &= [0, 0, \dots, 1]^T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

та $V_{\mathbb{R}}$ як евклідовий простір з ортонормованим базисом вигляду

$$e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n. \quad (2.16)$$

Довжина довільного вектора

$$v = (\alpha_1 + \beta_1 i)e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)e_n \in V, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

в просторах $V_{\mathbb{C}}$ та $V_{\mathbb{R}}$ однакова та визначається наступною

формулою:

$$|v| = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 + \beta_n^2)^{1/2}.$$

Тому для просторів $V_{\mathbb{C}}$ та $V_{\mathbb{R}}$ виконується наступне твердження:

відображення $h : V \rightarrow V$ є гомеоморфізмом в $V_{\mathbb{C}}$ тоді і тільки тоді, коли h є гомеоморфізмом в $V_{\mathbb{R}}$. (2.17)

Добре відомо, що кожне лінійне відображення $f : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ визначає лінійне відображення $f^{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ (f та $f^{\mathbb{R}}$ співпадають як відображення на абелевій групі V). Згідно умови (2.17),

лінійні відображення $f, g : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли лінійні відображення $f^{\mathbb{R}}, g^{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ топологічно спряжені. (2.18)

Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ – лінійні відображення на просторі $V_{\mathbb{C}}$, які не мають власних чисел, що є коренями з одиниці. Очевидно, що A та B – їхні комплексні матриці в ортонормованому базисі (2.15). Розглядаючи f та g як лінійні відображення $f^{\mathbb{R}}$ та $g^{\mathbb{R}}$ на просторі $V_{\mathbb{R}}$, ми отримуємо, що матриці лінійних відображень $f^{\mathbb{R}}$ та $g^{\mathbb{R}}$ в ортонормованому базисі (2.16) – це відповідні дійсні матриці $A^{\mathbb{R}}$ та $B^{\mathbb{R}}$ матриць A та B (див. (2.9)).

Оскільки для комплексної матриці A згідно (2.10), виконується умова

$$S^{-1}AS = A_0 \oplus A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty},$$

де S – деяка невиврождена комплексна квадратна матриця,

то для матриці $A^{\mathbb{R}}$ отримаємо аналогічну умову:

$$(S^{\mathbb{R}})^{-1} A^{\mathbb{R}} S^{\mathbb{R}} = A_0^{\mathbb{R}} \oplus A_{01}^{\mathbb{R}} \oplus A_1^{\mathbb{R}} \oplus A_{1\infty}^{\mathbb{R}},$$

де $S^{\mathbb{R}}$ – невироджена дійсна квадратна матриця. Аналогічні міркування проводимо для комплексної матриці B та отримуємо, що відповідна дійсна матриця

$$B^{\mathbb{R}} \text{ подібна } B_0^{\mathbb{R}} \oplus B_{01}^{\mathbb{R}} \oplus B_1^{\mathbb{R}} \oplus B_{1\infty}^{\mathbb{R}}.$$

Згідно умови (2.18) та твердженню (i) теореми 2.2(a), лінійні відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли лінійні відображення $f^{\mathbb{R}}$ та $g^{\mathbb{R}}$ топологічно спряжені, тобто тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

$$\begin{aligned} A_0^{\mathbb{R}} \text{ подібна } B_0^{\mathbb{R}}, & \quad A_1^{\mathbb{R}} \text{ подібна } B_1^{\mathbb{R}}, \\ \text{size } A_{01}^{\mathbb{R}} = \text{size } B_{01}^{\mathbb{R}}, & \quad \det(A_{01}^{\mathbb{R}} B_{01}^{\mathbb{R}}) > 0, \\ \text{size } A_{1\infty}^{\mathbb{R}} = \text{size } B_{1\infty}^{\mathbb{R}}, & \quad \det(A_{1\infty}^{\mathbb{R}} B_{1\infty}^{\mathbb{R}}) > 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Покажемо, що умови (2.19) та (2.12) еквівалентні.

Для кожної комплексної матриці M , відповідна дійсна матриця $M^{\mathbb{R}}$ має наступну властивість:

$$M^{\mathbb{R}} \text{ подібна } M \oplus \overline{M} \quad (2.20)$$

(див. позначення (2.8)). Бо для кожного комплексного числа та відповідного дійсного 2×2 блоку

$$a + bi \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

виконується таке співвідношення:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & a - bi \end{bmatrix}.$$

Оскільки всі власні числа матриці A_0 є нульовими, то жорданова нормальна форма матриці A_0 – це нільпотентна жорданова матриця, для якої виконується наступна умова:

$$\overline{A}_0 \text{ подібна } A_0. \quad (2.21)$$

А для кожної з дійсних матриць $A_0^{\mathbb{R}}$ та $B_0^{\mathbb{R}}$ виконується умова (2.20), тому умову " $A_0^{\mathbb{R}}$ подібна $B_0^{\mathbb{R}}$ " з (2.19) можна замінити на еквівалентну

$$"A_0 \oplus \overline{A}_0 \text{ подібна } B_0 \oplus \overline{B}_0"$$

яка, згідно (2.21), еквівалентна умові " A_0 подібна B_0 ".

Для кожної з дійсних матриць $A_1^{\mathbb{R}}$ та $B_1^{\mathbb{R}}$ виконується умова (2.20), тому " $A_1^{\mathbb{R}}$ подібна $B_1^{\mathbb{R}}$ " з (2.19) еквівалентна умові

$$"A_1 \oplus \overline{A}_1 \text{ подібна } B_1 \oplus \overline{B}_1"$$

Очевидно, що згідно (2.9), умови

$$" \text{size } A_{01}^{\mathbb{R}} = \text{size } B_{01}^{\mathbb{R}} " \quad \text{та} \quad " \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01} "$$

еквівалентні та умови

$$" \text{size } A_{1\infty}^{\mathbb{R}} = \text{size } B_{1\infty}^{\mathbb{R}} " \quad \text{та} \quad " \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty} "$$

еквівалентні, бо для довільної комплексної $n \times n$ матриці A її відповідна дійсна матриця $A^{\mathbb{R}}$ має розмір $2n \times 2n$.

Наступні умови з (2.19):

$$" \det(A_{01}^{\mathbb{R}} B_{01}^{\mathbb{R}}) > 0 " \quad \text{та} \quad " \det(A_{1\infty}^{\mathbb{R}} B_{1\infty}^{\mathbb{R}}) > 0 "$$

завжди виконуються, бо справедливі такі рівності:

$$\begin{aligned}\det(A_{01}^{\mathbb{R}} B_{01}^{\mathbb{R}}) &= \det(A_{01} B_{01})^{\mathbb{R}} \\ &= \det(A_{01} B_{01} \oplus \overline{A_{01} B_{01}}) > 0.\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\det(A_{1\infty}^{\mathbb{R}} B_{1\infty}^{\mathbb{R}}) &= \det(A_{1\infty} B_{1\infty})^{\mathbb{R}} \\ &= \det(A_{1\infty} B_{1\infty} \oplus \overline{A_{1\infty} B_{1\infty}}) > 0.\end{aligned}$$

Отже, умови (2.19) еквівалентні (2.12), що доводить твердження (ii) даної теореми.

(b) Ця частина теореми, в якій описано вигляд канонічного лінійного відображення при топологічній спряженості, випливає з твердження (a) даної теореми та з теорем про жорданову нормальну форму та дійсну жорданову нормальну форму матриць [31, теореми 3.1.11 та 3.4.5]. \square

2.5 Афінні відображення, які не мають нерухомих точок

У цьому підрозділі ми встановимо топологічну класифікацію афінних відображень на унітарному або евклідовому просторі, які не мають нерухомих точок. У наступній теоремі сформульовано необхідні та достатні умови топологічної спряженості та виписано канонічну форму відносно топологічної спряженості для таких афінних відображень.

Теорема 2.3 ([17]). (a) *Нехай $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$ – афінні відображення над $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} , які не мають нерухомих точок; нехай матриці A_* , A_0 та C_* , C_0 визначені через A та C в (2.1).*

- Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли A_0 подібна B_0 .
- Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли визначники матриць A_* та C_* мають однаковий знак (тобто $\det(A_*C_*) > 0$) та A_0 подібна C_0 .

(б) Кожне афінне відображення f над $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} , яке не має нерухомої точки, топологічно спряжене тільки з одним афінним відображенням вигляду

$$x \mapsto (I_k \oplus J_0)x + [1, 0, \dots, 0]^T \quad (2.22)$$

або (тільки для випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

$$x \mapsto (I_k \oplus [-1] \oplus J_0)x + [1, 0, \dots, 0]^T, \quad (2.23)$$

де $k \geq 1$ та J_0 – нільпотентна жорданова матриця, яка однозначно визначена через афінне відображення f з точністю до перестановки блоків (зауважимо, що матриця J_0 буде відсутня, якщо f – бієктивне афінне відображення).

Ми будемо позначати афінне відображення $f(x) = Ax + b$ парою (A, b) і писатимемо

$$f = (A, b). \quad (2.24)$$

Для двох афінних відображень

$$f : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^m \quad \text{та} \quad g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$$

визначимо афінне відображення

$$f \oplus g : \mathbb{F}^{m+n} \rightarrow \mathbb{F}^{m+n}$$

наступним чином:

$$(f \oplus g)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} f(x) \\ g(y) \end{bmatrix};$$

тобто, використовуючи позначення (2.24), отримаємо

$$(A, b) \oplus (C, d) = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right). \quad (2.25)$$

Надалі ми будемо використовувати позначення

$$f \stackrel{\mathbb{F}}{\sim} g,$$

якщо два афінні відображення f та g топологічно спряжені над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} . Очевидно, що виконується наступна спряженість:

$$f \stackrel{\mathbb{F}}{\sim} f' \text{ та } g \stackrel{\mathbb{F}}{\sim} g' \implies f \oplus g \stackrel{\mathbb{F}}{\sim} f' \oplus g'. \quad (2.26)$$

2.5.1 Зведення до канонічної форми

У цьому пункті ми послідовно зведемо афінне відображення $y = Ax + b$, що задане над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} та яке не має нерухомих точок, до вигляду (2.22) або (2.23), використовуючи перетворення топологічної спряженості. Побудова відповідного гомеоморфізму базується на шести наступних кроках.

Крок 1: зводимо довільне афінне відображення $y = Ax + b$ без нерухомих точок до наступного вигляду:

$$\bigoplus_{i=1}^p (J_{m_i}(1), a_i) \oplus \bigoplus_{i=p+1}^r (J_{m_i}(1), a_i) \oplus (J_0, s) \oplus (B, c), \quad (2.27)$$

де J_0 – жорданова нормальна форма матриці A_0 (див. позначення (2.1) або (2.10)), $J_m(\lambda)$ – жордановий $m \times m$ блок, що відповідає власному числу λ (див. (2.7)), 1 та 0 не є власними числами матриці B , кожен вектор a_1, \dots, a_p має ненульову першу координату, а кожен вектор a_{p+1}, \dots, a_r має нульову першу координату.

Зведення до вигляду (2.27) ми робимо використовуючи перетворення лінійної спряженості (1.16) над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} .

Крок 2: зводимо відображення (2.27) до наступного вигляду:

$$\bigoplus_{i=1}^p (J_{m_i}(1), a_i) \oplus \bigoplus_{i=p+1}^r (J_{m_i}(1), 0) \oplus (J_0, 0) \oplus (B, 0), \quad (2.28)$$

де кожне a_i має ненульову першу координату.

Ми робимо це зведення, використовуючи твердження (2.26) та такі спряженості:

$$\begin{aligned} (J_m(1), a) &\overset{\mathbb{F}}{\sim} (J_m(1), 0), \\ (J_0, s) &\overset{\mathbb{F}}{\sim} (J_0, 0), \\ (B, c) &\overset{\mathbb{F}}{\sim} (B, 0), \end{aligned} \quad (2.29)$$

де перша координата в векторі a є нульовою. Спряженості (2.29) виконуються згідно умов леми 2.1, бо афінні відображення

$$(J_m(1), a), \quad (J_0, s) \quad \text{та} \quad (B, c)$$

мають нерухомі точки. Доведемо це.

- Афінне відображення $(J_m(1), a)$ має нерухому точку тоді і тільки тоді, коли має розв'язок наступна систе-

ма:

$$J_m(1)x + a = x,$$

тобто система $J_m(0)x = -a$, яка має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_m \end{bmatrix}.$$

У кроці 1 ми зазначали, що перша координата вектора a є нульовою (тобто $a_1 = 0$), тому дана система суїїсна та має розв'язок

$$[x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m]^T = [-a_2, -a_3, \dots, -a_m, 0]^T.$$

Отже, і афінне відображення $(J_m(1), a)$ має нерухому точку.

- Афінне відображення (J_0, s) , де J_0 – жорданова нормальна форма матриці A_0 (див. позначення (2.1) або (2.10)) має нерухому точку тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система рівнянь $J_0x + s = x$, тобто система вигляду

$$(J_0 - I)x = -s,$$

де I – одинична матриця. Оскільки всі власні числа матриці $(J_0 - I)$ рівні -1 , то $\det(J_0 - I) \neq 0$, а отже, дана система має розв'язок $x = -(J_0 - I)^{-1}s$. Тобто афінне відображення (J_0, s) має нерухому точку.

- Аналогічно, афінне відображення (B, c) , де власні числа матриці B не рівні 1 або 0, має нерухому точку тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система $Bx + c = x$,

тобто система вигляду

$$(B - I)x = -c.$$

Оскільки 1 не є власним числом невиродженої матриці B , то $\det(B - I) \neq 0$, тобто дана система має розв'язок $x = -(B - I)^{-1}c$.

Зауважимо, що в записі афінного відображення (2.28) число $p \geq 1$, бо інакше (2.28) є лінійним відображенням, яке має нерухому точку 0, що суперечить умові теореми, оскільки топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, а афінне відображення f не має нерухомих точок згідно умови теореми.

Крок 3: зводимо відображення (2.28) до наступного вигляду:

$$\bigoplus_{i=1}^p (J_{m_i}(1), e_1) \oplus (C, 0) \oplus (J_0, 0), \quad (2.30)$$

де вектор $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$, а матриця

$$C := \bigoplus_{i=p+1}^r J_{m_i}(1) \oplus B$$

є невиродженою.

Ми використовуємо спряженість над полем \mathbb{F} наступного вигляду:

$$(J_m(1), a) \overset{\mathbb{F}}{\sim} (J_m(1), e_1), \quad (2.31)$$

де перша координата вектора a є ненульовою; тобто a завжди можна представити у вигляді

$$a = b[1, a_2, \dots, a_n]^T, \quad b \neq 0.$$

Афінні відображення в умові (2.31) лінійно спряжені, бо відповідний гомеоморфізм є лінійним, тобто виконується рівність (див. (1.16)):

$$(SJ_m(1)S^{-1}, Se_1) = (J_m(1), a),$$

де матриця

$$S = b \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_2 & 1 & & & \\ a_3 & a_2 & 1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_n & \ddots & a_3 & a_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Крок 4: зводимо відображення (2.30) до наступного вигляду:

$$\bigoplus_{i=1}^p (I_{m_i}, e_1) \oplus (C, 0) \oplus (J_0, 0). \quad (2.32)$$

У цьому кроці для афінних відображень ми використовуємо спряженість

$$(J_m(1), e_1) \overset{\mathbb{F}}{\sim} (I_m, e_1), \quad (2.33)$$

яку побудував Влас [15]; він довів, що виконується така рівність:

$$h(J_m(1), e_1) = (I_m, e_1)h,$$

де гомеоморфізм $h : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^m$ є бірегулярним (див. (1.15))

та визначений наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + P_1 \\ x_3 + P_2 \\ \vdots \\ x_m + P_{m-1} \end{bmatrix},$$

де

$$P_k := (-1)^k \binom{x_1 + k - 1}{k + 1} k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{x_1 + i - 1}{i} x_{k+1-i}$$

та

$$\binom{\varphi}{r} := \frac{\varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2) \cdots (\varphi - r + 1)}{r!},$$

для кожного многочлена $\varphi \in \mathbb{F}[x_1]$. (Нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.)

Крок 5: зводимо відображення (2.32) до наступного вигляду:

$$(I_1, [1]) \oplus (D, 0) \oplus (J_0, 0), \quad (2.34)$$

де $D := I \oplus C$ є невиродженою матрицею.

Для цього кроку ми використовуємо спряженості, що мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^p (I_{m_i}, e_1) &\stackrel{\mathbb{F}}{\sim} (I_p, [1, \dots, 1]^T) \oplus (I_q, 0) \\ &\stackrel{\mathbb{F}}{\sim} (I_1, [1]) \oplus (I_{q+p-1}, 0); \end{aligned}$$

причому остання спряженість виконується, бо справедлива

наступна умова:

$$(I_2, [1, 1]^T) \stackrel{\mathbb{F}}{\sim} (I_2, e_1). \quad (2.35)$$

Афінні відображення в умові (2.35) є лінійно спряженими (див. (1.16)), бо відповідний гомеоморфізм є лінійним, тобто виконується

$$(S^{-1}I_2S, S^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (I_2, e_1),$$

де матриця

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Крок 6: зводимо відображення (2.34) до вигляду (2.22) або (2.23).

У цьому кроці ми розглянемо два можливі випадки, коли поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або \mathbb{C} .

Випадок $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Для $\varepsilon = \pm 1$ та довільної невідродженої дійсної $m \times m$ матриці F , що має парну кількість дійсних жорданових блоків вигляду (1.8) або (1.9) відповідного розміру для кожного від'ємного власного числа, ми використаємо наступну спряженість:

$$f \stackrel{\mathbb{R}}{\sim} g, \quad \begin{aligned} f &:= (I_1, [1]) \oplus (\varepsilon F, 0), \\ g &:= (I_1, [1]) \oplus (\varepsilon I_m, 0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Доведемо, що для афінних відображень f та g з (2.36) виконується рівність $g = h^{-1}fh$, де відповідне відображення

$$h : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

визначимо таким чином:

$$h : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon F^x y \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m. \quad (2.37)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} hg \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= h \begin{bmatrix} x+1 \\ \varepsilon y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ \varepsilon^2 F^{x+1} y \end{bmatrix} \\ &= f \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon F^x y \end{bmatrix} = fh \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Відображення h , що визначене в (2.37), є гомеоморфізмом, бо має наступні властивості:

- h неперервне, бо

$$F^x = e^{xG} = I + xG + \frac{(xG)^2}{2!} + \frac{(xG)^3}{3!} + \dots \quad (2.38)$$

де G – дійсна матриця така, що $F = e^G$ (вона існує згідно [32, теорема 6.4.15(с)]: для дійсної матриці M існує дійсна матриця N така, що $M = e^N$ тоді і тільки тоді, коли M не вироджена і має парну кількість жорданових блоків відповідного розміру для кожного від'ємного власного числа);

- використовуючи аналогічні міркування очевидно, що обернене відображення

$$h^{-1} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon F^{-x} y \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m$$

також неперервне.

Отже, спряженість (2.36) виконується.

Застосовуючи перетворення лінійної спряженості (1.16) до (2.34), ми зводимо матрицю D до вигляду

$$P \oplus (-Q), \quad (2.39)$$

де P – невироджена дійсна $p \times p$ матриця без від’ємних дійсних власних чисел, а Q – невироджена дійсна $q \times q$ матриця з додатними дійсними власними числами. Використовуючи розклад (2.39), афінне відображення (2.34) має такий вигляд:

$$(I_1, [1]) \oplus (P, 0) \oplus (-Q, 0) \oplus (J_0, 0). \quad (2.40)$$

Згідно спряженостей (2.26) та (2.36), відображення (2.40) топологічно спряжене з афінним відображенням, що має наступний вигляд:

$$(I_1, [1]) \oplus (I_p, 0) \oplus (-I_q, 0) \oplus (J_0, 0). \quad (2.41)$$

Якщо $\varepsilon = 1$ та матриця $F = -I_2$ в умові (2.36), тобто ми отримуємо

$$(I_1, [1]) \oplus (-I_2, 0) \stackrel{\mathbb{R}}{\sim} (I_3, e_1).$$

Застосовуючи це спряження декілька разів, ми зводимо афінне відображення (2.41) до вигляду (2.22) або (2.23).

Отже, ми довели, що довільне афінне відображення, яке задане над полем \mathbb{R} та не має нерухомої точки, топологічно спряжене з відображенням вигляду (2.22) або (2.23).

Випадок $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Доведемо, що виконується наступна спряженість:

$$f \stackrel{\mathbb{C}}{\sim} g, \quad \begin{aligned} f &:= (I_1, [1]) \oplus (D, 0), \\ g &:= (I_1, [1]) \oplus (I_m, 0), \end{aligned} \quad (2.42)$$

де D – невироджена комплексна $m \times m$ матриця з розкладу

(2.34). Дійсно, рівність $g = h^{-1}fh$ виконується для відображення $h : \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{m+1}$, яке визначене наступним чином:

$$h : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ D^x y \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}^m.$$

Це відображення h є гомеоморфізмом, бо D^x можна представити у вигляді ряду (2.38) з $F := D$ (матриця G існує згідно [32, теорема 6.4.15(a)]: якщо M невироджена матриця, то завжди існує комплексна матриця N така, що $M = e^N$).

Тобто, афінні відображення f та g в умові (2.42) топологічно спряжені. Використовуючи цю спряженість, ми зводимо афінне відображення (2.34) до вигляду (2.22). Отже, ми довели, що довільне афінне відображення задане над полем \mathbb{C} , яке не має нерухомих точок, топологічно спряжене з афінним відображенням вигляду (2.22).

2.5.2 Єдиність канонічної форми

У цьому пункті ми доведемо єдиність канонічної форми афінного відображення, яке не має нерухомих точок, що була визначена в теоремі 2.3(b).

Нехай f та g – афінні відображення, що мають вигляд (2.22) або (2.23); використаємо наступні представлення: $f = f_* \oplus f_0$, де

$$\begin{aligned} f_* &= (I_{(\varepsilon)}, e_1) : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^p, \\ f_0 &= (J_0, 0) : \mathbb{F}^{n-p} \rightarrow \mathbb{F}^{n-p}, \end{aligned}$$

та $g = g_* \oplus g_0$, де

$$\begin{aligned} g_* &= (I_{(\delta)}, e_1) : \mathbb{F}^q \rightarrow \mathbb{F}^q, \\ g_0 &= (J'_0, 0) : \mathbb{F}^{n-q} \rightarrow \mathbb{F}^{n-q}. \end{aligned}$$

В цих рівностях ми вважаємо, що числа ε та δ дорівнюють ± 1 , а матриці

$$I_{(1)} := I, \quad I_{(-1)} := I \oplus [-1],$$

та J_0 і J'_0 – нільпотентні жорданові матриці.

Нехай афінні відображення f та g топологічно спряжені. Для кожного $i = 1, 2, \dots$, образами відображень f^i та g^i є множини

$$V_i := f^i \mathbb{F}^n = \mathbb{F}^p \oplus J_0^i \mathbb{F}^{n-p}$$

та

$$W_i := g^i \mathbb{F}^n = \mathbb{F}^q \oplus J_0^i \mathbb{F}^{n-q},$$

відповідно, тому вони є векторними підпросторами \mathbb{F}^n , причому їхні розмірності рівні

$$\dim V_i = p + \text{rank } J_0^i, \quad \dim W_i = q + \text{rank } J_0^i. \quad (2.43)$$

Оскільки, згідно припущення, афінні відображення f та g топологічно спряжені, то існує гомеоморфізм $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ такий, що виконується рівність $hf = gh$. Тоді афінні відображення f^i та g^i теж топологічно спряжені та виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} hf^i &= g^i h, \\ hf^i \mathbb{F}^n &= g^i h \mathbb{F}^n = g^i \mathbb{F}^n, \\ h V_i &= W_i. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Згідно теореми про інваріантність розмірності [34], довільні два гомеоморфні векторні простори мають однакову розмірність; тобто, остання рівність в умовах (2.44) означає, що розмірності векторних підпросторів V_i та W_i однакові, тобто

отримаємо:

$$\dim V_i = \dim W_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Зафіксуємо будь-яке непарне ціле число $m \geq \max(n - p, n - q)$. Тоді для нільпотентних жорданових матриць J_0 і J'_0 виконується наступна рівність:

$$J_0^m = J_0'^m = 0$$

і згідно (2.43), отримаємо

$$p = \dim V_m = \dim W_m = q.$$

Таким чином, відображення

$$f_* = (I_{(\varepsilon)}, e_1) \quad \text{та} \quad g_* = (I_{(\delta)}, e_1)$$

– афінні бієкції $V_* \rightarrow V_*$ на одному просторі

$$V_* := V_m = W_m = \mathbb{F}^p.$$

Згідно умов (2.44), обмеження гомеоморфізму h на простір V_* – це деякий гомеоморфізм $h_* : V_* \rightarrow V_*$. Обмежуючи рівність $hf = gh$ на V_* , ми отримаємо

$$h_* f_* = g_* h_*. \quad (2.45)$$

Тобто, невироджені афінні відображення f_* та g_* топологічно спряжені.

Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то $\varepsilon = \delta = 1$.

Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Для довільного гомеоморфізму φ на евклідовому просторі, ми писатимемо $o(\varphi) = 1$ або -1 , в залежності від того зберігає φ орієнтацію чи змінює. Зокрема,

якщо розглядати, що φ – невироджене афінне відображення (A, b) , то

$$\circ(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \det A > 0, \\ -1, & \text{якщо } \det A < 0. \end{cases}$$

Згідно рівності (2.45), виконуються наступні умови:

$$\circ(h_* f_*) = \circ(g_* h_*),$$

$$\circ(h_*) \circ(f_*) = \circ(g_*) \circ(h_*),$$

$$\circ(h_*)\varepsilon = \delta \circ(h_*),$$

і тому $\varepsilon = \delta$.

Нільпотентні жорданові матриці J_0 та J'_0 співпадають з точністю до перестановки блоків, бо згідно (2.43) виконуються наступні умови:

- кількість їхніх жорданових блоків рівна $n - \dim V_1$,
- кількість їхніх жорданових блоків розміру ≥ 2 рівна

$$(n - \dim V_2) - (n - \dim V_1),$$

- кількість їхніх жорданових блоків розміру ≥ 3 рівна

$$(n - \dim V_3) - (n - \dim V_2),$$

і так далі.

Отже, $\varepsilon = \delta$ та афінні відображення f та g співпадають з точністю до перестановки блоків в нільпотентних жорданових матрицях J_0 та J'_0 .

2.5.3 Висновки

Нехай $f(x) = Ax + b$ – афінне відображення над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або \mathbb{R} .

У пунктах 2.5.1 та 2.5.2 ми довели, що f топологічно спряжене тільки з одним афінним відображенням вигляду (2.22) або (2.23). Цей результат ми сформулювали в частині (b) теореми 2.3.

Нехай A_* та A_0 – невідроджена та нільпотентна частини відповідної матриці A , що визначені в (2.1). У пункті 2.5.1, де описано зведення f до канонічної форми, ми довели наступне:

- f зводиться до (2.22), якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ та $\det A_* > 0$, або якщо $\mathbb{F} = \mathbb{C}$;
- f зводиться до (2.23), якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ та $\det A_* < 0$,

а матриця J_0 в відображеннях (2.22) та (2.23) – це жорданова нормальна форма матриці A_0 з умови (2.1). Використовуючи ці міркування, отримаємо доведення частини (a) теореми 2.3.

Наслідок 2.1. *Афінне відображення $f(x) = Ax + b$ над \mathbb{C} або \mathbb{R} не має нерухомої точки тоді і тільки тоді, коли воно лінійно спряжене з лінійним відображенням вигляду*

$$g(x) = (J_k(1) \oplus C)x + d, \quad (2.46)$$

де d має ненульову першу координату.

Дійсно, афінне відображення (2.46) не має нерухомої точки, бо перші координати векторів $g(v)$ та v є різними для довільного значення v .

Навпаки, якщо $f(x) = Ax + b$ не має нерухомої точки, то воно лінійно спряжене з афінним відображенням вигляду (2.27), де $p \geq 1$ згідно кроку 2.

Розділ 3

Класифікація афінних відображень над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль з точністю до бірегулярної спряженості

3.1 Основні результати

У цьому розділі ми класифікуємо афінні відображення $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$,

$$f(x) = Ax + b, \quad A \in \mathbb{F}^{n \times n}, b \in \mathbb{F}^n$$

над алгебраїчно замкненим полем \mathbb{F} характеристики нуль з точністю до бірегулярної спряженості.

Нагадаємо (див. (1.15)), що два відображення $f, g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ називають бірегулярно спряженими, якщо виконується рівність $g = h^{-1}fh$ для деякої бієкції $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$, яка є бірегулярним відображенням, тобто h та h^{-1} мають наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

де всі φ_i – поліноми над \mathbb{F} . Групу бірегулярних відображень на \mathbb{F}^n називають *афінною групою Кремони* [16].

Надалі ми вважатимемо, що всі матриці та вектори задані над алгебраїчно замкненим полем \mathbb{F} характеристики нуль.

Афінне відображення, що не має нерухомої точки, не є бірегулярно спряженим з афінним відображенням з нерухомою точкою, бо бірегулярно спряжені відображення на \mathbb{F}^n мають однакову кількість нерухомих точок.

Jérémy Blanc [15] встановив класифікацію бієктивних афінних відображень над \mathbb{F} з точністю до бірегулярної спряженості.

Теорема 3.1 ([15]). *Нехай \mathbb{F} – алгебраїчно замкнене поле характеристики 0.*

- (a) *Два бієктивні афінні відображення $f, g : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$, $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$, які мають нерухомі точки, бірегулярно спряжені тоді і тільки тоді, коли їхні матриці A та C подібні.*
- (b) *Довільне бієктивне афінне відображення $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$, яке не має нерухомої точки, бірегулярно спряжене*

з “майже-діагональним” афінним відображенням наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

де $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \setminus 0$ – всі власні числа матриці відображення f , пораховані з урахуванням їхньої кратності. Афінне відображення (3.1) однозначно визначається через f , з точністю до перестановки власних чисел $\alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Аналогічно до умови (2.1), для довільної матриці A , заданої над полем \mathbb{F} , виконується:

$$A \text{ подібна } A_* \oplus A_0, \quad (3.2)$$

де A_* – невироджена матриця, а A_0 – нільпотентна.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема, де теорема 3.1 узагальнена на довільні афінні відображення над полем \mathbb{F} .

Теорема 3.2 ([18]). *Нехай \mathbb{F} – алгебраїчно замкнене поле характеристики 0.*

(а) *Критерій бірегулярної спряженості афінних відображень $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$ над полем \mathbb{F} є таким:*

(і) *Якщо відображення f та g мають нерухомі точки, то f та g бірегулярно спряжені тоді і тільки тоді, коли їхні матриці A та C подібні.*

- (ii) Якщо відображення f та g не мають нерухомих точок, то f та g бірегулярно спряжені тоді і тільки тоді, коли невироджені матриці A_* та C_* (визначені в (3.2)) мають однакові власні числа з однаковими кратностями, а відповідні нільпотентні матриці A_0 та C_0 подібні.
- (b) Канонічна форма афінного відображення $f(x) = Ax + b$ при бірегулярній спряженості є такою:
- (i) Якщо відображення f має нерухому точку, то f бірегулярно спряжене з лінійним відображенням вигляду

$$x \mapsto Jx,$$

де J – жорданова нормальна форма матриці A , що однозначно визначається через відображення f , з точністю до перестановки блоків.

- (ii) Якщо відображення f не має нерухомої точки, то f бірегулярно спряжене з афінним відображенням вигляду

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_k x_k \\ J_0 \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} := \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

де $1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \setminus 0$ – всі власні числа невиродженої матриці A_* , поразовані з урахуванням їхньої кратності, а J_0 – жорданова нормальна форма матриці A_0 . Афінне відображення (3.3) однозначно визначається через відображення f , з точністю до перестановки власних чисел

$\alpha_2, \dots, \alpha_k$ та перестановки блоків в нільпотентній матриці J_0 .

3.2 Доведення теореми 3.2

Лема 3.1 ([15, 3]). *Афінне відображення $f(x) = Ax + b$ над \mathbb{F} бірегулярно спряжене зі своєю лінійною частиною $f_{\text{lin}}(x) = Ax$ тоді і тільки тоді, коли f має нерухому точку.*

Доведення. Аналогічне до доведення леми 2.1. Якщо p – нерухома точка відображення f , то f та f_{lin} бірегулярно спряжені через бірегулярне перетворення $h(x) := x + p$, тобто

$$f_{\text{lin}} = h^{-1}fh.$$

Навпаки, нехай відображення

$$f(x) = Ax + b \quad \text{та} \quad f_{\text{lin}}(x) = Ax$$

бірегулярно спряжені. Очевидно, що $f_{\text{lin}}(0) = 0$, тобто f_{lin} має нерухому точку. Оскільки бірегулярно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, то f також має нерухому точку. \square

Надалі ми будемо використовувати позначення (2.24) та (2.25), тобто задавати афінне відображення відповідною парою

$$f(x) = Ax + b \quad \longleftrightarrow \quad (A, b).$$

А пряму суму двох афінних відображень f на \mathbb{F}^m та g на \mathbb{F}^n визначатимемо як афінне відображення $f \oplus g$ на \mathbb{F}^{m+n} наступним чином:

$$(f \oplus g)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} f(x) \\ g(y) \end{bmatrix}.$$

Тобто

$$(A, b) \oplus (C, d) = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right).$$

Аналогічно до (2.26), ми будемо використовувати наступне позначення:

$$f \sim g,$$

якщо відображення f та g бірегулярно спряжені. Очевидно, що виконується наступна спряженість:

$$f \sim f' \text{ та } g \sim g' \implies f \oplus g \sim f' \oplus g'. \quad (3.4)$$

Твердження (і) теореми 3.2(а) може бути доведене як в [15, твердження 2]: згідно леми 3.1, афінні відображення $f(x) = Ax + b$ та $g(x) = Cx + d$, що мають нерухомі точки, бірегулярно спряжені тоді і тільки тоді, коли бірегулярно спряжені їхні лінійні частини $f_{\text{lin}}(x) = Ax$ та $g_{\text{lin}}(x) = Cx$, тобто тоді і тільки тоді, коли існує бірегулярне відображення $\varphi : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ таке, що

$$\varphi f_{\text{lin}} = g_{\text{lin}} \varphi. \quad (3.5)$$

Продиференціювавши рівність (3.5), знайдемо її значення в нулі, тобто отримаємо

$$D\varphi(0) A = C D\varphi(0). \quad (3.6)$$

Рівність (3.6) означає, що матриці A та C подібні. Навпаки, якщо матриці A та C подібні, то має місце рівність $A = S^{-1}CS$, для деякої невиродженої матриці S , тобто виконується $\psi f_{\text{lin}} = g_{\text{lin}} \psi$, де $\psi(x) := Sx$.

Легко бачити, що твердження (і) теореми 3.2(б) випливає з (і) теореми 3.2(а).

Далі у цьому розділі ми доведемо твердження (ii) теоре-

ми 3.2(b), з якого безпосередньо випливає виконання твердження (ii) теореми 3.2(a).

3.2.1 Зведення до канонічної форми

Нехай $f(x) = Ax + b$ – афінне відображення, що не має нерухомих точок, задане над алгебраїчно замкненим полем \mathbb{F} характеристики нуль. Нехай A_* та A_0 – матриці, визначені в умові (3.2). Ми зведемо афінне відображення f до вигляду (3.3) через перетворення бірегулярної спряженості наступним чином:

- Зводимо відображення f до вигляду

$$(A_*, c) \oplus (J_0, s), \quad (3.7)$$

де J_0 – жорданова нормальна форма матриці A_0 . Ми робимо це перетворення використовуючи відображення лінійної спряженості

$$f \mapsto h^{-1}fh,$$

де $h(x) = Sx$ – гомеоморфізм на \mathbb{F}^n з невиродженою матрицею S . Тобто має місце перетворення наступного вигляду:

$$(A, b) \mapsto (S^{-1}AS, S^{-1}b);$$

ми завжди зможемо підібрати матрицю S такою, щоб виконувалася умова

$$S^{-1}AS = A_* \oplus J_0.$$

- Зводимо відображення (3.7) до вигляду

$$(A_*, c) \oplus (J_0, 0). \quad (3.8)$$

Ми можемо зробити це перетворення згідно умови (3.4) та наступної спряженості:

$$(J_0, s) \sim (J_0, 0). \quad (3.9)$$

Умова (3.9) виконується згідно леми 3.1, бо афінне відображення (J_0, s) має нерухому точку, оскільки система $J_0x + s = x$, записана в наступному вигляді:

$$(J_0 - I)x = -s \quad (3.10)$$

має розв'язок, бо всі власні числа матриці $(J_0 - I)$ рівні -1 , тобто

$$\det(J_0 - I) \neq 0.$$

Тому система (3.10) має розв'язок $x = -(J_0 - I)^{-1}s$, і отже, спряженість (3.9) виконується.

Зауважимо, що бієктивне афінне відображення (A_*, c) не має нерухомих точок, бо якщо (x_1, \dots, x_k) – нерухома точка (A_*, c) , то

$$(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

– нерухома точка афінного відображення (3.8), що суперечить умові теореми, бо бірегулярно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, а афінне відображення f не має нерухомих точок згідно умови.

- Зводимо відображення (3.8) до вигляду

$$(D_\alpha, e_1) \oplus (J_0, 0), \quad (3.11)$$

де

$$D_\alpha := \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

та $1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – всі власні числа невивірженої матриці A_* , пораховані з урахуванням їхньої кратності (зауважимо, що (3.11) – це інша форма запису афінного відображення (3.3)). Для доведення цього кроку ми використовуємо перетворення (3.4) та спряженість

$$(A_*, c) \sim (D_\alpha, e_1),$$

яка виконується згідно теореми 3.1(b).

3.2.2 Єдиність канонічної форми

Розглянемо довільні афінні відображення f та g у вигляді прямої суми, тобто $f = f_* \oplus f_\circ$, де

$$f_* = (D_\alpha, e_1) : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^p,$$

$$f_\circ = (J_0, 0) : \mathbb{F}^{n-p} \rightarrow \mathbb{F}^{n-p},$$

та $g = g_* \oplus g_\circ$, де

$$g_* = (D_\beta, e_1) : \mathbb{F}^q \rightarrow \mathbb{F}^q,$$

$$g_\circ = (J'_0, 0) : \mathbb{F}^{n-q} \rightarrow \mathbb{F}^{n-q},$$

які мають вигляд (3.11) на \mathbb{F}^n та відображення f_*, g_* не мають нерухомих точок.

Нехай афінні відображення f та g бірегулярно спряжені. Для кожного $i = 1, 2, \dots$, розглянемо образи відображень f^i

та g^i , які мають вигляд:

$$V_i := f^i \mathbb{F}^n = \mathbb{F}^p \oplus J_0^i \mathbb{F}^{n-p}$$

та

$$W_i := g^i \mathbb{F}^n = \mathbb{F}^q \oplus J_0^i \mathbb{F}^{n-q},$$

відповідно, та є векторними підпросторами \mathbb{F}^n , розмірності яких рівні, відповідно,

$$\dim V_i = p + \text{rank } J_0^i, \quad \dim W_i = q + \text{rank } J_0^i. \quad (3.12)$$

Оскільки, згідно припущення, афінні відображення f та g бірегулярно спряжені, то існує бірегулярне відображення $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ таке, що виконується рівність

$$f = h^{-1}gh.$$

Тоді афінні відображення f^i та g^i теж бірегулярно спряжені та виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} hf^i &= g^i h, \\ hf^i \mathbb{F}^n &= g^i h \mathbb{F}^n = g^i \mathbb{F}^n, \\ hV_i &= W_i. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Згідно теореми про інваріантність розмірності [30, глава 1, наслідок 3.7], гомеоморфні векторні простори мають однакову розмірність, тобто остання рівність в (3.13) означає

$$\dim V_i = \dim W_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Якщо позначити $m := \max(n-p, n-q)$, то для відповідних нільпотентних матриць J_0 та J_0' виконується умова

$$J_0^m = J_0'^m = 0$$

і тому

$$p = \dim V_m = \dim W_m = q.$$

Таким чином, невиродженні афінні відображення f_* та g_* є афінними бієкціями $V_* \rightarrow V_*$ на одному просторі

$$V_* := V_m = W_m = \mathbb{F}^p.$$

Згідно умов (3.13), обмеження бірегулярного відображення h на просторі V_* визначає деяке бірегулярне відображення $h_* : V_* \rightarrow V_*$. Обмежуючи рівність $hf = gh$ на V_* , отримаємо наступну умову:

$$h_*f_* = g_*h_*,$$

яка означає, що невироджені афінні відображення f_* та g_* бірегулярно спряжені. Згідно теореми 3.1, їхні відповідні матриці D_α та D_β співпадають з точністю до перестановки власних чисел.

Нільпотентні жорданові матриці J_0 та J'_0 співпадають з точністю до перестановки блоків, бо згідно умов (3.12) для відповідних жорданових блоків виконуються наступні умови:

- кількість їхніх жорданових блоків рівна $n - \dim V_1$,
- кількість жорданових блоків розміру ≥ 2 рівна

$$(n - \dim V_2) - (n - \dim V_1),$$

- кількість жорданових блоків розміру ≥ 3 рівна

$$(n - \dim V_3) - (n - \dim V_2),$$

і так далі.

Отже, для канонічних афінних відображень f та g , опи-

саних вище, матриці D_α та D_β співпадають з точністю до перестановки власних чисел та нільпотентні жорданові матриці J_0 та J'_0 співпадають з точністю до перестановки блоків, тобто теорему 3.2 доведено.

Розділ 4

Класифікація афінних відображень на \mathbb{H} з точністю до топологічної спряженості

У цьому розділі встановлена топологічна класифікація лінійних та афінних відображень на тілі кватерніонів \mathbb{H} , який розглядається як векторний простір над \mathbb{R} .

Оскільки чотирьохвимірний векторний простір \mathbb{R}^4 можна ототожнити з \mathbb{H} , то для вивчення властивостей лінійних відображень на \mathbb{H} досліджуються властивості кватерніонів через їхнє матричне представлення.

4.1 Лінійні відображення на \mathbb{H}

Ми розглядаємо \mathbb{R} -лінійні відображення на \mathbb{H} спеціального вигляду:

$$x \mapsto ax \quad \text{або} \quad x \mapsto xa \quad \text{для} \quad a \in \mathbb{H}.$$

Для топологічно спряжених відображень f та g на \mathbb{H} будемо використовувати наступне позначення:

$$f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} g.$$

Основним результатом цього підрозділу є наступне твердження, у якому сформульовані необхідні та достатні умови топологічної спряженості таких лінійних відображень на тілі кватерніонів \mathbb{H} .

Твердження 4.1 ([4]). *Нехай*

$$f(x) = ax, \quad g(x) = cx, \quad \tilde{f}(x) = xa, \quad \tilde{g}(x) = xc$$

– лінійні відображення на \mathbb{H} , де

$$a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k, \quad c = c_1 + c_2i + c_3j + c_4k \in \mathbb{H};$$

нехай $\|a\|$ та $\|c\|$ – норми кватерніонів a та c , які визначені в (1.17). Наступні спряженості:

$$f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} g \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g}$$

виконуються тоді і тільки тоді, коли виконуються одна з наступних умов:

- (i) $\|a\|, \|c\| \in (0, 1)$ або
- (ii) $\|a\|, \|c\| \in (1, \infty)$, або
- (iii) $a_1 = c_1$ та $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$.

Доведення даного твердження ми розіб'ємо на декілька пунктів.

4.1.1 Топологічно спряжені відображення $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{H}$.

Використовуючи класифікацію лінійних відображень на \mathbb{R}^4 з точністю до топологічної спряженості, доведемо наступну лему.

Лема 4.1 ([4]). *Нехай $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$ – лінійні відображення на \mathbb{H} , $a, c \in \mathbb{H}$; нехай $\|a\|$ та $\|c\|$ – норми кватерніонів a та c визначені в (1.17). Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i) – (iii) твердження 4.1.*

Доведення. Лінійному відображенню $f(x) = ax$, $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \in \mathbb{H}$, на \mathbb{H} відповідає лінійне відображення $f_{\mathbb{R}}(x) = Ax$ на \mathbb{R}^4 , де дійсна матриця A має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

Для доведення даної лемі ми використаємо те, що лінійні відображення $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$,

$$f(x) = ax \quad \text{та} \quad g(x) = cx,$$

де $a, c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні дійсні лінійні відображення $f_{\mathbb{R}}, g_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f_{\mathbb{R}}(x) = Ax \quad \text{та} \quad g_{\mathbb{R}}(x) = Cx, \quad (4.2)$$

(де матриці A та C мають вигляд (4.1)), тобто тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (1.12) твердження 1.1.

Використовуючи властивості матриць відображень (4.2), ми доведемо, що умови (1.12) еквівалентні умовам (i)–(iii) твердження 4.1.

Матриця A лінійного відображення $f_{\mathbb{R}}(x) = Ax$ має такі властивості:

- (i) вона має власні числа

$$\lambda_A = a_1 \pm i\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \quad (4.3)$$

кратності 2;

- (ii) $|\lambda_A| = \|a\|$, де $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \in \mathbb{H}$;
 (iii) дійсна жорданова форма \mathcal{R}_A матриці A має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} & a_1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

- (iv) A подібна тільки одній матриці A_α , $\alpha = 0, 01, 1, 1\infty$ з умов (1.10). Бо A подібна \mathcal{R}_A , яка має вигляд (4.4) і рівна лише одній матриці з цього переліку;
 (v) $\text{size } A = \text{size } \mathcal{R}_A = 4$, коли A – ненульова матриця;

- (vi) $\det A = \det \mathcal{R}_A = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 > 0$, коли A – ненульова матриця;
- (vii) $\lambda_A = 0 = a$ тоді і тільки тоді, коли A – нульова матриця.

Використовуючи властивості (i)–(vii) матриць A та C лінійних відображень відображень (4.2), ми доведемо, що умови (1.12) твердження 1.1, тобто

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } C_0, \quad A_1 \text{ подібна } C_1, \\ \text{size } A_{01} = \text{size } C_{01}, \quad \det(A_{01}C_{01}) > 0, \\ \text{size } A_{1\infty} = \text{size } C_{1\infty}, \quad \det(A_{1\infty}C_{1\infty}) > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

(матриці $A_0, \dots, A_{1\infty}$ та $C_0, \dots, C_{1\infty}$ визначені через A та B в (1.10)) еквівалентні умовам (i)–(iii) твердження 4.1, тобто

- (i) $\|a\|, \|c\| \in (0, 1)$ або
(ii) $\|a\|, \|c\| \in (1, \infty)$, або
(iii) $a_1 = c_1$ та $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$.

Згідно властивості (iv), матриця A подібна A_0 , або A_{01} , або A_1 , або $A_{1\infty}$, тобто власні числа (4.3) задовольняють умовам:

$$\lambda_A = 0, \quad \text{або } |\lambda_A| \in (0, 1), \quad \text{або } |\lambda_A| = 1, \quad \text{або } |\lambda_A| \in (1, \infty).$$

Згідно властивості (ii), ці умови можна виразити в термінах кватерніонів, тобто вони еквівалентні

$$a = 0, \quad \text{або } \|a\| \in (0, 1), \quad \text{або } \|a\| = 1, \quad \text{або } \|a\| \in (1, \infty).$$

З технічних причин ми розглянемо лише ті випадки для власних чисел матриць A та C , коли лінійні відображен-

ня $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$, $a, c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені та відповідні дійсні лінійні відображення $f_{\mathbb{R}}, g_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f_{\mathbb{R}}(x) = Ax$ та $g_{\mathbb{R}}(x) = Cx$, теж топологічно спряжені.

Випадок 1: $\lambda_A = \lambda_C = 0$. Умови (4.5) виконуються, бо згідно властивості (vii), A та C – нульові матриці. Умови (i)–(iii) твердження 4.1 теж виконуються, бо згідно властивості (ii), $a = c = 0$. Тому умова

$$\text{“}A_0 \text{ подібна } C_0\text{” еквівалентна “}a = c = 0\text{”}. \quad (4.6)$$

Випадок 2: $0 < |\lambda_A| < 1$ та $0 < |\lambda_B| < 1$. Умови (4.5) виконуються, бо згідно властивості (iv), A подібна A_{01} та C подібна C_{01} . За властивістю (v), розміри матриць A_{01} та C_{01} співпадають, бо

$$\text{size } A_{01} = \text{size } C_{01} = 4.$$

За властивістю (vi), виконуються умови $\det A = \det A_{01} > 0$ та, аналогічно, $\det C_{01} > 0$, тобто визначники відповідних матриць мають однакові знаки, тобто $\det(A_{01}C_{01}) > 0$. Умови (i)–(iii) твердження 4.1 теж виконуються, бо згідно властивості (ii), $\|a\|, \|c\| \in (0, 1)$. Тобто умови

$$\begin{aligned} &\text{“size}(A_{01}) = \text{size}(C_{01}) \\ &\text{та } \det(A_{01}C_{01}) > 0\text{”} \\ &\text{еквівалентні “}\|a\|, \|c\| \in (0, 1)\text{”} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Випадок 3: $|\lambda_A| = |\lambda_B| = 1$. Згідно властивості (ii), для кватерніонів a та c виконується умова $\|a\| = \|c\| = 1$. У цьому випадку, згідно властивості (iv), A подібна A_1

та C подібна C_1 . Доведемо, що при таких умовах виконується наступне:

$$“A_1 \text{ подібна } C_1” \text{ еквівалентна } “a_1 = c_1”. \quad (4.8)$$

Дійсні матриці A_1 та C_1 подібні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні жорданові форми, тобто $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_C$. З вигляду матриці (4.4) випливає, що з рівності дійсних жорданових форм, отримаємо $a_1 = c_1$. Та навпаки, якщо

$$\|a\| = \|c\| = 1 \quad \text{та} \quad a_1 = c_1,$$

то виконується

$$a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2,$$

і згідно (4.4), отримаємо рівність відповідних матриць $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_C$ і міркування необхідності повторюємо в зворотному порядку. Отже, (4.8) доведено.

Випадок 4: $|\lambda_A| > 1$ та $|\lambda_B| > 1$. Аналогічно до випадку 2, умови (4.5) виконуються, бо згідно властивості (iv), A подібна $A_{1\infty}$ та C подібна $C_{1\infty}$. За властивістю (v), розміри матриць $A_{1\infty}$ та $C_{1\infty}$ співпадають, бо

$$\text{size } A_{1\infty} = \text{size } C_{1\infty} = 4.$$

За властивістю (vi), виконуються умови $\det A = \det A_{1\infty} > 0$ та, аналогічно, $\det C_{1\infty} > 0$, тобто виконується така умова:

$$\det(A_{1\infty}C_{1\infty}) > 0.$$

Умови (i)–(iii) твердження 4.1 теж виконуються, бо згі-

дно властивості (ii), $\|a\|, \|c\| \in (1, \infty)$. Тобто умови

$$\begin{aligned} & \text{“size}(A_{1\infty}) = \text{size}(C_{1\infty}) \\ & \text{та } \det(A_{1\infty}C_{1\infty}) > 0\text{”} \\ & \text{еквівалентні ”}\|a\|, \|c\| \in (1, \infty)\text{”}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Інші випадки на власні числа матриць A та C розглядаються аналогічно, але умови (1.12) та умови (i)–(iii) твердження 4.1 виконуватися не будуть.

Умови $a = c = 0$ з (4.6) та $a_1 = c_1$ при $\|a\| = \|c\| = 1$ з (4.8) еквівалентні наступним:

$$a_1 = c_1 \quad \text{та} \quad a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2, \quad (4.10)$$

де $\|a\|$ та $\|c\|$ дорівнюють 0 або 1.

Підсумовуючи (4.7), (4.9) та (4.10), отримаємо, що умови (1.12) твердження 1.1 еквівалентні умовам (i)–(iii) твердження 4.1, що доводить істинність леми. \square

4.1.2 Топологічна спряженість відображень $x \mapsto ax$ та $x \mapsto xa$, $a \in \mathbb{H}$.

Оскільки \mathbb{H} тіло, то відображення $x \mapsto ax$ та $x \mapsto xa$ на \mathbb{H} , $a \in \mathbb{H}$, – це різні відображення, топологічну спряженість яких доводить наступна лема.

Лема 4.2 ([4]). *Лінійні відображення $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$ на \mathbb{H} , $a \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені.*

Доведення. Відображення $f, \tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$, де $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні дійсні

лінійні відображення $f_{\mathbb{R}}, \tilde{f}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f_{\mathbb{R}}(x) = Ax \quad \text{та} \quad \tilde{f}_{\mathbb{R}}(x) = Cx,$$

де A має вигляд (4.1), а матриця C рівна

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Дійсні канонічні форми матриць A та C мають вигляд (4.4) і є рівними, тобто A та C подібні. Тому відображення $f_{\mathbb{R}}(x) = Ax$ та $\tilde{f}_{\mathbb{R}}(x) = Cx$ лінійно спряжені, а отже й топологічно спряжені, а тому топологічно спряженими є лінійні відображення $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$, $a \in \mathbb{H}$. \square

4.1.3 Висновки

Нехай $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, $\tilde{f}(x) = xa$, $\tilde{g}(x) = xc$ – лінійні відображення на \mathbb{H} , $a, c \in \mathbb{H}$. Еквівалентність умов (i)–(iii) твердження 4.1 та спряженостей

$$f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} g \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g}$$

впливає з наступних випадків:

(a) $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$, $a, c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i)–(iii) твердження 4.1. Доведено у лемі 4.1.

(b) $\tilde{f}(x) = xa$ та $\tilde{g}(x) = xc$, $a, c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i)–(iii) твердження 4.1.

Доведення. Аналогічне до доведення лемі 4.1. Оскільки за-

мість лінійних відображень вигляду $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{H}$, ми розглядаємо $x \mapsto xa$, $a \in \mathbb{H}$, то у доведенні замість матриці (4.1) треба розглядати матрицю вигляду (4.11). Оскільки дійсні жорданові форми та властивості цих матриць співпадають, то ідея доведення буде такою ж. \square

(с) $f(x) = ax$ та $\tilde{g}(x) = xc$, $a, c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i)–(iii) твердження 4.1.

Доведення. Згідно леми 4.2, лінійні відображення $\tilde{g}(x) = xc$ та $g(x) = cx$, $c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені; згідно леми 4.1, лінійні відображення $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$, $a, c \in \mathbb{H}$, топологічно спряжені тоді і тільки тоді коли виконуються умови (i)–(iii) твердження 4.1. \square

4.2 Геометрична інтерпретація топологічно спряжених лінійних відображень на \mathbb{H}

Як вже зазначалося у доведенні леми 4.1, два довільні лінійні відображення f та g на \mathbb{H} топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли топологічно спряжені відповідні лінійні відображення $f_{\mathbb{R}}(x) = Ax$ та $g_{\mathbb{R}}(x) = Cx$ на \mathbb{R}^4 (матриці A та C мають вигляд (4.1) або (4.11)). Оскільки лінійна спряженість відображень означає топологічну спряженість, то можемо вважати, що матриці A та C , відповідних лінійних відображень на \mathbb{R}^4 , задані своїми дійсними жордановими формами, тобто мають вигляд (4.4). Представимо цю

матрицю у вигляді добутку двох відповідних матриць:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_1 & -\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2} & a_1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \|a\| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|a\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \|a\| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \|a\| \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\|a\|} & -\frac{\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}}{\|a\|} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}}{\|a\|} & \frac{a_1}{\|a\|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1}{\|a\|} & -\frac{\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}}{\|a\|} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}}{\|a\|} & \frac{a_1}{\|a\|} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для біективних лінійних відображень $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$, $a \in \mathbb{H}$, на \mathbb{H} введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} r &:= \|a\|, \quad \varphi := \arccos \frac{a_1}{\|a\|} \quad \text{при } a \neq 0, \\ r &:= 0, \quad \varphi := 0 \quad \text{при } a = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

де $\|a\|$ – норма кватерніона a , що визначена в (1.17).

Використовуючи позначення (4.12), запишемо жорданову матрицю A у наступному вигляді:

$$\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Тобто під дією лінійного відображення $f_{\mathbb{R}}(x) = Ax$ простір \mathbb{R}^4 можна розкласти в пряму суму $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ $f_{\mathbb{R}}$ -інваріантних 2-вимірних підпросторів. На кожному з доданків відображення $f_{\mathbb{R}}$ обертає кожен вектор проти годинникової стрілки на кут φ (визначений в (4.12)), при цьому розтягуючи або стискаючи його довжину в r разів. Використовуючи позначення (4.12), твердження 4.1 запишемо у наступному вигляді.

Твердження 4.2 ([4]). *Нехай $f(x) = ax$, $g(x) = cx$, $\tilde{f}(x) = xa$, $\tilde{g}(x) = xc$ – лінійні відображення на \mathbb{H} , де $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$, $c = c_1 + c_2i + c_3j + c_4k \in \mathbb{H}$; нехай r, φ та ρ, θ визначені для відображень f, \tilde{f} та g, \tilde{g} , відповідно, в (4.12). Наступні спряженості:*

$$f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} g \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g}$$

виконуються тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

- (i) $r, \rho \in (0, 1)$ або
- (ii) $r, \rho \in (1, \infty)$, або
- (iii) $\varphi = \theta$, або $\varphi = -\theta$.

Доведення. Згідно (4.12), для бієктивних відображень $f(x) = ax$ та $\tilde{f}(x) = xa$ визначені

$$r = \|a\|, \quad \varphi = \arccos \frac{a_1}{\|a\|},$$

а для бієктивних відображень $g(x) = cx$ та $\tilde{g}(x) = xc$ визначені

$$\rho = \|c\|, \quad \theta = \arccos \frac{c_1}{\|c\|}.$$

Доведемо, що умови (i)–(iii) твердження 4.1 еквівалентні умовам (i)–(iii) твердження 4.2. Оскільки $\|a\| = r$ та $\|c\| = \rho$, то пункти (i) та (ii) тверджень 4.1 та 4.2 еквівалентні. Очевидно, що при $a = c = 0$, згідно (4.12), $r = \rho = 0$, $\varphi = \theta = 0$ і умови тверджень виконуються. Залишилось розглянути випадок $\|a\| = \|c\| = 1$, де умови

$$a_1 = c_1, \quad a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$$

з твердження 4.1 еквівалентні $a_1 = c_1$. Доведемо, що при $\|a\| = \|c\| = 1$ умова

$$“a_1 = c_1” \quad \text{еквівалентна} \quad “\varphi = \theta \quad \text{або} \quad \varphi = -\theta”, \quad (4.13)$$

де $\varphi = \arccos a_1$, $\theta = \arccos c_1$ визначені вище. Необхідність: якщо $a_1 = c_1$, то виконуються наступні рівності:

$$a_1 = \cos(\arccos a_1) = \cos(\arccos c_1) = \cos(\pm \arccos c_1),$$

бо $\cos x = \cos(-x)$. Звідки $\arccos a_1 = \pm \arccos c_1$, тобто $\varphi = \pm\theta$. Достатність випливає з міркувань необхідності, застосованих у зворотному порядку. \square

4.3 Топологічно спряжені афінні відображення на \mathbb{H}

Ми вивчаємо афінні відображення на \mathbb{H} вигляду $f(x) = ax + b$ або $\tilde{f}(x) = xa + b$, де $a, b, x \in \mathbb{H}$.

Необхідні та достатні умови топологічної спряженості афінного відображення та відповідного лінійного дає наступна лема.

Лема 4.3 ([4]). Афінне відображення $f(x) = ax + b$ (або $\tilde{f}(x) = xa + b$) на \mathbb{H} топологічно спряжене зі своєю лінійною частиною $f_{\text{lin}}(x) = ax$ (або $\tilde{f}_{\text{lin}}(x) = xa$, відповідно) тоді і тільки тоді, коли f має нерухому точку.

Доведення. Аналогічно до доведення леми 2.1. □

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.1 ([4]). Нехай $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $\tilde{f}(x) = xa + b$, $\tilde{g}(x) = xc + d$ – афінні відображення на \mathbb{H} , $a, b, c, d \in \mathbb{H}$. Наступні спряженості:

$$f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} g \Leftrightarrow \tilde{f} \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g} \Leftrightarrow f \stackrel{\mathbb{H}}{\sim} \tilde{g}$$

виконуються тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

- (i) $\|a\|, \|c\| \in (0, 1)$ або
- (ii) $\|a\|, \|c\| \in (1, \infty)$, або
- (iii) $a_1 = c_1$ та $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$, та якщо $a = c = 1$, то $b = d = 0$ або $b \neq 0$ та $d \neq 0$,

де $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$, $c = c_1 + c_2i + c_3j + c_4k \in \mathbb{H}$.

Доведення. Доведемо, що афінні відображення $f(x) = ax + b$ та $g(x) = cx + d$ на \mathbb{H} топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i)-(iii) теореми 4.1. Топологічна спряженість інших афінних відображень з теореми доводиться аналогічно.

Позначимо через

$$n(f) \text{ та } n(g) \text{ – кількість нерухомих точок } f \text{ та } g. \quad (4.14)$$

Зауважимо, що довільне афінне відображення f або не має нерухомих точок, або має тільки одну нерухому точку, або є тотожним відображенням, тобто $n(f)$ дорівнює 0, або 1, або ∞ . Причому довільне афінне відображення $f(x) = ax + b$ на \mathbb{H} не має нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $a = 1$ та $b \neq 0$; має тільки одну нерухому точку тоді і тільки тоді, коли $a \neq 1$; має багато нерухомих точок тоді і тільки тоді, коли $a = 1$ та $b = 0$.

Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1: $n(f) \neq n(g)$. Відображення f та g не топологічно спряжені, бо мають різну кількість нерухомих точок. Доведемо, що умови (i)-(iii) теореми 4.1 також не виконуються. Припустимо, що $n(f) < n(g)$.

Якщо $n(g) = \infty$, то g – тотожне відображення ($c = 1$ та $d = 0$), а $n(f) \in \{0, 1\}$, тобто $f(x) = x + b$ ($a = 1$ та $b \neq 0$) або $f(x) = ax + b$ ($a \neq 1$).

Якщо $n(g) < \infty$. Тоді $n(f) = 0$ та $n(g) = 1$, тобто $f(x) = x + b$ ($a = 1$ та $b \neq 0$) або $f(x) = ax + b$ ($a \neq 1$). Очевидно, що в обох випадках умови (i)-(iii) теореми 4.1 не виконуються.

Випадок 2: $n(f) = n(g) = 0$. Відображення $f(x) = x + b$ та $g(x) = x + d$ ($b \neq 0$ та $d \neq 0$) топологічно спряжені через гомеоморфізм $h(x) = bd^{-1}x$. Умови (i)-(iii) теореми 4.1 теж виконуються, бо $a = c = 1$ та $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Випадок 3: $n(f) = n(g) = 1$. Тобто для відображень $f(x) = ax + b$ та $g(x) = cx + d$ виконується $a \neq 1$ та $c \neq 1$. Згідно леми 4.3, афінні відображення f та g топологічно спряжені з відповідними лінійними відображеннями f_{lin} та g_{lin} . Використовуючи твердження 4.1, відображення f_{lin} та g_{lin} топологічно спряжені тоді і тільки

тоді, коли виконуються умови (i)-(iii) теореми 4.1 (бо $a \neq 1$ та $c \neq 1$).

Випадок 4: $n(f) = n(g) > 1$. Умови теореми виконуються, бо f та g – тотожні відображення і $a = c = 1$ та $b = d = 0$.

□

Розділ 5

Класифікація дробово-лінійних перетворень на $\hat{\mathbb{C}}$ з точністю до топологічної спряженості

Класифікація дробово-лінійних перетворень з точністю до спряженості була дана у роботі [14], де, використовуючи гомоморфізм між множиною дробово-лінійних перетворень та групою $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, був побудований інваріант, в термінах якого було знайдено необхідні та достатні умови спряженості дробово-лінійних перетворень.

У цьому розділі буде дана класифікація дробово-лінійних перетворень з точністю до топологічної спряженості. Використовуючи нерухомі точки дробово-лінійних перетворень, буде встановлено критерій топологічної спряженості таких перетворень, а також дано геометричну ін-

терпетацію отриманого результату. Також будуть встановлені необхідні та достатні умови топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень в термінах матриць з множини $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

5.1 Введення

Дробово-лінійне перетворення

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (5.1)$$

на розширенній комплексній площині $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ також називають *перетворенням Мебіуса* (див. [14]), тому ми будемо використовувати цей термін також.

З пункту 1.5.3 відомо, що існує взаємнооднозначна відповідність між перетвореннями (5.1) та невідродженими комплексними 2×2 матрицями

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

які визначені з точністю до множення на ненульове комплексне число. Зокрема, перетворення (5.1) може бути задане матрицею

$$M_f := \frac{1}{\sqrt{ad - bc}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (5.2)$$

яка визначена з точністю до множення на -1 та має визначник рівний 1.

Композиції дробово-лінійних перетворень f та g відповідає добуток їхніх відповідних матриць, тобто виконується

наступна умова:

$$M_{fg} = M_f M_g. \quad (5.3)$$

Слід матриці A позначатимемо $\text{tr } A$.

Мебіусові перетворення вивчалися у [14, розділи 3 та 4]. Два мебіусових перетворення f та g називають

- *спряженими*, якщо $g = h^{-1}fh$, для деякого мебіусового перетворення h ;
- *топологічно спряженими*, якщо $g = h^{-1}fh$, для деякого гомеоморфізму $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Очевидно, що якщо два мебіусові перетворення спряжені, то вони топологічно спряжені, бо кожне мебіусове перетворення є гомеоморфізмом.

Наступний критерій спряженості легко отримати з теореми 1.3:

нетотожні мебіусові перетворення f та g спряжені тоді і тільки тоді, коли $\text{tr } M_f = \pm \text{tr } M_g$.

Нехай мебіусові перетворення f та g спряжені, тобто виконується рівність $g = h^{-1}fh$, для деякого мебіусового перетворення $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Тоді згідно умови (5.3), для відповідних матриць з множини $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ виконується наступне співвідношення:

$$M_g = \pm M_h^{-1} M_f M_h \quad (5.4)$$

і тому *спряжені мебіусові перетворення задаються подібними матрицями* (див. (1.3)), визначеними з точністю до множення на -1 . Невироджену матрицю M_h в рівності (5.4) завжди можна вибрати такою, щоб M_g була жордановою

формою матриці M_f . Оскільки матриці $M_f, M_g \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$, тобто

$$\det M_f = \det M_g = 1,$$

то M_g має вигляд

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq \pm 1, 0, \quad (5.5)$$

або

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \pm 1. \quad (5.6)$$

Очевидно, що матриця M_g визначена через мебіусове перетворення f з точністю до множення на -1 та з точністю до перестановки діагональних елементів λ та $1/\lambda$ у першій матриці. Таким чином, f спряжене з одним із наступних перетворень:

$$\begin{aligned} z \mapsto \lambda^2 z, \quad \text{або} \quad z \mapsto (1/\lambda^2)z, \\ \text{або} \quad z \mapsto z + 1. \end{aligned}$$

Тобто ми отримали наступні канонічні форми мебіусового перетворення для спряженості [14, §4.3], їх властивості було

вивчено у пункті 1.5.2:

Кожне мюбіусове перетворення спряжене з тільки одним мюбіусовим перетворенням наступного вигляду:

$$m_\mu(z) = \mu z \quad (\mu \neq 0, 1) \quad (5.7)$$

або

$$m_1(z) = z + 1 \quad (\mu := 1),$$

де μ визначене з точністю до заміни на $1/\mu$.

5.2 Додаткові відомості

Нагадаємо, що згідно підрозділу 2.4 (див. (2.10)) для довільної комплексної матриці A існує невідроджена матриця S така, що

$$S^{-1}AS = A_0 \oplus A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty}$$

де всі власні числа λ матриці A_0 (відповідно, A_{01} , A_1 та $A_{1\infty}$) задовольняють умову

$$\lambda = 0 \quad (\text{відповідно, } 0 < |\lambda| < 1, |\lambda| = 1 \text{ та } |\lambda| > 1).$$

Для довільної матриці $A = [a_{ij}]$, ми розглядатимемо матрицю $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$, де \bar{a}_{ij} – комплексно спряжене число до a_{ij} .

Наступна теорема складається з двох частин, де в частині (i) сформульовано твердження 1.1, а частина (ii) доводиться аналогічно до твердження (ii) теореми 2.2(a).

Теорема 5.1. *Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ – лінійні відображення на $V = \mathbb{R}^m$ або \mathbb{C}^m ; нехай матриці $A_0, \dots, A_{1\infty}$*

та $B_0, \dots, B_{1\infty}$ визначені через A та B в умові (2.10).

- (i) Якщо $V = \mathbb{R}^m$, де $m \leq 5$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } B_0, & \quad A_1 \text{ подібна } B_1 \\ \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01}, & \quad \det(A_{01}B_{01}) > 0 \\ \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty}, & \quad \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0. \end{aligned}$$

- (ii) Якщо $V = \mathbb{C}^m$, де $m \leq 2$, то f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} A_0 \text{ подібна } B_0, & \quad A_1 \oplus \bar{A}_1 \text{ подібна } B_1 \oplus \bar{B}_1, \\ \text{size } A_{01} = \text{size } B_{01}, & \quad \text{size } A_{1\infty} = \text{size } B_{1\infty}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Наступний наслідок буде використаний при доведенні наслідку 5.2.

Наслідок 5.1. Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ – нетотожні лінійні відображення на \mathbb{C}^2 , матриці A та B мають визначники рівні 1 та подібні до діагональних матриць. Нехай λ та λ' – власні числа матриць A та B , відповідно. Відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються одна з наступних умов:

$$|\lambda|, |\lambda'| \neq 1, \quad \text{або } \lambda = \lambda', \quad \text{або } \lambda = \bar{\lambda}'.$$

Доведення. Лінійна спряженість відображень означає їхню топологічну спряженість, тому ми можемо припустити, що матриці лінійних відображень $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ задані своїми жордановими формами. Оскільки ми розглядаємо нетотожні лінійні відображення та за умовою матриці A та

B мають визначники рівні 1 та подібні до діагональних матриць, то отримаємо:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \lambda'^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda, \lambda' \neq \pm 1, 0.$$

Для власних чисел цих матриць розглянемо наступні можливі 4 випадки:

Випадок 1: $|\lambda| \neq 1$ та $|\lambda'| \neq 1$. Для матриць A та B , використовуючи позначення (2.10), отримаємо

$$A_{01} \oplus A_{1\infty} = [\lambda] \oplus [\lambda^{-1}],$$

$$B_{01} \oplus B_{1\infty} = [\lambda'] \oplus [\lambda'^{-1}].$$

Згідно теореми 5.1(ii), лінійні відображення f та g топологічно спряжені.

Випадок 2: $|\lambda| = |\lambda'| = 1$. Тоді матриці A та B мають такий вигляд:

$$A_1 \oplus \bar{A}_1 = [\lambda] \oplus [\bar{\lambda}],$$

$$B_1 \oplus \bar{B}_1 = [\lambda'] \oplus [\bar{\lambda}'].$$

Згідно теореми 5.1(ii), лінійні відображення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконуються одна з наступних умов:

$$\lambda = \lambda' \quad \text{або} \quad \lambda = \bar{\lambda}'.$$

Випадок 3: $|\lambda| = 1$ та $|\lambda'| \neq 1$. Тоді матриці A та B мають такий вигляд:

$$A_1 \oplus \bar{A}_1 = [\lambda] \oplus [\bar{\lambda}],$$

$$B_{01} \oplus B_{1\infty} = [\lambda'] \oplus [\lambda'^{-1}].$$

Згідно теореми 5.1(ii), лінійні відображення f та g не топологічно спряжені.

Випадок 4: $|\lambda| \neq 1$ та $|\lambda'| = 1$. Аналогічно до попереднього випадку лінійні відображення f та g не топологічно спряжені.

□

Лема 5.1 ([10]). *Нехай $f(z) = az$ та $g(z) = bz$ – мебіусові перетворення на $\hat{\mathbb{C}}$. Перетворення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

$$|a|, |b| \neq 1, \quad \text{або } a = b, \quad \text{або } a = \bar{b}. \quad (5.9)$$

Доведення. \Leftarrow . Припустимо, що мебіусові перетворення f та g задовольняють умови (5.9).

Якщо для перетворень f та g виконується одна з наступних умов:

$$|a|, |b| < 1, \quad \text{або } |a|, |b| > 1, \quad \text{або } a = b, \quad \text{або } a = \bar{b}, \quad (5.10)$$

то згідно теореми 5.1(ii) лінійні відображення $z \mapsto az$ та $z \mapsto bz$ на \mathbb{C} топологічно спряжені через деякий гомеоморфізм $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, і тому мебіусові перетворення f та g топологічно спряжені через гомеоморфізм $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, визначений наступним чином:

$$h(z) =: \begin{cases} \eta(z), & \text{якщо } z \in \mathbb{C}; \\ \infty, & \text{якщо } z = \infty. \end{cases}$$

Якщо f та g не задовольняють (5.10) (але задовольняють (5.9)), то для чисел виконується одна з наступних умов:

$$|a| < 1 \text{ та } |b| > 1 \quad \text{або} \quad |a| > 1 \text{ та } |b| < 1.$$

Припустимо, що виконуються такі обмеження: $|a| < 1$ та $|b| > 1$. Тоді $|1/b| < 1$ і згідно (5.10), мебіусове перетворення f топологічно спряжене з $g^{-1}(z) = (1/b)z$, яке топологічно спряжене з перетворенням g через гомеоморфізм $z \mapsto 1/z$ на $\hat{\mathbb{C}}$.

\implies . Нехай мебіусові перетворення $f(z) = az$ та $g(z) = bz$ на $\hat{\mathbb{C}}$ топологічно спряжені; тобто існує гомеоморфізм $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ такий, що виконується рівність

$$hg(z) = fh(z), \quad \text{для всіх } z \in \hat{\mathbb{C}}. \quad (5.11)$$

Оскільки гомеоморфізм h відображає всі нерухомі точки відображення g у всі нерухомі точки відображення f , а їхніми нерухомими точками є 0 та ∞ , то можливі наступні два випадки.

Випадок 1: $h(\infty) = \infty$ та $h(0) = 0$. Згідно рівності (5.11), лінійні відображення $z \mapsto az$ та $z \mapsto bz$ на \mathbb{C} (які є обмеженнями мебіусових перетворень f та g на \mathbb{C}) топологічно спряжені через гомеоморфізм, який є обмеженням гомеоморфізму h на \mathbb{C} , і тому з теореми 5.1(ii) випливає, що виконується одна з наступних умов:

$$|a|, |b| < 1, \quad \text{або } |a|, |b| > 1, \quad (5.12)$$

$$\text{або } a = b, \quad \text{або } a = \bar{b}. \quad (5.13)$$

Випадок 2: $h(\infty) = 0$ та $h(0) = \infty$. Мебіусові перетворення вигляду

$$f^{-1}(z) = (1/a)z \quad \text{та} \quad g(z) = bz$$

топологічно спряжені через гомеоморфізм $h_1 := \varphi h$, де $\varphi(z) := 1/z$, а h визначений в умові (5.11). Оскільки

$h_1(\infty) = \infty$, то ми маємо (5.12)–(5.13), де a замінено на $1/a$.

В обох цих випадках a та b задовольняють умови (5.9). \square

5.3 Основні результати

Числа $\mu_1 := \mu$ та $\mu_2 := 1/\mu$ з перетворень (5.7) називають *мультиплікаторами* мебіусового перетворення f . Для нетотожного перетворення f , що має нерухомі точки z_1 та z_2 , пораховані з урахуванням кратності, вони можуть бути пораховані як для довільного раціонального відображення в підрозділі 1.4, тобто наступним чином (див. [37, 38]):

$$\mu_i := \begin{cases} f'(z_i), & \text{якщо } z_i \neq \infty, \\ \lim_{z_i \rightarrow \infty} \frac{1}{f'(z_i)}, & \text{якщо } z_i = \infty, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Основним результатом цього розділу є наступна теорема, в якій сформульовано 3 критерії топологічної спряженості для мебіусових перетворень; критерій (iv) був опублікований в [5].

Теорема 5.2 ([10]). *Нехай $f, g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ – довільні нетотожні мебіусові перетворення; M_f та M_g – матриці, визначені через f та g в (5.2), μ та ν – мультиплікатори перетворень f та g , відповідно. Наступні чотири твердження еквівалентні:*

- (i) f та g топологічно спряжені;
- (ii) $\operatorname{tr} M_f, \operatorname{tr} M_g \notin [-2; 2]$ або $\operatorname{tr} M_f = \pm \operatorname{tr} M_g$ (де $[-2; 2]$ – це множина всіх $a \in \mathbb{R}$, що задовольняють умову $-2 \leq a \leq 2$);

(iii) нехай λ – власне число матриці M_f та λ' – власне число матриці M_g , тоді виконується одна з наступних умов:

$$|\lambda|, |\lambda'| \neq 1, \quad \text{або} \quad \lambda = \pm\lambda', \quad \text{або} \quad \lambda = \pm\bar{\lambda}';$$

(iv) нехай μ – мультиплікатор перетворення f та ν – мультиплікатор перетворення g , тоді виконується одна з наступних умов:

$$|\mu|, |\nu| \neq 1, \quad \text{або} \quad \mu = \nu, \quad \text{або} \quad \mu = \bar{\nu}.$$

Доведення. Позначатимемо через f та g два нетотожні мебіусові перетворення, через λ та λ' – довільні власні числа матриць M_f та M_g , відповідно, та аналогічно до умов (4.14) через

$$n(f) \text{ та } n(g) \text{ – кількість нерухомих точок } f \text{ та } g. \quad (5.14)$$

Зауважимо, що кожне нетотожне мебіусове перетворення має 1 або 2 нерухомі точки.

(i) \iff (iv). Припустимо, що твердження (i) виконується, тобто мебіусові перетворення f та g топологічно спряжені. Оскільки топологічно спряжені відображення мають однакову кількість нерухомих точок, то

$$n(f) = n(g).$$

За умовою теореми f та g – нетотожні мебіусові перетворення, тому можливі два наступних випадки.

Випадок 1: $n(f) = n(g) = 1$. Тоді перетворення f та g є параболічними та згідно (5.7), вони спряжені з $m_1(z) =$

$z + 1$, мультиплікатор якого рівний 1, тобто твердження (iv) виконується.

Випадок 2: $n(f) = n(g) = 2$. Нехай $\mu, \nu \notin \{0, 1\}$ – мультиплікатори f та g , відповідно. Згідно умов (5.7), мебіусові перетворення f та g спряжені з відповідними перетвореннями вигляду

$$m_\mu(z) = \mu z \quad \text{та} \quad m_\nu(z) = \nu z,$$

які мають нерухомі точки 0 та ∞ . Використовуючи лему 5.1 для відображень m_μ та m_ν , отримаємо твердження (iv).

Тобто ми довели (i) \implies (iv). Повторюючи ці міркування в зворотньому порядку, отримаємо (i) \longleftarrow (iv).

(iii) \iff (iv). Згідно умов (5.7) та (5.2), якщо μ – мультиплікатор нетотожного мебіусового перетворення f , то в залежності від кількості нерухомих точок, f спряжене з одним з наступних відображень:

$$m_\mu(z) = \mu z \quad (\mu \neq 0, 1)$$

або

$$m_1(z) = z + 1 \quad (\mu = 1).$$

Оскільки матриці спряжених мебіусових перетворень подібні та визначені з точністю до множення на -1 , то матриця M_f подібна M_{m_μ} , яка в залежності від мебіусового перетворення m_μ , має один з наступних виглядів:

$$M_{m_\mu} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} \end{bmatrix} \quad (\mu \neq 0, 1) \quad (5.15)$$

або

$$M_{m_\mu} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mu \neq 1). \quad (5.16)$$

Отже,

$$\lambda := \sqrt{\mu} \quad \text{або} \quad -\sqrt{\mu}, \quad (\mu \neq 0) \quad (5.17)$$

– власне число матриці M_f . Аналогічно, якщо ν – мультиплікатор мебіусового перетворення g , то

$$\lambda' = \sqrt{\nu} \quad \text{або} \quad -\sqrt{\nu}, \quad (\nu \neq 0)$$

– власне число матриці M_g . Це доводить еквівалентність тверджень (iii) та (iv).

(ii) \iff (iii). Для доведення еквівалентності цих тверджень, доведемо спочатку наступне:

$$|\lambda| = 1 \quad \iff \quad \text{tr } M_f = \pm \text{tr } M_{m_\mu} \in [-2; 2], \quad (5.18)$$

де матриця M_{m_μ} має вигляд (5.15) або (5.16). Рівність $\pm \text{tr } M_f = \text{tr } M_{m_\mu}$ виконується, бо матриці M_f та M_{m_μ} подібні. Необхідність в твердженні (5.18) випливає з наступних міркувань: якщо $|\lambda| = 1$, то згідно вигляду матриць (5.5) та (5.6)

$$\text{tr } M_{m_\mu} = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} \in [-2; 2].$$

Достатність доведемо від супротивного. Якщо $|\lambda| \neq 1$, то виконується $\lambda^{-1} \neq \bar{\lambda}$ тоді, очевидно, що $\text{tr } M_{m_\mu} = \lambda + \lambda^{-1} \notin [-2; 2]$; тобто твердження (5.18) доведено.

Розглянемо три можливі випадки для власних чисел λ та λ' матриць M_f та M_g мебіусових перетворень f та g , відповідно.

Випадок 1: $|\lambda| \neq 1$ та $|\lambda'| \neq 1$. Тоді твердження (iii) виконується. Використовуючи критерій (5.18), твердження

(ii) теж виконується.

Випадок 2: $|\lambda| = 1$ та $|\lambda'| \neq 1$, або $|\lambda| \neq 1$ та $|\lambda'| = 1$. Тоді твердження (ii) та (iii) одночасно не виконуються.

Випадок 3: $|\lambda| = |\lambda'| = 1$. Розглянемо відповідні матриці та їхні власні числа: M_f подібна M_{m_μ} та M_g подібна M_{m_ν} , тому умова $\text{tr } M_f = \pm \text{tr } M_g$ еквівалентна $\text{tr } M_{m_\mu} = \pm \text{tr } M_{m_\nu}$, еквівалентна $\lambda + \lambda^{-1} = \pm(\lambda' + \lambda'^{-1})$, еквівалентна $\lambda + \bar{\lambda} = \pm(\lambda' + \bar{\lambda}')$, еквівалентна $\lambda = \pm\lambda'$ або $\lambda = \pm\bar{\lambda}'$.

□

5.4 Канонічні форми для топологічної спряженості

Нагадаємо типи мебіусових перетворень, що були визначені у пункті 1.5.2: в залежності від вигляду канонічної форми (5.7) довільне нетотожне мебіусове перетворення називають

- *гіперболічним*, якщо воно спряжене з $z \mapsto \mu z$, де $1 \neq \mu \in \mathbb{R}$,
- *локсодромічним*, якщо воно спряжене з $z \mapsto \mu z$, де $\mu \notin \mathbb{R}$ та $|\mu| \neq 1$,
- *еліптичним*, якщо воно спряжене з $z \mapsto \mu z$, де $|\mu| = 1$ та $\mu \neq 1$,
- *параболічним*, якщо воно спряжене з $z \mapsto z + 1$.

Використовуючи еквівалентність умов (i) та (iv) теореми 5.2, ми отримуємо наступне твердження, в якому виписано канонічну форму мебіусового перетворення для топологічної спряженості.

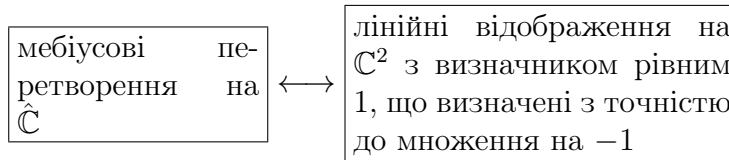
Твердження 5.1 ([10]). (а) Кожне гіперболічне або локсодромічне мобіусове перетворення топологічно спряжене з $z \mapsto 2z$.

(б) Кожне еліптичне мобіусове перетворення топологічно спряжене тільки з одним мобіусовим перетворенням вигляду $z \mapsto \mu z$, де $|\mu| = 1$ та μ визначене з точністю до заміни на його комплексно спряжене $\bar{\mu}$.

(с) Кожне параболічне мобіусове перетворення топологічно спряжене з $z \mapsto z + 1$.

5.5 Мобіусові перетворення та лінійні відображення

Існує взаємооднозначна відповідність



визначена наступним чином: мобіусовому перетворенню f відповідає лінійне відображення $x \mapsto M_f x$ ($x \in \mathbb{C}^2$), що визначене з точністю до множення на -1 . Згідно з наступним наслідком, ця відповідність зберігає топологічну спряженість.

Твердження 5.2 ([10]). Нехай $f, g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ довільні мобіусові перетворення; матриці M_f та M_g визначені через f та g в (5.2). Наступні два твердження еквівалентні:

- (i) f та g топологічно спряжені;
- (ii) лінійне відображення $x \mapsto M_f x$ на \mathbb{C}^2 топологічно спряжене з $x \mapsto M_g x$ або $x \mapsto -M_g x$.

Доведення. Для довільних мебіусових перетворень f та g , в залежності від кількості нерухомих точок, розглянемо чотири можливі випадки. При доведенні будемо використовувати позначення (5.14).

Випадок 1: $n(f) \neq n(g)$. Тобто мебіусові перетворення f та g мають різну кількість нерухомих точок, тому f та g не топологічно спряжені, отже, умова (i) даного твердження не виконується. Доведемо, що твердження (ii) також не виконується. Припустимо, що виконується умова

$$n(f) < n(g).$$

Якщо $n(g) = \infty$, то $n(f) \in \{1, 2\}$, тобто g – тотожне відображення, а f – нетотожне відображення, тому виконуються наступні умови:

$$M_g = \pm I \quad \text{та} \quad M_f \neq \pm I,$$

де I – одинична 2×2 матриця. Згідно теореми 2.2(ii), відповідні лінійні відображення на \mathbb{C}^2 з такими матрицями не топологічно спряжені, тобто твердження (ii) не виконується.

Якщо $n(g) < \infty$, то $n(f) = 1$ та $n(g) = 2$. Тобто мебіусове перетворення f має одну нерухому точку, а g – дві нерухомі точки. Згідно (5.7) та (5.17), перетворення f спряжене з $m_1(z) = z + 1$, а g спряжене з $m_\mu(z) = \lambda^2 z$, де μ – мультиплікатор мебіусового перетворення g , а λ – власне число відповідної матриці M_g . Тому лінійні відображення

$$x \mapsto M_f x, \quad x \mapsto M_g x \quad (5.19)$$

на \mathbb{C}^2 спряжені з відповідними відображеннями вигля-

ду

$$x \mapsto \pm M_{m_1}x, \quad x \mapsto \pm M_{m_\mu}x,$$

де матриці

$$M_{m_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{m_\mu} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0, 1.$$

Покажемо, що такі лінійні відображення мають різну кількість нерухомих точок. Вектор $[0, 0]^T$ – єдина нерухома точка відображення $x \mapsto M_{m_\mu}x$. Всі вектори вигляду $[a, 0]^T$, $a \in \mathbb{C}$ – нерухомі точки відображення $x \mapsto M_{m_1}x$. Оскільки відображення, які мають різну кількість нерухомих точок, не є топологічно спряженими, тому лінійні відображення (5.19) не топологічно спряжені, тобто твердження (ii) не виконується.

Випадок 2: $n(f) = n(g) = 1$. Тобто f та g мають по одній нерухомій точці. Тому згідно умов (5.7), перетворення f та g спряжені з відображенням $z \mapsto z + 1$. Згідно умов (5.6), відповідні матриці M_f та M_g з множини $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ подібні одній з наступних матриць:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тобто M_f подібна M_g або $-M_g$. Тому відображення $x \mapsto M_f x$ лінійно спряжене з одним з таких відображень:

$$x \mapsto M_g x \quad \text{або} \quad x \mapsto -M_g x.$$

Оскільки лінійна спряженість означає топологічну спряженість, то лінійні відображення $x \mapsto M_f x$ та $x \mapsto \pm M_g x$ топологічно спряжені.

Випадок 3: $n(f) = n(g) = 2$. Тобто мебіусові перетворення f та g мають по дві нерухомі точки. Згідно умов (5.7) та (5.17), перетворення f спряжене з $z \mapsto \lambda^2 z$, а перетворення g спряжене з $z \mapsto \lambda'^2 z$, де λ та λ' – власні числа матриць M_f та M_g , відповідно. Жорданові нормальні форми матриць M_f та M_g – це матриці $\pm J_f$ та $\pm J_g$, відповідно, які мають наступний вигляд:

$$J_f := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \notin \{0, \pm 1\}$$

та

$$J_g := \begin{bmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \lambda'^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda' \notin \{0, \pm 1\}.$$

Згідно теореми 5.2(iii), перетворення f та g топологічно спряжені тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

$$|\lambda|, |\lambda'| \neq 1, \quad \text{або} \quad \lambda = \pm \lambda', \quad \text{або} \quad \lambda = \pm \bar{\lambda}',$$

тобто, тоді і тільки тоді, коли (див. наслідок 5.1) лінійні відображення $x \mapsto J_f x$ та $x \mapsto \pm J_g x$ топологічно спряжені, тобто тоді і тільки тоді, коли лінійні відображення $x \mapsto M_f x$ та $x \mapsto \pm M_g x$ топологічно спряжені.

Випадок 4: $n(f) = n(g) > 2$. Твердження (i) та (ii) виконуються, бо f та g – тотожні відображення і для відповідних матриць M_f та M_g виконується наступна умова:

$$M_f = \pm M_g = \pm I,$$

де I – одинична 2×2 матриця.

□

Розділ 6

Класифікація ланцюгів лінійних відображень з точністю до топологічного ізоморфізму

6.1 Введення та основні результати

Ланцюгом лінійних відображень називають систему лінійних відображень A_1, \dots, A_{t-1} вигляду

$$\mathcal{A}: \quad U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \xrightarrow{A_2} U_3 \xrightarrow{A_3} \dots \xrightarrow{A_{t-1}} U_t, \quad (6.1)$$

де кожна лінія – це стрілка \longrightarrow або \longleftarrow . У цьому розділі ми вважатимемо, що всі U_1, \dots, U_t – унітарні (або евклідові) простори. Основні результати цього розділу опубліковано в [41].

Будемо казати, що система бієкцій

$$\varphi := \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i=1}^t$$

перетворює ланцюг \mathcal{A} з (6.1) в ланцюг

$$\mathcal{B} : \quad V_1 \xrightarrow{B_1} V_2 \xrightarrow{B_2} V_3 \xrightarrow{B_3} \dots \xrightarrow{B_{t-1}} V_t \quad (6.2)$$

з однаковою орієнтацією стрілок (ми будемо позначати $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$), якщо всі квадрати в наступній діаграмі:

$$\begin{array}{ccccccccccc} U_1 & \xrightarrow{A_1} & U_2 & \xrightarrow{A_2} & U_3 & \xrightarrow{A_3} & \dots & \xrightarrow{A_{t-2}} & U_{t-1} & \xrightarrow{A_{t-1}} & U_t \\ \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & & & \varphi_{t-1} \downarrow & & \varphi_t \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{B_1} & V_2 & \xrightarrow{B_2} & V_3 & \xrightarrow{B_3} & \dots & \xrightarrow{B_{t-2}} & V_{t-1} & \xrightarrow{B_{t-1}} & V_t \end{array}$$

комутативні; тобто

$$\begin{aligned} B_i \varphi_i &= \varphi_{i+1} A_i, & \text{якщо } A_i : U_i &\rightarrow U_{i+1} \\ \varphi_i A_i &= B_i \varphi_{i+1}, & \text{якщо } A_i : U_i &\leftarrow U_{i+1}. \end{aligned}$$

Означення 6.1. Перетворення $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ називають

- (i) *ізотрією*, якщо кожне $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ – лінійна бієкція, що зберігає скалярний добуток; тобто кожне φ_i – унітарне відображення (або ортогональне відображення, якщо всі простори евклідові);
- (ii) *лінійним ізоморфізмом*, якщо кожне $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ – лінійна бієкція (в цьому визначенні ми забуваємо, що U_i та V_i – метричні простори та розглядаємо їх як лінійні простори);
- (iii) *топологічним ізоморфізмом*, якщо кожне $\varphi_i : U_i \rightarrow$

V_i – гомеоморфізм (в цьому визначенні ми забуваємо, що U_i та V_i – лінійні простори та розглядаємо їх як метричні простори).

Очевидно, що кожна лінійна бієкція унітарних (або евклідових) просторів є гомеоморфізмом, тому

$$\begin{aligned} \text{перетворення } \varphi : \mathcal{A} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \text{ – ізометрія} \\ \implies \varphi &\text{ – лінійний ізоморфізм} \\ \implies \varphi &\text{ – топологічний ізоморфізм.} \end{aligned}$$

Основним результатом цього розділу є наступна теорема, яку ми доведемо у підрозділі 6.4.

Теорема 6.1 ([41]). *Два ланцюги лінійних відображень на унітарних (або евклідових) просторах топологічно ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно ізоморфні.*

6.2 Ізометрія ланцюгів

У цьому підрозділі ми розглядаємо ланцюги лінійних відображень, що мають вигляд (6.1), на *унітарних* просторах. Досить природною є задача класифікації таких ланцюгів з точністю до ізометрії.

На жаль, *проблему класифікації ланцюгів лінійних відображень з точністю до ізометрії* можна вважати безнадійною задачею навіть для випадку $t = 3$ (а отже, і для кожного $t \geq 3$). Бо дана задача містить задачу класифікації довільної системи лінійних відображень на унітарних просторах, яка задана *орієнтовним графом*, вершинами якого є унітарні простори, а стрілками – лінійні відображення (тобто унітарним представленням сагайдака; див. [44]). Це твердження було коротко доведено у [44, підрозділ 2.3]; для

зручності читача ми детальніше доведемо наступну більш слабку теорему.

Теорема 6.2 ([41]). *Проблема класифікації ланцюгів лінійних відображень вигляду*

$$U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \xleftarrow{A_2} U_3, \quad (6.3)$$

де U_1, U_2, U_3 – унітарні простори, з точністю до ізометрії містить проблему класифікації лінійних операторів на унітарних просторах з точністю до унітарної подібності.

Доведення. Будемо казати, що матриці X та Y унітарно подібні, якщо існує унітарна матриця S (тобто $S^{-1} = S^*$, де $S^* = (\bar{S})^T$ – ермітово-спряжена матриця до матриці S) така, що

$$S^{-1}XS = Y.$$

Розглянемо два ланцюги лінійних відображень наступного вигляду:

$$U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \xleftarrow{A_2} U_3 \quad \text{та} \quad V_1 \xrightarrow{B_1} V_2 \xleftarrow{B_2} V_3, \quad (6.4)$$

що задані в деякому ортогональному базисі парою матриць (M, N_X) та (M, N_Y) , де

$$M := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & 3I \end{bmatrix}$$

та

$$N_X := \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \\ I & X \end{bmatrix}, \quad N_Y := \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \\ I & Y \end{bmatrix}$$

та кожен блок в цих матрицях M , N_X та N_Y має розмір $m \times m$.

Достатньо довести наступне твердження:

$$\text{ланцюги (6.4) ізоморфні тоді і тільки тоді,} \quad (6.5) \\ \text{коли матриці } X \text{ та } Y \text{ унітарно подібні.}$$

Дійсно, припустимо, що ми знаємо множину канонічних пар матриць для ланцюгів (6.3). Ми розглянемо ті з них, які зводяться до вигляду (M, N_X) та зведемо їх до цього вигляду. Згідно твердження (6.5), отримані блоки X утворюють множину канонічних матриць для унітарної подібності.

Доведемо (6.5).

“ \implies ” Нехай ланцюги (6.4) ізометричні; тобто існують унітарні матриці S_1, S_2, S_3 такі, що виконуються наступні умови:

$$S_2^{-1}MS_1 = M, \quad S_2^{-1}N_XS_3 = N_Y. \quad (6.6)$$

Згідно першої рівності в (6.6),

$$S_1^*M^*S_2 = M^*, \quad MM^*S_2 = MS_1M^* = S_2MM^*.$$

Тобто

$$MM^* = I_m \oplus 4I_m \oplus 9I_m, \quad S_2 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3,$$

для деяких $m \times m$ матриць C_1, C_2 та C_3 .

Згідно другої рівності в умовах (6.6), для матриць S_2 та N_X виконується рівність $S_2N_Y = N_XS_3$. Прирівнюючи відповідні горизонтальні смуги, ми отримуємо такі співвідношення для матриць:

$$\begin{aligned} [C_1 \ 0] &= [I \ 0] S_3, \\ [C_2 \ C_2] &= [I \ I] S_3, \\ [C_3 \ C_3Y] &= [I \ X] S_3. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Нехай матриця $S_3 = [R_{ij}]_{i,j=1}^2$. Перша рівність в умовах (6.7) означає, що

$$R_{11} = C_1 \quad \text{та} \quad R_{12} = 0.$$

Оскільки S_3 унітарна матриця, то $R_{21} = 0$ і тому виконується умова $S_3 = C_1 \oplus R_{22}$. Друга рівність в (6.7) означає рівність наступних матриць:

$$C_1 = C_2 = R_{22}.$$

Згідно третьої рівності в (6.7), ми отримаємо такі співвідношення:

$$C_3 = C_2 = R_{22} \quad \text{та} \quad C_3 Y = X C_3.$$

З останньої рівності випливає, що матриці X та Y унітарно подібні.

“ \Leftarrow ” Навпаки, якщо матриці X та Y унітарно подібні, тобто виконується рівність

$$C^{-1} X C = Y$$

для деякої унітарної матриці C , то умови (6.6) виконується для матриць

$$S_1 = S_2 = C \oplus C \oplus C \quad \text{та} \quad S_3 = C \oplus C$$

і тому ланцюги (6.4) ізометричні.

Твердження (6.5) доведено. \square

Зауваження 6.1. Якщо $t = 2$, то класифікація ланцюгів лінійних відображень (6.1) з точністю до ізометрії добре відома: існує ортогональний базис в U_1 та U_2 , в якому матриця відображення $A_1 : U_1 \rightarrow U_2$ має діагональний вигляд:

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_r) \oplus 0,$$

де $a_1 \geq \dots \geq a_r > 0$ – дійсні числа, однозначно визначені через A_1 .

6.3 Лінійний ізоморфізм ланцюгів

У цьому підрозділі ми розглянемо ланцюги лінійних відображень

$$\mathcal{A}: U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \xrightarrow{A_2} U_3 \xrightarrow{A_3} \dots \xrightarrow{A_{t-1}} U_t \quad (6.8)$$

на векторних просторах (без скалярного добутку) над *довільним* полем \mathbb{F} . В теоремі 6.3 ми нагадаємо відому класифікацію таких ланцюгів з точністю до лінійного ізоморфізму (див. означення 6.1(ii)). Потім ми зафіксуємо деякі підпростори в U_1, \dots, U_t та в теоремі 6.4 доведемо, що множина розмірностей цих підпросторів – це повна система інваріантів для ланцюгів лінійних відображень з точністю до лінійного ізоморфізму. У підрозділі 6.4 ми доведемо, що ця множина є також повною системою інваріантів для ланцюгів лінійних відображень з точністю до лінійного ізоморфізму, тобто доведемо теорему 6.1.

6.3.1 Класифікація ланцюгів з точністю до лінійного ізоморфізму

Напрямки

$$U_i \rightarrow U_{i+1} \quad \text{або} \quad U_i \leftarrow U_{i+1}$$

усіх лінійних відображень A_i в ланцюзі (6.8) можуть бути задані наступним орієнтованим графом (сагайдаком):

$$G: \quad 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{t-1}} t \quad (6.9)$$

де кожна стрілка α_i має такий самий напрям як і лінійне відображення A_i . (Таким чином, кожен ланцюг лінійних відображень вигляду (6.8) визначає представлення сагайдака (6.9) та лінійний ізоморфізм ланцюгів означає ізоморфізм відповідних представлень; див., наприклад, [28].) Надалі ми писатимемо

$$\mathcal{A}(k) := U_k, \quad k = 1, \dots, t. \quad (6.10)$$

Прямою сумою ланцюгів \mathcal{A} з (6.8) та

$$\mathcal{B}: \quad V_1 \xrightarrow{B_1} V_2 \xrightarrow{B_2} V_3 \xrightarrow{B_3} \dots \xrightarrow{B_{t-1}} V_t$$

що мають однаковий орієнтований граф (6.9) називають наступний ланцюг:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}: \quad U_1 \oplus V_1 \xrightarrow{A_1 \oplus B_1} U_2 \oplus V_2 \xrightarrow{A_2 \oplus B_2} \dots \xrightarrow{A_{t-1} \oplus B_{t-1}} U_t \oplus V_t.$$

Для кожної пари цілих чисел (i, j) таких, що задовольняють умову

$$1 \leq i \leq j \leq t,$$

ми визначимо ланцюг \mathcal{L}_{ij} наступним чином:

$$\mathcal{L}_{ij}: \quad 0 \text{ --- } \dots \text{ --- } 0 \text{ --- } \mathbb{F} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{F} \xrightarrow{\mathbb{1}} \dots \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{F} \text{ --- } 0 \text{ --- } \dots \text{ --- } 0,$$

де “ $\mathbb{1}$ ” – одинична бієкція, простори $\mathbb{F}, \dots, \mathbb{F}$ розміщені в вершинах $i, i+1, \dots, j$ сагайдака (6.9) (поле \mathbb{F} розглядається як одновимірний векторний простір).

Наступна теорема добре відома спеціалістам з теорії представлень сагайдаків; Gabriel [27] класифікував представлення, що мають вигляд (6.9), та всіх інших сагайдаків, які мають скінченну кількість неізоморфних нерозкладних

представлень.

Теорема 6.3. *Кожен ланцюг лінійних відображень \mathcal{A} лінійно ізоморфний прямій сумі ланцюгів вигляду \mathcal{L}_{ij} . Ця пряма сума однозначно визначається через \mathcal{A} з точністю до перестановки доданків.*

Алгоритм побудови канонічної форми ланцюга лінійних відображень над полем \mathbb{C} , що був одержаний в [45, розділ 4], використовує тільки перетворення унітарної еквівалентності матриць, тобто перетворення вигляду

$$M \mapsto S_1 M S_2,$$

де матриці S_1 та S_2 унітарні.

Оскільки лінійний ізоморфізм означає топологічний ізоморфізм, то має місце наступний наслідок.

Наслідок 6.1. *Кожен ланцюг лінійних відображень \mathcal{A} на унітарних (або евклідових) просторах топологічно ізоморфний прямій сумі ланцюгів вигляду \mathcal{L}_{ij} . Ця пряма сума однозначно визначається через \mathcal{A} з точністю до перестановки доданків.*

Нехай \mathcal{A} – довільний ланцюг лінійних відображень, що має вигляд (6.8). У кожному його просторі U_i , $i = 1, \dots, t$, ми визначимо набори підпросторів, що мають наступний вигляд:

$$0 = U_{i0} \subset U_{i1} \subset U_{i2} \subset \dots \subset U_{ii} = U_i, \quad (6.11)$$

за допомогою індукції:

- $0 = U_{i0} \subset U_{i1} = U_i$;

- якщо набір підпросторів (6.11) побудований для $i < t$, то визначимо

$$(U_{i+1,1}, \dots, U_{i+1,i}) := \begin{cases} (A_i U_{i1}, \dots, A_i U_{ii}), & \text{якщо } A_i : U_i \rightarrow U_{i+1}, \\ (\text{Ker } A_i, A_i^{-1} U_{i1}, \dots, A_i^{-1} U_{i,i-1}), & \text{якщо } A_i : U_i \leftarrow U_{i+1}. \end{cases} \quad (6.12)$$

(через $A_i^{-1} U_{ij}$ ми позначаємо прообраз підпростору U_{ij}).

6.3.2 Приклад

Кожен ланцюг лінійних відображень, що має наступний вигляд:

$$\mathcal{A} : U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \xleftarrow{A_2} U_3 \quad (6.13)$$

задається відповідною парою матриць (M_1, M_2) в деякому базисі просторів U_1, U_2, U_3 . Змінюючи базис, ми можемо перетворювати цю пару матриць, використовуючи наступне правило:

$$(M_1, M_2) \mapsto (S_2^{-1} M_1 S_1, S_2^{-1} M_2 S_3), \quad (6.14)$$

де S_1, S_2, S_3 – невідроджені матриці. Зручно задавати таку пару матриць (M_1, M_2) блочною матрицею, що має наступний вигляд:

$$[M_1 | M_2],$$

бо рядки матриць M_1 та M_2 змінюються множенням на одну і ту ж матрицю S_2^{-1} . Згідно умови (6.14), ми можемо змінювати блочну матрицю $[M_1 | M_2]$, використовуючи елементарні перетворення над рядками (однакові елементарні перетворення над рядками матриці M_1 та рядками матриці M_2), та

використовуючи елементарні перетворення над стовпчиками (окремо для кожної з матриць M_1 та M_2).

Використовуючи елементарні перетворення над рядками та стовпчиками, кожна блочна матриця $[M_1|M_2]$ може бути зведена до наступного канонічного вигляду:

$$\boxed{N_1 | N_2} = \begin{array}{cc|cc|c} 0 & I_p & 0 & I_r & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & I_q \\ & & 0 & & 0 \end{array} \quad (6.15)$$

наступним чином (див. [45, розділ 4]). Спочатку, використовуючи елементарні перетворення над рядками і стовпчиками, ми зводимо матрицю M_1 до наступного блочного вигляду:

$$\begin{array}{cc} 0 & I \\ 0 & 0 \end{array} \quad (6.16)$$

та отриману матрицю позначимо через $[N_1|M'_2]$. Розбиття матриці N_1 на дві горизонтальні смуги ми продовжимо на M'_2 та, використовуючи елементарні перетворення над рядками та стовпчиками, ми зведемо другу горизонтальну смугу матриці M'_2 до вигляду (6.16):

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & I_p & M_{11} & M_{12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_q \\ & & 0 & 0 \end{array}$$

Ми зробимо матрицю M_{12} нульовою, використовуючи додавання лінійної комбінації рядків матриці I_q . Потім, використовуючи елементарні перетворення, ми зведемо матрицю M_{11} до вигляду (6.16); ці перетворення можуть "зіпсувати" матрицю I_p , але ми відновимо її, використовуючи елемен-

тарні перетворення над стовпчиками. В результаті, ми отримаємо блочну матрицю, яка має вигляд (6.15).

Розглянемо приклад, в якому ланцюг лінійних відображень (6.13) заданий наступною канонічною блочною матрицею:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
f_1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
f_2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
f_3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
f_4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
f_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
f_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

що має вигляд (6.15) в деяких базисах $\{e_i\}_{i=1}^5$, $\{f_i\}_{i=1}^6$ та $\{g_i\}_{i=1}^5$ просторів U_1 , U_2 та U_3 , відповідно. Тоді, згідно канонічного вигляду блочної матриці, ланцюг \mathcal{A} – це пряма сума 9 ланцюгів, що визначаються дією відображень на базисних векторах наступним чином:

$$\begin{array}{l}
 e_1 \longmapsto 0 \longleftarrow 0 \\
 e_2 \longmapsto 0 \longleftarrow 0 \\
 0 \longmapsto 0 \longleftarrow g_1 \\
 e_3 \longmapsto f_1 \longleftarrow g_2 \\
 e_4 \longmapsto f_2 \longleftarrow g_3 \\
 e_5 \longmapsto f_3 \longleftarrow 0 \\
 0 \longmapsto f_4 \longleftarrow g_4 \\
 0 \longmapsto f_5 \longleftarrow g_5 \\
 0 \longmapsto f_6 \longleftarrow 0
 \end{array}$$

Зауважимо, що для спрощення позначень ми пишемо

$$0 \longmapsto f_i \quad \text{замість} \quad 0 \longmapsto 0.$$

Таким чином, ланцюг лінійних відображень \mathcal{A} лінійно ізоморфний прямій сумі

$$\mathcal{L}_{11} \oplus \mathcal{L}_{11} \oplus \mathcal{L}_{33} \oplus \mathcal{L}_{13} \oplus \mathcal{L}_{13} \oplus \mathcal{L}_{12} \oplus \mathcal{L}_{23} \oplus \mathcal{L}_{23} \oplus \mathcal{L}_{22}.$$

Тобто підпростори U_{ij} , що визначені в умовах (6.11) та (6.12), мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_{10} &= 0, & U_{11} &= U_1; \\ U_{20} &= 0, & U_{21} &= \langle f_1, f_2, f_3 \rangle, & U_{22} &= U_2; \\ U_{30} &= 0, & U_{31} &= \langle g_1 \rangle, & U_{32} &= \langle g_1, g_2, g_3 \rangle, & U_{33} &= U_3; \end{aligned}$$

(через $\langle x, y, \dots, z \rangle$ позначаємо підпростір, породжений x, y, \dots, z).

Зауважимо, що

$$U_{32} = U_{31} \oplus \langle g_2 \rangle \oplus \langle g_3 \rangle, \quad (6.17)$$

де $\langle g_2 \rangle$ та $\langle g_3 \rangle$ – векторні простори ланцюгів, що задані таким чином:

$$e_3 \longmapsto f_1 \longleftarrow g_2 \quad \text{та} \quad e_4 \longmapsto f_2 \longleftarrow g_3$$

6.3.3 Система інваріантів

Теорема 6.4. *Кожен ланцюг лінійних відображень \mathcal{A} повністю визначається з точністю до лінійного ізоморфізму множиною чисел*

$$\{n_{ij}\}_{1 \leq j \leq i \leq t}, \quad \text{де } n_{ij} := \dim U_{ij} \quad (6.18)$$

де підпростори U_{ij} визначені в умові (6.12).

Доведення. Згідно теореми 6.3, ланцюг лінійних відображень \mathcal{A} має наступний канонічний розклад:

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{\ell=1}^s \mathcal{A}_\ell, \quad \mathcal{A}_\ell \simeq \mathcal{L}_{p_\ell q_\ell}, \quad (6.19)$$

де всі доданки визначені з точністю до лінійних ізоморфізмів і перенумерації. Таким чином, ланцюг лінійних відображень \mathcal{A} визначається сім'єю пар $\{(p_\ell, q_\ell)\}_{\ell=1}^s$ з точністю до лінійного ізоморфізму та ця сім'я визначена через \mathcal{A} з точністю до перенумерації (тобто $\{(p_\ell, q_\ell)\}_{\ell=1}^s$ – неупорядкована множина, в якій елементи можуть повторюватися).

З технічних причин ми доведемо наступне твердження, яке є більш сильнішим ніж умови теореми:

- (i) числа $\{n_{ij}\}_{1 \leq j \leq i \leq t}$ однозначно визначає сім'я пар $\{(p_\ell, q_\ell)\}_{\ell=1}^s$ з точністю до перенумерації,
- (ii) існують індекси $\ell(i, j) \in \{1, \dots, s\}$ такі, що кожен простір U_{t1}, \dots, U_{tt} визначений в умові (6.11) можна розкласти в пряму суму

$$U_{ti} = U_{t, i-1} \oplus \mathcal{A}_{\ell(i,1)}(t) \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_{\ell(i, r_i)}(t) \quad (6.20)$$

(див. (6.10); ми вважатимемо, що $r_i := 0$, якщо $U_{t, i-1} = U_{ti}$).¹

- (iii) у всіх ланцюгів $\mathcal{A}_{\ell(i,1)}, \dots, \mathcal{A}_{\ell(i, r_i)}$ перший ненульовий простір розташований в тому ж самому місці, тобто

¹Прикладом такого розкладу є (6.17), де $t = 3$, $i = r_i = 2$, $\mathcal{A}_{\ell(2,1)}(3) = \langle g_2 \rangle$ та $\mathcal{A}_{\ell(2,2)}(3) = \langle g_3 \rangle$,

виконується

$$p_{\ell(i,1)} = \cdots = p_{\ell(i,r_i)} =: a_i,$$

(iv) $a_i \neq a_j$, якщо $i \neq j$.

Для доведення цього твердження ми використаємо індукцію по t . Індукційна база є тривіальною: умови (i)–(iv) цього твердження виконуються для ланцюгів з двома векторними просторами; тобто для

$$U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \quad \text{та} \quad U_1 \xleftarrow{A_1} U_2.$$

Припустимо, що умови (i)–(iv) виконуються для ланцюгів з $t-1$ векторними просторами, зокрема, для обмеження ланцюга лінійних відображень \mathcal{A} на перші $t-1$ простори, тобто для ланцюга

$$\mathcal{A}' : \quad U_1 \xrightarrow{A_1} U_2 \xrightarrow{A_2} U_3 \xrightarrow{A_3} \cdots \xrightarrow{A_{t-2}} U_{t-1}.$$

Ми можемо припустити, що доданки в умові (6.19) занумеровані так, що

$$\max(p_1, \dots, p_{s'}) < t = p_{s'+1} = \cdots = p_s. \quad (6.21)$$

Канонічний розклад ланцюга \mathcal{A}' може бути отриманий з (6.19) наступним чином:

$$\mathcal{A}' := \bigoplus_{\nu=1}^{s'} \mathcal{A}'_{\nu}, \quad \mathcal{A}'_{\nu} \simeq \mathcal{L}_{p_{\nu} q'_{\nu}}$$

$$q'_{\nu} := \min(t-1, q_{\nu}),$$

де s' визначене в умові (6.21) та кожний ланцюг \mathcal{A}'_{ν} – це

обмеження ланцюга \mathcal{A}_ν на перші $t - 1$ векторні простори.

Згідно індукційної гіпотези,

- числа $\{n_{ij}\}_{1 \leq j \leq i \leq t-1}$ однозначно визначає сім'я пар $\{(p_\nu, q'_\nu)\}_{\nu=1}^{s'}$ з точністю до перенумерації,
- існують індекси $\nu(i, j) \in \{1, \dots, s'\}$ такі, що кожен з просторів

$$U_{t-1,1}, \dots, U_{t-1,t-1}$$

розкладається в пряму суму

$$\begin{aligned} U_{t-1,i} &= U_{t-1,i-1} \oplus \mathcal{A}'_{\nu(i,1)}(t-1) \oplus \dots \\ &\quad \oplus \mathcal{A}'_{\nu(i,r'_i)}(t-1) \\ &= U_{t-1,i-1} \oplus \mathcal{A}_{\nu(i,1)}(t-1) \oplus \dots \\ &\quad \oplus \mathcal{A}_{\nu(i,r'_i)}(t-1), \end{aligned} \quad (6.22)$$

- $p_{\nu(i,1)} = \dots = p_{\nu(i,r'_i)} =: b_i$,
- $b_i \neq b_j$, якщо $i \neq j$.

Ми припустимо, що доданки в прямій сумі (6.19) занумеровані так, що виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\nu(i,1)}(t) \neq 0, \dots, \mathcal{A}_{\nu(i,k_i)}(t) \neq 0, \\ \mathcal{A}_{\nu(i,k_i+1)}(t) = \dots = \mathcal{A}_{\nu(i,r'_i)}(t) = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Доведемо умови (i)–(iv). Розглянемо два можливі випадки, які відрізняються напрямком останньої стрілки в орієнтованому графі (6.9).

Випадок 1: $\alpha_{t-1} : (t-1) \longrightarrow t$. Згідно (6.12), підпростори

будуть такими:

$$\begin{aligned} U_{t1} &= A_{t-1}U_{t-1,1}, \\ &\vdots \\ U_{t,t-1} &= A_{t-1}U_{t-1,t-1}, \\ U_{tt} &= U_t. \end{aligned}$$

Згідно умов (6.22), (6.23) та (6.21), ми отримаємо бажаний розклад (6.20) простіру U_{ti} :

$$U_{ti} = \begin{cases} U_{t,i-1} \oplus \mathcal{A}_{\nu(i,1)}(t) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{\nu(i,k_i)}(t), & \text{якщо } i < t, \\ U_{t,t-1} \oplus \mathcal{A}_{s'+1}(t) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_s(t), & \text{якщо } i = t. \end{cases}$$

Випадок 2: $\alpha_{t-1} : (t-1) \leftarrow t$. Згідно (6.12), підпростори будуть такими:

$$\begin{aligned} U_{t1} &= \text{Ker } A_{t-1}, \\ U_{t2} &= A_{t-1}^{-1}U_{t-1,1}, \\ &\vdots \\ U_{tt} &= A_{t-1}^{-1}U_{t-1,t-1} = U_t. \end{aligned}$$

Згідно (6.21), (6.22) та (6.23), ми отримаємо бажаний розклад (6.20) простору U_{ti} :

$$U_{ti} = \begin{cases} \mathcal{A}_{s'+1}(t) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_s(t), & \text{якщо } i = 1, \\ U_{t,i-1} \oplus \mathcal{A}_{\nu(i-1,1)}(t) \oplus \cdots \\ \oplus \mathcal{A}_{\nu(i-1,k_{i-1})}(t), & \text{якщо } i > 1. \end{cases}$$

В обох випадках сім'я пар $\{(p_\nu, q_\nu)\}_{\nu=1}^s$ (яка визначена з точністю до перенумерації) може бути отримана з $\{(p_\nu, q'_\nu)\}_{\nu=1}^{s'}$ заміною k_i пар $(a_i, t-1)$ парами (a_i, t) для ко-

жного $i = 1, \dots, t - 1$ та приєднанням $k_t := s - s'$ пар (t, t) . Це доводить твердження (i), бо k_1, \dots, k_t виражаються через n_{ij} наступним чином:

$$k_i = \dim U_{ti} - \dim U_{t,i-1} = n_{ti} - n_{t,i-1},$$

де $i = 1, \dots, t$ (ми вважаємо, що $n_{t0} := 0$).

Твердження (ii)–(iv) випливають з індукційної гіпотези і вже розглянутих випадків 1 та 2. \square

6.4 Топологічний ізоморфізм ланцюгів

У цьому підрозділі ми доведемо теорему 6.1.

Нехай $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ – топологічний ізоморфізм ланцюгів лінійних відображень (6.1) та (6.2). Згідно теореми 6.4 достатньо довести, що їхні множини (6.18) співпадають; тобто

$$\dim U_{ij} = \dim V_{ij}, \quad \text{для всіх } i, j,$$

де U_{ij} – векторні підпростори U_i , що були побудовані в умові (6.12), та V_{ij} – векторні підпростори V_i , що аналогічно будуються для ланцюга \mathcal{B} . Згідно означення 6.1(iii), топологічний ізоморфізм $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ складається з гомеоморфізмів

$$\varphi_i : U_i \rightarrow V_i.$$

Достатньо показати, що кожен гомеоморфізм φ_i відображає U_{ij} на V_{ij} , бо тоді кожний підпростір U_{ij} є гомеоморфним V_{ij} , а згідно [34], всі гомеоморфні векторні простори мають однакову розмірність. Тобто достатньо довести наступну лему.

Лема 6.1. Якщо $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ – топологічний ізоморфізм ланцюгів лінійних відображень (6.1) та (6.2), то

$$\varphi_i U_{ij} = V_{ij}, \quad (6.24)$$

для всіх $i = 1, \dots, t$ та $j = 1, \dots, i$.

Доведення. Для доведення леми використаємо метод математичної індукції.

- Умова (6.24) виконується для $i = 1$, бо $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ – бієкція.
- Припустимо, що умова (6.24) виконується для $i = k$ (та для всіх $j = 1, \dots, k$).
- Доведемо, що умова (6.24) виконується для $i = k + 1$. Достатньо довести, що виконується наступне вкладення:

$$\varphi_{k+1} U_{k+1,j} \subset V_{k+1,j}, \quad (6.25)$$

для всіх $j = 1, \dots, k + 1$, бо тоді ми зможемо використати умову (6.25) для ізоморфізму $\varphi^{-1} : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ замість φ , та отримаємо, що виконується

$$\varphi_{k+1}^{-1} V_{k+1,j} \subset U_{k+1,j}$$

для всіх $j = 1, \dots, k + 1$, тобто

$$\varphi_{k+1} U_{k+1,j} \supset V_{k+1,j}.$$

У випадку відображення $A_k : U_k \rightarrow U_{k+1}$ вкладення (6.25) виконується, бо якщо $y \in U_{k+1,j}$ та $x \in A_k^{-1}y \subset U_k$

U_{kj} , то мають місце наступні діаграми:

$$\begin{array}{ccc}
 U_{kj} & \xrightarrow[\text{on}]{A_k} & U_{k+1,j} \\
 \varphi_k \downarrow & \text{biect} & \varphi_{k+1} \downarrow \\
 V_{kj} & \xrightarrow{B_k} & V_{k+1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\quad} & y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \varphi_k x & \xrightarrow{\quad} & B_k \varphi_k x
 \end{array}$$

Тому

$$\varphi_{k+1}y = B_k \varphi_k x \in B_k V_{kj} = V_{k+1,j}.$$

У випадку відображення $A_k : U_k \leftarrow U_{k+1}$ вкладення (6.25) виконується, бо якщо $y \in U_{k+1,j}$, то мають місце наступні комутативні діаграми:

$$\begin{array}{ccc}
 U_{kj} & \xleftarrow{A_k} & U_{k+1,j} \\
 \varphi_k \downarrow & & \varphi_{k+1} \downarrow \\
 V_k & \xleftarrow{B_k} & V_{k+1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A_k y & \xleftarrow{\quad} & y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \varphi_k A_k y & \xleftarrow{\quad} & \varphi_{k+1} y
 \end{array}$$

Тому $\varphi_k A_k y \in V_{kj}$ і виконується $\varphi_{k+1}y \in V_{k+1,j}$.

□

Література

- [1] Л. Альфорс, Преобразования Мебиуса в многомерном пространстве; [пер. с англ. Н. А. Гусевский]. – М.: Мир, 1986.
- [2] М. Берже, Геометрия. Т.1; [пер. с франц. Ю. Н. Сударева]. – М.: Мир, 1984.
- [3] Т. В. Будницька, Класифікація топологічно спряжених афінних відображень, Укр. мат. журн. 61 (№ 4) (2009) 134–139.
- [4] Т. В. Будницька, Топологічна класифікація афінних відображень, що діють з \mathbb{H} в \mathbb{H} , Мат. студії. 31 (№ 2) (2009) 157–164.
- [5] Т. В. Будницька, Топологічна класифікація дробово-лінійних перетворень, Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 6 (№ 2) (2009) 349–358.
- [6] В. Ефремович, Топологическая классификация аффинных отображений на плоскости, Мат. Сбор. 42 (№ 1) (1935) 23–36.
- [7] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973.
- [8] Ж. Палис, В. ди Мелу, Геометрическая теория динамических систем. Введение; [пер. с англ. В. Н. Колокольцов]. – М.: Мир, 1986.
- [9] Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский, Введение в теорию функциональных уравнений. – К.: Наукова думка, 1974.

- [10] Т. В. Рыбалкина, В. В. Сергейчук, Топологическая классификация преобразований Мебиуса, *Фундаментальная и прикладная математика*. 17 (№ 6) (2011/2012) 175-183.
- [11] Д. Я. Стройк, *Краткий очерк истории математики*. – М.: Наука, 1969.
- [12] Р. Форд, *Автоморфные функции*; [пер. с англ. М. М. Гринблума и В. С. Рабинович] – М.-Л.: ГРОЛИН, 1936.
- [13] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*. Ч.1. – М.: Наука, 1976.
- [14] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*. – New York: Springer Verlag, 1983.
- [15] J. Blanc, Conjugacy classes of affine automorphisms of \mathbb{K}^n and linear automorphisms of \mathbb{P}^n in the Cremona groups, *Manuscripta Math.* 119 (no. 2) (2006) 225–241.
- [16] Yu. Bodnarchuk, Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner, *Journal of Pure and Applied Algebra*. 157 (2001) 115–119.
- [17] T. V. Budnitska, Topological classification of affine operators on unitary and Euclidean spaces, *Linear Algebra Appl.* 434 (2011) 582–592.
- [18] T. Budnitska, N. Budnitska, Classification of affine operators up to biregular conjugacy, *Linear Algebra Appl.* 434 (2011) 1195–1199.
- [19] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, Linear algebra and topology, *Bull. Amer. Math. Soc., New Series* 1 (no. 4) (1979) 685–687.
- [20] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, Nonlinear similarity of matrices, *Bull. Amer. Math. Soc., New Series* 1 (no. 6) (1979) 899–902.
- [21] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, Non-linear similarity, *Ann. of Math.* 113 (no. 2) (1981) 315–355.
- [22] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, Nonlinear similarity and differentiability, *Comm. Pure Appl. Math.* 38 (no. 6) (1985) 697–706.

- [23] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, Non-linear similarity and linear similarity are equivariant below dimension 6, *Contemp. Math.* 231 (1999) 59–66.
- [24] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, M. Steinberger, J. E. West, Nonlinear similarity begins in dimension six, *Amer. J. Math.* 111 (1989) 717–752.
- [25] G. de Rham, Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister, *Internat. Conf. of Topology., Recueil Math., Moscow.* 1 (no. 43) (1936) 737–743.
- [26] G. de Rham, Reidemeister’s torsion invariant and rotation of S^n , *Internat. Conf. on Different. Anal., Oxford Univ. Press., Cambridge.* (1964) 27–36.
- [27] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.* 6 (1972) 71–103.
- [28] P. Gabriel, A. V. Roiter, Representations of finite-dimensional algebras, *Encyclopaedia of Math. Sci., Vol 73 (Algebra VIII).* – New York: Springer-Verlag, 1992.
- [29] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices, Vol. 1.* – Providence: AMS Chelsea Publishing, 1998.
- [30] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52.* – New York: Springer-Verlag, 1997.
- [31] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [32] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- [33] W. C. Hsiang, W. Pardon, When are topologically equivalent orthogonal transformations linearly equivalent, *Invent. Math.* 68 (no. 2) (1982) 275–316.
- [34] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory.* – Princeton: Princeton University Press, 1941.
- [35] N. H. Kuiper, J. W. Robbin, Topological classification of linear endomorphisms, *Invent. Math.* 19 (no. 2) (1973) 83–106.

- [36] I. Madsen, M. Rothenberg, Classifying G spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.*, New Series 7 (no. 1) (1982) 223–226.
- [37] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures, SUNY Story Brook IMS preprint 1990/5.
- [38] J. Milnor, On rational maps with two critical points, *Experim. Math.* 9 (no. 4) (2000) 481–522.
- [39] P. J. Olver, *Classical invariant theory*. – London: London Math. Soc., 1999.
- [40] H. Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Oeuvres de H. Poincaré 1*. – Paris: Gauthier Villars, 1928.
- [41] T. V. Rybalkina, V. V. Sergeichuk, Topological classification of chains of linear mappings, *Linear Algebra Appl.* 437 (2012) 860–869.
- [42] J. W. Robbin, Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78 (1972) 923–952.
- [43] R. Schultz, On the topological classification of linear representations, *Topology* 16 (1977) 263–269.
- [44] V. V. Sergeichuk, Unitary and Euclidean representations of a quiver, *Linear Algebra Appl.* 278 (1998) 37–62.
- [45] V. V. Sergeichuk, Computation of canonical matrices for chains and cycles of linear mappings, *Linear Algebra Appl.* 376 (2004) 235–263.

Перелік умовних позначень

\mathbb{R}^n	n -вимірний простір дійсних чисел
\mathbb{C}^n	n -вимірний простір комплексних чисел
$\hat{\mathbb{C}}$	розширена комплексна площина
\mathbb{H}	тіло кватерніонів
\mathcal{R}_A	дійсна жорданова форма матриці A
$\mathcal{R}_k(\lambda)$	дійсний жордановий блок розміру $k \times k$, що відповідає власному числу λ
J_A	жорданова форма матриці A
$J_k(\lambda)$	жордановий блок розміру $k \times k$, що відповідає власному числу λ
$\text{GL}(n, \mathbb{F})$	сукупність невироджених $n \times n$ матриць, заданих над \mathbb{F}
$\text{SL}(n, \mathbb{F})$	сукупність $n \times n$ матриць, заданих над \mathbb{F} , визначник яких рівний 1
$W^\alpha(f)$	f -інваріантний векторний підпростір \mathbb{R}^n
f_α	обмеження відображення f на підпростір $W^\alpha(f)$
$\dim(f_\alpha)$	розмірність $W^\alpha(f)$
$o(f)$	знак визначника матриці, що відповідає бієктивному лінійному відображенню f
A_0	матриця, у якій всі власні числа дорівнюють 0

A_{01}	матриця, у якої модулі всіх власних чисел належать проміжку $(0; 1)$
A_1	матриця, у якої модулі всіх власних чисел дорівнюють 1
$A_{1\infty}$	матриця, у якої модулі всіх власних чисел належать проміжку $(1; \infty)$
A_*	невироджена матриця
A^*	ермітово-спряжена матриця до матриці A
\overline{A}	матриця утворена заміною елементів матриці A на комплексно спряжені
$A^{\mathbb{R}}$	матриця утворена заміною елементів матриці A на відповідні дійсні жорданові 2×2 блоки
(A, b)	афінне відображення $x \mapsto Ax + b$
$f \overset{\mathbb{F}}{\sim} g$	відображення f та g топологічно спряжені над \mathbb{F}
$f \sim g$	відображення f та g бірегулярно спряжені

Наукове видання

Т. В. Рибалкіна
Топологічна класифікація
афінних відображень

Текст подано в авторській редакції

Підписано до друку 28.12.2012. Формат 60×84.16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз.-друк. арк. 9,6. Умов. друк. арк. 8,9. Тираж 300 пр. Зам. 140.

Інститут математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3